Дополнительные главы функционального анализа

§ 1. Основные определения

1^0. **Гильбертовы пространства.** *Гильбертово пространство* $\mathscr{H}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ – это линейное пространство со скалярным произведением (x, y), которое является полным. То есть, для любой фундаментальной последовательности (последовательности Коши) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ из $\mathscr{H}$ ($\|x_n - x_m\| \to 0$ при $m, n \to \infty$) существует $x \in H$, такой, что $x_n \to x$ ($\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$).

Примеры.

(а) $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$ (норма $\|x\| = (x, x)^{1/2}$). По определению $\mathbb{C}^0 = \{0\}$ – нульмерное пространство.

(б) $\ell_2 = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{1/2} = \|x\| < \infty\}$. Скалярное произведение в этом пространстве задается аналогичной формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$.

Задача 1. Доказать полноту пространства ℓ_2.

(в) $L_2(\Omega) = \{\Psi(x_1, \dots, x_n) : \iint\limits_{\Omega} |\Psi(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n)^{1/2} = \|\Psi\| < \infty\}$,

где Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ задается формулой $(\Psi, \Phi) = \iint\limits_{\Omega} \Psi(x_1, \dots, x_n)\overline{\Phi(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n$. В случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ (а также $n = 3$) это пространство играет важную роль в квантовой механике.

Примеры (а) и (б) дают полный список сепарабельных гильбертовых пространств (с точностью до изоморфизма), так как имеет место следующая теорема:

Теорема Рисса-Фишера. *Любое сепарабельное*[1] *гильбертово пространство линейно изометрично либо* $\mathbb{C}^n$ (*если оно конечномерно*), *либо* ℓ_2 (*если его размерность бесконечна*).

(Доказательство этой теоремы было в основном курсе функционального анализа). В частности $L_2(\Omega)$ тоже изоморфно ℓ_2. Нас в основном будут интересовать свойства пространств и операторов, которые не зависят от реализации, хотя в квантовой механике наибольший интерес представляет конкретная реализация $L_2(\mathbb{R}^n)$, имеющая определенный физический смысл (например, n — это число степеней свободы квантовой системы).

2^0. **Линейные операторы.** Пусть $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ — два гильбертовых пространства. Отображение $A : \mathscr{H}_1 \longrightarrow \mathscr{H}_2$, удовлетворяющее условию $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathscr{H}_1$) называется линейным оператором. Для линейных операторов вводятся операции сложения $(A + B)x = Ax + Bx$ и умножения на скаляры $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$. То есть, линейные операторы тоже образуют линейное пространство. Далее мы будем считать, что $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2 = \mathscr{H}$. В этом случае можно ввести операцию композиции (умножения) операторов по формуле $(AB)x = A(Bx)$, для которой имеют место следующие свойства:

1) $(AB)C = A(BC)$ ассоциативность

[1] Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ называется сеперебельным, если в нем существует счетное плотное подмножество. Далее будут рассматриваться только сепарабельные гильбертовы пространства.

2) $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$ дистрибутивность
3) $AI = IA = A$, где I — единичный оператор ($Ix = x$ для всех $x \in \mathscr{H}$)
4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Это аксиомы *ассоциативной алгебры*, т.е. пространство всех линейных операторов $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ является ассоциативной алгеброй.

3^0. **Норма операторов.** Число $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ называется нормой оператора A. Если $\|A\| < \infty$, то говорят, что A ограничен, или имеет конечную норму. Пространство всех ограниченных линейных операторов на $\mathscr{H}$ обозначается через $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Свойства нормы:

$1_{\|}$) $\|I\| = 1$
$2_{\|}$) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ $(\alpha \in \mathbb{C})$
$3_{\|}$) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ неравенства треугольника
$4_{\|}$) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ мультипликативное неравенство
$5_{\|}$) свойство полноты, любая последовательность Коши $A_n \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (т.е. $\|A_n - A_m\| \to 0$ при $n \to \infty$) сходится к некоторому оператору $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (т.е. $\|A_n - A\| \to 0$).

(Свойство полноты и все остальные свойства доказаны в основном курсе.) Полное нормированное линейное пространство наделенное операцией умножения, удовлетворяющей аксиомам 1) – 4), $1_{\|}$) – $5_{\|}$) называется *банаховой алгеброй.* То есть, $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ является банаховой алгеброй.

4^0. **Эрмитово сопряжение (инволюция).** Пусть $(Ax, y) = (x, A^*y)$ для всех $x, y \in \mathscr{H}$. В этом случае говорят, что оператор A^* является эрмитово сопряженным к линейному оператору A. Если $\|A\| < \infty$, то сопряженный оператор существует, является линейным и ограниченным (доказано в основном курсе). Символ * называется операцией эрмитова сопряжение, или инволюцией. Свойства операции *:

1^*) $A^{**} = (A^*)^* = A$
2^*) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A + \overline{\beta} B^*$ антилинейность
3^*) $(AB)^* = B^* A^*$
4^*) $\|A\|^2 = \|A^* A\|$.

Банахова алгебра, наделенная операцией инволюции *, удовлетворяющей аксиомам 1^*) – 4^*), называется *C^*-алгеброй.* То есть $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ — C^*-алгебра. Понятие C^*-алгебры является наиболее удачным, так как оно дает полную аксиоматическую характеризацию алгебры линейных ограниченных операторов. Имеет место следующая фундаментальная теорема:

Теорема Гельфанда-Наймарка. *Любая C^*-алгебра изоморфна некоторой подалгебре алгебры ограниченных операторов, действующих в подходящем гильбертовом пространстве.*

Пример банаховой алгеры, не являющейся C^*-алгеброй: Рассмотрим в лебеговом пространстве $L_1(\mathbb{R})$ в качестве операции умножения операцию свертки $(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds$, а в качестве инволюции операцию обычного комплексного сопряжения. Тогда $L_1(\mathbb{R})$, наделенное такими операциями, является коммутативной банаховой алгеброй (без единицы), но не является C^*-алгеброй (несмотря на то, что в $L_1(\mathbb{R})$ справедливо равенство $\|f\|_1 = \|\overline{f}\|_1$, равенство $\|f\|_1^2 = \|\overline{f} * f\|_1$ может нарушаться).

Задача 2. Пользуясь только аксиомами C^*-алгебры $1_{\|}) - 5_{\|})$, $1^*) - 4^*)$ докажите, что $\|A^*\| = \|A\|$ и $\|AA^*\| = \|A^*A\|$.

5^0. **Типы сходимостей линейных операторов.**

Введем для операторов несколько новых типов сходимостей, которые будут далее применяться.

(а) Сходимость по норме (равномерная сходимость). последовательность операторов A_n сходится к A *по норме*, если $\|A_n - A\| \to 0$ (рассматривалась подробно в основном курсе).

(б) Сильная сходимость. Говорят, что последовательность линейных операторов A_n *сильно сходится* к A (обозначается $A_n \xrightarrow{\text{s}} A$, или $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$), если $A_n x \to Ax$ для всех $x \in \mathscr{H}$.

(в) Слабая сходимость. Говорят, что последовательность линейных операторов A_n *слабо сходится* к A (обозначается $A_n \xrightarrow{\text{w}} A$, или $\text{w-}\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$), если $(A_n x, y) \to (Ax, y)$ для всех $x, y \in \mathscr{H}$.

Лемма 1. (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в).

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Для любого $x \in \mathscr{H}$ имеют место оценки $\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \le \|A_n - A\|\|x\| \to 0$ в силу того, что $\|A_n - A\| \to 0$.

(б) $\Rightarrow$ (в). Пусть $x, y \in H$. Тогда $|(A_n x, y) - (Ax, y)| = |((A_n - A)x, y)| \le \|(A_n - A)x\|\|y\| \to 0$, так как $\|(A_n - A)x\| \to 0$ по условию (б). Лемма доказана.

Контрпримеры. Пусть $\dim \mathscr{H} = \infty$ и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$– ортонормированный базис в $\mathscr{H}$.

(б) $\not\Rightarrow$ (а). Для $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + \dots$ полагаем $P_n x = x_n e_n$, то есть, P_n это проектор на орт e_n. Тогда $\|P_n x\| = |x_n|\|e_n\| = |x_n| \to 0$, потому, что в силу равенства Парсеваля, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2$ сходится. То есть, $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$. С другой стороны, $1 \ge \|P_n\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|P_n x\|}{\|x\|} \ge \dfrac{\|P_n e_n\|}{\|e_n\|} \ge 1$. Поэтому $\|P_n\| = 1$ для всех n и $P_n \not\longrightarrow 0$ по норме.

Задача 3. Построить аналогичный пример, показывающий, что (в) $\not\Rightarrow$ (б). То есть, показать, что существует последовательность операторов $A_n \xrightarrow{\text{w}} 0$, но $A_n \overset{\text{s}}{\not\longrightarrow} 0$.

Если $\dim \mathscr{H} < \infty$, т.е. $\mathscr{H} \approx \mathbb{C}^m$, то (в) $\Rightarrow$ (а) и все типы сходимостей (а), (б), (в) равносильны друг другу. Докажем это. Обозначим $B_n = A_n - A$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим матрицы $(b_{k,l}^{(n)})_{k,l=1}^m$ операторов B_n в базисе $\{e_k\}_{k=1}^m$. $b_{k,l}^{(n)} = (B_n e_l, e_k) \to 0$ в силу слабой сходимости операторов B_n к нулю. Оценим квадраты нормы $\|B_n x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^m \left| \sum\limits_{l=1}^m b_{k,l}^{(n)} x_l \right|^2 \le \sum\limits_{k=1}^m \left(\sum\limits_{l=1}^m |b_{kl}^{(n)}|^2 \sum\limits_{l=1}^m |x_l|^2 \right) = \|x\|^2 \sum\limits_{k,l=1}^m |b_{k,l}^{(n)}|^2$. То есть, $\|B_n\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|B_n x\|^2 \le \sum\limits_{k,l=1}^m |b_{k,l}^{(n)}|^2 \to 0$ как конечная сумма сходящихся к нулю последовательностей $|b_{k,l}^{(n)}|^2$ при $n \to \infty$.

6^0. **Операторы и матрицы.** В конечномерном пространстве любой линейный оператор представляется (в фиксированном базисе) матрицей.

Пусть $\dim \mathscr{H} = \infty$. По теореме Рисса-Фишера $\mathscr{H}$ изоморфно пространству ℓ_2. Для установления такого изоморфизма фиксируем в $\mathscr{H}$ ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Вектор $x \in \mathscr{H}$ разложим по этому базису $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n + \ldots$. Изоморфизм состоит в том, что каждому вектору $x \in \mathscr{H}$ взаимно однозначно сопоставляется вектор-столбец его координат:

$$x \longleftrightarrow [x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

При этом, в силу равенства Парсеваля, $\|x\| = \|[x]\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{1/2}$. Пусть $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Рассмотрим образ $y = Ax = A\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k A e_k$ (последнее равенство законно, так как оператор A ограничен, следовательно, он непрерывен). Тогда для координат вектора y получим равенство $y_n = (y, e_n) = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k A e_k, e_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k (Ae_k, e_n) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k$, где мы обозначили $a_{n,k} = (Ae_k, e_n)$ $(k, n \in \mathbb{N})$. Бесконечную матрицу (матрицу с бесконечным числом строк и столбцов) $[A] = (a_{n,k})_{n=1,k=1}^{\infty,\infty}$ будем называть *матрицей оператора A в базисе* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. В силу вышеизложенного, мы получили матричное равенство

$$[y] = [Ax] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = [A][x].$$

То есть, любой ограниченный оператор в фиксированном базисе представляется бесконечной матрицей. По аналогии с конечномерным случаем, легко заметить также, что $[A^*] = [A]^* = \overline{[A]}^{\,t}$ (комплесное сопряжение и транспонирование матрицы $[A]$). Обратное не верно, в случае $\dim \mathscr{H} = \infty$, не всякая бесконечная матрица может быть матрицей некоторого линейного оператора.

Пример 1. Пусть все элементы матрицы A_1 состоят из одних единиц, то есть

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Во-первых, не на любой вектор-столбец $[x] \in \ell_2$ можно действовать такой матрицей; можно действовать только на вектор $[x]$, для которого ряд из координат $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = \alpha$ сходится. Во-вторых, в случае сходимости этого ряда, все координаты вектора $A_1[x]$ будут равны α. В этом случае, если $\alpha \neq 0$, то $\|A_1[x]\|_2 = \infty$. Если бы существовал линейный оператор A, матрица которого в некотором базисе равна A_1, то его область определения $\operatorname{dom} A$ должна состоять только из нулевого вектора. Получили противоречие. То есть, таких операторов не существует.

Пример 2. Рассмотрим матрицу

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Определим оператор A на базисных векторах e_n формулой $Ae_n = ne_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и продолжим его по линеиности на все конечные линейные комбинации базисных векторов. Получим линейный оператор, матрица которого $[A]$ совпадает с A_2, а норма $\|A\|$ равна бесконечности. Он определен не на всем пространстве $\mathscr{H}$, а только на плотном подпространстве финитных векторов (имеющих только конечное число ненулевых координат). Далее мы увидим, что любой неограниченный симметричный (в частности, самосопряженный) линейный оператор представляется бесконечной эрмитовой матрицей.

Сформулируем критерий того, что данная матрица $[A]$ является матрицей некоторого ограниченного линейного оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Лемма 2. *Для того, чтобы $[A]$ была матрицей некоторого оператора A из $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий*:

(а) *все строки матрицы $[A]$ принадлежат ℓ_2*;

(б) *для любого $[x] \in \ell_2$ вектор $[A][x]$ принадлежит ℓ_2 (отсюда следует, в частности, что все столбцы матрицы $[A]$ тоже принадлежат ℓ_2)*;

(в) *матричная норма* $\|[A]\| = \sup\limits_{\|[x]\| \neq 0} \dfrac{\|[A][x]\|}{\|[x]\|}$ *конечна.*

Этот критерий (особенно пункт (в)) трудно проверяем на практике. Приведем один простой достаточный признак того, что заданная матрица B является матрицей некоторого ограниченного линейного оператора.

Лемма 3. *Пусть норма Гильберта-Шмидта $\|B\|_2 = (\sum_{k,l=1}^{\infty} |b_{k,l}|^2)^{1/2}$ матрицы B конечна. Тогда существует линейный оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, такой, что его матрица $[A]$ (в некотором ортонормированном базисе) совпадает с матрицей B, при этом $\|A\| \leq \|B\|_2$.*

Мы уделили подробное внимание матричному представлению операторов потому, что этот вопрос представляет определенный интерес для физиков. В 20-е годы прошлого столетия некоторое время даже существовало два различных подхода, описывающих строение атома. Один из этих подходов назывался "матричной квантовой механикой", а другой — "волновой механикой". Позднее эти два подхода были объединены П. Дираком в одну теорию. Матричный подход к квантовой механике изложен в небольшой книжке: *Х. Грин*, Матричная квантовая механика. М.: Мир, 1968.

Задача 4. Докажите лемму Шура (известную в теории представлений групп): Если оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ коммутирует со всеми операторами $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (т.е. коммутатор $[A, B] = AB - BA = 0$), то $A = \alpha I$ при некотором $\alpha \in \mathbb{C}$.

7^0. **Операторные ряды.** Рассмотрим последовательность операторов $A_n \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $n \geq 0$. Говорим, что операторный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится по норме, если имеет предел по норме последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$. Если S есть предел этих сумм, то пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n = S$.

Признак Вейештрасса. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|A_n\| < \infty$, *то операторный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *сходится.* В этом случае будем говорить, что такой ряд *сходится абсолютно.*

Признак Вейерштрасса был доказан в основном курсе.

Теорема Мёртенса. *Если два операторных ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n = S$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n = T$ *абсолютно сходятся и* $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k B_{n-k}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n$ *абсолютно сходится к оператору* ST.

Доказательство. Оценим сумму норм

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|C_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|\sum_{k=1}^{n} A_k B_{n-k}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \|A_k\|\|B_{n-k}\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \|B_l\| < \infty.$$

Последнее равенство следует из теоремы Мёртенса о перемножении числовых рядов. Следовательно, операторный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n$ абсолютно сходится к некоторому оператору $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Пусть $U_N = \sum\limits_{n=0}^{N} C_n$ — частичные суммы этого ряда, $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N} A_k$ — частичные суммы первого ряда и $T_N = \sum\limits_{l=0}^{N} B_l$ — частичные суммы второго ряда. Оценим норму разности

$$\|U_{2N} - S_N T_N\| = \left\| \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k} \right) - \left(\sum_{k=0}^{N} A_k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{N} B_l \right) \right\| =$$

$$\Big\| \sum_{k+l \leq 2N} A_k B_l - \sum_{k,l=1}^{N} A_k B_l \Big\|.$$

В последнем выражении все слагаемые $A_k B_l$ $(0 \leq k, l \leq N)$ второй суммы сократятся с такими же слагаемыми из первой суммы. Останутся только слагаемые $A_k B_l$ из первой суммы, у которых либо $k > N$, либо $l > N$. С учетом $k + l \leq 2N$, получим оценку

$$\|U_{2N} - S_N T_N\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{l=0}^{2N-k} A_k B_l + \sum_{l=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{2N-k} A_k B_l \right\| \leq$$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \|A_k\| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \|B_l\| + \sum_{l=N+1}^{\infty} \|B_l\| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| \longrightarrow 0 \text{ при } N \to \infty,$$

так как в последней оценке первые сомножители — это “хвосты” сходящихся рядов. Так как $S_N T_N \to ST$, в силу непрерывности операторного умножения, то устремляя в вышеприведенных оценках $N \to \infty$, получим $U - ST = 0$. Теорема доказана.

§ 2. Степенные ряды операторов

1^0. **Определения и общие свойства.** Пусть аналитическая функция $f(z)$ раскладывается в степенной ряд (ряд Тейлора)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

Радиус сходимости вычисляется по формуле Коши-Адамара $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Обозначим через $r(A)$ спектральный радиус оператора A, который вычисляется по формуле Бёрлинга $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Так как $\|A^n\| \le \|A\|^n$ $(n \ge 0)$, то всегда $r(A) \le \|A\|$. Часто бывает, что $r(A) < \|A\|$. В этом случае использование в оценках спектрального радиуса $r(A)$ вместо нормы $\|A\|$ дает определенную выгоду, так как это расширяет область сходимости операторных степенных рядов.

Пример. Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Так как $A^n = 0$ для всех $n \ge 2$, то $r(A) = 0 < \|A\| = 1$.

Лемма 4. *Пусть R – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ и $r(A - z_0 I) < R$. Тогда операторный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (A - z_0 I)^n$ абсолютно сходится.*

Доказательство. Оценим верхний предел

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|a_n (A - z_0 I)^n\|} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(A - z_0 I)^n\|} = \frac{r(A - z_0 I)}{R} < 1.$$

По признаку Коши операторный ряд абсолютно сходится. Лемма доказана.

Определение 1. Функцией f от оператора A называем оператор $f(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (A - z_0 I)^n$.

Общие свойства.

(а) Если $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и коммутатор $[A, B] = 0$, то $[f(A), B] = 0$. Отсюда в частности следует, что если функция $g(z)$ аналитична в некотором круге $|z - z_1| < R_1$ и оператор B, коммутирующий с A, удовлетворяет условию $r(B - z_1 I) < R_1$, то $[f(A), g(B)] = 0$.

(б) Если $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ обратим, то $T f(A) T^{-1} = f(TAT^{-1})$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (TAT^{-1} - z_0 I)^n$ тоже абсолютно сходится.

Для доказательства этого утверждения оценим верхний предел

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|a_n (TAT^{-1} - z_0 I)^n\|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n| \|T(A - z_0 I)T^{-1} \dots T(A - z_0 I)T^{-1}\|} =$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n| \|T(A - z_0 I)^n T^{-1}\|} \le \frac{1}{R} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T\|} \cdot r(A - z_0 I) \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^{-1}\|} = \frac{r(A - z_0 I)}{R} < 1.$$

(в) *Свойство расщепляемости.* Пусть $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ — замкнутые подпространства в $\mathscr{H}$, причем $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \{0\}$ и $\mathscr{H}$ является прямой суммой подпространств $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \dot{+} \mathscr{H}_2$ (не обязательно ортогональной). Любой вектор $x \in \mathscr{H}$ единственным образом представим в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathscr{H}_1$, $x_2 \in \mathscr{H}_2$. Пусть $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ являются инвариантными подпространствами оператора A, т.е. $A\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_1$ и $A\mathscr{H}_2 \subset \mathscr{H}_2$. Полагаем $A_1 = A|_{\mathscr{H}_1}$, $A_2 = A|_{\mathscr{H}_2}$, тогда, если $x = x_1 + x_2$ ($x_1 \in \mathscr{H}_1$, $x_2 \in \mathscr{H}_2$), то $Ax = Ax_1 + Ax_2 = A_1x_1 + A_2x_2$. В этом случае говорим, что оператор A расщепляется в прямую сумму операторов $A_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1)$ и $A_2 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_2)$, $A = A_1 \dot{+} A_2$. Так как $A^n x = A^n x_1 + A^n x_2 = A^{n-1}A_1x_1 + A^{n-1}A_2x_2 = \cdots = A_1^n x_1 + A_2^n x_2$, то $A^n = A_1^n \dot{+} A_2^n$. Очевидно это свойство распространяется и на любые функции, т. е. $f(A) = f(A_1) \dot{+} f(A_2)$.

Свойства (а) – (в) уже дают некоторый алгоритм для вычисления функций от матриц. Пусть A – матрица одноименного оператора, действующего в $\mathbb{C}^n$. Существует невырожденная матрица перехода T, приводящая A к жорданову виду, $TAT^{-1} = B = B_1 \dot{+} \ldots \dot{+} B_m$, где B_k $(1 \le k \le m)$ — жордановы клетки. Тогда $f(A) = f(T^{-1}BT) = T^{-1}f(B)T = T^{-1}(f(B_1) \dot{+} \ldots \dot{+} f(B_m))T$ и нам осталось только научиться вычислять функцию от жордановой клетки. Если A приводится к диагональному виду, то все клетки одномерны, т. е. $B_k = [\lambda_k]$ и $f(B_k) = f([\lambda_k]) = [f(\lambda_k)]$ (где λ_k – собственные числа матрицы A с учетом их кратности); в этом случае наша задача полностью решена.

(г) Пусть степенные ряды функций f и g сходятся в одном и том же круге радиуса R с центром в z_0, и пусть $r(A - z_0 I) < R$. Тогда $(f \cdot g)(A) = f(A)g(A)$. Это сразу следует из теоремы Мёртенса о перемножении рядов. Если $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$, то $(f \cdot g)(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Значит $(f \cdot g)(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (A - z_0 I)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (A - z_0 I)^n =$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \big(a_k (A - z_0 I)^k\big)\big(b_{n-k}(A - z_0 I)^{n-k}\big) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (A - z_0 I)^k \sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l (A - z_0 I)^l = f(A)g(A).$

Укажем несколько применений этого свойства.

1) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$. Здесь следует положить $f(z) = \sin z$, $g(z) = 2\cos z$, $(f \cdot g)(z) = \sin 2z$.

2) Это свойство полезно при доказательстве обратимости операторов. Пусть $f(z) = 1 - z$, $g(z) = \dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ (радиус сходимости этого ряда равен 1). То есть, если $r(A) < 1$, то оператор $I - A$ обратим, так как $I = f(A)g(A) = (I - A)g(A) = g(A)(I - A)$; мы доказали усиление теоремы Неймана об обратном операторе.

3) Функция $\cos z \neq 0$ при $|z| < \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому, если $r(A) < \dfrac{\pi}{2}$, то оператор $\cos A$ обратим. В частности, имеет место равенство $\operatorname{tg} A = \sin A \cdot (\cos A)^{-1}$.

(д) Корректность определения функции $f(A)$ с помощью степенного ряда. Пусть функция $f(z)$ раскладывается в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ с радиусом сходимости R и в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n$ с центром в другой точке z_1 и радиусом сходимости R_1. Тогда, если $r(A-z_0I) < R$ и $r(A-z_1I) < R_1$, то оператор $f(A)$ не зависит от того, каким рядом мы пользовались при его вычислении. Для операторов этот факт требует доказательства. Мы еще не готовы привести его прямо сейчас.

(e) Пусть ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится в круге $|z-z_0|<R$, а ряд $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n$ сходится в круге $|z-z_1|<R_1$. Если оператор $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ удовлетворяет условиям $r(A-z_0I) < R$, $r(f(A)-z_1I) < R_1$, то для композиции $(g\circ f)(z)=g(f(z))$ имеет место операторное равенство $(g\circ f)(A)=g(f(A))$. Это свойство мы докажем после того, когда будет дано общее определение аналитической функции от ограниченного оператора.

2^0. **Экспонента, тригонометрические и гиперболические функции.** *Экспонента* от оператора $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ определяется хорошо известным рядом

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,A^n.$$

Так как радиус сходимости степенного ряда для функции e^z равен бесконечности, то экспонента определена для всех операторов $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Одно из очевидных свойств экспоненты это неравенство для норм $\left\|e^A\right\|\le e^{\|A\|}$. Следующее свойство, которое мы отметим —

Непрерывность экспоненты. Если $A_n, A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $A_n\to A$, то $e^{A_n}\to e^A$. Это свойство сразу получается из следующего неравенства для норм:

$$\|e^A-e^B\|\le\|A-B\|\cdot e^{\max\{\|A\|,\|B\|\}}.$$

Доказательство следует из цепочки оценок

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,A^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,B^n\right\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\|A^n-B^n\|=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\|A^{n-1}(A-B)+A^{n-2}(A-B)B+\cdots+(A-B)B^{n-1}\|\le$$

$$\|A-B\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,(\|A\|^{n-1}+\cdots+\|B\|^{n-1})\le\|A-B\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,n(\max\{\|A\|,\|B\|\})^{n-1}=$$

$$\|A-B\|\cdot e^{\max\{\|A\|,\|B\|\}}$$

Мультипликативное свойство. Если операторы $A,B\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ коммутируют, т. е. $[A,B]=0$, то

$$e^{A+B}=e^Ae^B.$$

Доказательство этого тождества стандартное (с помощью теоремы Мёртенса).

$$e^{A+B}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,(A+B)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^kB^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\frac{B^{n-k}}{(n-k)!}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\frac{B^l}{l!}=e^Ae^B$$

Следствие. e^A – обратимый оператор с обратным e^{-A}для любого $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Задача 5. Приведите пример двух некоммутирующих 2×2-матриц A и B, таких, что $e^{A+B}\neq e^Ae^B$.

Задача 6. Приведите другой пример двух некоммутирующих 2×2-матриц A_1 и B_1, таких, что $e^{A_1}=e^{B_1}=e^{A_1+B_1}=I$. Для таких матриц, в частности, несмотря на некоммутируемость, равенство $e^{A_1+B_1}=e^{A_1}e^{B_1}$ будет выполняться.

Задача 7. Найдите все решения уравнения $e^X=I$ для 2×2-матриц X.

Задача 8. Вычислить e^A в случае

(а) $A=\begin{bmatrix}4&-2\\6&3\end{bmatrix}$ (б) $A=\begin{bmatrix}3&-1\\1&1\end{bmatrix}$

Задача 9. Вычислите экспоненту от жордановой клетки размера $m\times m$

$$A_m(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda&1&&\text{\Large 0}\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&\ddots\\&&&\lambda&1\\\text{\Large 0}&&&&\lambda\end{bmatrix}.$$

Задача 10. Для $m\times m$-матрицы A выразить $\det(e^A)$

(а) через элементы матрицы A;

(б) через собственные числа матрицы A.

Тригонометрические и гиперболические функции.

$\cos A=\frac{1}{2}(e^{iA}+e^{-iA})$ $\sin A=\frac{1}{2i}(e^{iA}-e^{-iA})$

$\operatorname{tg} A=\sin A\,(\cos A)^{-1}$ (определен толь для обратимых операторов $\cos A$)

$\operatorname{ch} A=\frac{1}{2}(e^{A}+e^{-A})$ $\operatorname{sh} A=\frac{1}{2}(e^{A}-e^{-A})$

Из 1^0 (г) следует, что для этих функций выполняются все классические тождества, известные для обычных тригонометрических и гиперболических функций. Например, если $[A,B]=0$, то $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,\ldots\ldots$ Доказываются они в точности так же, как и в теории функций комплексного переменного.

Задача 11. Вычислить $\sin\begin{bmatrix}\pi-1&1\\-1&\pi+1\end{bmatrix}$.

Задача 12. Пусть $\mathscr{F}_{\sin}$ – синус преобразование Фурье в пространстве $L_2([0,\infty))$,

$$(\mathscr{F}_{\sin}x)(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\sin ts\,x(s)ds.$$

Найдите $\sin(\mathscr{F}_{\sin})$, $\cos(\mathscr{F}_{\sin})$.

Задача 13. Пусть $\mathscr{F}$ — преобразование Фурье в пространстве $L_2(R)$

$$(\mathscr{F}x)(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(s)e^{-ts}ds.$$

Выразить $e^{\mathscr{F}}$ в виде линейной комбинации операторов I, $\mathscr{F}$, P, $P\mathscr{F}$, где P – оператор чётности $(Px)(t) = x(-t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

3^0. **Логарифм и степенная функция.** Пусть $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $r(A - I) < 1$. Тогда ряды для логарифма и степенной функции

$$\ln A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \, (A - I)^n,$$

$$A^{\alpha} = \sum_{=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \, (A-I)^n \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

абсолютно сходятся.

Задача 14. Вычислить $\ln \begin{bmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$.

Задача 15. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$. Докажите, что оператор $\ln(I+A)$ тоже интегралтный, т. е $\ln(I+A)x(t) = \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds$; найдите явный вид ядра $K(t,s)$.

Ряд Кэмпбелла-Хаусдорфа. Пусть $\|A\| + \|B\| < \ln 2$. Тогда

$$\|e^A e^B - I\| = \|\sum_{r+s>0} A^r B^s\| \le \sum_{r+s>0} \|A\|^r \|B\|^s = e^{\|A\|+\|B\|} - 1 < 1.$$

Следовательно, $r(e^A e^B - I) \le \|e^A e^B - I\| < 1$, и в этом случае можно рассмотреть оператор $C = \ln(e^A e^B)$. Для оператора C имеет место следующая формула:

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i+s_i>0 \\ 1\le i\le n}} \frac{[A^{r_1}B^{s_1}\dots A^{r_n}B^{s_n}]}{(\sum\limits_{i=1}^{n}(r_i+s_i))\, r_1!s_1!\dots r_n!s_n!},$$

которая называется *рядом Кэмпбелла-Хаусдорфа.* В числителе дроби из второй суммы стоят кратные коммутаторы

$$[A^{r_1}B^{s_1}\dots A^{r_n}B^{s_n}] = \underbrace{[A,[A,\dots[A,}_{r_1}\underbrace{[B,[B,\dots[B,}_{s_1}\dots\underbrace{[A,[A,\dots[A,}_{r_n}\underbrace{[B,[B,\dots B]]}_{s_n}\dots]$$

Из определения коммутатора следует, что числитель равен нулю, если $s_n > 1$, либо $s_n = 0$ и $r_n > 1$.

Для доказательства этой формулы подставим ряд для $e^A e^B - I = \sum\limits_{r+s>0} \dfrac{A^r B^s}{r!s!}$ в ряд для логарифма

$$\ln(e^A e^B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\sum_{r+s>0} A^r B^s \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i+s_i>0 \\ 1\le i\le n}} \frac{A^{r_1}B^{s_1}\dots A^{r_n}B^{s_n}}{r_1!s_1!\dots r_n!s_n!} \quad (*)$$

Этот ряд отличается от ряда Кэмпбелла-Хаусдорфа тем, что в числителе второй суммы стоят не коммутаторы, а обычные произведения операторов A и B. Кроме этого, в знаменателе отсутствует множитель $\sum\limits_{i=1}^{n}(r_i+s_i)$, равный, как легко заметить, степени стоящего в числителе монома $A^{r_1}B^{s_1}\dots A^{r_n}B^{s_n}$. Для того, чтобы преобразовать ряд $(*)$ в ряд Кэмпбелла-Хаусдорфа, необходимо в нем каждый однородный полином (содержащий все мономы одинаковой степени) перегруппировать в кратные коммутаторы. Тот факт, что это можно сделать, далеко нетривиален. Для доказательства его требуется знание некоторых глав теории алгебр Ли. Появление, после такой перегруппировки, в знаменателе дополнительного множителя $\sum\limits_{i=1}^{n}(r_i+s_i)$ объясняется следующей теоремой

Теорема (Шпехта-Вевера). *Однородный полином $P(X_1,\dots,X_m)$ от некоммутирующих переменных $X_1,\dots,X_m$, имеющий степень k, можно представить в виде суммы кратных коммутаторов тогда и только тогда, когда*

$$[P(X_1,\dots,X_m)]=kP(X_1,\dots,X_m),$$

где $[\cdot]$ – линейная операция, которая заменяет в полиноме $P(X_1,\dots,X_m)$ каждый моном $X_{i_1}\dots X_{i_k}$ на кратный коммутатор $[X_{i_1},[X_{i_2},\dots[X_{i_{k-1}},X_{i_k}]\dots]]$.

В качестве примера рассмотрим в ряде $(*)$ все слагаемые степени не выше второй:

$$C=A+B+\frac{A^2}{2}+AB+\frac{B^2}{2}+\frac{(-1)}{2}\left(\frac{A^2}{2}+\frac{AB}{2}+\frac{BA}{2}+\frac{B^2}{2}\right)=A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots.$$

То-есть, после приведения подобных получили первые два члена ряда Кэмпбелла-Хаусдорфа степени 1 и 2.

Задача 16. Удерживая в ряде $(*)$ слагаемые третей степени, найдите третий член ряда Кэмпбелла-Хасдорфа, состоящий из двукратных коммутаторов.

4^0. **Дифференцирование операторных функций.** Пусть $A(t)$ — операторнозначная функция, где t пробегает некоторую область $\mathscr{D}\subset\mathbb{C}$ (либо t пробегает отрезок $[a,b]\subset\mathbb{R}$). Оператор $A'(t)$ называется *производной* в точке t операторной функции $A(t)$, если

$$\lim_{|\Delta t|\to 0}\left\|\frac{1}{\Delta t}(A(t+\Delta t)-A(t))-A'(t)\right\|=0.$$

Из этого определения сразу следует формула конечных приращений

$$A(t+\Delta t)=A(t)+A'(t)\Delta t+o(\Delta t),$$

где “бесконечно малый” оператор $o(\Delta t)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$.

Основные свойства операции дифференцирования.

(a) $(A(t)B(t))'=A'(t)B(t)+A(t)B'(t)$. Порядок сомножителей здесь существенен, если $A(t)$ не коммутирует с $B(s)$.

(б) Для производной порядка n имеет место формула Лейбница

$$(A(t)B(t))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kA^{(k)}(t)B^{(n-k)}(t).$$

(в) Если $A(t)$ коммутирует со всеми $A(s)$, то $[A'(t), A(s)] = 0$, $[A(t), A'(s)] = 0$ и $[A'(t), A'(s)] = 0$ для всех s и t.

(г) Если $A(t)$ и $A(s)$ коммутируют, то $((A(t))^n)' = nA"(t)(A(t))^{n-1}$. Если $A(t)$ и $A(s)$ не коммутируют, то имеет место более сложная формула

$(A(t)^n)' = A'(t)(A(t))^{n-1} + A(t)A'(t)(A(t))^{n-2} + \dots + (A(t))^{n-1}A'(t)$.

(д) Если $f(z)$ – аналитическая функция в круге $|z - z_0| < R$ и $r(A(t) - z_0 I) < R$, при этом $A(t)$ и $A(s)$ коммутируют, то $(f(A(t)))' = f'(A(t))A'(t)$.

Для доказательства этого факта продифференцируем почленно абсолютно сходящийся ряд

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (A(t) - z_0 I)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n A'(t)(A(t) - z_0 I)^{n-1} = A'(t) f'(A(t)).$$

(е) Если $g(z)$ — аналитическая функция в круге $|z - z_1| < R_1$, причем $r(g(A(t)) - z_1 I) < R_1$, то при условиях предыдущего пункта (д) имеем

$g(f(A(t)))' = g'(f(A(t))) \cdot (f(A(t)))' = g'(f(A(t))) \cdot f'(A(t)) \cdot A'(t)$.

Пользуясь правилами (д) и (е) сразу получаем: $(\ln A(t))' = A'(t)(A(t))^{-1}$, $(e^{A(t)})' = A'(t)e^{A(t)}$.

Лемма. *Если $A'(t) = 0$ и область $\mathscr{D}$ связна, то $A(t)$ — постоянный (не зависящий от t) оператор.*

Доказательство. Для фиксированных векторов $x, y \in \mathscr{H}$ рассмотрим комплекснозначную функцию $a_{x,y}(t) = (A(t)x, y)$. Её производная

$(a_{x,y}(t))' = (A(t)x, y)' = (A'(t)x, y) = 0$.

Следовательно, $a_{x,y}(t)$ не зависит от t (в этом месте требуется связность области). Фиксируем некоторое $t_0 \in \mathscr{D}$. Имеем

$0 = a_{x,y}(t) - a_{x,y}(t_0) = (A(t)x, y) - (A(t_0)x, y) = ((A(t) - A(t_0))x, y)$

для всех $t \in \mathscr{D}$ и всех $x, y \in \mathscr{H}$. Поэтому $A(t) - A(t_0) = 0$, или $A(t) = A(t_0)$ для всех $t \in \mathscr{D}$. Лемма доказана.

Продемонстрируем, как можно применять полученные выше свойства операторной производной. В качестве первого применения докажем еще раз, что $e^{A+B} = e^A e^B$ в случае $[A, B] = 0$. Рассмотрим операторную функцию $C(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}$ $(t \in [0, 1])$. Её производная $A'(t) = (A+B)C(t) - AC(t) - BC(t) = 0$. Поэтому $e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB} = C$ – постоянный оператор. Положив $t = 0$, получаем $C = 0$, а при $t = 1$ имеем требуемое равенство.

Докажем теперь, что операторный логарифм есть обратная функция к операторной экспоненте. Пусть $\|A\| < \ln 2$. Рассмотрим операторную функцию $A(t) = \ln(e^{tA}) - tA$ $(t \in [0, 1])$. Имеем $A'(t) = Ae^{tA}(e^{tA})^{-1} - A = A - A = 0$. Поэтому $\ln e^{tA} - tA = C$. Положив $t = 0$ получаем $C = 0$. При $t = 1$ получаем нужное равенство $\ln e^A = A$.

Задача 18. Пользуясь аналогичным приемом введения вспомогательного параметра t, докажите, что $e^{\log A} = A$, если $r(A - I) < 1$.

Задача 19. Докажите аналогичным способом аддитивное свойство логарифма. Если $[A, B] = 0$, $r(A - I) < 1$, $r(B - I) < 1$ и $r(AB - I) < 1$, то $\ln(AB) = \ln A + \ln B$.

Теперь мы в состоянии доказать свойство корректности определения операторной функции с помощью рядов (свойство (д) из пункта $\mathbf{1^0}$. Пусть аналитическая функция $f(z)$ раскладывается в окрестности точки z_0 в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $(|z-z_0|<R)$, а в окрестности точки z_1 в другой степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n$ $(|z-z_1|<R_1)$. Пусть одновременно $r(A-z_0I)<R$ и $r(A-z_1I)<R_1$. Нам необходимо проверить равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(A-z_0I)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(A-z_1I)^n.$$

Считая z_1 переменной (а z_0 постоянной), рассмотрим такую функцию

$$A(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(A-z_0I)^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n(A-z_1I)^n.$$

Так как эти суммы являются рядами Тейлора, то $b_n = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_1)$. Следовательно,

$$A'(z_1) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(z_1)(A-z_1I)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} f^{(n)}(z_1)(A-z_1I)^{n-1} = 0.$$

Значит $A(z_1)$ не зависит от z_1, кроме этого $A(z_0)=0$. Поэтому $A(z_1)=0$ для всех допустимых z_1.

Задача 20. Докажите, что если $A,B\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$, $A=A^*$, $B=B^*$ и $e^{A+B}=e^Ae^B$, то $[A,B]=0$.

Задача 21. Докажите *формулу Троттера* $e^{A+B} = \lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}A}e^{\frac{1}{n}B})^n$ для любых $A,B\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

5^0. **Интегрирование операторных функций.** Пусть Γ – гладкая дуга в $\mathbb{C}$ с параметризацией $\Gamma=\{z(t): a\le t\le b\}$. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ на n частей $\sigma=\{a=t_0\le t_1\le\dots\le t_n=b\}$. Пусть $A(z)$ – непрерывная операторная функция, заданная на дуге Γ. На каждой дуге $\gamma_k=z([t_k,t_{k-1}])$ выберем точку ζ_k и рассмотрим интегральную сумму $S_{\Gamma,\sigma}(A(z))=\sum\limits_{k=1}^{n} A(\zeta_k)\Delta z_k$, где мы обозначили $\Delta z_k=z(t_k)-z(t_{k-1})$ $(k=1\dots,n)$. Можно доказать, что существует предел по норме

$$\lim_{\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0} S_{\Gamma,\sigma}(A(z)) = \int\limits_\Gamma A(z)dz,$$

который называется *операторным интегралом* от функции $A(z)$ по дуге Γ.

Основные свойства операторного интеграла.

(a) Неравенство для норм:

$$\left\|\int\limits_\Gamma A(z)dz\right\| \le \int\limits_\Gamma \|A(z)\||dz|.$$

По сути дела это интегральная форма неравенства треугольника.

(б) Формула Ньютона-Лейбница. Пусть функция $A(z)$ непрерывно дифференцируема (вдоль дуги Γ). Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} A'(z)dz = A(z_1) - A(z_0), \text{ где } z_0 = z(a) \text{ – начало дуги } \Gamma,\ z_1 = z(b) \text{ – конец дуги } \Gamma.$$

(в) Пусть функция $A(z)$ непрерывна на дуге Γ. Тогда для любой точки $z \in \Gamma$, интеграл от функции $A(s)$ по начальному участку $\Gamma(z_0, z)$ дуги Γ имеет производную по z вдоль Γ и

$$\frac{d}{dz} \int\limits_{\Gamma(z_0,z)} A(s)ds = A(z).$$

(г) Пусть функция $A(z)$ дифференцируема в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда для любой дуги $\Gamma(z_0, z)$, соединяющей точки z_0 и z, интеграл от функции $A(z)$ по дуге $\Gamma(z_0, z)$ зависит только от точек z_0 и z, при этом

$$\frac{d}{dz} \int\limits_{\Gamma(z_0,z)} A(s)ds = \frac{d}{dz} \int\limits_{z_0}^{z} A(s)ds = A(z).$$

Доказательство этого утверждения следует из того, что для любых $x, y \in \mathscr{H}$ для комплексной функции $(A(z)x, y)$ аналогичное утверждение известно из теории функций комплексного переменного.

Решение операторных дифференциальных уравнений. С помощью развитого выше интегрального исчисления можно получать решения линейных операторных дифференциальных уравнений. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ линейное однородное дифференциальное уравнение

$$(1) \qquad x'(t) = A(t)\,x(t) \quad (t \in [a,b]), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $A(t)$ непрерывная операторная функция на отрезке $[a, b]$. Это так называемое уравнение эволюционного типа. Таковым является, например, уравнение теплопроводности (или диффузии), а также уравнение Шредингера (в качестве $A(t)$ в нем выступает оператор $\frac{1}{i\hbar}H(t)$, где $H(t)$ – оператор Гамильтона).

Некоммутативный случай. $[A(t), A(s)] \neq 0$ при некоторых $t, s \in [a, b]$. Такой случай тоже встречается в квантовой механике, если оператор Гамильтона зависит явно от времени. Решение уравнения (1) будем искать методом последовательных приближений.

$$x_0(t) = x_0,$$

$$x_1(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(s_1)x_0\,ds_1,$$

$$x_2(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(s_1)x_1(s_1)\,ds_1 =$$

$$= x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} A(s_1)x_0\, ds_1 + \int\limits_{t_0}^{t} A(s_1)\left(\int\limits_{t_0}^{s_1} A(s_2)x_0\, ds_2\right) ds_1,$$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

Это наводит на мысль, что решением уравнения (1) является следующий бесконечный ряд:

(2) $x(t) = x_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n(t,t_0)x_0$, где

(3) $B_n(t,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s_1}\dots\int\limits_{t_0}^{s_{n-1}} A(s_1)A(s_2)\dots A(s_n)\, ds_n \dots ds_2 ds_1 \quad (n \geq 1).$

Пусть $\alpha = \max\limits_{t_0 \leq s \leq t_1} \|A(s)\|$. Оценим нормы операторов $B_n(t,t_0)$.

$$\|B_n(t,t_0)\| \leq \alpha^n \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s_1}\dots\int\limits_{t_0}^{s_{n-1}} ds_1 ds_2 \dots ds_n = \frac{\alpha^n}{(n-1)!}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}ds = \frac{\alpha^n(t_1-t_0)^n}{n!}.$$

Такая оценка гарантирует абсолютную сходимость ряда для $x(t)$. Ряд из производных тоже абсолютно сходится, поэтому его можно дифференцировать почленно. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x(t)$ является решением уравнения (1). Докажем единственность решения. Достаточно доказать, что если $x(t_0) = 0$, то $x(t) = 0$ тождественно. Проинтегрировав один раз уравнение (1) получим

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} A(s_1)x(s_1)ds_1.$$

После n-кратной подстановки в правую часть этого же выражения для $x(t)$, получим

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s_1}\dots\int\limits_{t_0}^{s_{n-1}} A(s_1)A(s_2)\dots A(s_n)x(s_n)\, ds_n \dots ds_2 ds_1.$$

Обозначим $\max\limits_{t_0 \leq t \leq t_1} \|x(t)\| = \beta$. Тогда

$$\|x(t)\| \leq \alpha^n\beta \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s_1}\dots\int\limits_{t_0}^{s_{n-1}} ds_1 ds_2 \dots = \frac{\alpha^n\beta(t_1-t_0)^n}{n!}.$$

Устремляя в этой оценке $n \to \infty$, получим $x(t) = 0$ для всех t. Единственность решения доказана.

Рассмотрим также оператор

(4) $U(t,t_0) = I + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n(t,t_0).$

который называется *эволюционным оператором.*

Свойства эволюционного оператора.

(а) Если $x'(t) = A(t)x(t)$, $x(t_0) = x_0$, то $x(t) = U(t, t_0)x_0$.

(б) $U(t, t_0) = U(t, t_1)U(t_1, t_0)$ для любой тройки t, t_1, t_0.

Так как $x(t_1) = U(t_1, t_0)x_0$, $x(t) = U(t, t_1)x(t_1)$, то $x(t) = U(t, t_1)U(t_1, t_0)x_0$. С другой стороны, можно сразу написать $x(t) = U(t, t_0)x_0$ и из единственности решения получаем $U(t, t_0)x_0 = U(t, t_1)U(t_1, t_0)x_0$ для всех $x_0 \in \mathscr{H}$. То есть, $U(t, t_0) = U(t, t_1)U(t_1, t_0)$.

(в) $U(t, t) = I$.

(г) $U(t, t_0)$ обратим и $(U(t, t_0))^{-1} = U(t_0, t)$.

Для доказательства этого факта заметим, что формулы (2), (3), для решения уравнения (1), справедливы и при $t < t_0$. Поэтому, положив в свойстве (б) $t = t_0$, получим $U(t_0, t_1)U(t_1, t_0) = U(t_0, t_0) = I$. Одного этого равенства еще не достаточно для доказательства обратимости, но если в нем поменять местами t_0 и t_1, то сразу получим недостающее равенство $U(t_1, t_0)U(t_0, t_1) = I$.

(д) Операторная функция $U(t, t_0)$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dt}U(t, t_0) = A(t)U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = I.$$

Физики записывают формулу (4) для эволюционного оператора в виде экспоненты с хронологическим упорядочиванием

$$U(t, t_0) = \mathbb{T}\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right). \tag{5}$$

Поясним смысл такого обозначения. Для этого заменим интеграл в экспоненте на интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} A(t_k)\Delta t$ (считаем все приращения $\Delta t_k = \Delta t$). Далее раскроем экспоненту по формуле Тейлора

$$\exp\left(\sum_{k=0}^{n} A(t_k)\Delta t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\sum_{k=1}^{n} A(t_k)\Delta t\right)^j =$$

$$I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(\sum_{m_1 < \cdots < m_j} \sum_{\pi \in S_j} A(t_{\pi(m_1)}) \dots A(t_{\pi(m_j)})(\Delta t)^j + O_j(\Delta t)\right).$$

Последняя сумма осуществляется по всем перестановкам π индексов $m_1, \dots, m_j$. Оператор $O_j(\Delta t)$ является суммой произведений $A(t_{m_1}) \dots A(t_{m_j})$, в которых есть хотя бы одна пара операторов с одинаковыми аргументами, т.е. $m_k = m_l$ для некоторых $1 \le k, l \le j$. Легко заметить, что $\|O_j(\Delta t)\| \to 0$ при $\Delta t \to 0$ (число слагаемых такого типа $\sim n^{j-1}$, а $(\Delta t)^j \sim n^{-j}$). Далее применяем операцию хронологического упорядочения $\mathbb{T}$. Это означает, что в последней сумме мы заменяем каждое произведение $A(t_{\pi(m_1)}) \dots A(t_{\pi(m_j)})$ на $A(t_{m_j}) \dots A(t_{m_1})$ (в порядке убывания времен $t_{m_j} > \cdots > t_{m_1}$). В последней сумме появится $j!$ одинаковых слагаемых $A(t_{m_j}) \dots A(t_{m_1})$. Поэтому

$$\exp\left(\sum_{k=0}^{n} A(t_k)\Delta t\right) = I + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{m_1<\dots<m_j} A(t_{m_j})\dots A(t_{m_1})(\Delta t)^j + O_j(\Delta t)\right).$$

При $j=1$ получаем сумму $\sum\limits_{m_1} A(t_{m_1})\Delta t$, которая в пределе при $\Delta t \to 0$ превратится в $B_1(t,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} A(s)ds$. Аналогично, при $j=2$, слагаемое $\sum\limits_{m_1<m_2} A(t_{m_2})A(t_{m_1})$ в пределе даст $B_2(t,t_0) = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s_1} A(s_1)A(s_2)ds_2ds_1$, и т. д.

Коммутативный случай $[A(t)A(s)] = 0$ для все $t,s \in [a,b]$. В этом случае хронологическое упорядочение не требуется и формула (5) сразу дает ответ

$$U(t,t_0) = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} A(s)ds\right).$$

Впрочем то, что $U(t,t_0)$ является решением уравнения (д), легко проверяется непосредственным дифференцированием.

Ещё более простой случай, когда $A(t) = A$ не зависит от t. Тогда

$$U(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

Именно так записывается в матричном виде фундаментальное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В качестве первого применения дифференциальных уравнений дакажем, что $A^\alpha = e^{\alpha \ln A}$ при условии $r(A-I) < 1$. На самом деле мы будем доказывать равенство

$$(I + t(A-I))^\alpha = e^{\alpha \ln(I+t(A-I))} \quad (t \in [0,1]). \tag{6}$$

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что правая и левая часть этого равенства является решением одного и того же уравнения

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad \text{где} \quad A(t) = (A-I)(I+t(A-I))^{-1}.$$

При $t=0$ равенство (6) истинно. Поэтому оно истинно для всех $t \in [0,1]$.

Задача 22. Аналогичным методом докажите, что $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{C})$ при условиях $r(A-I) < 1$, $r(A^\alpha - I) < 1$.

Задача 23. Пусть $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. С помощью операторных дифференциальных уравнений докажите формулу Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}.$$

(Эта формула применяется в квантовой теории для операторов рождения и уничтожения $\widehat{a}$, $\widehat{a}^+$ с коммутатором $[\widehat{a}^+,\widehat{a}] = I$. В этом случае для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ получаем $e^{-\alpha\widehat{a}}e^{\bar{\alpha}\widehat{a}^+}e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} = e^{-\alpha\widehat{a}+\bar{\alpha}\widehat{a}^+}$).

Задача 24. Рассмотрим линейный оператор $\mathrm{ad}_A : \mathscr{B}(\mathscr{H}) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$, который определяется формулой $\mathrm{ad}_A(B) = [A,B]$. Докажите, что $\exp(\mathrm{ad}_A)(B) = e^A B e^{-A}$.

Задача 25. Докажите лемму Адамара

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}\,[A,[A,B]] + \dots + \frac{1}{n!}\,\underbrace{[A,[A,[\dots[A,}_{n}B]\dots]] + \dots$$

Задача 26. Пусть $U(t,t_0)$ – эволюционный оператор для однородного линейного уравнения $x'(t) = A(t)x(t)$, $x(t_0) = x_0$ $(t \in [a,b])$. Докажите, для решения неоднородного линейного уравнения

$$x'(t) = A(t)x(t) + y(t),$$

где $y(t)$ – непрерывная на $[a,b]$ вектор-функция, справедлива *формула Дюамеля*

$$x(t) = U(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} U(t,s)y(s)\,ds.$$

Задача 27. Докажите равенство

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} + \int\limits_{0}^{t} e^{(t-s)A}Be^{s(A+B)}\,ds.$$

Задача 28. Выведите формулу Кубо

$$[A, e^{-tB}] = \int\limits_{0}^{t} e^{-(t-s)B}[A,B]e^{-sB}\,ds.$$

Задача 29. Докажите формулу Фейнмана

$$\frac{d}{dt}e^{A+tB}\bigg|_{t-0} = \int\limits_{0}^{1} e^{(1-s)A}Be^{sA}\,ds.$$

§ 3. Аналититическое функцинальное исчисление

1^0. **Аналитические свойства резольвенты.** Обозначим через $\mathrm{inv}\mathscr{B}(\mathscr{H})$ – множество всех обратимых операторов на $\mathscr{H}$.

Теорема (о непрерывности обращения). *Множество* $\mathrm{inv}\mathscr{B}(\mathscr{H})$ *открыто в* $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ *и операция обращения* $A \longmapsto A^{-1}$ $(A \in \mathrm{inv}\mathscr{B}(\mathscr{H}))$ *непрерывна.*

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A-B)B^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1}, \tag{7}$$

которое легко проверяется непосредственно. Пользуясь этим тождеством, выразим B^{-1} через A^{-1}.

$$B^{-1} = \{I - A^{-1}(A-B)\}^{-1}A^{-1}. \tag{8}$$

Предположим, что $A \in \mathrm{inv}\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Пусть оператор B настолько близок к A, что $\|B-A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Тогда оператор $C = A^{-1}(A-B)$ имеет норму $\|C\| \le \|A^{-1}\|\|A-B\| < 1$. Значит (по теореме Неймана) оператор $I - C$ обратим и можно рассмотреть оператор $\{I - A^{-1}(A-B)\}^{-1}A^{-1}$ (стоящий в правой части равенства (8)). Очевидно он является обратным к оператору B. То есть, для любого оператора B из окрестности оператора A радиуса $\|A^{-1}\|^{-1}$ имеем $B \in \mathrm{inv}\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Мы доказали открытость множества $\mathrm{inv}\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Пусть теперь $A_n, A \in \mathrm{inv}\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $A_n \to A$. Для операторов $C_n = A^{-1}(A - A_n)$ имеем $C_n \to 0$. Поэтому $\|(I - C_n)^{-1} - I\| = \|C_n + C_n^2 + \dots\| \le \|C_n\| + \|C_n\|^2 + \dots = \|C_n\|/(1 - \|C_n\|) \to 0$. Если теперь в тождестве (8) подставим A_n вместо B, то получим $A_n^{-1} \to A^{-1}$. Теорема доказана.

Резольвентой оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется операторная функция $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ по переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. *Резольвентным множеством* $\rho(A)$ называется множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых определена резольвента $\rho(A) = \mathrm{dom}_\lambda R_\lambda(A)$. Из предыдущей теоремы следует, что множество $\rho(A)$ открыто в $\mathbb{C}$ и резольвента непрерывна по обеим переменным λ и A, т. е. из $\lambda_n \to \lambda$ и $A_n \to A$ следует $R_{\lambda_n}(A_n) \to R_\lambda(A)$.

Если в (7) подставить $A - \lambda I$ вместо A и $B - \lambda I$ вместо B, то получим *второе тождество Гильберта* для резольвенты

$$(7') \qquad R_\lambda(B) - R_\lambda(A) = R_\lambda(A)(A - B)R_\lambda(B) = R_\lambda(B)(A - B)R_\lambda(A).$$

Физики называют резольвенту (со знаком минус) *оператором Грина*. Если обозначить $G_0(\lambda) = -R_\lambda(A)$, $G(\lambda) = -R_\lambda(B)$, $V = B - A$, то получим уравнение *Липпмана-Швингера* для нахождения оператора Грина $G(\lambda)$ через известный оператор Грина $G_0(\lambda)$ и потенциал V:

$$G(\lambda) = G_0(\lambda) + G_0(\lambda)VG(\lambda).$$

Эта формула применяется в теории рассеяния. Кроме этого в теории рассеяния часто используется так называемый T-оператор, задаваемый формулой

$$T(\lambda) = V + VG(\lambda)V.$$

Задача 30. (а) Выразить $G(\lambda)$ через $G_0(\lambda)$ и $T(\lambda)$.

(б) Получить уравнение Липпмана-Швингера для оператора $T(\lambda)$:

$$T(\lambda) = V + VG_0(\lambda)T(\lambda).$$

Если в (7) подставить $A - \lambda I$ вместо A и $A - \mu I$ вместо B, то получим *первое тождество Гильберта* для резольвенты

$$(7'') \qquad R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\mu(A)R_\lambda(A).$$

Задача 31. Допустим, что операторная функция R_λ определена для всех λ из некоторого неограниченного множества $D \subset \mathbb{C}$ и R_{λ_0} обратим для некоторого $\lambda_0 \in D$. Докажите, что если $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu$ $(\lambda, \mu \in D)$, то существует оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ такой, что $R_\lambda = R_\lambda(A)$ $(\lambda \in D)$.

Из первого тождества Гильберта следует дифференцируемость резольвенты $R_\lambda(A)$ по переменной λ, так как, в силу непрерывности $R_\mu(A)$ по переменной μ, получаем

$$\frac{dR_\lambda(A)}{d\lambda} = \lim_{\mu \to \lambda} \frac{R_\mu(A) - R_\lambda(A)}{\mu - \lambda} = R_\lambda^2.$$

Повторное дифференцирование этой формулы дает выражение для n-й производной

$$\frac{d^n R_\lambda(A)}{d\lambda^n} = n!\, R_\lambda^{n+1}.$$

Отсюда следует, что для любых $x, y \in \mathscr{H}$ функция $a_{x,y}(\lambda) = (R_\lambda(A)x, y)$ является аналитической на резольвентном множестве $\rho(A)$.

Спектром оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ (дополнительное к резольвентному множеству). С помощью операторного интегрирования и аналитичности резольвенты можно доказать одно из основных свойств спектра.

Теорема (о непустоте спектра). *Спектр любого оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ является непустым замкнутым множеством.*

Доказательство. Если $|\lambda| > \|A\|$, то $\lambda \in \rho(A)$ в силу теоремы Неймана (было в основном курсе). Для $r > \|A\|$ рассмотрим операторный интеграл от резольвенты по окружности радиуса r (ориентированной против часовой стрелки)

$$\oint\limits_{|\lambda|=r} \frac{d\lambda}{A - \lambda I} = \oint\limits_{|\lambda|=r} \left(-\frac{I}{\lambda} - \frac{A}{\lambda^2} - \dots \right) d\lambda = -2\pi i I.$$

Предположим теперь, что $\sigma(A) = \emptyset$, т.е. $\rho(A) = \mathbb{C}$. Тогда для любых $x, y \in \mathscr{H}$ функция $a_{x,y}(\lambda)$ является аналитической на всей комплексной плоскости и поэтому

$$0 = \oint\limits_{|\lambda|=r} a_{x,y}(\lambda)\, d\lambda = ((\oint\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)\, d\lambda)x, y) = -2\pi i(x, y).$$

Это равенство противоречиво при любых $x = y \neq 0$. Теорема доказана.

Так как $\rho(A)$ открыто, то $\sigma(A)$ – непустое, замкнутое и ограниченное подмножество в $\mathbb{C}$, т.е. $\sigma(A)$ – непустой компакт. Верно также и обратное, любой непустой компакт в $\mathbb{C}$ может быть спектром некоторого ограниченного оператора.

Пример. Пусть K – непустой компакт в $\mathbb{C}$. Выберем в K счетное плотное множество $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ и рассмотрим в ℓ_2 линейный оператор A с матрицей

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_n & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Все λ_n являются собственными числами оператора A, поэтому $\Lambda \subset \sigma(A)$. При этом, если λ не принадлежит замыканию $cl(\Lambda)$, то $d = \inf\limits_n |\lambda - \lambda_n| > 0$ и $\|R_\lambda(A)\| = 1/d < \infty$, т.е. $\lambda \in \rho(A)$. Поэтому $\sigma(A) = cl(\Lambda) = K$.

Для доказательства формулы Бёрлинга нам потребуется следующий факт:

Теорема Банаха-Штейнгауза. *Пусть последовательность ограниченных операторов $A_n : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_1$ удовлетворяет условиям $\sup\limits_n \|A_n x\| < \infty$ для любого $x \in \mathscr{H}$. Тогда $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$.*

Доказательство. Для любого $x \in \mathscr{H}$ обозначим $M(x) = \sup_n \|A_n x\| < \infty$. Доказываем от противного. Предположим, что

$$\sup_n \|A_n\| = \sup_n \sup_{\|x\|=1} \|A_n x\| = \infty.$$

То есть, существует последовательность векторов $\|x_k\| = 1$ и подпоследовательность операторов A_{n_k}, таких, что $\|A_{n_k} x_k\| > k^2$. Без ограничения общности можно считать, что $n_k = k$. Если положить $y_k = x_k/k$, то будем иметь $y_k \to 0$, $\|A_k y_k\| \to \infty$ при $k \to \infty$. Сейчас мы построим вектор $x \in \mathscr{H}$, на котором последовательность A_k неограничена. Выбираем номер k_1 таким, чтобы $\|y_{k_1}\| < 1/2$, $\|A_{k_1} y_{k_1}\| > 1$. Допустим, что мы уже выбрали по индукции номера $k_1 < \ldots < k_{m-1}$. На следующем m-м шаге выбираем номер k_m таким, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

(а) $\|y_{k_m}\| < 2^{-m}$, $\|A_{k_j} y_{k_m}\| < 2^{-m}$ для всех $j = 1, \ldots, m-1$ (так как $y_k \to 0$, то это возможно);

(б) $\|A_{k_m} y_{k_m}\| > M(y_{k_1}) + \cdots + M(y_{k_{m-1}}) + m$ (так как $\|A_k y_k\| \to \infty$, то это возможно).

Так как $\|y_{k_m}\| < 2^{-m}$ и пространство $\mathscr{H}$ полно, то ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} y_{k_j}$ сходится к некоторому вектору $x \in \mathscr{H}$. Оценим норму

$$\|A_{k_m} x\| = \|\sum_{j=1}^{\infty} A_{k_m} y_{k_j}\| \geq \|A_{k_m} y_{k_m}\| - \sum_{j=1}^{m-1} \|A_{k_m} y_{k_j}\| - \sum_{j=m+1}^{\infty} \|A_{k_m} y_{k_j}\| \geq$$

$$\|A_{k_m} x_{k_m}\| - \sum_{j=1}^{m-1} M(y_{k_j}) - \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-j} > m - 1.$$

Следовательно, последовательность $\|A_{k_m} x\|$ (и тем более $\|A_k x\|$) неограничена вопреки условию теоремы. Это противоречие и доказывает теорему.

Замечание 1. В случае $\dim \mathscr{H} = m < \infty$ эта теорема становится совсем очевидной, так как $\|A_k\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A_k x\| \leq \sum\limits_{j=1}^{m} \|A_k e_j\| \leq \sum\limits_{j=1}^{m} M(e_j) \leq \mathrm{Const}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Спектральным радиусом оператора A называется число $r_A = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$. Так как $\lambda \in \sigma(A) \Longrightarrow |\lambda| \leq \|A\|$ (основной курс), то $r_A \leq \|A\|$.

Теорема. (Бёрлинга) *Для спектрального радиуса оператора A имеет место формула $r_A = \lim\limits_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}$ (формула Бёрлинга).*

Доказательство. Докажем сперва существование этого предела. Обозначим $a = \inf\limits_n \|A^n\|^{1/n}$ (инфимум существует у любой неотрицательной последовательности). Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Существует такой номер n_0, что $\|A^{n_0}\|^{1/n_0} < a + \varepsilon$. Любое натуральное число n представляется в виде $n = kn_0 + r$, где $0 \leq r < n_0$. Оценим сверху число $\|A^n\|^{1/n}$. Очевидно $\|A^n\|^{1/n} \leq \|A^{n_0}\|^{k/n} \|A^r\|^{1/n} < (a+\varepsilon)^{kn_0/n} \|A\|^{r/n} \to a + \varepsilon$ при $n \to \infty$. То есть, при достаточно большом n будем иметь $a \leq \|A^n\|^{1/n} < a + 2\varepsilon$. Это доказывает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = a$. Ранее мы этот предел уже обозначили символом $r(A)$. Теперь докажем, что $r(A)$ равняется спектральному радиусу r_A.

Из пункта 1^0 второго параграфа мы уже знаем, что при $r(A) < |\lambda|$ оператор $A - \lambda I$ обратим. Поэтому $r_A \leq r(A)$. Докажем обратное неравенство. Из определения r_A следует, что при $|\lambda| > r_A$ существует резольвента $R_\lambda(A)$, а из аналитичности резольвенты следует, что для любых $x, y \in \mathscr{H}$ комплексная функция $a_{x,y}(\lambda) = (R_\lambda(A)x, y)$ аналитична при $|\lambda| > r_A$, при этом $a_{x,y}(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Значит $a_{x,y}(\lambda)$ раскладывается при $|\lambda| > r_A$ в сходящийся ряд Лорана $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x,y)\lambda^{-n}$. Так как при $|\lambda| > \|A\|$ этот ряд совпадает с рядом Неймана, то $c_n(x,y) = -(A^{n-1}x, y)$. Из сходимости ряда следует, что $|c_n(x,y)\lambda^{-n}| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому последоватнльность $|(A^{n-1}x, y)\lambda^{-n}|$ ограничена для любых $x, y \in \mathscr{H}$ и $|\lambda| > r_A$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и положим $\lambda = r_A + \varepsilon$. Рассмотрим последовательность операторов $B_n = A^n/(r_A + \varepsilon)^{n+1}$. Из предыдущего следует, что для любых $x, y \in \mathscr{H}$ последовательность $(x, B_n y)$ ограничена. Применяя теорему Банаха-Штейнгауза к последовательности линейных функционалов $f_{n,y}(x) = (x, B_n y)$ от аргумента x, получаем ограниченность норм $\|f_{n,y}\| = \|B_n y\|$ для каждого $y \in \mathscr{H}$. Применяя ещё раз эту теорему для последовательности операторов B_n, мы получаем её ограниченность, т. е. $\|B_n\| = \|A^n/(r_A + \varepsilon)^{n+1}\| \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. То есть, $\|A^n\|^{1/n} \leq (r_A + \varepsilon)^{1+1/n} M^{1/n}$. В пределе при $n \to \infty$ получим требуемое неравенство $r(A) \leq r_A$. Значит $r(A) = r_A$ и теорема доказана.

2^0. **Общее определение аналитических функций от операторов.** Для фиксированного оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ обозначим через $\mathscr{F}_A$ линейное пространство всех аналитических функций, каждая из которых задана на некоторой окрестности спектра $\sigma(A)$. На самом деле $\mathscr{F}_A$ является алгеброй, если на $\mathscr{F}_A$ еще ввести операцию поточечного умножения функций $(f \cdot g)(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$. Пусть $f \in \mathscr{F}_A$. Рассмотрим в $\operatorname{dom} f$ некоторую область D_f, содержащую спектр $\sigma(A)$, границей которой является кусочно гладкий контур $\Gamma_f \subset \operatorname{dom} f$. Функция $\widetilde{f}(A)$ от оператора A определяется следующей формулой:

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_f} f(\lambda) R_\lambda(A)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_f} \frac{f(\lambda)}{\lambda I - A}\, d\lambda.$$

Считаем, что контур Γ_f ориентирован против часовой стрелки. Сразу следует убедиться в корректности такого определения. Пусть Γ_1, Γ_2 – два непересекающихся между собой контура, удовлетворяющих вышеприведенным требованиям. Так как в области между этими контурами операторная функция $f(\lambda)R_\lambda(A)$ аналитична, то для любых $x, y \in \mathscr{H}$ комплексная функция $f(\lambda)(R_\lambda(A)x, y)$ тоже аналитична и, по теореме Коши,

$$\left(\oint\limits_{\Gamma_1} - \oint\limits_{\Gamma_2} \right) f(\lambda)(R_\lambda(A)x, y)\, d\lambda = 0.$$

Так как x, y произвольны, то это же самое верно и для операторных интегралов. Если контуры Γ_1 и Γ_2 пересекаются между собой, то можно в достаточно малой окрестности спектра $\sigma(A)$ рассмотреть третий контур, который не будет пересекаться ни с Γ_1 ни с Γ_2, и сравнить сперва интегралы по паре контуров Γ_1, Γ_3, а затем по паре Γ_2, Γ_3.

Отметим важнейшие свойства вышеопределенного операторного исчисления.

(а) Отображение $\sim\colon\ \mathscr{F}_A \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ является линейным (это очевидно).

(б) Если для некоторого $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ имеем $[A,B]=0$, то $[\widetilde{f}(A),B]=0$ для всех $f \in \mathscr{F}_A$ (в частности $[\widetilde{f}(A),\widetilde{g}(A)]=0$ для всех $f,g \in \mathscr{F}_A$).
Это следует из того, что $[R_\lambda(A),B]=0$ для всех $\lambda \in \rho(A)$.

(в) Для любых $T \in \operatorname{inv}\mathscr{B}(\mathscr{H})$, $f \in \mathscr{F}_A$ имеет место $\sigma(TAT^{-1})=\sigma(A)$ и $T\widetilde{f}(A)T^{-1}=\widetilde{f}(TAT^{-1})$.
Это следует из равентсва $TR_\lambda(A)T^{-1}=R_\lambda(TAT^{-1})$.

(г) $\widetilde{f\cdot g}\,(A)=\widetilde{f}(A)\,\widetilde{g}(A)$ для любых $f,g \in \mathscr{F}_A$.
Считаем, что области D_f, D_g выбраны по описанным выше правилам, причем $cl(D_g) \subset D_f$, т.е. $\Gamma_g \subset D_f$ и $\operatorname{dist}(\Gamma_f,\Gamma_g)>0$. Из первого тождества Гильберта следуют равенства

$$\widetilde{f}(A)\,\widetilde{g}(A)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{\Gamma_f} R_\lambda(A)f(\lambda)\,d\lambda \oint\limits_{\Gamma_g} R_\mu(A)g(\mu)\,d\mu=$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{\Gamma_f}\oint\limits_{\Gamma_g} R_\lambda(A)R_\mu(A)f(\lambda)g(\mu)\,d\lambda d\mu=\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{\Gamma_f}\oint\limits_{\Gamma_g}(R_\lambda(A)-R_\mu(A))\frac{f(\lambda)g(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\lambda d\mu.$$

Но

$$\oint\limits_{\Gamma_g}\frac{g(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu=0, \quad \text{так как} \quad \lambda \notin D_g,$$

$$\oint\limits_{\Gamma_f}\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\lambda=2\pi i f(\mu), \quad \text{так как} \quad \mu \in D_f.$$

Поэтому

$$\widetilde{f}(A)\,\widetilde{g}(A)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_g} R_\mu(A)f(\mu)g(\mu)\,d\mu=\widetilde{f\cdot g}\,(A).$$

(д) $\widetilde{p}\,(A)=p\,(A)$ для любого полинома $p(\lambda)$.
Это свойство достаточно проверить для степеней A^n $(n \geq 0)$. Для $A^0=I$ равенство $\widetilde{I}=I$ было проверено в доказательстве теоремы о непустоте спектра. Для $A^1=A$ это получается из следующего равенства:

$$\widetilde{A}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_f}\frac{\lambda I}{\lambda I-A}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_f}\frac{\lambda I-A}{\lambda I-A}\,d\lambda+\frac{A}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_f}\frac{I}{\lambda I-A}\,d\lambda=A.$$

Далее, из свойства (г) получаем $\widetilde{A^n}=\widetilde{A}^n=A^n$.

Из свойства (г) следует, что $\sim$ является гомоморфизмом алгебры $\mathscr{F}_A$ в алгебру $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

(е) Если $f \in \mathscr{F}_A$, то оператор $\widetilde{f}(A)$ обратим тогда и только тогда, когда функция $f(\lambda)$ не имеет нулей на спектре $\sigma(A)$.

Допустим сначала, что $|f(\lambda)| > 0$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$. Тогда $|f(\lambda)| > \varepsilon_0 > 0$ и в некоторой окрестности $D_f \supset \sigma(A)$. То есть, $g(\lambda) = 1/f(\lambda) \in \mathscr{F}_A$ и $f(\lambda)g(\lambda) = 1$ для всех $\lambda \in D_f$. Из свойства (г) следует, что $\widetilde{f}(A)\,\widetilde{g}(A) = I$. Допустим теперь, что $f(\lambda)$ имеет корень $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Тогда $g(\lambda) = f(\lambda)/(\lambda - \lambda_0) \in \mathscr{F}_A$ и $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)g(\lambda)$. Опять по свойствам (г),(д) получаем $\widetilde{f}(A) = (A - \lambda_0 I)\widetilde{g}(A)$. Если бы $\widetilde{f}(A)$ был обратим, то $I = (A - \lambda_0 I)\widetilde{g}(A)\widetilde{f}(A)^{-1}$. Это означает, что $\lambda_0 \in \rho(A)$. Получили противоречие, Значит оператор $\widetilde{f}(A)$ необратим.

(ж) $\widetilde{f}(\sigma(A)) = \sigma(\widetilde{f}(A))$ для любой функции $f \in \mathscr{F}_A$.
Это равенство называют *теоремой об отображении спектра*. Её доказательство сразу следует из (е), если мы рассмотрим для каждого $\mu \in \mathbb{C}$ функцию $\mu - f(\lambda)$. Так как $\mu \in f(\sigma(A)) \iff \mu - f(\lambda)$ имеет корень $\lambda = \lambda_0 \in \sigma(A) \iff$ оператор $\mu I - \widetilde{f}(A)$ необратим $\iff \mu \in \sigma(\widetilde{f}(A))$.

(з) $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ для любых $f \in \mathscr{F}_A$, $g \in \mathscr{F}_{\widetilde{f}(A)}$ (функториальное свойство).

$$\widetilde{g} \circ \widetilde{f}(A) = \widetilde{g}(\widetilde{f}(A))) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_g} \frac{g(\mu)I}{\mu I - \widetilde{f}(A)}\,d\mu = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma_g}\oint\limits_{\Gamma_f} \frac{g(\mu)}{\mu - f(\lambda)}\frac{I}{\lambda I - A}\,d\lambda\,d\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_f} \frac{g(f(\lambda))I}{\lambda I - A}\,d\lambda = \widetilde{g \circ f}(A).$$

Обозначим через $\widetilde{\mathscr{F}_A}$ образ пространства $\mathscr{F}_A$ при отображении $\sim$. Ясно, что $\widetilde{\mathscr{F}_A}$ является коммутативной подалгеброй в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Далее будем её называть *алгеброй аналитических функций от оператора A*.

(и) Отображение $\sim\colon\ \mathscr{F}_A \to \widetilde{\mathscr{F}_A}$ является непрерывным в следующем смысле. Если $f, g \in \mathscr{F}_A$ и окрестность спектра $\sigma(A) \subset W \subset D_f \cap D_g$ имеет кусочно гладкую границу, то $\|\widetilde{f}(A) - \widetilde{g}(A)\| \le C_{W,A}\|f - g\|_W$, где $\|f - g\|_W = \sup\limits_{\lambda \in W}|f(\lambda) - g(\lambda)|$, а константа $C_{W,A}$ зависит только от оператора A и окрестности W его спектра $\sigma(A)$. Доказательство состоит в оценке нормы интеграла Коши

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma} \frac{(f(\lambda) - g(\lambda))I}{\lambda I - A}\,d\lambda\right\| \le \frac{l(\Gamma)}{2\pi}\max_{\lambda \in \Gamma}\|R_\lambda(A)\|\|f - g\|_W,$$

где Γ – контур, являющийся границей области W, а $l(\Gamma)$ – его длина.

Следствие. Если $f_n, f \in \mathscr{F}_A$ и последовательность f_n сходится равномерно к f на некоторой окрестности $W \supset \sigma(A)$, то $\widetilde{f}_n(A) \to \widetilde{f}(A)$ по норме.

Из свойства (и) следует, что общая теория аналитических функций от операторов является расширением функционального исчисления, построенного с помощью степенных рядов. В самом деле, если

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(A - z_0 I)^n \quad \text{и} \quad r(A - z_0 I) < R \text{ – радиуса сходимости ряда для } f(z),$$

то последовательность частичных сумм $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(z-z_0)^k$ сходится равномерно в некотором круге, содержащем спектр $\sigma(A)$ и поэтому $\widetilde{S_n}(A) = S_n(A) \to \widetilde{f}(A)$. Кроме этого, из сходимости операторного степенного ряда следует $S_n(A) \to f(A)$. Поэтому $f(A) = \widetilde{f}(A)$. С этого момента мы можем не писать значок $\sim$ над $f(A)$.

(к) Если $f \in \mathscr{F}_A$, то $f^{(n)} \in \mathscr{F}_A$ и

$$f^{(n)}(A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_f} \frac{I}{\lambda I - A}\, f^{(n)}(\lambda)\, d\lambda = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_f} \frac{I}{(\lambda I - A)^{n+1}}\, f(\lambda)\, d\lambda, \quad n \geq 0.$$

Здесь последний интеграл получается n-кратным интегрированием по частям предыдущего выражения.

(л) Непрерывная зависимость f от оператора A.

Пусть $f \in \mathscr{F}_A$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что из $\|B - A\| < \varepsilon$ следует $f \in \mathscr{F}_B$ и

$$(8) \qquad f(B) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_f} R_\lambda(A)((A-B)R_\lambda(A))^n f(\lambda)\, d\lambda.$$

Из второго тождества Гильберта ($7'$) следует равенство

$$(9) \quad R_\lambda(B) = R_\lambda(A)\{I - (A-B)R_\lambda(A)\}^{-1} = R_\lambda(A)\sum_{n=0}^{\infty}\{(A-B)R_\lambda(A)\}^n,$$

если только $\|A-B\| < \varepsilon = 1/\max\limits_{\lambda\in\Gamma_f}\|R_\lambda(A)\|$. Для операторов Грина $G_0(\lambda) = -R_\lambda(A)$, $G(\lambda) = -R_\lambda(B)$ и $V = B - A$ тождество (9) приобретает вид

$$G(\lambda) = G_0(\lambda) + G_0(\lambda)VG_0(\lambda) + G_0(\lambda)VG_0(\lambda)VG_0(\lambda) + \ldots,$$

которое в квантовой теории рассеяния называется борновским рядом. (Для неограниченных операторов A, B борновский ряд часто оказывается расходящимся и им можно пользоваться только как асимптотическим рядом). Из тождества (8) следует полезное равенство

$$f(B) = f(A) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_f} R_\lambda(A)(B-A)R_\lambda(A)f(\lambda)\, d\lambda + O((B-A)^2),$$

где $\|O((B-A)^2)\|/\|B-A\|^2 \leq \mathrm{Const}$, из которого сразу следует непрерывность $f(A)$ как функции от операторного аргумента A.

Если $[A,B] = 0$ и $V = B - A$, то формулу (8) можно интерпретировать как разложение в операторный ряд Тейлора

$$f(A+V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(A)}{n!}\, V^n.$$

В этом смысле сама формула (8) тоже является некоммутативным аналогом операторного ряда Тейлора, если положим по определению

$$f^{(n)}(A)(\underbrace{V,\ldots,V}_{n}) = (-1)^{n+1}\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_f} R_\lambda(A)(VR_\lambda(A))^n f(\lambda)\,d\lambda. \tag{10}$$

(м) Из тождества (8) следует также, что если $f\in\mathscr{F}_A$ и $D_f\subset\operatorname{dom} f$ – окрестность спектра $\sigma(A)$ с кусочно гладкой границей Γ_f, то для любого $V\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ имеем $\sigma(A+\mu B)\subset D_f$ и $f(A+\mu V)$ является аналитической операторной функцией от $\mu\in\mathbb{C}$ при $|\mu|<1/(\max\limits_{\lambda\in\Gamma_f}\|R_\lambda(A)\|\|V\|)$. Кроме этого, из (8),(10) следует разложение

$$f(A+\mu V)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(A)(\underbrace{V,\ldots,V}_{n})\ \mu^n.$$

Это свойство операторных функций применяется в аналитической теории возмущений.

(н) *Свойство расщепляемости.* Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A является объединением двух непересекающихся замкнутых множеств $\sigma(A)=\sigma_1\cup\sigma_2$. Рассмотрим два оператора

$$P_{\sigma_j}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_j}\frac{I}{\lambda I-A}\,d\lambda \qquad (j=1,2),$$

где контур Γ_1 обходит один раз против часовой стрелки множество σ_1, но не σ_2, а Γ_2 обходит σ_2, но не σ_1. Тогда

$P_{\sigma_j}^2=P_{\sigma_j}$ $(j=1,2)$,
$P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}=0$,
$P_{\sigma_1}+P_{\sigma_2}=I$.

и для всех $f\in\mathscr{F}_A$ имеем $[f(A),P_{\sigma_j}]=0$. Кроме этого, если положить $\mathscr{H}_j=P_{\sigma_j}\mathscr{H}$, $A_j=A|_{\mathscr{H}_j}$, то $\sigma(A_j)=\sigma_j$ $(j=1,2)$, $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\dot{+}\mathscr{H}_2$, $f(A)=f(A_1)\dot{+}f(A_2)$.

Для доказательства рассмотрим две непересекающиеся окрестности D_1, D_2 множеств σ_1 и σ_2 с кусочно гладкими границами Γ_1 и Γ_2 (это возможно, так как расстояние $d(\sigma_1,\sigma_2)>0$). Рассмотрим две аналитические функции $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, заданные на $D_1\cup D_2$ формулами

$$p_1(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\in D_1\\ 0, & \lambda\in D_2\end{cases}\qquad p_2(\lambda)=\begin{cases}0, & \lambda\in D_1\\ 1, & \lambda\in D_2\end{cases}$$

Из свойств (а)–(г) следует, что операторы $P_{\sigma_1}=p_1(A)$, $P_{\sigma_2}=p_2(A)$ удовлетворяют перечисленным выше свойствам. Откуда следует, что $I_j=P_{\sigma_j}|_{\mathscr{H}_j}$ действуют на подпространствах $\mathscr{H}_j$ как единичные операторы $(j=1,2)$. По этой причине проекторы P_{σ_j} $(j=1,2)$ иногда называют *локальными единицами.* Для любого $\lambda_0\notin\sigma_j$ можно выбрать контур Γ_j так, чтобы $\lambda_0\notin D_j$ и поэтому оператор

$$R_{\lambda_0}(A_j)x=\frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{\Gamma_j}\frac{I}{\lambda I-A}\,\frac{d\lambda}{\lambda-\lambda_0}\right)x \qquad (x\in\mathscr{H}_j)$$

будет резольвентой для $A_j-\lambda_0 I_j$, так как для любого $x\in\mathscr{H}_j$ получаем $A_jx=Ax$, $I_jx=Ix$ и

$$R_{\lambda_0}(A_j)(A_j-\lambda_0 I_j)x=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{\Gamma_j}\frac{A-\lambda_0 I}{\lambda I-A}\,\frac{d\lambda}{\lambda-\lambda_0}\right)x=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_j}\frac{d\lambda}{\lambda-\lambda_0}\;x+\frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_{\Gamma_j}\frac{I}{\lambda I-A}\;d\lambda\right)x=I_jx=x.$$

Наоборот, если, например, $\lambda_0\in\sigma_1$ и оператор $A_1-\lambda_0 I_1$ обратим на $\mathscr{H}_1$, то из предыдущего следует, что оператор $A_2-\lambda_0 I_2$ тоже обратим на $\mathscr{H}_2$ (так как $\lambda_0\notin\sigma_2$), а тогда оператор $A-\lambda_0 I=(A_1-\lambda_0 I_1)\dot{+}(A_2-\lambda_0 I_2)$ будет обратимым на $\mathscr{H}$, вопреки предположению $\lambda_0\in\sigma(A)$. Эти рассуждения доказывают, что $\sigma(A_j)=\sigma_j$ $(j=1,2)$.

Легко понять, что результаты этого пункта справедливы для случая, когда спектр $\sigma(A)$ разбивается на любое конечное число попарно не пересекающихся замкнутых множеств σ_j $(j=1,\dots,m)$. В этом случае существуют проекторы P_{σ_j} $(j=1,\dots,m)$ со свойствами

$$(11)\qquad P_{\sigma_j}^2=P_{\sigma_j},\;\; P_{\sigma_j}P_{\sigma_k}=0\;(j\neq k),\;\; \sum_{j=1}^m P_{\sigma_j}=I,$$

при этом $\mathscr{H}$ расщепляется в прямую сумму замкнутых подпространств $\mathscr{H}_j=P_{\sigma_j}\mathscr{H}$ и для операторов $A_j=A|_{\mathscr{H}_j}$ имеет место разложение в прямую сумму $f(A)=f(A_1)\dot{+}\cdots\dot{+}f(A_m)$ $(f\in\mathscr{F}_A)$, причем $\sigma(A_j)=\sigma_j$ $(j=1,\dots,m)$.

3^0. **Функций от оператора, удовлетворяющего полиномиальному тождеству.** Допустим, что оператор $A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ удовлетворяет уравнению

$$p(A)=A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nI=0.$$

Из теоремы об отображении спектров (свойство (ж) из предыдущего пункта) следует, что $0=\sigma(p(A))=p(\sigma(A))$. То есть, если $\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ – различные корни полинома $p(\lambda)$, то $\sigma(A)\subset\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$. Если для любого полинома $q(\lambda)$ степени не выше $n-1$ имеем $q(A)\neq 0$ (в этом случае $p(\lambda)$ называется *минимальным аннулирующим полиномом* для A), то $\sigma(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$. Для доказательства этого разложим полином $p(\lambda)$ на простые множители $p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\dots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$ и допустим, что $\lambda_1\notin\sigma(A)$. Тогда оператор $(A-\lambda_1 I)^{k_1}$ обратим и в равенстве

$$(A-\lambda_1)^{k_1}(A-\lambda_2)^{k_2}\dots(A-\lambda_m)^{k_m}=0$$

на него можно сократить, т. е. $q(A)=0$ для полинома $q(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\dots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$ степени $<n$.

Любой аннулирующий полином делится на минимальный полином. Допустим $q(A)=0$. Делим $q(\lambda)$ на $p(\lambda)$ с остатком $q(\lambda)=f(\lambda)s(\lambda)+r(\lambda)$, где $\deg r<\deg f$. Подставив в это равенство A вместо λ получим $r(A)=0$ для полинома r степени $<n$. Поэтому $r(\lambda)=0$. Отсюда также следует, что *минимальный аннулирующий полином единственен.* Далее будем обозначать этот полином символом $p_A(\lambda)$.

Пусть $\sigma_j=\{\lambda_j\}$ $(j=1,\dots,m)$. Из свойства (н) (предыдущего пункта 2^0) следует, что имеет место разложение в прямую сумму $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\dot{+}\cdots\dot{+}\mathscr{H}_m$, где $\mathscr{H}_j=P_{\sigma_j}\mathscr{H}$,

$$P_{\sigma_j} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda-\lambda_j|=\varepsilon} \frac{I}{\lambda I - A}\, d\lambda \quad (j=1,\ldots,m;\ 0<\varepsilon<\min_{j\neq k}|\lambda_j-\lambda_k|),$$

и для операторов $A_j = A|_{\mathscr{H}_j}$ имеет место разложение в прямую сумму $f(A) = f(A_1) \dotplus \cdots \dotplus f(A_m)$ $(f \in \mathscr{F}_A)$, причем $\sigma(A_j) = \{\lambda_j\}$ $(j=1,\ldots,m)$. Для минимального аннулирующего полинома $p(\lambda)$ имеем

$$p(A)x = p(A_j)x = (A_j - \lambda_j I_j)^{k_j} \prod_{l\neq j} (A_j - \lambda_l I_j)^{k_l} x = 0 \quad (x \in \mathscr{H}_j),$$

где $I_j = P_{\sigma_j}|_{\mathscr{H}_j}$ – локальные единицы. Так как $\lambda_l \notin \sigma(A_j)$ при $l \neq j$, то операторы $A_j - \lambda_l I_j$ обратимы на $\mathscr{H}_j$ и поэтому $(A_j - \lambda_j I_j)^{k_j} = 0$ на $\mathscr{H}_j$. Это означает, что полином $(\lambda-\lambda_j)^{k_j}$ является аннулирующим для оператора A_j на подпространстве $\mathscr{H}_j$.

Задача 32. Докажите, что $(A_j - \lambda_j I_j)^{k_j-1} \neq 0$, т. е. $(\lambda-\lambda_j)^{k_j}$ являются минимальными аннулирующими полиномами для операторов A_j на подпространствах $\mathscr{H}_j$.

Так как $(A_j - \lambda_j I_j)^l = 0$ для всех $l \geq k_j$, то разлагая функцию $f \in \mathscr{F}_A$ в ряд Тейлора в окрестности точки λ_j, получим из свойства расщепляемости

$$f(A) = \sum_{l=0}^{k_1-1} \frac{f^{(l)}(\lambda_1)}{l!}\,(A_1 - \lambda_1 I_1)^l \dotplus \cdots \dotplus \sum_{l=0}^{k_m-1} \frac{f^{(l)}(\lambda_m)}{l!}\,(A_m - \lambda_m I_m)^l.$$

Это означает, что оператор $f(A)$ зависит только от конечного набора чисел $f^{(l)}(\lambda_j)$ $(j=1,\ldots,m;\ l=0,\ldots,k_j-1)$. То есть, мы доказали следующий факт:

Лемма. *Если* $p_A(\lambda) = \prod\limits_{j=1}^{m} (\lambda-\lambda_j)^{k_j}$ *– (минимальный) аннулирующий полином для оператора* A *и* $f, g \in \mathscr{F}_A$, $f^{(l)}(\lambda_j) = g^{(l)}(\lambda_j)$ $(j=1,\ldots,m;\ l=0,\ldots,k_j-1)$, *то* $f(A) = g(A)$.

Эта лемма позволяет сводить вычисление оператора $f(A)$ к вычислению другой функции $g(A)$, где $g(\lambda)$ является просто полиномом. Нам необходимо теперь решить следующую задачу:

(L): *Для заданных чисел* $f^{(l)}(\lambda_j)$ $(j=1,\ldots,m;\ l=0,\ldots,k_j-1)$ *найти такой полином* $r(\lambda)$ *степени* $k_1+\ldots+k_m-1$, *что* $r^{(l)}(\lambda_j) = f^{(l)}(\lambda_j)$ $(j=1,\ldots,m;\ l=0,\ldots,k_j-1)$.

Теорема. *Существует единственный полином* $r(\lambda)$*, дающий решение задачи* (L).

Доказательство. Докажем сперва единственность такого полинома. Допустим, что два полинома $r_1(\lambda)$, $r_2(\lambda)$ являются решениями задачи (L). Тогда для $s(\lambda) = r_1(\lambda) - r_2(\lambda)$ получаем $s^{(l)}(\lambda_j) = 0$ $(j=0,\ldots,k_j-1)$. Поэтому $s(\lambda)$ делится на $(\lambda-\lambda_j)^{k_j}$. Это верно для каждого $j=1,\ldots,m$, поэтому $s(\lambda)$ делится на полином $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}\ldots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$, степень которого равна $n = k_1+\cdots+k_m$. Так как $r_1(\lambda)$, $r_2(\lambda)$ имеют меньшую степень, то $r_1(\lambda) = r_2(\lambda)$.

Существование полинома $r(\lambda)$ будет доказано путем явного построения. Правильную дробь $r(\lambda)/p(\lambda)$ разложим на простые дроби

$$\frac{r(\lambda)}{p_A(\lambda)} = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{\alpha_{j,1}}{(\lambda-\lambda_j)^{k_j}} + \dots + \frac{\alpha_{j,k_j}}{\lambda-\lambda_j} \right\}. \tag{12}$$

Обозначив

$$q_j(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{(\lambda-\lambda_j)^{k_j}} =$$
$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\dots(\lambda-\lambda_{j-1})^{k_{j-1}}(\lambda-\lambda_{j+1})^{k_{j+1}}\dots(\lambda-\lambda_m)^{k_m},$$

мы для каждого $j = 1, \dots, m$ получим

$$\frac{r(\lambda)}{q_j(\lambda)} = \alpha_{j,1} + \dots + \alpha_{j,k_j}(\lambda-\lambda_j)^{k_j-1} + (\lambda-\lambda_j)^{k_j}\beta_j(\lambda),$$

где $\beta_j(\lambda)$ – рациональная функция от λ, регулярная при $\lambda = \lambda_j$. Отсюда

$$\alpha_{j,1} = \left[\frac{r(\lambda)}{q_j(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_j},$$

$$\alpha_{j,2} = \left[\frac{r(\lambda)}{q_j(\lambda)}\right]'_{\lambda=\lambda_j} = r(\lambda_j)\left[\frac{1}{q_j(\lambda)}\right]'_{\lambda=\lambda_j} + r'(\lambda_j)\left[\frac{1}{q_j(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_j},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

Эти формулы показывают, что $\alpha_{j,l}$ выражаются через значения и производные полинома $r(\lambda)$ на спектре оператора A, а эти значения нам известны: они равны соответствующим значениям функции $f(\lambda)$ и её производных. Поэтому

$$\alpha_{j,l} = \frac{1}{l!}\left[\frac{f(\lambda)}{q_j(\lambda)}\right]^{(l)}_{\lambda=\lambda_j} \qquad j = 1, \dots, m; \quad l = 0, \dots, k_j - 1.$$

После того, как найдены все $\alpha_{j,l}$, умножаем обе части равенства (12) на $p_A(\lambda)$ и получаем

$$r_f(\lambda) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1}\frac{1}{l!}\left[\frac{f(\lambda)}{q_j(\lambda)}\right]^{(l)}_{\lambda=\lambda_j}(\lambda-\lambda_j)^l\, q_j(\lambda). \tag{13}$$

Теорема доказана.

Полином $r_f(\lambda)$, определяемый формулой (13) и являющийся решением интерполяционной задачи (L), называется *полиномом Лагранжа-Сильвестра.* На практике чаще всего встречается случай, когда $k_1 = \dots = k_m = 1$. В этом случае $p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_m)$ и интерполяционный полином $r(\lambda)$ имеет более простой вид

$$r_f(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} f(\lambda_j)\frac{(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_{j-1})(\lambda-\lambda_{j+1})\dots(\lambda-\lambda_m)}{(\lambda_j-\lambda_1)\dots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\dots(\lambda_j-\lambda_m)}. \tag{14}$$

Полином, определяемый формулой (14) называется *интерполяционным полиномом Лагранжа.*

Задача 33. Допустим полином $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1} \dots (\lambda-\lambda_n)^{l_n}$ является аннулирующим для оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (не обязательно минимальный, в частности, могут не все $\lambda_j \in \sigma(A)$). Пусть $r(\lambda)$ – полином Лагранжа-Сильвестра, построенный по корням этого полинома для функции $f \in \mathscr{F}_A$. Докажите, что $f(A) = r(A)$.

4^0. **Функций от матриц.** В конечномерном случае $\mathscr{H} = \mathbb{C}^n$ все линейные операторы ограничены и представляются в фиксированном базисе $(n \times n)$-матрицами. Под функцией от матрицы $[A]$ мы понимаем матрицу $[f(A)]$ оператора $f(A)$ в том же базисе, в котором $[A]$ является матрицей оператора A. Характеристический полином $d_{n,[A]}(\lambda)$ определяется как определитель λ-матрицы $d_{n,[A]}(\lambda) = \det(\lambda I - [A])$. Так как для любой невырожденной матрицы T имеем $d_{n,T[A]T^{-1}}(\lambda) = d_{n,[A]}(\lambda)$, То можно говорить и о характеристическом полиноме самого оператора A, представляющегося в некотором базисе матрицей $[A]$. Далее будем обозначать этот полином (так как он инвариантен при замене базиса) через $d_{n.A}(\lambda)$. Теорема Гамильтона-Кэлли гласит, что матрица $[A]$ является корнем своего характеристического полинома, т. е. $d_{n,A}([A]) = 0$, Поэтому, в силу задачи 33, для вычисления функций от матрицы $[A]$ можно в принципе пользоваться полиномом Лагранжа-Сильвестра, построенным с помощью аннулирующего полинома $p_{n,A}(\lambda)$. Это не всегда удобно, так как он совпадает с минимальным аннулирующим полиномом $p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda-\lambda_m)^{k_m}$ только в случае, когда для любого $1 \leq j \leq m$ жорданова форма матрицы $[A]$ имеет ровно одну жорданову клетку J_{λ_j} размера $k_j \times k_j$. В нашем курсе мы не будем подробно заниматься этим вопросом, а предложим без доказательств только несколько рецептов для нахождения минимального аннулирующего многочлена.

1) Вычислим еще один инвариант $d_{n-1,A}(\lambda)$, который равен наибольшему общему делителю всех $(n-1)$-миноров матрицы $\lambda I - [A]$. Тогда $p_A(\lambda) = d_{n,A}(\lambda)/d_{n-1,A}(\lambda)$.

2) Решаем систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $y' = [A]y$. Фундаментальное решение для координат y_k вектора y ищется в виде $p_j(t)e^{\lambda_j t}$; полиномы $p_j(t)$ находятся методом неопределенных коэффициентов. Тогда максимальная степень полиномов $p_j(t)$ на 1 меньше степени k_j мономов из разложения минимального аннулирующего полинома $p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda-\lambda_m)^{k_m}$. Далее по полиному $p_A(\lambda)$ ищется полином Лагранжа-Сильвестра.

3) Приводим матрицу $[A]$ к жорданову виду $J = T[A]T^{-1}$. Так как $J = J_1 \dotplus \dots \dotplus J_s$, то $f([A]) = T^{-1}(f(J_1) \dotplus \dots \dotplus f(J_s))T$. Покажем, как в этом случае вычисляется аналитическая функция f от жордановой клетки размера $m \times m$

$$J_\mu = \begin{bmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \mu & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & \mu & 1 \\ 0 & & & \mu \end{bmatrix}.$$

Так как

$$J_\mu - \mu I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \text{\Large 0} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \;\; 1 \\ \text{\Large 0} & & & 0 \end{bmatrix},$$

то матрица $(J_\mu - \mu I)^k$ имеет единицы на диагонали, находящейся на расстоянии k выше главной диагонали (на остальных местах этой матрицы стоят нули). Полином Лагранжа-Сильвестра для жордановой клетки J_μ и функции $f(\lambda)$ совпадает с полиномом Тейлора

$$r_f(\lambda) = f(\mu) + f'(\mu)(\lambda - \mu) + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\mu)(\lambda - \mu)^{m-1}.$$

Если в него подставить J_μ вместо λ, то получим

$$f(J_\mu) = \begin{bmatrix} f(\mu) & f'(\mu) & \cdot & & \frac{f^{(m-1)}(\mu)}{(m-1)!} \\ & f(\mu) & f'(\mu) & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot \;\; \cdot & \cdot \\ \text{\Huge 0} & & & f(\mu) & f'(\mu) \\ & & & & f(\mu) \end{bmatrix}.$$

Задача 34. С помощью полинома Лагранжа-Сильвестра вычислить

$$\ln \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

для ветви комплексного логарифма $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$, заданной на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом $(-\infty, 0]$.

Задача 35. С помощью полинома Лагранжа найти $\mathscr{F}^{\mathscr{F}}$, где $\mathscr{F}$ — преобразование Фурье

$$(\mathscr{F}x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(s) e^{-its} ds, \quad x \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}).$$

Задача 36. Докажите, что для любой невырожденной $(n \times n)$-матрицы A существует такая матрица B, что $A = e^B$.

Задача 37. Для матрицы $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ рассмотрим все ее квадратные корни

$$1)\ \pm I;\ \ 2)\ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};\ \ 3)\ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{1-\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix}\ (\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \beta \neq 0);\ \ 4)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & -1 \end{bmatrix}.$$

Какие из этих квадратных корней являются аналитическими функциями от I?

§ 4. Непрерывные функции от ограниченного самосопряженного оператора

1^0. **Границы спектра нормального и самосопряженного оператора.** Напомном, что оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется нормальным, если $[A, A^*] = 0$. Наиболее важные классы нормальных операторов, которые чаще всего применяются это 1) самосопряженные операторы $A = A^*$; 2) ортогональные проекторы $P^2 = P$, $P = P^*$; 3) унитарные операторы $U^* = U^{-1}$.

Теорема. *Спектральный радиус нормального оператора A равен его норме,* $r(A) = \|A\|$.

Доказательство. Рассмотрим сначала более простой случай сомосопряженного оператора $A = A^*$. По формуле Бёрлинга $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$. Рассмотрим этот предел по подпоследовательности $n_k = 2^k$. т. е. $r(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \|A^{2^k}\|^{2^{-k}}$. Тождество $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для самосопряженного оператора принимает вид $\|A^2\| = \|A\|^2$. Поэтому

$$\|A^{2^k}\| = \|A^{2^{k-1}} A^{2^{k-1}}\| = \|A^{2^{k-1}}\|^2 = \cdots = \|A\|^{2^k}.$$

Это тождество и доказывает, что $r(A) = \|A\|$. Пусть теперь A – произвольный нормальный оператор. Рассмотрим самосопряженный оператор $B = A^*A$. Из тождества $\|A^*A\| = \|A\|^2$ и нормальности оператора A следует равенство

$$\|A^2\| = \|(A^2)^*A^2\| = \|(A^*A)^2\| = \|B^2\| = \|B\|^2 = \|A^*A\|^2 = \|A\|^4.$$

Это означает, что равенство $\|A^2\| = \|A\|^2$ и предыдущее доказательство остается верным для нормальных операторов. Теорема доказана.

Задача 38. Докажите, что если спектр нормального оператора A состоит из одной точки, $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$, то $A = \lambda_0 I$.

Задача 39. Докажите, что если спектр нормального оператора конечен, т. е. $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, то

$$(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_m I) = 0.$$

(Это означает, что $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_m)$ является минимальным аннулирующим полиномом для A).

Задача 40. Докажите, что если спектр нормального оператора конечен, т. е. $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, то проекторы $P_j = P_{\{\lambda_j\}}$ $(1 \le j \le m)$ ортогональны (т. е. $P_j\mathscr{H} \perp P_k\mathscr{H}$, $j \ne k$) и

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m.$$

(Это простейший случай спектральной теоремы для нормального оператора).

Лемма. *Остаточный спектр нормального оператора пуст.*

Доказательство. Если оператор A нормален, то $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для любого $x \in \mathscr{H}$. Этот факт следует из тождеств $\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|^2$. Теперь, если x – собственный вектор оператора A с собственным числом λ, то $0 = \|(A - \lambda I)x\| = \|(A^* - \overline{\lambda} I)x\|$, т. е. x является также собственным вектором для A^* с собственным числом $\overline{\lambda}$. Это означает, что для нормального оператора $\sigma_p(A^*) = \overline{\sigma_p(A)}$. Пустота остаточного спектра теперь сразу следует из формулы для остаточного спектра (основной курс)

$$\sigma_r(A) = \overline{\sigma_p(A^*)} \setminus \sigma_p(A) = \sigma_p(A) \setminus \sigma_p(A) = \emptyset.$$

Лемма доказана.

Теорема (Критерий Вейля). *Число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит спектру нормального оператора A тогда и только тогда, когда существует последовательность нормированных векторов $x_n \in \mathscr{H}$, $\|x_n\| = 1$, такая что $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \sigma_p(A)$, то для такого λ существует собственный вектор $x \neq 0$, и мы можем положить $x_n = x/\|x\|$ для всех n. Если λ – точка непрерывного спектра, $\lambda \in \sigma_c(A)$, то резольвента $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ определена на плотном подпространстве в $\mathscr{H}$ (см. основной курс). Докажем, что $\|R_\lambda(A)\| = \infty$. Допустим $\|R_\lambda(A)\| < \infty$. Пусть $y \in \mathscr{H}$. Из того, что $\operatorname{dom} R_\lambda(A)$ плотно в $\mathscr{H}$, следует существование последовательности $y_n \in \operatorname{dom} R_\lambda(A)$, $y_n \to y$. Так как оператор $R_\lambda(A)$ ограничен, то он непрерывен и последовательность $x_n = R_\lambda(A)y_n$ фундаментальна (последовательность Коши). Из полноты $\mathscr{H}$ следует, что существует $x \in \mathscr{H}$, такой что $x_n \to x$. Значит $(A - \lambda I)x = \lim\limits_{n\to\infty}(A - \lambda I)x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Это означает, что $y \in \operatorname{dom} R_\lambda(A)$ для любого $y \in \mathscr{H}$. То есть, $\operatorname{dom} R_\lambda(A) = \mathscr{H}$, а такие λ должны принадлежать резольвентному множеству (основной курс). Поэтому $\|R_\lambda\| = \infty$. Поэтому существует последовательность $y_n \in \operatorname{dom} R_\lambda(A)$, $\|y_n\| = 1$, такая что $\|R_\lambda(A)y_n\| \to \infty$. Обозначим $x_n = R_\lambda(A)y_n/\|R_\lambda(A)y_n\|$. Имеем $\|(A - \lambda I)x_n\| = \|y_n\|/\|R_\lambda(A)y_n\| = \|R_\lambda(A)y_n\|^{-1} \to 0$. Теорема доказана.

Критерий Вейля дает интуитивный смысл точек непрерывного спектра, так как последовательность x_n из этого критерия играет роль “приближенных собственных векторов”.

Следствие. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит резольвентному множеству нормального оператора A тогда и только тогда, когда $\inf\limits_{\|x\|=1} \|(A - \lambda I)x\| = a > 0$.

В качестве первого применения критерия Вейля мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Спектр самосопряженного оператора A лежит на вещественной прямой ($\sigma(A) \subset \mathbb{R}$).*

Доказательство. Мы уже знаем из основного курса, что собственные числа самосопряженного оператора вещественны. Допустим, что λ – точка непрерывного спектра ($\lambda \in \sigma_c(A)$) и $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$). Оценим квадрат нормы

$$\|(A - \alpha I - i\beta I)x\|^2 = (Ax - \alpha x - i\beta x, Ax - \alpha x - i\beta x) = (Ax - \alpha x, Ax - \alpha x) -$$

$$i\beta(x, Ax - \alpha x) + i\beta(x, Ax - \alpha x) + |\beta|^2(x, x) = (Ax - \alpha x, Ax - \alpha x) + |\beta|^2(x, x) \geq \beta(x, x).$$

То есть $\inf\limits_{\|x\|=1} \|(A - \alpha I - i\beta I)x\| \geq |\beta|$ и по следствию из критерия Вейля получаем, что $\lambda \notin \sigma(A)$, если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Теорема доказана.

Из основного курса известно, что ограниченный оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда $(Ax, x) \in \mathbb{R}$. Оказывается, что квадратичная форма

(Ax,x) дает возможность найти границы спектра оператора A.

Теорема. (О границах спектра самосопряженного операотора). *Для ограниченного самосопряженного оператора A положим*

$$m_A = \inf_{\|x\|=1}(Ax,x),\ M_A = \sup_{\|x\|=1}(Ax,x).$$

Тогда весь спектр $\sigma(A)$ оператора A находится в отрезке $[m_A, M_A]$, причем $m_A, M_A \in \sigma(A)$ и $\|A\| = \max\{|M_A|, |m_A|\}$.

Доказательство. Допустим $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda < m_A$. Рассмотрим оценку

$$((A-\lambda I)x,x) = ((A-m_A I)x,x) + (m_A-\lambda)(x,x) \geq (m_A-\lambda)(x,x).$$

Кроме этого, по неравенству Коши-Буняковского, $((A-\lambda I)x,x) \leq \|(A-\lambda I)x\|\|x\|$. С учетом предыдущей оценки, получаем $\|(A-\lambda I)x\| \geq (m_A-\lambda)\|x\|$. По следствию из критерия Вейля получаем $\lambda \notin \sigma(A)$. Аналогичным способом можно доказать, что если $\lambda > M_A$, то $\lambda \notin \sigma(A)$. Мы доказали, что $\sigma(A) \subseteq [m_A, M_A]$.

Пусть $B = A - m_A I$. Тогда $m_B = 0$, $M_B = M_A - m_A$. Кроме этого, из теоремы об отображении спектра следует $\sigma(B) = \sigma(A) - m_A$. Из $\sigma(B) \subseteq [0, M_B]$ следует, что $r(B) \leq M_B$. Кроме этого $M_B = \sup\limits_{\|x\|=1}(Bx,x) \leq \|B\|$. По теореме о спектральном радиусе для нормальных операторов $r(B) = \|B\|$. То есть, $r(B) = M_B = \|B\|$. Так как спектр есть компактное множество, то в нем есть максимальный элемент, который, очевидно, равен $r(B) = M_B$. Значит $M_B = M_A - m_A \in \sigma(B) = \sigma(A) - m_A$. Это означает, что $M_A \in \sigma(A)$. Аналогичным образом, рассматривая вспомогательный оператор $C = M_A I - A$, можно доказать, что $m_A \in \sigma(A)$. Так как m_A, M_A – точные границы интервала, в котором содержится спектр оператора A, то мы также доказали, что $\|A\| = r(A) = \max\{|m_A|, |M_A|\}$. Теорема доказана.

Из теоремы о границах спектра следует также равенство $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1}|(Ax,x)|$, которое было доказано другим способом в основном курсе.

2^0. **Непрерывное функциональное исчисление.** Пусть A – самосопряженный оператор и f – непрерывная функция на $[m_A, M_A]$. Мы сейчас дадим определение функции f от оператора A. Для этого рассмотрим произвольную последовательность полиномов $p_n(\lambda)$, равномерно сходящуюся на отрезке $[m_A, M_A]$ к функции f. Такая последовательность существует в силу теоремы Вейерштрасса-Стоуна (доказанной в основном курсе, см. В.А. Александров, “Ряды Фурье”, стр. 51). Рассмотрим последовательность $p_n(A)$. По теореме об отображении спектра для аналитических функций (даже для полиномов) имеем $\sigma(r_{m,n}(A)) = r_{m,n}(\sigma(A))$, здесь мы обозначили $r_{m,n}(\lambda) = p_n(\lambda) - p_m(\lambda)$ Кроме этого, по теореме о спектральном радиусе для нормальных операторов имеем

$$(15)\quad \|r_{m,n}(A)\| = r(r_{m,n}(A)) = \max\{|\mu| : \mu \in \sigma(r_{m,n}(A))\} = \max\{|\mu| : \mu \in r_{m,n}(\sigma(A))\} = \max_{\lambda\in\sigma(A)}|r_{m,n}(\lambda)| = \|r_{m,n}\|_{\sigma(A)}.$$

Здесь мы ввели обозначение $\|g\|_S = \max\limits_{\lambda\in S}|g(\lambda)|$ для любой непрерывной функции g на некотором компакте S. Так как последовательность $p_n(\lambda)$ сходится к $f(\lambda)$ равномерно, то $\|r_{m,n}\|_{\sigma(A)} \to 0$. Из равенства (15) следует, что $r_{m,n}(A) = p_n(A) - p_m(A) \to 0$, т. е. последовательность операторов $p_n(A)$ является фундаментальной (последовательностью Коши). Из полноты по норме пространства $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ следует, что существует оператор из $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, к которому сходится последовательность $p_n(A)$. Этот оператор мы обозначим $f(A)$ и будем называть *непрерывной функцией от оператора* A. Корректность такого определения следует из того, что если $p_n(\lambda) \to f(\lambda)$, $q_n(\lambda) \to f(\lambda)$, то $p_n(\lambda) - q_n(\lambda) \to 0$ равномерно на $\sigma(A)$, и поэтому $\|p_n(A) - q_n(A)\| \to 0$ по норме. То есть $f(A)$ зависит только от функции f, а не от вида последовательности полиномов $p_n(\lambda)$, равномерно сходящихся к $f(\lambda)$.

Основные свойства непрерывного функционального исчисления.

(а) Если $f(\lambda) = g(\lambda)$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$, то $f(A) = g(A)$.

Пусть $p_n(\lambda) \to f(\lambda)$, $q_n(\lambda) \to g(\lambda)$ равномерно на $[m_A, M_A]$. Тогда из равенств (15) для $r_{m,n}(\lambda) = p_n(\lambda) - q_m(\lambda)$ будем иметь $\|p_n(A) - q_m(A)\| = \|r_{m,n}\|_{\sigma(A)} \to 0$ при $m, n \to \infty$. В пределе получаем $f(A) = g(A)$. Пользуясь этим свойством, мы можем пойти немножко дальше и рассматривать непрерывные функции $f(\lambda)$, заданные изначально только на спектре $\sigma(A)$. Тогда и последовательность полиномов $p_n(\lambda)$ можно считать равномерно сходящейся $f(\lambda)$ только на спектре $\sigma(A)$. Нам конечно следует показать, что существует хотя бы одна такая последовательность полиномов. Для этого продолжим функцию $f(\lambda)$, изначально заданную только на спектре $\sigma(A)$ до непрерывной же функции на всем отрезке $[m_A, M_A]$. Разность множеств $[m_A, M_A]$ и $\sigma(A)$ является открытым множеством в $\mathbb{R}$, которое является счетным объединением попарно непересекающихся интервалов $[m_A, M_A] \setminus \sigma(A) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$, где $a_k, b_k \in \sigma(A)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Продолжим функцию $f_{\text{ext}}(\lambda)$, считая её линейной на каждом отрезке $[a_k, b_k]$ и такой, что $f_{\text{ext}}(a_k) = f(a_k)$, $f_{\text{ext}}(b_k) = f(b_k)$. Легко понять, что функция f_{ext} непрерывна на всем отрезке $[m_A, M_A]$ и её сужение $f_{\text{ext}}|_{\sigma(A)} = f$. Теперь в качестве $p_n(\lambda)$ можно взять любую последовательность полиномов, сходящуюся равномерно на отрезке $[m_A, M_A]$ к $f_{\text{ext}}(\lambda)$ (это гарантируется теоремой Вейерштрасса-Стоуна).

(б) Отображение $f(\lambda) \longmapsto f(A)$ является линейной изометрией пространства $C(\sigma(A))$ (непрерывных функций на компакте $\sigma(A)$) на некоторое вещественное подпространство самосопряженных операторов из $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Линейность этого отображения очевидна, а изометричность получается переходом к пределу в равенстве $\|p_n(A)\| = \|p_n\|_{\sigma(A)}$, которое получено из (15) заменой $r_{m,n}$ на p_n.

Свойства (а),(б) дают резкое отличие непрерывного исчисления от рассмотренного ранее аналитического исчисления. В аналитическом исчислении равенство функций f, g на спектре $\sigma(A)$ не гарантирует совпадение $f(A) = g(A)$. В качестве простого примера рассмотрим матрицу $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и две функции $f(\lambda) = 0$, $g(\lambda) = \lambda$. Очевидно $\sigma(A) = \{0\}$, но $f(A) = 0 \neq A = g(A)$.

(в) Для любых $A = A^* \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $T \in \operatorname{inv} \mathscr{B}(\mathscr{H})$, таких что $T^* = T^{-1}$, $[A, B] = 0$, имеют место равенства $[f(A), B] = 0, [f(A), g(A)] = 0, Tf(A)T^{-1} = f(TAT^{-1})$, для всех $f, g \in C(\sigma(A))$. Это свойство не требует комментариев.

(г) *Мультипликативное свойство*: $(f \cdot g)(A) = f(A)g(A)$ для любых $f, g \in C(\sigma(A))$. Для полиномов $(p_n \cdot q_n)(A) = p_n(A)q_n(A)$ это свойство очевидно. Требуемое равенство получается одним предельным переходом. Мы не будем останавливаться на деталях.

(д) *Теорема об отображении спектра для сомосопряженных операторов.* Для любой непрерывной функции $f \in C(\sigma(A))$ имеет место равенство

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

Эту теорему мы докажем подробно. Для этого предварительно докажем, что оператор $f(A)$ обратим тогда и только тогда, когда $f(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$, т.е. когда $0 \notin f(\sigma(A))$. Пусть $f(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$. Тогда функция $g(\lambda) = 1/f(\lambda) \in C(\sigma(A))$ и $g(A)f(A) = f(A)g(A) = I$. То есть, оператор $f(A)$ обратим. Наоборот, допустим, что $f(\lambda_0) = 0$ при некотором $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Предположим, что тем не менее оператор $f(A)$ обратим. Рассмотрим последовательность полиномов $p_n(\lambda)$, равномерно сходящуюся на спектре $\sigma(A)$ к функции $f(\lambda)$. Так как $p_n(A)$ сходится по норме к $f(A)$, то, начиная с некоторого номера n_0, все операторы $p_n(A)$ будут обратимыми и $p_n(A)^{-1} \to f(A)^{-1}$ (это следует из того, что множество $\operatorname{inv}\mathscr{B}(\mathscr{H})$ открыто в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, а операция обращения $B \longmapsto B^{-1}$ непрерывна на $\mathscr{B}(\mathscr{H})$). Из сходимости последовательности $p_n(A)^{-1}$ следует ее ограниченность, $\|p_n(A)^{-1}\| \leq \mathrm{Const}$ $(n \geq n_0)$. Для любого $n \geq n_0$ разложим полином $p_n(\lambda)$ на множители $p_n(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_{k_n})$. Так как оператор $p_n(A) = a_n(A - \lambda_1 I)\dots(A - \lambda_{k_n} I)$ обратим, то обратимы все сомножители $A - \lambda_j I$ $(j = 1, \dots, k_n)$, что означает $\lambda_j \notin \sigma(A)$ $(j = 1, \dots, k_n)$. Следовательно, $g_n(\lambda) = 1/p_n(\lambda) \in C(\sigma(A))$ и по теореме о спектральном радиусе получаем $\|p_n(A)^{-1}\| = \|1/p_n\|_{\sigma(A)} \geq 1/|p_n(\lambda_0)| \to \infty$ при $n \to \infty$, так как $p_n(\lambda_0) \to f(\lambda_0) = 0$. Это противоречит предыдущей оценке $\|p_n(A)^{-1}\| \leq \mathrm{Const}$. Следовательно оператор $f(A)$ не может быть обратимым.

Из полученного критерия теперь сразу следует теорема об отображении спектра: $\mu \in f(\sigma(A)) \iff \mu - f(\lambda)$ имеет корень $\lambda = \lambda_0 \in \sigma(A) \iff$ оператор $\mu I - \widetilde{f}(A)$ необратим $\iff \mu \in \sigma(\widetilde{f}(A))$.

(е) *Функториальное свойство*: $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ для любых $f \in C(\sigma(A))$, $g \in C(f(\sigma(A)))$ (так как $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$, то оператор $g(f(A))$ определен корректно). Рассмотрим последовательность полиномов $p_n(\lambda)$, равномерно сходящуюся на $\sigma(A)$ к функции $f(\lambda)$ и последовательность полиномов $q_n(\lambda)$, равномерно сходящуюся на множестве $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ к функции $g(\lambda)$, при этом можно считать, что для всех n и всех $\mu \in f(\sigma(A))$ выполняются оценки $|q_n(\mu) - g(\mu)| < n^{-1}$. Так как $p_k(\lambda)$ сходится равномерно на множестве $\sigma(A)$ к $f(\lambda)$, то для каждого фиксированного номера $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать номер k_n таким, чтобы выполнялось

$$|q_n(p_{k_n}(\lambda)) - q_n(f(\lambda))| < n^{-1} \quad (\lambda \in \sigma(A)).$$

Это возможно, так как полином $q_n(\mu)$ равномерно непрерывен на любом конечном интервале (в частности, на интервале, содержащим $f(\sigma(A))$). Из теоремы о спектральном радиусе сразу получаем оценку нормы

$$\|(q_n \circ p_{k_n})(A) - (q_n \circ f)(A))\| = \|(q_n \circ p_{k_n}) - (q_n \circ f)\|_{\sigma(A)} < n^{-1}.$$

Если мы обозначим $q_n(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m_n} a_j \lambda^j$, то $(q_n \circ f)(A) = \sum\limits_{j=0}^{m_n} a_j f^j(A) = \sum\limits_{j=0}^{m_j} a_j (f(A))^j = q_n(f(A))$; предпоследнее равенство следует из того, что $f^j(A) = (f(A))^j$ (мультипликативное свойство (г)). Так как $|q_n(\mu) - g(\mu)| < n^{-1}$ $(\mu \in \sigma(f(A)))$, то аналогичным способом получаем оценку

$$\|q_n(f(A)) - g(f(A))\| = \|q_n - g\|_{f(\sigma(A))} < n^{-1}.$$

Комбинируя с предыдущим неравенством, получаем

$$\|(q_n \circ p_{k_n})(A) - g(f(A))\| < 2n^{-1}.$$

Из предыдущих оценок следует также неравенство

$$|(q_n \circ p_{k_n})(\lambda)) - (g \circ f)(\lambda))| = |q_n(p_{k_n}(\lambda)) - g(f(\lambda))| < 2n^{-1} \quad (\lambda \in \sigma(A))$$

(для обычных функций $g(f(\lambda))$ то же самое, что и $(g \circ f)(\lambda)$). Поэтому получаем для операторов еще одну оценку

$$\|(q_n \circ p_{k_n})(A)) - (g \circ f)(A))| = \|(q_n \circ p_{k_n}) - (g \circ f)\|_{\sigma(A)} < 2n^{-1}.$$

Поэтому

$$\|(g \circ f)(A) - g(f(A))\| < 3n^{-1} \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

что означает $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

(ж) *Свойство расщепляемости.* Пусть $A = A^*$ и $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где σ_1, σ_2 – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существуют проекторы P_1, P_2 со свойствами: $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_1^* = P_1$, $P_2^* = P_2$, $P_1 + P_2 = I$, $P_1 P_2 = 0$. Причем, если положить $\mathscr{H}_j = P_j \mathscr{H}$ $(j = 1, 2)$, то $\mathscr{H}$ раскладывается в *ортогональную* прямую сумму: $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Операторы $A_j = A|_{\mathscr{H}_j}$ являются самосопряженными на $\mathscr{H}_j$ и $\sigma(A_j) = \sigma_j$ $(j = 1, 2)$.

Рассмотрим на спектре $\sigma(A)$ две функции p_j $(j = 1, 2)$, задаваемые равествами

$$p_1(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in \sigma_1 \\ 0, & \lambda \in \sigma_2 \end{cases} \qquad p_2(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in \sigma_1 \\ 1, & \lambda \in \sigma_2 \end{cases}$$

Докажем, что эти функции непрерывны. Пусть $\lambda_0 \in \sigma_1$ и последовательность $\lambda_n \in \sigma(A)$ сходится к λ_0. Так как $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, то расстояние $\operatorname{dist}(\sigma_1, \sigma_2) = d > 0$. Поэтому начиная с некоторого номера n_0 должно выполняться включение $\lambda_n \in \sigma_1$. То есть, при $n \geq n_0$ выполняется $p_1(\lambda_n) = p_1(\lambda_0) = 1$, $p_2(\lambda_n) = p_2(\lambda_0) = 0$. Случай $\lambda_0 \in \sigma_2$ разбирается аналогично. Для непрерывных функций $p_j(\lambda)$ полагаем $P_j = p_j(A)$ $(j = 1, 2)$. Так как $p_j^2 = p_j$, $p_1 + p_2 = 1$, $p_1 p_2 = 0$, то также $P_j^2 = P_j$, $P_1 + P_2 = I$, $P_1 P_2 = 0$ и $P_j^* = P_j$ (следует из свойства (б)). Поэтому подпространства $\mathscr{H}_1 = P_1 \mathscr{H}$, $\mathscr{H}_2 = P_2 \mathscr{H}$ взаимно ортогональны. В самом деле, для любых $x \in \mathscr{H}_1$, $y \in \mathscr{H}_2$ имеем $(x, y) = (P_1 x, P_2 y) = (P_2^* P_1 x, y) = (P_2 P_1 x, y) = 0$. Поэтому разложение в прямую сумму $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \dot{+} \mathscr{H}_2$ является ортогональным. Кроме этого, если $x, y \in \mathscr{H}_j$, то $(A_j x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, A_j y)$, что означает самосопряженность операторов A_j $(j = 1, 2)$. Свойства $\sigma(A_j) = \sigma_j$ проверяются так же, как это сделано в свойстве (н) предыдущего параграфа.

(з) Связь с аналитическим функциональным исчислением. Пусть $A = A^*$. Рассмотрим в окрестности спектра $U \supset \sigma(A)$ аналитическую функцию $f(\lambda)$, вещественную при $\lambda \in \mathbb{R}$. Мы можем вычислить функцию $\widetilde{f}(A)$ с помощью контурного интеграла

$$\widetilde{f}(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_f} \frac{I}{\lambda I - A} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Можно также вычислить $f(A)$ как функцию от самосопряженного оператора, равномерно приближая функцию $f(\lambda)$ при $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ последовательностью вещественных полиномов $p_n(\lambda)$ и полагая $f(A) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(\lambda)$. Нельзя сказать, что вопрос о равенстве $\widetilde{f}(A) = f(A)$ является совсем очевидным. Мы воспользуемся теоремой Рунге, которая приводится здесь без доказательства.

Теорема Рунге. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в открытой области G, такой что дополнение $\mathbb{C} \setminus G$ связно. Тогда существует последовательность полиномов $p_n(z)$, которая сходится к $f(z)$ равномерно на любом компакте $K \subset G$.*

Существует $\delta > 0$, такое что для любого $\lambda \in \sigma(A)$ круг $B_\delta(\lambda)$ радиуса δ входит в U. Компактное множество $\sigma(A)$ можно покрыть конечным числом таких кругов $B_\delta(\lambda_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Положим $G = \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_\delta(\lambda_j)$. Так как все центры λ_j этих кругов лежат на вещественной оси, то дополнение $\mathbb{C} \setminus G$ является связным. Пользуясь теоремой Рунге, рассмотрим последовательность полиномов $p_n(\lambda)$ равномерно сходящуюся на компактах, входящих в G, к функции $f(\lambda)$. Множество G состоит из конечного числа связных подобластей G_l $(l = 1, \ldots k)$, каждая из которых является объединением пересекающихся между собой кругов $B_\delta(\lambda_j)$. В каждой связной подобласти G_l рассмотрим прямоугольный контур γ_l, обходящий один раз против часовой стрелки часть спектра $\sigma(A)$, находящейся в G_l. Пусть контур Γ есть объединение этих контуров, а W – это множество точек, находящихся внутри Γ. Так как замыкание W входит в G, то $p_n(\lambda)$ сходится равномерно на области W к $f(\lambda)$. Сходимость $p_n(A)$ к $\widetilde{f}(A)$ теперь следует из свойства (и) предыдущего параграфа. С другой стороны, при $\lambda \in \mathbb{R}$ можно представить $p_n(\lambda) = p_{1,n}(\lambda) + ip_{2,n}(\lambda)$, где $p_{1,n}, p_{2,n}$ – вещественные полиномы. Так как функция $f(\lambda)$ вещественна при $\lambda \in \mathbb{R}$, то $p_{2,n}(\lambda)$ равномерно сходится на спектре $\sigma(A)$ к нулю, а $p_{1,n}(\lambda)$ сходится к $f(\lambda)$. Поэтому функция $f(A)$, в смысле определения, данного в этом параграфе, является пределом по норме последовательности полиномов $p_n(A)$. Равенство $f(A) = \widetilde{f}(A)$ доказано.

3^0. **Сравнение операторов; корни из положительных операторов.** Самосопряженный оператор A называется *положительным* если $(Ax, x) \geq 0$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Свойство положительности оператора A символически обозначается неравенством $A \geq 0$. Говорим, что оператор A не меньше оператора B, если $B - A \geq 0$ (или $(Ax, x) \leq (Bx, x)$ для всех $x \in \mathscr{H}$). Символически это сравнение обозначается как $A \leq B$.

Операция сравнения отделима, т.е. из $A \leq B$ и $B \leq A$ следует $A = B$. Для доказательства этого обозначим $C = B - A$. Из $C \geq 0$ и $C \leq 0$ следует $(Cx, x) = 0$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Из поляризационного тождества

$$(Cx, y) = \frac{1}{4}\{(C(x+y), x+y) - (C(x-y), x-y) + i(C(x+iy), x+iy) - i(C(x-iy), x-iy)\}$$

следует равенство $(Cx, y) = 0$ для всех $x, y \in \mathscr{H}$. Отсюда следует, что $C = 0$ или $A = B$.

Далее, очевидно, из $A \leq B$ и $B \leq C$ следует $A \leq C$ (*свойство транзитивности операции сравнения*).

Для эрмитовой $(m \times m)$-матрицы A с элементами из $\mathbb{C}$, ее положительность означает положительную определенность квадратичной формы (Ax, x). Это свойство проверяется с помощью критерия Сильвестра: матрица A положительна (нестрого) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры неотрицательны. Операция сравнения является частичной, т. е. существуют не сравнимые между собой операторы (если $\dim H > 1$), например матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ не сравнимы между собой.

Оператор $A \geq 0$ тогда и только тогда, когда $A = A^*$ и $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$. Действительно, если $A \geq 0$, то $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathscr{H})$, т. е. $A = A^*$ (задача 20 из месячного задания основного курса) и $m_A = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x) \geq 0$. Из теоремы о границах спектра следует, что $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$. Обратно, если $A = A^*$ и $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$, то $m_A = \min\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x) \geq 0$. Отметим, что одного условия $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$ недостаточно для положительности A. Например, если $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, то $\sigma(A) = \{0\} \subset \mathbb{R}_+$, но $A \ngeq 0$.

Из предудущего критерия положительности следует, что если $A = A^*$ и $f \in C(\sigma(A))$, $f(\lambda) \geq 0$ $(\lambda \in \sigma(A))$, то $f(A) \geq 0$. Так как по теореме об отображении спектра $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) \subset \mathbb{R}_+$.

Теорема (о квадратном корне). *Для любого положительного оператора A существует единственный положительный оператор B, такой что $B^2 = A$.*

Доказательство. Из $(Ax, x) \geq 0$ $(x \in \mathscr{H})$ следует, что нижняя граница спектра $m_A \geq 0$, т. е. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$. На отрезке $[0, \|A\|]$ рассмотрим непрерывную функцию $\lambda \longmapsto \sqrt{\lambda}$. Тогда оператор $B = \sqrt{A}$ будет требуемым. Так как из $(\sqrt{\lambda})^2 = \lambda$ следует $(\sqrt{A})^2 = A$. По теореме об отображении спектра получаем $\sigma(B) = \sqrt{\sigma(A)} \subset \mathbb{R}_+$. Поэтому $B = \sqrt{A} \geq 0$. Для доказательства единственности допустим, что существует еще один положительный (самосопряженный) оператор C, для которого $C^2 = A$. Пусть отрезок $[0, a]$, содержащит $\sigma(B) \cup \sigma(C)$. На отрезке $[0, a^2]$ рассмотрим последовательность полиномов $p_n(\lambda)$, равномерно сходящуюся к функции $\sqrt{\lambda}$. Тогда последовательность $q_n(\lambda) = p_n(\lambda^2)$ равномерно сходится на отрезке $[0, a]$ к функции $id(\lambda) = \lambda$. Тогда $q_n(B)$ сходится по норме к B, а $q_n(C)$ сходится к C. Но $q_n(B) = p_n(B^2) = p_n(A) = p_n(C^2) = q_n(C)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $B = C$.

Некоторые свойства неравенств для операторов.

(а) Если $A \geq 0$ и оператор A обратим, то $A^{-1} \geq 0$.

Так как $A \geq 0$, то $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$. Так как A обратим, то $0 \notin \sigma(A)$, значит нижняя граница спектра $m_A > 0$. Из теоремы об отображении спектра следует $\sigma(A^{-1}) = \sigma(A)^{-1} \subset [M_A^{-1}, m_A^{-1}]$ (где M_A – верхняя граница спектра для A), то есть, $\sigma(A^{-1}) \subset \mathbb{R}_+$ и $A^{-1} \geq 0$.

(б) Если $[A, B] = 0$ и $A \geq 0$, $B \geq 0$, то $AB \geq 0$.

Так как из $[A, B] = 0$ следует $[A, \sqrt{B}] = 0$, то для любого $x \in \mathscr{H}$ имеем

$$(ABx, x) = (A(\sqrt{B})^2 x, x) = (\sqrt{B} A \sqrt{B}\, x, x) = (A\sqrt{B}\, x, \sqrt{B}\, x) = (Ay, y) \geq 0.$$

Здесь мы обозначили $y = \sqrt{B}\, x$.

(в) Если $[A, C] = [B, C] = 0$, $A \leq B$ и $C \geq 0$, то $AC \leq BC$.

Если $A \le B$, то $B - A \ge 0$ и из (б) получаем $(B - A)C \ge 0$, что означает $AC \le BC$.

(г) Из $[A, B] = 0$ и $0 \le A \le B$ следует $A^2 \le B^2$.

Из (в) следует, что $A^2 \le AB$ и $AB \le B^2$. По свойству транзитивности $A^2 \le B^2$.

Задача 41. Приведите пример двух некоммутирующих (2×2)-матриц A, B, таких что $0 \le A \le B$, но $A^2 \nleq B^2$.

(д) Если $A \le B$, то $C^*AC \le C^*BC$ для любого $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Так как $B - A \ge 0$, то $((B - A)Cx, Cx) = (C^*(B - A)Cx, x) \ge 0$ для всех $x \in \mathscr{H}$, что означает $C^*(B - A)C \ge 0$ или $C^*AC \le C^*BC$.

(е) Если $0 \le A \le B$ и оператор A обратим, то B тоже обратим и $B^{-1} \le A^{-1}$.

Так как A обратим, то нижняя граница спектра $m_A > 0$. Значит $m_A I \le A \le B$. Поэтому $0 < m_A \le m_B$ и B тоже обратим. Так как по теореме о границе спектра $\sigma(\sqrt{A}) \subset [\sqrt{m_A}, \sqrt{M_A}]$, то оператор $\sqrt{A}$ тоже обратим. Аналогичным образом устанавливается обратимость оператора $\sqrt{B}$. Из $A \le B$ и свойства (д) выводим $I \le C = (\sqrt{A})^{-1}B(\sqrt{A})^{-1}$. Следовательно, $\sigma(C) \subset [1, M_C]$ (где M_C – верхняя граница спектра для C). По теореме об отображении спектра получим $\sigma(C^{-1}) \subset [M_C^{-1}, 1]$. В частности, $C^{-1} = \sqrt{A}B^{-1}\sqrt{A} \le I$. Еще раз применяя свойство (д), получим $B^{-1} \le ((\sqrt{A})^{-1})^2 = A^{-1}$.

(ж) Если $0 \le A \le B$, то $\|A\| \le \|B\|$.

Так как $\sigma(B) \subset [0, \|B\|]$, то $B \le \|B\|I$, а из $A \le B$ вытекает $A \le \|B\|I$. По теореме о границах спектра получим $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x) \le \|B\|$.

Задача 42. Пусть $A = A^*$. Докажите, что $A \ge 0 \iff$

$$\left\| I - \frac{A}{\|A\|} \right\| \le 1.$$

Задача 43. Докажите, что если $\|A\| \le 1$ и $\|I - A\| \le 1$, то $0 \le A \le I$.

Лемма. *Любой оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ можно представить линейной комбинацией не более четырех унитарных операторов.*

Доказательство. Положим

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*), C = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Очевидно, $B = B^*$, $C = C^*$ и $A = B + iC$. Если $B \ne 0$, то положим $B_1 = B/\|B\|$ и рассмотрим два унитарных оператора $U_+ = B_1 + i\sqrt{I - B_1^2}$, $U_- = B_1 + i\sqrt{I - B_1^2}$. Аналогично, если $C \ne 0$, то для $C_1 = C/\|C\|$ рассмотрим унитарные операторы $V_+ = C_1 + i\sqrt{I - C_1^2}$, $V_- = C_1 - i\sqrt{I - C_1^2}$.

Как легко видеть,

$$A = \frac{\|B\|}{2}(U_+ + U_-) + i\frac{\|C\|}{2}(V_+ + V_-).$$

Модуль самосопряженного оператора и ортогональное разложение.

Рассмотрим три вещественные функции: $|\lambda|$, $\lambda_+ = \max\{\lambda, 0\}$, $\lambda_- = \max\{-\lambda, 0\}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Им соответствуют три операторные функции $|A|$, A_+, A_-, определенные для любого самосопряженного оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Так как $|\lambda| = \sqrt{\lambda^2} \ge 0$, $\lambda_\pm \ge 0$, $\lambda_+\lambda_- = 0$, $\lambda_+\lambda_- = 0$, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$, $|\lambda| = \lambda_+ + \lambda_-$, $\pm\lambda \le |\lambda|$, то

$$|A| = \sqrt{A^2} \geq 0,\ A_\pm \geq 0,\ A_+A_- = 0,\ A = A_+ - A_-,\ |A| = A_+ + A_-,\ \pm A \leq |A|.$$

В частности, мы показали, что любой самосопряженный оператор есть разность двух положительных операторов. Точнее, имеет место следующая

Теорема (об ортогональном разложении). *Любой самосопряженный оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ единственным образом представляется в виде $A = A_+ - A_-$, где $A_\pm \geq 0$ и $A_+A_- = 0$.*

Доказательство. Существование такого представления уже установлено выше. Осталось доказать единственность. Пусть $A = B - C$, где $B \geq 0$, $C \geq 0$ и $BC = 0$. Так как $B^* = B$, $C^* = C$, то $CB = C^*B^* = (BC)^* = 0$. Поэтому

$$A^2 = (B-C)^2 = B^2 - BC - CB + B^2 = B^2 + C^2 = B^2 + BC + CB + C^2 = (B+C)^2,$$

или $A^2 = |A|^2 = (B + C)^2$, и из единственности положительного квадратного корня следует равенство $|A| = B + C$. Складывая его с равенством $A = B - C$, получаем $B = \frac{1}{2}(|A| + A) = A_+$. Тогда $A_- = A_+ - A = B - A = C$. Единственность разложения доказана.

Представление самосопряженного оператора A в виде разности двух положительных операторов $A = A_+ - A_-$, $A_+A_- = 0$ называется *ортогональным разложением.*

Лемма. *A_+ является наименьшим положительным оператором, коммутирующим с A и таким, что $A_+ \geq A$.*

Доказательство. Рассмотрим любой самосопряженный оператор B, удовлетворяющий свойствам $[A, B] = 0$, $B \geq 0$ и $B \geq A$. Так как $B \geq A = A_+ - A_-$, то $B + A_- \geq A_+$. Из $[B, A_+] = 0$ (B коммутирует с любой непрерывной функцией от A) и из свойства (в) следует $(B + A_-)A_+^2 \geq A_+^3$ или (так как $A_+A_- = 0$) $(B - A_+)A_+^2 \geq 0$. Кроме этого, $(B - A_+)A_-^2 = BA_-^2 \geq 0$. Складывая с предыдущим неравенством, получим $(B - A_+)(A_+^2 + A_-^2) = (B - A_+)A^2 \geq 0$. Это неравенство можно записать как

$$((B - A^+)A^2x, x) = ((B - A^+)Ax, Ax) \geq 0.$$

То есть, для любого $y \in \operatorname{im} A$ имеем $((B - A^+)y, y) \geq 0$. Предельным переходом это неравентсво получается и для любого y из замыкания $\operatorname{im} A$. Любой вектор $x \in \mathscr{H}$ раскладывается в сумму $x = y + z$, где $y \in cl(\operatorname{im} A)$, $z \in cl(\operatorname{im} A)^\perp = \ker A$. Так как $Az = 0$, то $0 = (A^2z, z) = (A_+^2z, z) + (A_-^2z, z) = \|A_+z\|^2 + \|A_-z\|^2$. Поэтому $A_\pm z = 0$. Значит

$$\begin{aligned}&((B - A_+)x, x) = ((B - A^+)(y + z), y + z) = \\ &((B - A_+)y, y) + (Bz, y) + (By, z) + (Bz, z) = ((B - A_+)y, y) + (Bz, z) \geq 0,\end{aligned}$$

так как из $BAz = ABz = 0$ следует $Bz \in \ker A$ и поэтому $Bz \perp y$. Следовательно, $B \geq A_+$, что и требовалось доказать.

Из этой леммы следует, что $A_+ = \sup\{A, 0\}$ и, аналогично, $A_- = \sup\{-A, 0\}$. Пользуясь этим результатом, мы можем определить супремум $\sup\{A, B\}$ для любых двух коммутирующих самосопряженных операторов $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ по формуле

$$\sup\{A, B\} = \tfrac{1}{2}(A + B + |A - B|)$$

Для проверки этой формулы обозначим $C = \frac{1}{2}(A + B + |A - B|)$.

Тогда $C \geq \frac{1}{2}(A + B + (A - B)) = A$ и $C \geq \frac{1}{2}(A + B - (A - B)) = B$. Рассмотрим теперь любой другой самосопряженный оператор D, коммутирующий с A, B и удовлетворяющий неравенствам $D \geq A$, $D \geq B$. Из этих неравенств следует, что $D - B \geq 0$ и $D - B \geq A - B$. Из предыдущей леммы следует, что

$$D - B \geq \sup\{A - B, 0\} = (A - B)_+ = \tfrac{1}{2}(|A - B| + A - B),$$

отсюда $D \geq \frac{1}{2}(|A-B|+A-B)+B = \frac{1}{2}(|A-B|+A+B) = C$. То есть, C является наименьшим оператором, который больше операторов A и B. Символы sup и inf иногда записывают в виде бинарных операций $\vee$ и $\wedge$. В этих обозначениях

$$\sup\{A, B\} = A \vee B = \tfrac{1}{2}(A+B+|A-B|),\ A_+ = A \vee 0,\ A_- = (-A) \vee 0 = -(A \wedge 0).$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\inf\{A, B\} = A \wedge B = \tfrac{1}{2}(A + B - |A - B|).$$

Задача 44. Пусть A, B – коммутирующие самосопряженные операторы. Докажите следующие неравенства:

1) $|A + B| \leq |A| + |B|$.
2) $\||A| - |B|\| \leq \|A - B\|$.

Задача 45. Рассмотрим две матрицы Паули $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ и положим $A = \sigma_1 - I$, $B = \sigma_3 + I$. Убедитесь в том, что $|A + B| \nleq |A| + |B|$. (Этот пример принадлежит Э. Нельсону).

Задача 46. Докажите, что если $[A, B] = 0$ и $0 \leq A \leq B$, то $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$ (на самом деле требование $[A, B] = 0$ можно в этой задаче опустить).

4^0. **Поляризационное тождество.** Определим модуль оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ по формуле $|A| = \sqrt{A^*A}$ (если $A = A^*$, то $|A| = \sqrt{A^2}$ и новое определение согласуется с предыдущим). Так как $A^*A \geq 0$, то $|A|$ определен для произвольного оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, но он уже не обладает всеми свойствами, порлученными выше для самосопряженного оператора. В частности, может оказаться, что $[A, |A|] \neq 0$ (приведите пример!).

Определение. Оператор $U \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется *частичной изометрией на подпространстве* $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}$, если $\|Ux\| = \|x\|$ для всех $x \in \mathscr{L}$ и $Ux = 0$, для всех $x \in \mathscr{L}^\perp$.

Это определение является некоторым обобщением определения унитарного оператора.

Задача 47. Докажите, что если U – частичная изометрия на подпространстве $\mathscr{L}$, то U^* тоже частичная изометрия (на каком подпространстве?).

Теорема (о полярном разложении). *Для любого оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ существует частичная изометрия U на подпространстве $cl(\operatorname{im}|A|)$, такая что $A = U|A|$. Представление $A = VB$, где $B \geq 0$, а V – частичная изометрия на $cl(\operatorname{im} B)$, является единственным.*

Доказательство. Определим оператор $U : |A|\mathscr{H} \longrightarrow A\mathscr{H}$ формулой $U|A|x = Ax$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Следует проверить корректность такого определения, т. е. необходимо убедиться, что если $|A|x = 0$, то и $Ax = 0$. Если $|A|x = 0$, то

$|A|^2x = A^*Ax = 0$. Поэтому $0 = (A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2$. То есть действительно $Ax = 0$. Теперь следует проверить, что $\|Uy\| = \|y\|$ для всех $y \in \mathrm{im}\,|A|$. Пусть $y \in \mathrm{im}\,|A|$. Тогда $y = |A|x$ для некоторого $x \in \mathscr{H}$ и $\|Uy\|^2 = \|U|A|x\|^2 = \|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (|A|^2x, x) = (|A|x, |A|x) = (y, y) = \|y\|^2$. Для $y \in cl(\mathrm{im}\,|A|)$ существует последовательность $y_n \in \mathrm{im}\,|A|$ сходящаяся к y и мы можем положить по определению $Uy = \lim\limits_{n\to\infty} Uy_n$. Из непрерывности оператора U следует, что равенство $\|Uy\|^2 = \|y\|^2$ сохранится для всех $y \in cl(\mathrm{im}\,|A|)$. Любой вектор $x \in \mathscr{H}$ единственным образом представляется в виде $x = y + z$ ($y \in cl(\mathrm{im}\,|A|)$, $z \perp cl(\mathrm{im}\,|A|)$) и можно положить по определению $Ux = Uy$. Таким образом U определен как линейный оператор на всем пространстве $\mathscr{H}$. По построению он является частичной изометрией на $cl(\mathrm{im}\,|A|)$ и для всех $x \in \mathscr{H}$ выполнено равенство $Ax = U|A|x$. Докажем единственность такого представления. Пусть $A = VB$, где $B \geq 0$ а V – частичная изометрия на подпространстве $cl(\mathrm{im}\,B)$. Из $\|VBx\| = \|Bx\|$ следует равенство $\|VBx\|^2 = (VBx, VBx) = (BV^*VBx, x) = \|Bx\|^2 = (Bx, Bx) = (B^2x, x)$, или $((BV^*VB - B^2)x, x) = 0$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Из поляризационного тождества $(Cx, y) = \frac{1}{4}\{(C(x+y), x+y) - (C(x-y), x-y) + i(C(x+iy), x+iy) - i(C(x-iy), x-iy)\}$ следует, что $C = BV^*VB - B^2 = 0$. Поэтому $|A|^2 = A^*A = BV^*VB = B^2$ и из единственности положительного квадратного корня вытекает равенство $|A| = B$. Это означает, что $Uy = Vy$ для всех $y \in (\mathrm{im}\,|A|)$ и из непрерывности операторов U, V следует, что $Uy = Vy$ для всех $y \in cl(\mathrm{im}\,|A|)$. На ортогональном дополнении к $cl(\mathrm{im}\,|A|)$ обе частичные изометрии равны нулю и поэтому $Ux = Vx$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Теорема доказана.

Полярное разложение является операторным аналогом представления комплексного числа в виде произведения модуля этого числа и числа, модуль которого равен 1. Для нормальных операторов эта аналогия еще более наглядна, так как в этом случае частичную изометрию можно заменить на унитарный оператор.

Теорема. (о полярном разложении для нормального оператора). *Для любого нормального оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ существует представление $A = U|A|$, где U – унитарный оператор, коммутирующий с $|A|$. Если* $\ker A = 0$*, то представление $A = VB$, где $B \geq 0$, а V – унитарный оператор, является единственным.*

Доказательство. Так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы полагаем $U|A|x = Ax$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Таким способом мы определим линейный изометричный оператор на образе $(\mathrm{im}\,|A|)$ и продолжим его по непрерывности на замыкание $cl(\mathrm{im}\,|A|)$. Дальнейшее продолжение будет осуществляться иначе. Для нормального оператора A имеет место тождество $\|Ax\| = \|A^*x\|$, которое следует из цепочки равенств $\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|^2$. Отсюда следует равенство $\ker A = \ker A^*$. Кроме этого, $\ker A = \ker |A|$. Это следует из того, что если $|A|x = 0$, то $0 = |A|^2x = A^*Ax$ или $0 = (A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2$, т. е $Ax = 0$. Поэтому $cl(\mathrm{im}\,A) = (\ker A^*)^\perp = (\ker A)^\perp = (\ker |A|)^\perp = cl(\mathrm{im}\,|A|)$ (последнне равенство следует из того, что $|A|^* = |A|$). Это означает, что оператор U изометрично переводит векторы из подпространства $cl(\mathrm{im}\,|A|)$ в векторы из того же подпространства $cl(\mathrm{im}\,|A|) = cl(\mathrm{im}\,A)$. То есть, на $cl(\mathrm{im}\,A)$ оператор U является унитарным. Поэтому на ортогональном дополнении $cl(\mathrm{im}\,A)^\perp = \ker A$ мы можем определить U как тождественный оператор $I_{\ker A}$. Их прямая сумма $\widetilde{U} = U \oplus I_{\ker A}$ является унитарным оператором на всем $\mathscr{H}$. Нам осталось только заменить обозначение $\widetilde{U}$ на прежнее обозначение U. Докажем коммутативность операторов U и $|A|$. Пусть B – любой оператор, коммутирующий с A и A^* (а значит и с $|A| = \sqrt{A^*A}$) и $y = |A|x$. Тогда $BUy = BU|A|x = BAx = ABx = U|A|Bx = UB|A|x = UBy$. Предельным переходом получаем также равенство $BUy = UBy$ для всех $y \in cl(\operatorname{im}|A|)$. Осталось проверить это равенство для всех $z \in \ker|A| = \ker A$. Так как на $\ker A$ оператор U тождественный, то $BUz = Bz = UBz$ (последнее равенство следует из того, что $Bz \in \ker A$, действительно, $A(Bz) = BAz = 0$). Так как любой $x \in \mathscr{H}$ представляется в виде $x = y + z$ ($y \in cl(\operatorname{im} A)$, $z \in \ker A$), то $BUx = UBx$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Теперь применим все это к конкретному оператору $B = |A|$. Докажем единственность. Пусть $\ker A = 0$ и $A = VB$, где $B \geq 0$, а оператор V унитарен. Так как $|A|^2 = A^*A = BV^*VB = BIB = B^2$, то из единственности положительного квадратного корня получаем $|A| = B$. Из $\ker A = 0$ следует, что образ $(\operatorname{im}|A|)$ является плотным подпространством и равенство $U|A|x = V|A|x$ после предельного перехода влечет равенство $Uy = Vy$ ($y \in \mathscr{H}$). Теорема доказана.

Теорема о полярном разложении позволяет обсудить вопрос о представимости любого обратимого оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ в виде экспоненты $A = e^B$. Так как A обратим, то A^* тоже обратим (причем $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$) и $\ker A = \ker A^* = \ker|A| = 0$. Поэтому пространства $\operatorname{im}|A|$, $\operatorname{im} A$ плотны в $\mathscr{H}$ и в полярном разложении $A = U|A|$ оператор U является изометрией всего пространства $\mathscr{H}$ на все пространство $\mathscr{H}$, т. е. U унитарен. Так как спектр обратимого оператора $\sigma(|A|) \subset [m_{|A|}, M_{|A|}]$, $m_{|A|} > 0$, то определен оператор $C = \ln|A|$. Аналогично для унитарного оператора U существует ограниченный самосопряженный оператор Φ (“операторный аргумент”), такой что $U = e^{i\Phi}$ (этот факт будет доказан после спектральной теоремы). То есть, любой обратимый оператор A представляется в виде произведения двух экспонент $A = e^{i\Phi}e^{\ln|A|}$. Оказывается, что если $\dim\mathscr{H} = \infty$, то существует такой обратимый оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, для которого не существует ни одного квадратного корня. Очевидно такой оператор не представим в виде экспоненты $A = e^C$ (иначе он бы имел квадратный корень $B = e^{\frac{1}{2}C}$). Тем не менее, любой нормальный обратиммый оператор представляется экспонентой, так как в этом случае в полярном разложении $A = U|A|$ операторы U и $|A|$ коммутируют. Поэтому $A = e^{i\Phi}e^{\ln|A|} = e^{i\Phi + \ln|A|}$. Отметим, что если $\dim\mathscr{H} < \infty$, то любой обратимый оператор (любая невырожденная матрица) является экспонентой, см. задачу 36.

Задача 48. Докажите, что для любого нормального оператора A существует унитарный оператор U, такой что $A^* = UA$. Будет ли такой оператор U единственным?

§ 5. Некоторые специальные классы операторов

1^0. **Компактные операторы.**

Определение 1. Множество $K \subset \mathscr{H}$ называется *компактным*, если для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из K существует подпоследовательность $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторому элементу $x \in K$. Компактное множество иногда называют кратко *компактом.*

В случае конечномерных пространств $\dim\mathscr{H} < \infty$ класс всех компактных множеств совпадает с классом замкнутых и ограниченных множеств. Такая характеристика переносится частично и на бесконечномерный случай. Если K имеет конечную размерность, т. е. существует конечномерное подпространство $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}$ такое, что $K \subset \mathscr{L}$, то K компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Оказывается, что если $\dim \mathscr{H} = \infty$, то запас компактных множеств этим не исчерпывается.

Пример. Для $\alpha \in \ell_2$, $\alpha_j > 0$ $(j \in \mathbb{N})$ рассмотрим множество $K_\alpha = \{x \in \ell_2 : |x_j| \leq \alpha_j,\ j \in \mathbb{N}\}$. Оказывается K_α является бесконечномерным компактным подмножеством в ℓ_2. Такое множество называется *гильбертовым кирпичем.*

Отметим несколько простых свойств компактных множеств

(1) Если K, L – компакты и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то $\alpha K + \beta L$ тоже компакт. В частности, для любого $x \in \mathscr{H}$ перенос $K + x$, компакта K, тоже компакт.

(2) Если K – компакт и F – замкнутое множество, то $K + F$ тоже замкнутое множество.

(3) Если $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и K – компакт в $\mathscr{H}$, то $A(K)$ тоже компакт в $\mathscr{H}$.

Часто бывает полезным еще одно определение.

Определение 2. Множество $L \subset \mathscr{H}$ называется *предкомпактным*, если любая последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из L имеет подпоследовательность $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к некоторому элементу x (не обязательно принадлежащему L).

Лемма 1. *Множество $L \subset \mathscr{H}$ предкомпактно тогда и только тогда, когда его замыкание $cl(L)$ является компактным множеством.*

Определение 3. Линейный оператор $A : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ называется компактным, если для любого ограниченного множества M существует компактное множество K, такое что образ $A(M) \subset K$. Или, другими словами, для любого ограниченного множества M, его образ $A(M)$ является предкомпактным множеством.

Компактные операторы представляют большой интерес потому, что свойства таких операторов близки к свойствам операторов, действующих в конечномерном пространстве. Отметим, что в некоторых книгах компактные операторы называются *вполне ограниченными.*

В следующей лемме компактные операторы характеризуются на языке последовательностей.

Лемма. 2 *Линейный оператор A является компактным тогда и только тогда, когда для любой ограниченной последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в $\mathscr{H}$, из последовательности $y_n = Ax_n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть A – компактный оператор и дана ограниченная последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Рассмотрим ограниченное множество $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Его образ $A(M) = \{Ax_n : n \in \mathbb{N}\}$ является предкомпактным множеством, содержащим последовательность Ax_n. По условию она содержит некоторую сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Обратно, допустим, что для любой ограниченной последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из последовательности Ax_n выделяется сходящаяся подпоследовательность. Допустим нам дано какое-то ограниченное множество M (которое может быть и несчетным). Доказываем от противного. Предположим, что $A(M)$ не является предкомпактным множеством. тогда существует последовательность $y_n \in A(M)$, из которой нельзя выделить ни одной сходящейся подпоследовательности. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем какой нибудь один элемент $x_n \in M$, для которого $y_n = Ax_n$. Рассмотрим полученную последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Она ограничена, так как взята из M. При этом из последовательности $y_n = Ax_n$ нельзя выделить ни одной сходящейся подпоследовательности, что противоречит нашему предположению. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ имеет конечный ранг (т. е. размерность образа имеет конечную размерность $\dim(\mathrm{im}A) < \infty$), то он компактен.*

Доказательство. Доказательство сразу следует из определения, т. к., если M –ограниченное множество в $\mathscr{H}$, то образ $A(M)$ является ограниченным множеством (в силу непрерывности оператора A). Его замыкание $cl(A(M))$ тоже входит в $\mathrm{im}\, A$ (конечномерное подпространство $\mathrm{im}\, A$ замкнуто в $\mathscr{H}$). Поэтому множество $cl(A(M))$ замкнуто и ограничено в конечномерном пространстве $\mathrm{im}\, A$. Следовательно оно компактно.

Из этой леммы следует, что в конечномерном пространстве $\mathscr{H}$ все линейные операторы являются непрерывными (ограниченными) и компактными.

Лемма 4. *Если A – компактный оператор, то он непрерывен и если $\dim \mathscr{H} = \infty$, то $0 \in \sigma(A)$, т. е. компактный оператор в бесконечномерном пространстве необратим.*

Доказательство. Предположим, что A разрывен. Это означает, что существует последовательность x_n из $\mathscr{H}$, сходящаяся к нулю, но Ax_n не сходится к нулю. Поэтому существует $\alpha > 0$, что для некоторой подпоследовательности $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ будем иметь $\|Ax_{n_k}\| \geq \alpha$. Рассмотрим последовательность $y_k = x_{n_k}/\|x_{n_k}\|$, $(k \in \mathbb{N})$. Мы получаем оценку $\|Ay_k\| \geq \|Ax_{n_k}\|/\|x_{n_k}\| \geq \alpha/\|x_{n_k}\|$. Так как $x_{n_k} \to 0$, то $\|Ay_k\| \to \infty$ и поэтому из последовательности Ay_k нельзя выделить ни одной сходящейся. Но последовательность y_k ограничена (более того, $\|y_k\| = 1$), а это, в силу леммы 2, противоречит компактонсти оператора A. Пусть теперь $\dim H = \infty$. Если $\ker A \neq 0$, то сразу можно сказать, что он необратим. Рассмотрим случай $\ker A = 0$. Тогда A обратим на своем образе $\mathrm{im}\, A$. Размерность $\dim(\,\mathrm{im}\, A) = \infty$, иначе мы бы получили, что размерность $\mathscr{H}$ (как образ пространства $\mathrm{im}\, A$ при отображении A^{-1}) тоже конечна. Рассмотрим в $\mathrm{im}\, A$ какой нибудь ортонормированный базис $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Если бы оператор A^{-1} был непрерывным, то множество $M = \{A^{-1}e_n : n \in \mathbb{N}\}$ было ограничено. Так как $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ при $m \neq n$, то из образа $A(M) = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ нельзя будет выделить ни одной сходящейся подпоследовательности. Поэтому оператор A не может быть обратимым. Лемма доказана.

Из леммы 4 следует в частности, что тождественный оператор I (а также любой другой обратимый оператор), действующий в бесконечномерном пространстве $\mathscr{H}$ не может быть компактным.

Лемма 5. *Если A – компактный оператор и $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то AB и BA – компактные операторы.*

Доказательство. Пусть M – ограниченное подмножество в $\mathscr{H}$. Так как оператор B ограничен, то $B(M)$ тоже ограниченное множество. Поэтому $A(B(M))$ является предкомпактным множеством. Это доказывает компактность произведения AB. Рассмотрим теперь в пространстве $\mathscr{H}$ любую ограниченную последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Так оператор A компактен, то (по лемме 2) из последовательности Ax_n выделяется сходящаяся подпоследовательность $(Ax_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Так как оператор B непрерывен, то последовательность $(BAx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ тоже сходящаяся. Поэтому оператор BA тоже компактный. Лемма доказана.

Далее мы будем обозначать множество всех компактных линейных операторов через $\mathscr{K}(\mathscr{H})$. Множество $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ является *двусторонним операторным идеалом* в пространстве $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Это означает, что $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ является линейным подпространством в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, инвариантным относительно умножения (справа и слева) на любые операторы из $\mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Лемма 6. *Оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ компактен тогда и только тогда, когда компактен оператор A^*A.*

Доказательство. Если оператор A компактен, то он непрерывен (лемма 4), следовательно он ограничен. Так как $\|A^*\| = \|A\|$, то оператор $\|A^*\|$ тоже ограничен и из леммы 5 следует, что A^*A компактен. Обратно, если A^*A компактен, то для любой ограниченной последовательности $\|x_n\| \leq C$, из последовательности A^*Ax_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(A^*Ax_{x_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$. Тогда последовательность Ax_{n_k} тоже сходится. Для этого достаточно проверить ее фундаментальность. Рассмотрим квадрат нормы

$$\|A(x_{n_k} - x_{n_l})\| = (A(x_{n_k} - x_{n_l}), A(x_{n_k} - x_{n_l})) = (A^*A(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_k}) \leq$$
$$\|A^*A(x_{n_k} - x_{n_l})\|\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \leq 2C\|A^*A(x_{n_k} - x_{n_l})\| \to 0 \text{ при } k, l \to \infty.$$

Следовательно, последовательность Ax_{n_k} фундаментальна и, в силу полноты $\mathscr{H}$, она сходящаяся. Лемма доказана.

Следствие. Если A – компактный оператор, то A^* тоже компактный оператор.

Если оператор A компактен, то он ограничен вместе с оператором A^*, поэтому из леммы 5 следует, что оператор $AA^* = A^{**}A^*$ тоже компактен. Применяя лемму 6 к оператору $B = A^*$, получаем компактность оператора A^*.

Мы сейчас докажем основную теорему о строении компактного самосопряженного оператора.

Теорема. *Если A – компактный самосопряженный оператор, то для любого $\varepsilon > 0$ существует только конечное множество чисел λ_j, $|\lambda_j| \geq \varepsilon$, принадлежащих спектру $\sigma(A)$. Каждое такое λ_j принадлежит дискретному спектру и имеет конечную кратность (т. е. существует только конечное число линейно независимых собственных векторов, принадлежащих λ_j).*

Доказательство. Остаточный спектр самосопряженного оператора пуст (доказано в основном курсе). Предположим, что $\lambda \neq 0$ является точкой непрерывного спектра компактного самосопряженного оператора $A \neq 0$. По критерию Вейля существует последовательность векторов x_n ($n \in \mathbb{N}$), такая что $\|x_n\| = 1$ и $y_n = Ax_n - \lambda x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Из компактности A следует, что последовательность Ax_n имеет сходящуюся подпоследовательность $Ax_{n_k} \to z$ при $k \to \infty$. Тогда последовательность $x_{n_k} = \lambda^{-1}(Ax_{n_k} - y_{n_k})$ тоже сходится при $k \to \infty$ к некоторому вектору $x = \lambda^{-1}y$. Так как $\|x_{n_k}\| = 1$, то и $\|x\| = 1$. Поэтому $Ax - \lambda x = \lim\limits_{k\to\infty}(Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}) = 0$. Это означает, что λ имеет собственный вектор x, что противоречит тому, что λ принадлежит непрерывному спектру.

Итак, ненулевой спектр оператора A состоит из собственных чисел. Допустим, что $\lambda \neq 0$ и $\lambda \in \sigma(A)$. Обозначим через $\mathscr{H}_\lambda$ подпространство, порожденное всеми собственными векторами, отвечающими этому λ. Ограничение $A_\lambda = A|_{\mathscr{H}_\lambda}$ является компактным оператором, кратным единичному. Так как единичный оператор на бесконечномерном пространстве некомпактен, то $\dim \mathscr{H}_\lambda < \infty$. То есть, ненулевой спектр компактного оператора A состоит из собственных векторов конечной кратности. Фиксируем теперь любое $\varepsilon > 0$ и предположим, что существует бесконечное число собственных чисел $\lambda_j \in \sigma(A)$, $|\lambda_j| \geq \varepsilon$ $(j \in \mathbb{N})$. Если $\mathscr{H}_j$ – подпространство из собственных векторов, отвечающих числу λ_j $(j \in \mathbb{N})$, то мы рассмотрим прямую сумму $\mathscr{H}_\infty = \bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} \mathscr{H}_j$ (так как для самосопряженного оператора собственные векторы, отвечающие различным собственным числам ортогональны, то $\mathscr{H}_j \perp \mathscr{H}_l$ при $k \neq l$). $\mathscr{H}_\infty$ является инвариантным подпространством оператора A, на котором он действует как диагональная матрица с числами λ_j на диагонали. Поэтому ограничение A_∞ оператора A на подпространство $\mathscr{H}_\infty$ является обратимым оператором с обратным, имеющим конечную норму $\|A_\infty^{-1}\| = \sup\limits_j |\lambda_j^{-1}| \leq \varepsilon^{-1}$. Следовательно, оператор A_∞, а вместе с ним и оператор A, не может быть компактным. Это противоречие и доказывает теорему.

Пронумеруем все ненулевые собственные числа компактного самосопряженного оператора A, с учетом их кратности, в одну последовательность $(\lambda_j)_{j=1}^N$ и рассмотрим последовательность попарно ортогональных собственных векторов $(e_j)_{j=1}^N$, отвечающих этим собственным числам λ_j. Обозначим через $|e_j\rangle\langle e_j|$ проекторы (в дираковских обозначениях) на одномерные подпространства, порожденные векторами e_j. Число ненулевых собственных чисел N может быть как конечным, так и бесконечным. Во втором случае из предыдущей теоремы следует, что $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = 0$.

Теорема (Гильберта-Шмидта). *Для компактного самосопряженного оператора A имеет место разложение*

$$A = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|,$$

при этом, если $N = \infty$, то ряд операторов, стоящих справа, сходится по норме.

Доказательство. Будем считать, что $\dim \mathscr{H} = \infty$. С учетом кратности все λ_j пронумеруем так, чтобы было $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n_1}$, $\lambda_{n_1+1} = \cdots = \lambda_{n_2}$, $\lambda_{n_2+1} = \cdots = \lambda_{n_3}$, $\ldots$. Можно считать, что $|\lambda_{n_1}| > |\lambda_{n_2}| > |\lambda_{n_3}| > \ldots$. Спектр $\sigma(A)$ оператора A теперь можно представить в виде $\sigma(A) = \{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^M \cup \{0\}$ (если $\dim \mathscr{H} = \infty$, то 0 всегда лежит в спектре компактного оператора), где $M \leq N$ (если $N = \infty$, то также $M = \infty$). Обозначим через P_k проектор на подпространство собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_{n_k}. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и считаем, что $|\lambda_{n_j}| \geq \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, m)$ и $|\lambda_{n_j}| < \varepsilon$ $(j > m)$. Из свойства расщепления (свойство (ж) из предыдущего параграфа) следует, что $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m \oplus B_\varepsilon$, где $A_k = A|_{P_k\mathscr{H}}$ $(k = 1, \ldots, m)$, $B_\varepsilon = A|_{P_{\sigma_\varepsilon}\mathscr{H}}$, $\sigma_\varepsilon = \{\lambda_{n_k}\}_{k>m} \cup \{0\}$. При этом $\sigma(A_k) = \{\lambda_{n_k}\}$ $(k = 1, \ldots, m)$, $\sigma(B_\varepsilon) = \sigma_\varepsilon$. По теореме о спектральном радиусе имеем $\|B_\varepsilon\| = r(B_\varepsilon) = \sup\limits_{k>m} |\lambda_{n_k}| = |\lambda_{n_{k+1}}| \to 0$ при $k \to \infty$ (в случае, если $M = \infty$). Если $M < \infty$, то при достаточно малом ε будет просто $B_\varepsilon = 0$. Так как $P_1 = |e_1\rangle\langle e_1| + \dots |e_{n_1}\rangle\langle e_{n_1}|$, $P_2 = |e_{n_1+1}\rangle\langle e_{n_1+1}| + \dots + |e_{n_2}\rangle\langle e_{n_2}|, \dots$, то имеем сходящееся по норме разложение

$A = \lambda_{n_1}(|e_1\rangle\langle e_1| + \dots |e_{n_1}\rangle\langle e_{n_1}|) + \lambda_{n_2}(|e_{n_1+1}\rangle\langle e_{n_1+1}| + \dots + |e_{n_2}\rangle\langle e_{n_2}|) + \dots = \sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|$. Теорема доказана.

Иногда это разложение рассматривают с учетом нулевых собственных чисел (в этом случае их не всегда удается пронумеровать по убыванию модулей). В такой редакции можно сформулировать следующее

Следствие. (теорема Гильберта-Шмидта о диагонализации)*Пусть* $(\lambda_j)_{j=1}^N$ *– все собственные числа компактного самосопряженного оператора A с учетом их кратностей. Тогда в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ существует базис* $(e_j)_{j=1}^N$*, состоящий из собственных векторов, при этом*

$$A = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|,$$

где $N = \dim \mathscr{H}$ и (в случае $N = \infty$) ряд операторов, стоящих слева, сходится по норме.

Для доказательства этого следствия достаточно проверить только полноту ортогональной системы собственных векторов $(e_j)_{j=1}^N$. Допустим, что вектор y ортогонален всем векторам e_j. Если $\lambda_j \neq 0$, то e_j принадлежит образу im,A. Поэтому $y \perp \operatorname{im} A$. Это означает, что $y \in \ker A$. Так как собственные векторы e_j, отвечающие $\lambda_j = 0$, составляют базис в $\ker A$, а y ортогонален им, то $y = 0$. Поэтому система собственных вектров $(e_j)_{j=1}^N$ полна и $N = \dim \mathscr{H}$.

Заметим, что в базисе из собственных векторов оператор A представляется матрицей (бесконечного размера, если $\dim \mathscr{H} = \infty$) с собственными числами (соответствующей кратности) на главной диагонали.

Задача 49. Пусть A – компактный самосопряженный оператор и f – непрерывная функция на $\sigma(A)$, такая что $f(0) = 0$. Докажите, что $f(A)$ тоже компактный самосопряженный оператор.

Существует аналог вышеприведенной теоремы для компактных не обязательно самосопряженных операторов.

Теорема (разложение Шмидта). *Для любого ненулевого оператора $A \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$ существуют две ортонормированные системы векторов $\{e_j\}_{j=1}^N$, $\{f_j\}_{j=1}^N$ и существует (нестрого) убывающая последовательность положительных чисел $(s_j)_{j=1}^N$, такие что*

$$A = \sum_{j=1}^{N} s_j |f_j\rangle\langle e_j|,$$

где при $N = \infty$ ряд операторов слева сходится по норме, а $s_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим полярное разложение оператора A, т. е. $A = U|A|$, где $|A| = \sqrt{A^*A}$, а U – частичная изометрия на $cl(\operatorname{im}|A|)$. Обозначим $B = |A|$. Если A – компактный оператор, то по лемме 6 $B^2 = A^*A$ тоже компактный оператор. Применяя еще раз лемму 6 к оператору B, получаем, что B тоже компактный (и самосопряженный) оператор. Из спектральной теоремы следует, что

$$B = |A| = \sum_{j=1}^{N} s_j |e_j\rangle\langle e_j|,$$

где s_j – положительные собственные числа оператора $|A| \geq 0$, а $|e_j\rangle$ – собственные векторы, отвечающие этим s_j (при этом если $N = \infty$, то $s_j \to 0$ при $j \to \infty$). Так как U – частичная изометрия на образе $\operatorname{im}|A|$, то векторы $|f_j\rangle = U|e_j\rangle$ тоже образуют ортонормированную систему. Следовательно,

$$A = U|A| = \sum_{j=1}^{N} s_j U|e_j\rangle\langle e_j| = \sum_{j=1}^{N} s_j |f_j\rangle\langle e_j|$$

Теорема доказана.

В качестве первого следствия из этой теоремы мы получим следующий критерий компактности оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Теорема (критерий компактности). *Оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ компактен тогда и только тогда, когда он является пределом по норме последовательности операторов A_n конечного ранга.*

Доказательство. Если A – компактный оператор, то из разложения Шмидта следует, что он является пределом по норме частичных сумм $S_n = \sum_{j=1}^{n} s_j |f_j\rangle\langle e_j|$, которые являются компактными операторами конечного ранга. Обратное утверждение следует из следующего более общего факта.

Лемма 7. *Если последовательность компактных операторов $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится по норме к оператору A, то A тоже компактный оператор.*

Доказательство. См. *Александров В.А.*, Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах. Новосибирск: НГУ, 1996 (стр. 63–65).

2^0. **Вариационный принцип Куранта.**

Запишем разложение Шмидта для компактного самосопряженного оператора в виде

$$A = \sum_{j=1}^{N_+} \lambda_j^+ |e_j^+\rangle\langle e_j^+| + \sum_{l=1}^{N_-} \lambda_l^- |e_l^-\rangle\langle e_l^-|,$$

где мы выделили в отдельную сумму слагаемые с положительными собственными числами $\lambda_1^+ \geq \lambda_2^+ \geq \cdots > 0$ и слагаемые с отрицательными собственными числами $\lambda_1^- \leq \lambda_2^- \leq \cdots < 0$. Если $N_- = 0$ ($N_+ = 0$), то $A \geq 0$ ($A \leq 0$) и сумма по отрицательным (положительным) собственным числам отсутствует. По теореме о границах спектра $\lambda_1^+ = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $\lambda_1^- = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$. В вариационном принципе Куранта такого типа равенства распространяются на любые собственные числа $\lambda_j^\pm$.

Теорема. (вариационный принцип Куранта). *Для j-го положительного собственного числа λ_j^+ имеет место равенство*

$$\lambda_j^+ = \min_{\mathscr{L}_{j-1}} \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \mathscr{L}_{j-1}}} (Ax, x),$$

где минимум берется по всем подпространствам $\mathscr{L}_{j-1}$ размерности $j-1$. Аналогично, для l-го отрицательного собственного числа λ_l^- имеет место равенство

$$\lambda_l^- = \max_{\mathscr{L}_{l-1}} \min_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \mathscr{L}_{l-1}}} (Ax, x).$$

Доказательство. Запишем спектральное разложение оператора A в виде квадратичной формы

$$(Ax, x) = \sum_{j=1}^{N_+} \lambda_j^+ |x_j^+|^2 + \sum_{l=1}^{N_-} \lambda_l^- |x_l^-|^2,$$

где $x_j^\pm$ – координаты вектора x в базисе $e_j^\pm$, $x_j^\pm = (x, e_j^\pm)$. Отсюда видно, что

$\lambda_j^+ = \max\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \mathscr{L}in(e_1^+, \ldots, e_{j-1}^+)}} (Ax, x)$, где $\mathscr{L}in(e_1^+, \ldots, e_{j-1}^+)$ обозначает подпространство, порожденное базисными векторами $e_1^+, \ldots, e_{j-1}^+$. Осталось доказать, что для любого другого линейно независимого набора векторов $f_1, \ldots, f_{j-1}$ величина

$m(f_1, \ldots, f_{j-1}) = \max\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \mathscr{L}in(f_1, \ldots, f_{j-1})}} (Ax, x)$ не может быть меньше, чем λ_j. Для доказательства этого рассмотрим любой вектор x вида $x = \sum\limits_{k=1}^{j} x_k e_k^+$, единичной нормы и ортогональный подпространству $\mathscr{L}in(f_1, \ldots, f_{j-1})$. Такие векторы существуют, так как система из $j-1$ линейных уравнений

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{j} x_k (e_k^+, f_1) = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{j} x_k (e_k^+, f_{j-1}) = 0 \end{array}$$

от j переменных $x_1, \ldots, x_j$ имеет нетривиальные решения. Так как $x \perp \mathscr{L}in(f_1, \ldots, f_{j-1})$, то

$$(Ax, x) \leq \max_{\substack{\|y\|=1 \\ y \perp \mathscr{L}in(f_1, \ldots, f_{j-1})}} (Ay, y).$$

Кроме этого,

$$(Ax, x) = \sum_{k,l=1}^{j} x_k \overline{x}_l (Ae_k, e_l) = \sum_{k=1}^{j} \lambda_k^+ |x_k|^2 \geq \lambda_j^+.$$

Последнее неравенство справедливо в силу того, что $\|x\| = 1$, а λ_j^+ – наименьшее среди чисел $\lambda_1^+, \ldots, \lambda_j^+$. Итак, мы показали, что

$$\lambda_j^+ \leq (Ax, x) \leq m(f_1 \ldots, f_{j-1}) = \max_{\substack{\|y\|=1 \\ y \perp \mathscr{L}in(f_1, \ldots, f_{j-1})}} (Ay, y).$$

То есть, величина $m(f_1,\ldots,f_{j-1})$ принимает наименьшее значение λ_j^+, если $f_1 = e_1^+,\ldots,f_{j-1} = e_{j-1}^+$. Для отрицательных собственных чисел λ_l^- доказательство проводится по аналогичной схеме. Теорема доказана.

В качестве первого применения вариационного принципа Куранта мы получим теорему о сравнении собственных чисел.

Теорема. *Пусть A, B – два положительных компактных оператора и $\lambda_n(A)$, $\lambda_n(B)$ $(n \in \mathbb{N})$ – все их собственные числа, упорядоченные по убыванию. Тогда, если $A \le B$, то для каждого n справедливо неравенство $\lambda_n(A) \le \lambda_n(B)$.*

Доказательство. Пусть e_n – ортонормированные собственные векторы оператора B, отвечающие собственным числам $\lambda_n(B)$. По принципу Куранта

$$\lambda_n(B) = \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x\perp \mathscr{L}in(e_1,\ldots,e_{n-1})}} (Bx,x) \ge \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x\perp \mathscr{L}in(e_1,\ldots,e_{n-1})}} (Ax,x) \ge \min_{\mathscr{L}_{n-1}} \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x\perp \mathscr{L}_{n-1}}} (Ax,x) = \lambda_n(A).$$

Теорема доказана.

Эта теорема имеет следующее физическое следствие. Если H – оператор Гамильтона с чисто точечным спектром и $E_n(H)$ – его собственные числа (уровни энергии), то для любого положительного потенциала V мы будем иметь неравенства для уровней энергии $E_n(H) \le E_n(H+V)$. Этот факт следует из того, что в этой ситуации резольвента $(H-\lambda I)^{-1}$ оператора Гамильтона H является при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H)$ компактным самосопряженным оператором.

В качестве второго применения принципа Куранта мы докажем неравенства для сингулярных чисел.

Лемма 8. *Если A – компактный оператор и $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то*

$s_k(BA) \le \|B\| s_k(A)$ *и* $s_k(AB) \le \|B\| s_k(A)$ $(k \in \mathbb{N})$.

Доказательство. Обозначив через $\lambda_k(C)$ k-е собственное число компактного положительного самосопряженного оператора C (считаем, что все собственные числа, с учетом их кратности, упорядочены по убыванию), будем иметь

$$s_k^2(BA) = \lambda_k(A^*B^*BA), \;\; s_k^2(A) = \lambda_k(A^*A).$$

Поэтому

$$(A^*B^*BAx,x) = \|BAx\|^2 \le \|B\|^2\|Ax\|^2 = \|B\|^2(A^*Ax,x),$$

что означает

$$0 \le A^*B^*BA \le \|B\|^2 A^*A.$$

По теореме о сравнении собственных чисел имеем

$$s_k^2(BA) = \lambda_k(A^*B^*BA) \le \lambda_k(\|B\|^2A^*A) = \|B\|^2\lambda_k(A^*A) = \|B\|^2 s_k^2(A).$$

Неравенство $s_k(AB) \le \|B\| s_k(A)$ предлагается доказать самостоятельно. Лемма доказана.

3^0. Операторы Гильберта-Шмидта.

Для любого оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и любого ортонормированного базиса $(e_n)_{n=1}^N$ рассмотрим сумму

$$\sum_{n=1}^{N} \|Ae_n\|^2 \quad (N = \dim \mathscr{H}).$$

Лемма 9. *Для любых двух ортонормированных базисов* $(e_n)_{n=1}^N$, $(f_n)_{n=1}^N$ *имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{N} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|Af_n\|^2.$$

Доказательство. Рассмотрим третий ортонормированный базис $(h_n)_{n=1}^N$. Рассмотрим цепочку равенств

$$\sum_{n=1}^{N} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{N} |(Ae_n, h_m)|^2 \right) = \sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{N} |(e_n, A^* h_m)|^2 \right) = \sum_{m=1}^{N} \|A^* h_m\|^2$$

Аналогичным образом, для пары базисов $(f_n)_{n=1}^N$, $(h_n)_{n=1}^N$ получим равенство

$$\sum_{n=1}^{N} \|Ag_n\|^2 = \sum_{m=1}^{N} \|A^* h_m\|^2.$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, получим $\sum_{n=1}^{N} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|Af_n\|^2$. Лемма доказана.

Далее будем считать, что $\dim \mathscr{H} = \infty$, хотя большая часть изложенных далее утверждений имеет смысл и для конечномерных пространств.

Определение. Оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется *оператором Гильберта-Шмидта*, если для некоторого (в силу леммы 9, для любого) ортонормированного базиса $(e_n)_{n=1}^\infty$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$.

Независящее от базиса число $\|A\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 \right)^{1/2}$ называется *нормой Гильберта-Шмидта*. То есть, имеют место следующие свойства:

1) $\|A\|_2 = 0 \Longrightarrow A = 0$,
2) $\|\alpha A\|_2 = |\alpha| \|A\|_2$,
3) $\|A + B\|_2 \le \|A\|_2 + \|B\|_2$,
4) $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$,

которые предлагается проверить самостоятельно. Из определения следует, что ограниченный линейный оператор является оператором Гильберта-Шмидта тогда и только тогда, когда его норма Гильберта-Шмидта конечна. В любом случае обычная норма и норма Гильберта-Шмидта связаны неравенством $\|A\| \le \|A\|_2$. Это неравенство сразу следует из оценки

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(Ax, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, A^* e_n)|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \|A^* e_n\|^2 \|x\|^2 = \|A^*\|_2^2 \|x\|^2,$$

где $(e_n)_{n=1}^\infty$ – некоторый базис в $\mathscr{H}$. Поэтому $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \|A^*\|_2 = \|A\|_2$.

Если для оператора $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ рассмотреть в некотором базисе $(e_n)_{n=1}^\infty$ его матричные элементы $a_{m,n} = (Ae_n, e_m)$, то его норма Гильберта-Шмидта равна

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |(Ae_n, e_m)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{m,n}|^2\right)^{1/2}.$$

Это означает, что сопоставление $A \longmapsto (a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty,\infty}$ является линейной изометрией пространства всех операторов Гильберта-Шмидта на $\mathscr{H}$ и гильбертова пространства $\ell_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Так как лебегово пространство $\ell_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ полно, то пространство всех операторов Гильберта-Шмидта на $\mathscr{H}$ полно относительно нормы Гильберта-Шмидта. Кроме этого, можно ввести скалярное произведение двух операторов Гильберта-Шмидта A, B (с матрицами $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$, $(b_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ в базисе $(e_n)_{n=1}^{\infty}$) по формулам

$$\langle A, B\rangle = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}\bar{b}_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, Be_n).$$

То есть, пространство всех операторов Гильберта-Шмидта со скалярным произведением $\langle A, B\rangle$ является гильбертовым пространством.

Задача 50. Докажите, что определение скалярного произведения $\langle A, B\rangle$ не зависит от базиса $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Лемма 10. *Для любого оператора Гильберта-Шмидта A и ограниченного оператора B операторы AB, BA являются операторами Гильберта-Шмидта и справедливы оценки*

$$\|AB\|_2 \le \|B\|\|A\|_2, \ \ \|BA\|_2 \le \|B\|\|A\|_2.$$

Доказательство. Из оценок

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|BAe_n\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \|B\|^2\|Ae_n\|^2 = \|B\|^2\|A\|_2^2 < \infty$$

следует, что BA – оператор Гильберта-Шмидта и $\|BA\|_2 \le \|B\|\|A\|_2$. Для оператора AB рассмотрим его сопряженный $(AB)^* = B^*A^*$ и применим к нему предыдущие выводы, именно:

$\|AB\|_2 = \|(AB)^*\|_2 = \|B^*A^*\|_2 \le \|B^*\|\|A^*\|_2 = \|B\|\|A\|$. Лемма доказана.

Из леммы 10 следует, что пространство всех операторов Гильберта-Шмидта тоже является *двусторонним операторным идеалом*, который принято обозначать символом $\mathscr{J}_2(\mathscr{H})$. Если $\dim\mathscr{H} < \infty$, то очевидно

$$\mathscr{B}(\mathscr{H}) = \mathscr{K}(\mathscr{H}) = \mathscr{J}_2(\mathscr{H}).$$

Лемма 11. *Если $\dim\mathscr{H} = \infty$, то имеет место строгое включение $\mathscr{J}_2(\mathscr{H}) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$.*

Доказательство. Фиксируем в $\mathscr{H}$ некоторый базис $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Пусть $A \in \mathscr{J}_2(\mathscr{H})$. Рассмотрим последовательность операторов

$$A_N x = \sum_{n=1}^{N} (Ax, e_n)e_n.$$

Операторы A_N имеют конечный ранг, поэтому они компактны. Оценим норму $\|A - A_N\|$. Для любого $x \in \mathscr{H}$ получаем

$$\|(A - A_N)x\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |(Ax, e_n)|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |(x, A^*e_n)|^2 \le \|x\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \|A^*e_n\|^2$$

Значит $\|A - A_N\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(A - A_N)x\|^2 \le \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \|A^* e_n\|^2$. Так как оператор A^* тоже принадлежит $\mathscr{J}_2(\mathscr{H})$, то, в силу сходимости ряда из $\|A^* e_n\|^2$, получаем $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \|A^* e_n\|^2 \to 0$ при $N \to \infty$. Отсюда следует, что A_N сходится по норме к A и по лемме 7 оператор A компактен. Включение $\mathscr{J}_2(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{K}(\mathscr{H})$ доказано. Чтобы убедиться в строгости включения, рассмотрим оператор, действующий на базисные векторы по правилу $Ae_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\, e_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Его матрица диагональна, с диагональными элементами $a_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$. Такой оператор компактен (задача 16 из задания по основному курсу функционального анализа). Но он не принадлежит $\mathscr{J}_2(\mathscr{H})$, так как его норма Гильберта-Шмидта $\|A\|_2^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Лемма доказана.

Отметим один важный критерий того, что компактный оператор является оператором Гильберта-Шмидта.

Лемма 12. *Пусть A – компактный оператор и $(s_n(A))_{n=1}^{\infty}$ – семейство его сингулярных чисел. Тогда $A \in \mathscr{J}_2(\mathscr{H})$ в том и только в том случае, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n^2(A)$. В этом случае*

$$\|A\|_2^2 = \||A|\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(A).$$

Доказательство. Используем для вычисления нормы $\|A\|_2$ разложение Шмидта $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(A) |f_n\rangle\langle e_n|$ и базис $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, (полученный расширением ортогональной системы $|e_n\rangle$ до базиса). Тогда

$\|A\|_2^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n^2(A) = \||A|\|_2^2$. Лемма доказана.

Рассмотрим еще одну важную характеристику операторов Гильберта-Шмидта в случае, когда $\mathscr{H} = L_2(\Omega)$ (Ω – область в $\mathbb{R}^l$).

Теорема. *Если $\mathscr{H} = L_2(\Omega)$, то $\mathscr{J}_2(\mathscr{H})$ совпадает с пространством всех интегральных операторов*

$$(A_K x)(t) = \int\limits_{\Omega} K(t,s) x(s) ds \quad (x \in L_2(\Omega))$$

с квадратично интегрируемым ядром $K(t,s)$, причем

$$\|A_K\|_2 = \|K\|_{L_2(\Omega\times\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |K(t,s)|^2 dt\, ds \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Фиксируем в $L_2(\Omega)$ некоторый ортонормированный базис $(e_n(t))_{n=1}^{\infty}$. Для любого оператора $A \in \mathscr{J}_2(\mathscr{H})$ рассмотрим его матричные элементы $a_{m,n} = (Ae_n, e_m)$ и последовательность функций $a_{m,n}(t,s) = a_{m,n} e_m(t) \overline{e_n(s)}$. Это последовательность ортогональных функций, заданных на $\Omega \times \Omega$. Частичные суммы

$K_N(t,s) = \sum\limits_{m,n=1}^{N} a_{m,n}(t,s)$ образуют в пространстве $L_2(\Omega\times\Omega)$ фундаментальную последовательность Коши (так как $\sum\limits_{m,n=N+1}^{\infty} |a_{m,n}|^2 \to 0$ при $n\to\infty$). Поэтому ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}(t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n} e_m(t)\overline{e_n(s)}$$

сходится по норме пространства $L_2(\Omega\times\Omega)$ к некоторой функции $K(t,s)$. Кроме этого, для любой функции $x\in L_2(\Omega)$ получаем

$$(A_{K_N}x)(t) = \int\limits_{\Omega} K_N(t,s)x(s)ds = \sum_{n=1}^{N} a_{m,n}(x,e_n) = (A_N x)(t).$$

Ранее было доказано (лемма 11), что A_N стремится к A по операторной норме. Поэтому $A_{K_N}x = A_N x$ стремится к Ax по норме пространства $\mathscr{H} = L_2(\Omega)$. С другой стороны,

$$\left\| (A_{K_N}x)(t) - \int\limits_{\Omega} K(t,s)x(s)ds \right\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left| \int\limits_{\Omega} (K_N(t,s)-K(t,s))x(s)ds \right|^2 dt \le$$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega} |K_N(t,s)-K(t,s)|^2 ds\right)\left(\int\limits_{\Omega} |x(s)|^2 ds\right) dt =$$

$$\|K_N(t,s)-K(t,s)\|^2_{L_2(\Omega\times\Omega)}\|x\|^2_{L_2(\Omega)} \to 0 \ \text{ при } N\to\infty.$$

Выше было показано, что $A_{K_N}x = A_N x$ стремится в $L_2(\Omega)$ к Ax. Поэтому в пространстве $L_2(\Omega)$ имеет место равенство (справедливое для почти всех $t\in\Omega$)

$$(Ax)(t) = (A_K x)(t) = \int\limits_{\Omega} K(t,s)x(s)ds.$$

Последовательность функций $e_m(t)\overline{e_n(s)}$ является ортонормированным базисом в пространстве $L_2(\Omega\times\Omega)$ (доказано в основном курсе), поэтому из равенства Парсеваля в пространстве $L_2(\Omega\times\Omega)$ получаем

$$\|A\|_2^2 = \sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{m,n}|^2 = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left| \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K(t,s)e_n(s)\overline{e_m(t)}dt\,ds \right|^2 = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |K(t,s)|^2 dt\,ds.$$

Обратно, если нам дано произвольное интегрируемое с квадратом ядро $K(t,s)$, то для матричных элементов оператора A_K имеем

$$a_{m,n} = (A_K e_n, e_m) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K(t,s)e_n(s)\overline{e_m(t)}dt\,ds$$

и, в силу того же равенства Парсеваля, получаем

$$\|A_K\|_2^2 = \sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{m,n}|^2 = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} |K(t,s)|^2 dt\, ds < \infty.$$

Так как $\|A_K\|_2 < \infty$, то $A_K \in \mathscr{J}_2(L_2(\Omega))$. Теорема доказана.

4^0. **Ядерные операторы.**

Пусть $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $A \geq 0$. Для ортонормированного базиса $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ определим след оператора A в базисе $e = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ по формуле

$$\operatorname{tr}_e A = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n).$$

То есть, след – это сумма диагональных элементов матрицы $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty,\infty}$ оператора A ($a_{m,n} = (Ae_n, e_m)$). Перечислим свойства следа, сразу следующие из определения.

$\operatorname{tr}_e A \geq 0$; $\alpha \geq 0 \Longrightarrow \operatorname{tr}_e(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}_e A$; $A, B \geq 0 \Longrightarrow \operatorname{tr}_e(A+B) = \operatorname{tr}_e A + \operatorname{tr}_e B$;

$0 \leq A \leq B \Longrightarrow \operatorname{tr}_e A \leq \operatorname{tr}_e B$; $U^* = U^{-1} \Longrightarrow \operatorname{tr}_{Ue}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}_e A$.

Лемма 13. *След* $\operatorname{tr}_e A$ *оператора* $A \geq 0$ *не зависит от базиса* e. *Кроме этого, для любого унитарного оператора* $U = (U^*)^{-1}$ *имеем* $\operatorname{tr} UAU^{-1} = \operatorname{tr} A$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные два ортонормированных базиса $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Имеем

$$\operatorname{tr}_e A = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{A}e_n, \sqrt{A}e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \|\sqrt{A}e_n\|^2 = \text{(по лемме 9)} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\sqrt{A}f_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (Af_n, f_n) = \operatorname{tr}_f A.$$

Пусть теперь U – унитарный оператор, тогда из $A \geq 0$ следует $UAU^{-1} \geq 0$. Из независимости следа от базиса получаем

$\operatorname{tr}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}_e(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}_{Ue}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}_e A = \operatorname{tr} A$. Лемма доказана.

Из доказательства предыдущей леммы получаем

Следствие. Для положительного оператора $A \geq 0$ условие $\operatorname{tr} A < \infty$ равносильно условию $\sqrt{A} \in \mathscr{J}_2(\mathscr{H})$. При этом $\operatorname{tr} A = \|\sqrt{A}\|_2^2$.

Определение. Оператор $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется *ядерным*, если $\operatorname{tr}|A| < \infty$.

Обозначим через $\mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ множество всех ядерных операторов.

Теорема. *Множество* $\mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ *является двусторонним операторным идеалом. То есть, оно является линейным подпространством в* $\mathscr{B}(\mathscr{H})$*, которое инвариантно относительно умножения (справа и слева) на любые операторы из* $\mathscr{B}(\mathscr{H})$*. Кроме этого, из* $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ *следует* $A^* \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$.

Доказательство. Если $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, то $\operatorname{tr}|\alpha A| = |\alpha| \operatorname{tr}|A| < \infty$. Рассмотрим теперь два оператора $A, B \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ и покажем, что $A+B \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Для этого рассмотрим три полярных разложения

$$A + B = U|A + B|, \quad A = V|A|, \quad B = W|B|.$$

Оператор U является частичной изометрией на подпространстве $cl(\operatorname{im}|A + B|)$. Поэтому $cl(\operatorname{im} U^*) = (\ker U)^{\perp} = cl(\operatorname{im}|A+B|)$. Поэтому подпространство $cl(\operatorname{im}|A+B|)$ является инвариантным для U^*U, причем $(U^*Ux, x) = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = (x, x)$

для любого $x \in cl(\operatorname{im}|A+B|)$. То есть, U^*U действует в $cl(\operatorname{im}|A+B|)$ как тождественный оператор. Поэтому $|A+B| = U^*(A+B)$. Подставляя это в формулу для следа, получим

$$\sum_{n=1}^{N}(|A+B|e_n,e_n) = \sum_{n=1}^{N}(U^*(A+B)e_n,e_n) \le$$
$$\sum_{n=1}^{N}|(U^*V|A|e_n,e_n)| + \sum_{n=1}^{N}|(U^*V|A|e_n,e_n)| = \sum_{n=1}^{N}|(|A|^{1/2}e_n,|A|^{1/2}V^*Ue_n)| +$$
$$\sum_{n=1}^{N}|(|B|^{1/2}e_n,|B|^{1/2}W^*Ue_n)| \le \sum_{n=1}^{N}\||A|^{1/2}e_n\|\cdot\||A|^{1/2}V^*Ue_n)\| + \cdots\cdots \le$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\||A|^{1/2}e_n\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\||A|^{1/2}V^*Ue_n)\|^2\right)^{1/2} + \cdots\cdots =$$
$$(\operatorname{tr}|A|)^{1/2}\||A|^{1/2}V^*U\|_2 + \cdots\cdots \le (\operatorname{tr}|A|)^{1/2}\||A|^{1/2}\|_2 + \cdots\cdots = \operatorname{tr}|A| + \operatorname{tr}|B|.$$

Многоточие здесь означает сумму аналогичных выражений, содержащих оператор $|B|$. В последних неравенствах мы воспользовались леммой 10 и тем, что норма любой частичной изометрии не больше 1. Устремляя $N \to \infty$, мы получим полезное для дальнейшего неравенство

$$\operatorname{tr}|A+B| \le \operatorname{tr}|A| + \operatorname{tr}|B|.$$

Мы доказали, что $\mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ является линейным подпространством в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Осталось доказать, что из $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$, $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ следует $AB, BA \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Любой ограниченный оператор B является линейной комбинацией не более четырех унитарных операторов (см. стр. 41). Поэтому достаточно рассмотреть частный случай, когда $B = U$ – унитарный оператор. Если $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$, то по определению $|A| \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Но, так как $U^*U = I$, то $|UA| = (A^*U^*UA)^{1/2} = (A^*A)^{1/2} = |A| \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Это означает, что $UA \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Для модуля оператора AU получаем выражение $|AU| = (U^*A^*AU)^{1/2} = U^*|A|^{1/2}U$. Последнее равенство следует из того, что для любой непрерывной функции $f \in C(\sigma(A))$ имеем $f(U^{-1}AU) = U^{-1}f(A)U$ (свойство (в) на стр. 36). Поэтому $\operatorname{tr}|AU| = \operatorname{tr}(U^{-1}|A|U) =$ (лемма 13) $= \operatorname{tr}|A| < \infty$.

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Рассмотрим полярные разложения операторов A и A^*,

$$A = U|A|, \quad A^* = V|A^*|.$$

Тогда $|A^*| = V^*A^* = V^*|A|U^*$. Так как $|A| \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$, а V^*, U^* – ограниченные операторы, то по только что доказанным свойствам $|A^*| \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Это означает, что $A^* \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Теорема доказана.

При доказательстве этой теоремы мы получили неравенство треугольника для следов $\operatorname{tr}|A+B| \le \operatorname{tr}|A| + \operatorname{tr}|B|$. Выражение $\|A\|_1 = \operatorname{tr}|A|$ принято называть *ядерной (следовой) нормой*. Нам осталось проверить только свойство невырожденности. Допустим $\|A\|_1 = 0$. Тогда $\operatorname{tr}|A| = \|\sqrt{|A|}\|_2^2 = 0$. То есть $|A| = 0$, так как норма Гильберта-Шмидта этого оператора нулевая. Из $|A| = 0$ следует $|A|^2 = A^*A = 0$, а отсюда следует, что $A = 0$. Теперь можно определить $\mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ как подпространство всех ограниченных операторов, имеющих конечную следовую норму.

Лемма 14. *$\mathscr{J}_1(\mathscr{H}) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$ и операторы конечного ранга плотны в $\mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ относительно следовой нормы.*

Доказательство. Из $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ следует $|A| \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ и $|A|^2 \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ (так как $AB \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ для любого ограниченного оператора B). Поэтому $\operatorname{tr}|A|^2 = \||A|\|_2^2 < \infty$, что означает $|A| \in \mathscr{J}_2(\mathscr{H})$. Так как $\mathscr{J}_2(\mathscr{H})$ идеал, то из полярного разложения следует, что $A = U|A| \in \mathscr{J}_2(\mathscr{H}) \subset \mathscr{K}(\mathscr{H})$.

Пусть $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Так как $A \in \mathscr{K}(\mathscr{H})$, то A имеет разложение Шмидта

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A)|f_k\rangle\langle e_k|,$$

где $|e_k\rangle$, $|f_k\rangle$ $(k \in \mathbb{N})$ – некоторые ортонормированные системы векторов. Очевидно, $\operatorname{tr}|A| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k(A) < \infty$. В качестве последовательности операторов конечного ранга рассмотрим последовательность частичных сумм $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} s_k(A)|f_k\rangle\langle e_k|$. Так как $|A - A_n| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} s_k(A)|e_k\rangle\langle e_k|$, то $\|A - A_n\|_1 = \operatorname{tr}|A - A_n| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} s_k(A) \to 0$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Компактный оператор A является ядерным* $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty$ $\iff A = BC$ *для некоторых* $B, C \in \mathscr{J}_2(\mathscr{H})$.

Доказательство. Если A – компактный оператор, то разложения Шмидта для A и $|A|$ имеют следующий вид:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)|f_n\rangle\langle e_n|, \quad |A| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)|e_n\rangle\langle e_n|.$$

Отсюда следует, что A является ядерным $\iff \operatorname{tr}|A| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty$. Если теперь нам дан любой ядерный оператор A, то операторы

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} (s_n(A))^{1/2}|f_n\rangle\langle e_n|, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} (s_n(A))^{1/2}|e_n\rangle\langle e_n|$$

являются операторами Гильберта-Шмидта, так как $\|B\|_2^2 = \|C\|_2^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty$. Легко проверяется, что $BC = A$. Обратно, допустим, что $A = BC$ для некоторых операторов Гильберта-Шмидта B и C. Рассмотрим полярное разложение $BC = U|BC|$, где U – частичная изометрия на $cl(\operatorname{im}|BC|)$. Тогда $|BC| = U^*BC$ и мы можем (в некотором базисе $(e_n)_{n=1}^{\infty}$) оценить след оператора $|BC|$

$$\|BC\|_1 = \operatorname{tr}|BC| = \sum_{n=1}^{\infty} (|BC|e_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (U^*BCe_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ce_n, B^*Ue_n) \le$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Ce_n\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|B^*Ue_n\|^2\right)^{1/2} = \|C\|_2\|B^*U\|_2 \le \|B\|_2\|C\|_2 < \infty.$$

Здесь мы воспользовались леммой 10 и неравенством $\|U\| \le 1$, справедливым для любой частичной изометрии U. Лемма доказана.

Так как для компактного оператора A из $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty$ следует $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n^2(A) < \infty$, то мы получаем

Следствие. Ядерный оператор является оператором Гильберта-Шмидта, т. е. $\mathscr{J}_1(\mathscr{H}) \subset \mathscr{J}_2(\mathscr{H})$.

Теперь мы можем для любого ядерного оператора $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ дать определение следа (в ортонормированном базисе $(e_n)_{n=1}^\infty$) по формуле

$$\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^\infty (Ae_n, e_n).$$

Лемма 16. *Если* $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$, *то для любого ортонормированного базиса* $(e_n)_{n=1}^\infty$ *ряд*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^\infty (Ae_n, e_n)$$

сходится абсолютно и его сумма не зависит от базиса $(e_n)_{n=1}^\infty$.

Доказательство. Подставим в сумму модулей $\sum\limits_{n=1}^\infty |(Ae_n, e_n)|$ полярное разложение $A = U|A| = U|A|^{1/2}|A|^{1/2}$. В результате получим оценку

$$|\operatorname{tr} A| \le \sum_{n=1}^\infty |(Ae_n, e_n)| \le \sum_{n=1}^\infty |(|A|^{1/2}e_n, |A|^{1/2}U^*e_n)| \le$$

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \||A|^{1/2}e_n\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^\infty \||A|^{1/2}U^*e_n\|^2\right)^{1/2} = \||A|^{1/2}\|_2\, \||A|^{1/2}U^*\|_2 \le$$

$$\||A|^{1/2}\|_2^2 = \operatorname{tr}|A| = \|A\|_1.$$

Здесь мы еще раз воспользовались леммой 10 и оценкой нормы $\|U\| \le 1$.

Осталось доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^\infty (Ae_n, e_n)$ не зависит от базиса $(e_n)_{n=1}^\infty$. Для этого представим оператор A в виде $A = \frac{1}{2}(B_+ - B_-) + i\frac{1}{2}(C_+ - C_-)$, где $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Так как из $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ следует $A^* \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$, то $B, C \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$, в частности, $|B|, |C| \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Поэтому $B_\pm = \frac{1}{2}(|B| \pm B) \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$. Из леммы 13 следует, что следы положительных операторов $B_\pm$, $C_\pm$ не зависят от базиса. Так как A является линейной комбинацией 4-х положительных операторов, то след оператора A тоже не будет зависеть от базиса. Лемма доказана.

Из этой леммы и теоремы Гильберта-Шмидта о диагонализации компактного самосопряженного оператора сразу получаем

Следствие. Если $A \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$ и $A = A^*$, то $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{n=1}^\infty \lambda_n(A)$, где $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ – последовательность всех собственных чисел оператора A, с учетом их кратности. То есть, след самосопряженного ядерного оператора равен его *спектральному следу*.

В качестве второго следствия из доказательства этой леммы мы получаем оценку для следа оператора A

$$|\operatorname{tr} A| \le \operatorname{tr}|A| = \|A\|_1.$$

В качестве еще одного важного следствия рассмотрим формулу для следа интегрального оператора. Рассмотрим в пространстве $L_2([a,b])$ интегральный оператор с непрерывным симметричным ядром $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$

$$(A_K)x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds$$

Такой оператор является оператором Гильберта-Шмидта (известно также из основного курса).

Теорема. Если ядро $K(t,s)$ непрерывно на $[a,b]^2$ и все собственные числа оператора A_K, кроме конечного числа, имеют одинаковый знак, то оператор A_K ядерный и имеет место следующая формула для следа:

$$\operatorname{tr} A_K = \int\limits_a^b K(t,t)\,dt.$$

Доказательство. Доказательство основывается на теореме Мерсера, которая формулировалась без (доказательства) в основном курсе. Пусть $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность все собственных чисел оператора A_K (с учетом их кратности), а $(\varphi_n(t))_{n=1}^{\infty}$ – соотвествующая им последовательность собственных функций. В $L_2([a,b]^2)$ справедливо следующее билинейное разложение ядра

$$K(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t)\overline{\varphi_n(s)}.$$

Из непрерывности ядра $K(t,s)$ следует непрерывность собственных функций $\varphi_n(t)$. Теорема Мерсера утверждает, что ряд из непрерывных функций в билинейном разложении ядра сходится равномерно. Поэтому его можно интегрировать почленно. В результате этого интегрирования получим

$$\int\limits_a^b K(t,t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int\limits_a^b \varphi_n(t)\overline{\varphi_n(t)}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.$$

В силу предыдущего следствия, $\operatorname{tr} A_K = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$. Теорема доказана.

Основные свойства следа. Для любых $A, B \in \mathscr{J}_1(\mathscr{H})$, $C \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ имеют место следующие свойства:

1) $\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr} A + \beta \operatorname{tr} B \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ (линейность следа);
2) $A \geq 0 \implies \operatorname{tr} A \geq 0$;
3) $\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}$;
4) $\operatorname{tr}(AC) = \operatorname{tr}(CA)$ или $\operatorname{tr}([A,C]) = 0$ (коммутативность следа);
5) $|\operatorname{tr} AC| \leq \|C\| \operatorname{tr}|A| = \|A\|_1 \|C\|$.

Пункты 1)–3) не требуют доказательства. Докажем пункт 4). Так как любой ограниченный оператор является линейной комбинацией 4-х унитарных операторов, то достаточно рассмотреть случай, когда $C = U$ – унитарный оператор. Распишем след оператора AU в некотором ортонормированном базисе $(e_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\operatorname{tr} AU = \sum_{n=1}^{\infty} (AUe_n, U^*Ue_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (UAUe_n, Ue_n) = \operatorname{tr}_{Ue}(UA) = \operatorname{tr}_e(UA) = \operatorname{tr} UA.$$

В частности, отсюда следует, что для любого ограниченного обратимого оператора C имеем равенство

$$\operatorname{tr} CAC^{-1} = \operatorname{tr} A.$$

Для доказательства пункта 5) воспользуемся неравенством для сингулярных чисел $s_k(AC) \le \|C\| s_k(A)$ $(k \in \mathbb{N})$. Тогда

$$|\operatorname{tr} AC| \le \operatorname{tr} |AC| = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(AC) \le \sum_{k=1}^{\infty} \|C\| s_k(A) = \|C\| \operatorname{tr} |A| = \|C\| \|A\|_1.$$

Задача 51. Докажите равенство $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ для любых двух операторов Гильберта-Шмидта $A, B \in \mathscr{J}_2(\mathscr{H})$. Покажите, в частности, что скалярное произведение двух операторов Гильберта-Шмидта равно $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr} AB^*$.

В заключение сформулируем еще один важный результат о свойствах следа

Теорема. *Пусть $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Если для любого ортонормированного базиса $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n)$, то A является ядерным оператором.*

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (A^* e_n, e_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{(Ae_n, e_n)}$ тоже абсолютно сходится для любого ортонормированного базиса $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Поэтому абсолютно сходятся аналогичные ряды для операторов $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Для оператора $B_+ \ge 0$ рассмотрим ортонормированный базис $(e_n^+)_{n=1}^{\infty}$, такой, что для любого $n \in \mathbb{N}$ либо $e_n^+ \in \ker B_+$, либо $e_n^+ \in cl\,(\operatorname{im} B_+)$. Например, пусть $e_{2k-1}^+ \in \ker B_+$, $e_{2k}^+ \in cl\,(\operatorname{im} B_+)$ $(k \in \mathbb{N})$. Так как $B_- B_+ = 0$, то $B_- e_{2k}^+ = 0$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Be_n, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (B_+ e_{2k-1}^+, e_{2k-1}^+) - \sum_{k=1}^{\infty} (B_- e_{2k}^+, e_{2k}^+).$$

Из абсолютной сходимости этого ряда следует сходимость положительных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_+ e_n^+, e_n^+) = \sum_{k=1}^{\infty} (B_+ e_{2k-1}^+, e_{2k-1}^+) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (B_- e_n^+, e_n^+) = \sum_{k=1}^{\infty} (B_- e_{2k}^+, e_{2k}^+) < \infty.$$

Это доказывает, что операторы $B_\pm$ являются ядерными. Аналогичным образом устанавливается ядерность операторов $C_\pm$. Так как оператор A является линейной комбинацией операторов $B_\pm$, $C_\pm$, то он тоже ядерный. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что класс ядерных операторов – это максимальный класс операторов, для которых можно корректно определить след. Другими словами, для любого неядерного оператора A существует ортонормированный базис $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, для которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n)$ расходится.

Задача 52. Положительный оператор ρ называется *состоянием (матрицей плотности)*, если он ядерный и $\operatorname{tr} \rho = 1$. Состояние ρ называется *чистым*, если его ранг равен единице, т. е. существует ортонормированный вектор $e \in \mathscr{H}$, такой что $\rho x = e(x, e)$ $(x \in \mathscr{H})$ (в дираковских обозначениях $\rho = |e\rangle\langle e|$). Докажите, что чистые состояния являются *крайними точками* в множестве всех состояний. То есть, если состояние ρ является чистым и $\rho = \alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2$ для некоторых состояний $\rho_{1,2}$ и $0 \le \alpha \le 1$, то либо $\rho = \rho_1$ $(\alpha = 1)$, либо $\rho = \rho_2$ $(\alpha = 0)$. Докажите также обратное утверждение, то есть, любая крайняя точка в множестве состояний является чистым состоянием.

Задача 53. Для состояния ρ определим энтропию фон Неймана по формуле $S_\rho = -\operatorname{tr}(\rho\ln\rho)$. Докажите, что $S_\rho \geq 0$ и что $S_\rho = 0$ тогда и только тогда, когда ρ – чистое состояние. Приведите пример состояния ρ, для которого $S_\rho = +\infty$.

Задача 54. Для двух состояний ρ, τ определим относительную энтропию (дивергенцию) формулой $S_\tau(\rho) = \operatorname{tr}(\rho\ln\rho) - \operatorname{tr}(\rho\ln\tau)$. Докажите, что $S_\tau(\rho) \geq 0$ и что $S_\tau(\rho) = 0$ тогда и только тогда, когда $\tau = \rho$.

Задача 54'. Для смешанного состояния ρ и любых самосопряженных операторов A и B докажите неравенство $\operatorname{tr}(A^2\rho)\operatorname{tr}(B^2)\rho \geq \frac{1}{4}|\operatorname{tr}([A,B]\rho)|^2$.

§ 6. Спектральное разложение ограниченных самосопряженных и нормальных операторов

1^0. Свойства ортогональных проекторов.

Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Тогда любой вектор $x \in \mathscr{H}$ единственным образом представляется в виде $x = x_1 + x_2$ ($x_1 \in \mathscr{H}_1$, $x_2 \in \mathscr{H}_2$). Оператор $P \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется *ортогональным проектором* (на подпространство $\mathscr{H}_1$), если $Px = x_1$ для любого $x \in \mathscr{H}$.

Оператор $P \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ является ортогональным проектором тогда и только тогда, когда

1) $P^2 = P$, 2) $P = P^*$.

Докажем этот простой факт. Если P – ортогональный проектор, то очевидно $P^2 = P$. Пусть $x, y \in \mathscr{H}$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ ($x_1, y_1 \in \mathscr{H}_1$, $x_2, y_2 \in \mathscr{H}_2$). Теперь самосопряженность P следует из равенств $(Px, y) = (x_1, y) = (x_1, y_1) = (x, y_1) = (x, Py)$. Обратно, если условия 1), 2) выполнены, то P является ортогогональным проектированием на подпространство $\mathscr{H}_1 = P\mathscr{H}$. Если $x_1 \in \mathscr{H}_1$, то $x_1 = Px$ для некоторого $x \in \mathscr{H}$. То есть $Px_1 = P^2x = Px = x_1$. Если $x_2 \perp \mathscr{H}$, то для любого $y \in \mathscr{H}$ получаем $x_2 \perp Py$, т.е. $0 = (x_2, Py) = (Px_2, y)$, что означает $Py = 0$. Любой вектор x разлагается в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathscr{H}_1$, $x_2 \in \mathscr{H}_2 = \mathscr{H} \ominus \mathscr{H}_1$, поэтому $Px = Px_1 + Px_2 = x_1$.

Норма ненулевого ортогонального проектора равна 1. Это следует из того, что $\|Px\|^2 = \|x_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$, причем равенство достигается в случае $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$. Из этих же оценок следует, что если $\|Px\| = \|x\|$, то $x_2 = 0$ и x принадлежит подпространству $\mathscr{H}_1$ (на которое осуществляется проектирование).

Лемма 1. *Пусть P, Q – ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда*

(а) Оператор $P + Q$ является ортогональным проектором тогда и только тогда, когда $PQ = 0$. В этом случае $P + Q$ проектирует на подпространство $P\mathscr{H} \oplus Q\mathscr{H}$.

(б) Оператор PQ является ортогональным проектором тогда и только тогда, когда $PQ = QP$. В этом случае PQ проектирует на подпространство $P\mathscr{H} \cap Q\mathscr{H}$.

(в) $P \leq Q \iff P\mathscr{H} \subseteq Q\mathscr{H} \iff PQ = P$

(г) Оператор $P - Q$ является ортогональным проектором тогда и только тогда, когда $PQ = Q$ (или $Q \leq P$). В этом случае $P - Q$ проектирует на подпространство $P\mathscr{H} \ominus Q\mathscr{H}$.

Доказательство. (а). Если $PQ = 0$, то из $(Px, Qy) = (x, PQy) = 0$ следует, что $P\mathscr{H} \perp Q\mathscr{H}$. Если $x = y + z$, где $x \in P\mathscr{H}$, $y \in Q\mathscr{H}$, то $(P + Q)x = Py + Qz =$

$y+z=x$. Если $x \perp P\mathscr{H} \oplus Q\mathscr{H}$, то $(P+Q)x = Px + Qx = 0$. Обратно, допустим, что $P+Q$ является ортогональным проекторм. Из $(P+Q)^2 = P+Q$ следует, что $PQ + QP = 0$. Умножив это равенство слева на Q, получим $QP = -QPQ$. Умножив это же равенство справа на Q, получим $PQ = -QPQ = QP$. То есть, $PQ - QP = 0$; вместе с предыдущим равенством это дает $PQ = QP = 0$.

(б). Предлагается доказать самостоятельно.

(в). Если $(Px, x) \le (Qx, x)$, для всех $x \in \mathscr{H}$, то $\|Px\|^2 \le \|Qx\|^2$. Пусть $x \in P\mathscr{H}$. Тогда $\|x\| = \|Px\| \le \|Qx\| \le \|x\|$. То есть $\|Qx\| = \|x\|$ и поэтому $x \in P\mathscr{H}$. Мы доказали, что $P \le Q \implies P\mathscr{H} \subseteq Q\mathscr{H}$. Допустим теперь, что $P\mathscr{H} \subseteq Q\mathscr{H}$. Если $x \in P\mathscr{H}$, то $x = Px$ и $x = Qx$ (так как $x \in Q\mathscr{H}$). Поэтому $Px = PQx$. Если $x \in Q\mathscr{H}$ и $x \perp P\mathscr{H}$, то $0 = Px = QPx = PQx$. Если $x \perp Q\mathscr{H}$, то также $0 = Px = PQx$. Теперь любой вектор $x \in \mathscr{H}$ раскладывается в прямую сумму $x = x_1 + x_2 + x_3$, где $x_1 \perp Q\mathscr{H}$, $x_2 \in Q\mathscr{H}$, $x_2 \perp P\mathscr{H}$, $x_3 \in P\mathscr{H}$. Поэтому $Px = x_3 = PQx$. Импликация $P\mathscr{H} \subseteq Q\mathscr{H} \Longrightarrow P = PQ$ доказана. Допустим теперь, что $P = PQ$. Тогда $(Px, x) = (P^2x, x) = \|Px\|^2 = \|PQx\|^2 \le \|P\|^2\|Qx\|^2 = \|Qx\|^2 = (Qx, x)$ для любого $x \in \mathscr{H}$. Импликация $P = PQ \Longrightarrow P \le Q$ тоже доказана.

(г). Если $Q \le P$, то $Q\mathscr{H} \subseteq P\mathscr{H}$ (свойство (в)). Любой вектор $x \in \mathscr{H}$ раскладывается в прямую сумму $x = x_1 + x_2 + x_3$, где $x_1 \perp P\mathscr{H}$, $x_2 \in P\mathscr{H}$, $x_2 \perp Q\mathscr{H}$, $x_3 \in Q\mathscr{H}$. Тогда $(P-Q)x = Px - Qx = (x_2 + x_3) - x_3 = x_2$. Это означает, что $P-Q$ является ортогональным проектором на подпространство $P\mathscr{H} \ominus Q\mathscr{H}$. Обратно, допустим, что $P-Q$ – ортогональный проектор. В этом случае, по свойству (а), оператор $(P-Q)+Q$ является ортогональным проектором тогда и только тогда, когда $(P-Q)Q = 0$, что (по свойству (в)) эквивалентно $PQ = Q$, то есть, $Q \le P$. Лемма доказана.

Если $PQ = 0$, то будем говорить, что проекторы P и Q *ортогональны друг другу.* Напомним, что последовательность операторов $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится к оператору A, если $A_n x \to Ax$ для любого $x \in \mathscr{H}$.

Лемма 2. *(а) Для любой последовательности попарно ортогональных проекторов $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ на подпространства $(\mathscr{H}_n)_{n=1}^{\infty}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ сильно сходится к ортогональному проектору Q на подпространство $\mathscr{L} = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n$.*
(б) Любая убывающая (возрастающая) последовательность ортогональных проекторов $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ на подпространства $(\mathscr{H}_n)_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится к ортогональному проектору Q на подпространство $\mathscr{L} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n$ (на подпространство $\mathscr{L} = cl(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n)$).

Доказательство. (а) Любой вектор $x \in \mathscr{H}$ единственным образом представляется в виде ортогональной суммы $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, где $x_0 \perp \mathscr{L} = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n$, $x_n \in \mathscr{H}_n$ $(n \ge 1)$. Частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} P_n x = \sum\limits_{n=1}^{N} x_n$ сходятся при $N \to \infty$ (по норме пространства $\mathscr{H}$) к вектору $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, который мы обозначим через Qx. Это означает сильную сходимость частичных сумм $\sum_{n=1}^{N} P_n$ к оператору Q. Так как для любого $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ($x_0 \perp \mathscr{L}$, $x_n \in \mathscr{H}_n$, $n \geq 1$) имеем $Qx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, то Q есть ортогональный проектор на $\mathscr{L}$.

(б) Допустим, что последовательность ортогональных проекторов $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам $P_{n+1} \leq P_n$ ($n \geq 1$). Рассмотрим ортогональную последовательность проекторов $Q_n = P_n - P_{n+1}$. Из (а) следует, что последовательность частичных сумм $\sum_{n=1}^{N} Q_n = P_1 - P_{N+1}$ сильно сходится к некоторому ортогональному проектору P. Это означает, что последовательность $(P_N)_{N=1}^{\infty}$ сильно сходится к проектору $Q = P_1 - P$. Если $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n$, то $P_n x = x$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу, получим $Qx = \lim_{n\to\infty} P_n x = x$. Если $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n$, то $x \notin \mathscr{H}_{n_0}$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда $\|P_n x\| \leq \|P_{n_0} x\| < \|x\|$ при $n \geq n_0$. Переходя к пределу, получим $\|Qx\| \leq \|P_{n_0} x\| < \|x\|$. То есть, в этом случае x не принадлежит подпространству, на которое проектирует оператор Q. Отсюда следует, что подпространство, на которое проектирует оператор Q, есть $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}_n$. Случай возрастающей последовательности проекторов $P_n \leq P_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) исследуется аналогичным образом. Лемма доказана.

2^0. **Разложение единицы.**

Разложением единицы самосопряженного оператора A называется семейство ортогональных проекторов $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$, обладающих следующими свойствами:

1) Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ коммутирует с любым оператором $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, коммутирующим с A.

2) $E_\lambda = O$ при $\lambda \leq m_A$ и $E_\lambda = I$ при $\lambda > M_A$ (m_A, M_A – нижняя и верхняя границы спектра оператора A).

3) $E_\lambda \leq E_\mu$ при $\lambda \leq \mu$.

4) E_λ, как функция от λ, сильно непрерывна слева. То есть, для любого $x \in \mathscr{H}$ и любой последовательности $\lambda_n \uparrow \lambda$ имеем $\lim_{n\to\infty} E_{\lambda_n} x = E_\lambda x$.

5) Для любых $\lambda \leq \mu$ справедливы неравенства

$$\lambda(E_\mu - E_\lambda) \leq A(E_\mu - E_\lambda) \leq \mu(E_\mu - E_\lambda).$$

Для самосопряженного оператора A расмотрим его ортогональное разложение на положительную и отрицательную части $A = A_+ - A_-$. Обозначим через $P_{\ker A_-}$ оператор ортогонального проектирования на ядро оператора A_-.

Лемма 3. *Для любого самосопряженного оператора A оператор $P_{\ker A_-}$ коммутирует с любым ограниченным оператором B, коммутирующим с A.*

Доказательство. Пусть $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $BA = AB$. Если $x \in \ker A_-$, то $P_{\ker A_-} x = x$ и $BP_{\ker A_-} x = Bx$. Для доказательства равенства $Bx = P_{\ker A_-} Bx$ достаточно проверить, что $Bx \in \ker A_-$. Так как B коммутирует с A, то B коммутирует с любой непрерывной функцией от A, в частности, B коммутирует с A_-. Поэтому $A_- Bx = BA_- x = 0$, т. е. $Bx \in \ker A_-$. Рассмотрим теперь любой вектор y, ортогональный $\ker A_-$. Это означает, что $y \in cl\,(\operatorname{im} A_-)$, т. е. существует последовательность x_n, такая что $y_n = A_- x_n \to y$. Тогда $BP_{\ker A_-} y = 0$. Убедимся в том, что $By \perp \ker A_-$. Рассмотрим любой вектор $x \in \ker A_-$. Из равенств $(By, x) = \lim_{n\to\infty} (By_n, x) = \lim_{n\to\infty} (BA_- x_n, x) = \lim_{n\to\infty} (A_- Bx_n) = \lim_{n\to\infty} (Bx_n, A_- x) = 0$ следует, что $By \perp \ker A_-$ Тогда $BP_{\ker A_-} y = 0 = P_{\ker A_-} By$. Любой вектор $z \in \mathscr{H}$ раскладывается в прямую сумму $z = x + y$, где $x \in \ker A_-$, $y \perp \ker A_-$. Выше было доказано, что $[B, P_{\ker A_-}]z = [B, P_{\ker A_-}]x + [B, P_{\ker A_-}]y = 0$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если A – самосопряженный оператор, то*

1) $AP_{\ker A_-} = A_+$, 2) $A(I - P_{\ker A_-}) = -A_-$.

Доказательство. Так как, очевидно, $A_- P_{\ker A_-} = O$, то $AP_{\ker A_-} = A_+ P_{\ker A_-} - A_- P_{\ker A_-} = A_+ P_{\ker A_-}$. Докажем равенство $A_+ P_{\ker A_-} = A_+$. Для $x \in \ker A_-$ получаем $P_{\ker A_-} x = x$ и $A_+ P_{\ker A_-} x = A_+ x$. Пусть теперь $y \perp \ker A_-$. Тогда $y \in cl\,(\operatorname{im} A_-)$ и существует последовательность $y_n \in \operatorname{im} A_-$, сходящаяся к y. Поэтому $y_n = A_- x_n$ для некоторых $x_n \in \mathscr{H}$ и $A_+ y = \lim_{n\to\infty} A_+ y_n = \lim_{n\to\infty} A_+ A_- x_n = 0$ (так как $A_+ A_- = O$). Следовательно, $A_+ P_{\ker A_-} y = 0 = A_+ y$. Теперь любой вектор $z \in \mathscr{H}$ разлагается в прямую сумму $z = x + y$ ($x \in \ker A_-$, $y \perp \ker A_-$) и поэтому $A_+ P_{\ker A_-} z = A_+ P_{\ker A_-} x + A_+ P_{\ker A_-} y = A_+ x + A_+ y = A_+ z$. Равенство 2) теперь сразу следует из 1) и цепочки равентв

$$A(I - P_{\ker A_-}) = A_+ - A_- - A_+ P_{\ker A_-} + A_- P_{\ker A_-} = A_+ - A_- - A_+ = -A_-.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Для любого самосопряженного оператора A существует разложение единицы $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$, удовлетворяющее перечисленным выше свойствам* 1) – 5).

Доказательство. Пусть A – самосопряженный оператор. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ положим

$$E_\lambda = I - P_{\ker(A - \lambda I)_-}.$$

Для такого семейства проекторов $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ свойство 1) уже доказано в лемме 3.

Докажем свойство 2). Если $\lambda \le m_A$, где m_A – нижняя граница спектра для A, то $A - \lambda I \ge A - m_A I \ge O$. То есть, $(A - \lambda I)_- = O$ и $\ker(A - \lambda I) = \mathscr{H}$. Поэтому $I - P_{\ker(A-\lambda I)_-} = O$. Пусть $M_A < \lambda$. Тогда $\lambda \notin \sigma(A)$ и $(A - \lambda I)$ – обратимый оператор. Кроме этого, из $A - \lambda I \le O$ следует $(A - \lambda I)_- = -(A - \lambda I)$ – обратимый оператор. Поэтому $\ker(A - \lambda I)_- = 0$ и $E_\lambda = I - O = I$.

Докажем свойство 3). Пусть $\lambda \le \mu$. Тогда $A - \lambda I \ge A - \mu I$ и

$$(A - \lambda I)_- = (-(A - \lambda I)) \vee O \le (-(A - \mu I)) \vee O = (A - \mu I)_-.$$

Поэтому $\ker(A - \lambda I)_- \supseteq \ker(A - \mu I)_-$ и $P_{\ker(A-\lambda I)_-} \ge P_{\ker(A-\mu I)_-}$. Отсюда следует, что $E_\lambda \le E_\mu$.

Докажем свойство 4). Пусть $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda_n \uparrow \lambda$. Обозначим $P_n = E_\lambda - E_{\lambda_n}$. По лемме 2(б) убывающая последовательность проекторов P_n сильно сходится к некоторому проектору Q. Нам необходимо доказать, что $Q = O$. Допустим, что $Q \ne O$ и рассмотрим вектор $x \in Q\mathscr{H}$, $\|x\| = 1$. Так как $P_n \ge Q$, то $P_n x = x$ для всех $n \in \mathbb{N}$. То есть, $E_\lambda x = x$ и $E_{\lambda_n} x = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Из $E_{\lambda_n} x = 0$ следует $x - P_{\ker(A-\lambda_n I)_-} x = 0$, т. е. $x \in \ker(A - \lambda_n I)_-$. Так как последовательность функций $(\mu - \lambda_n)_-$ сходится равномерно к функции $(\mu - \lambda)_-$, то и последовательность операторов $(A - \lambda_n I)_-$ сходится по норме к оператору $(A - \lambda I)_-$ (см. § 4, $\mathbf{2}^0$ (б)).

Поэтому $0 = (A-\lambda_n I)_- x \to (A-\lambda I)_- x$. То есть $x \in \ker(A-\lambda I)_-$. С другой стороны, из $E_\lambda x = x$ следует $P_{\ker(A-\lambda I)_-} x = O$, т.е. $x \perp \ker(A-\lambda I)_-$. Это противоречие доказывает, что $Q = O$ и что возрастающая последовательность E_{λ_n} сильно сходится к E_λ.

Осталось доказать свойство 5). Заменяя в свойстве 2) леммы 4 оператор A на $A-\mu I$, получаем

$$AE_\mu = (A-\mu I)E_\mu + \mu E_\mu = (A-\mu I)(I-P_{\ker(A-\mu I)_-}) = -(A-\mu I)_- + \mu E_\mu \le \mu E_\mu.$$

Поэтому при $\lambda \le \mu$ получаем

$$A(E_\mu - E_\lambda) = AE_\mu(E_\mu - E_\lambda) \le \mu E_\mu(E_\mu - E_\lambda) = \mu(E_\mu - E_\lambda).$$

здесь мы воспользовались тем, что $E_\lambda E_\mu = E_\lambda$ при $\lambda \le \mu$. Аналогичным образом, заменяя в свойстве 1) леммы 4 оператор A на $A-\lambda I$, получим

$$A(I-E_\lambda) = AP_{\ker(A-\lambda I)_-} = (A-\lambda I)P_{\ker(A-\lambda I)_-} + \lambda P_{\ker(A-\lambda I)_-} =$$
$$(A-\lambda I)_+ + \lambda P_{\ker(A-\lambda I)_-} \ge \lambda P_{\ker(A-\lambda I)_-} = \lambda(I-E_\lambda).$$

Отсюда, при $\lambda \le \mu$, получаем

$$A(E_\mu - E_\lambda) = A(I-E_\lambda)(E_\mu - E_\lambda) \ge \lambda(I-E_\lambda)(E_\mu - E_\lambda) = \lambda(E_\mu - E_\lambda).$$

Теорема доказана.

3^0. **Спектральное разложение самосопряженного оператора.**

Пусть A – самосопряженный оператор и $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ – его разложение единицы. Как обычно, m_A, M_A – нижняя и верхняя граница спектра оператора A. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ рассмотрим произвольное разбиение $\sigma = \{m_A = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = M_A + \varepsilon\}$ отрезка $[m_A, M_A+\varepsilon]$ на n частей. *Диаметром* разбиения σ назовем число $|\sigma| = \max\limits_k(\lambda_k - \lambda_{k-1})$. Обозначим $\Delta_k = [\lambda_{k-1}, \lambda_k)$. Напомним, что полуоткрытому интервалу $[\lambda_{k-1}, \lambda_k)$ принадлежит λ_{k-1}, но не принадлежит λ_k. Определим также *спектральную меру* интервала $E(\Delta_k) = E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$. Рассмотрим нижнюю и верхнюю сумму Дарбу

$$\underline{S}_\sigma = \sum_{k=1}^n \lambda_{k-1}E(\Delta_k), \quad \overline{S}_\sigma = \sum_{k=1}^n \lambda_k E(\Delta_k)$$

Из свойства 5) для разложения единицы следуют оценки

$$\underline{S}_\sigma = \sum_{k=1}^n \lambda_{k-1}E(\Delta_k) \le A\sum_{k=1}^n E(\Delta_k) \le \sum_{k=1}^n \lambda_k E(\Delta_k) = \overline{S}_\sigma.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^n E(\Delta_k) = I$, то $\underline{S}_\sigma \le A \le \overline{S}_\sigma$ или

$$O \le \overline{S}_\sigma - A \le \overline{S}_\sigma - \underline{S}_\sigma = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_{k-1})E(\Delta_k) \le |\sigma| I.$$

Из теоремы о границах спектра следует оценка $\|\overline{S}_\sigma - A\| \le \|\overline{S}_\sigma - \underline{S}_\sigma\| \le |\sigma|$. Это доказывает существование предела по норме $\lim\limits_{|\sigma|\to 0} \underline{S}_\sigma = \lim\limits_{|\sigma|\to 0} \overline{S}_\sigma = A$. Этот предел является интегралом Римана-Стильтьеса от функции λ по разложению единицы E_λ и записывается следующей формулой:

$$A = \int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} \lambda\, dE_\lambda.$$

Если вместо функции λ рассмотреть какую-либо другую функцию $f(\lambda)$, непрерывную на отрезке $[m_A, M_A+\varepsilon]$, то в точности так же доказывается, что существует предел по операторной норме интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)E(\Delta_k), \text{ где } \xi_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k) \quad (k = 1\ldots, n).$$

То есть, существует интеграл Римана-Стильтьеса от любой непрерывной функции по разложению единицы E_λ, который мы будем обозначать аналогичной формулой

$$\int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} f(\lambda)\, dE_\lambda \quad \text{при этом} \quad \left\| \int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} f(\lambda)\, dE_\lambda \right\| \le \max_\lambda |f(\lambda)| = \|f\|_{[m_A, M_A+\varepsilon]}. \quad (*)$$

Как легко заметить, для любого $m \in \mathbb{N}$ оператор A^m является пределом по операторной норме интегральных сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m E(\Delta_k), \quad \text{отсюда} \quad A^m = \int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} \lambda^m dE_\lambda.$$

Любая непрерывная функция (по теореме Стоуна-Вейерштрасса) является равномерным пределом, на отрезке $[m_A, M_A+\varepsilon]$, последовательности полиномов $P_k(\lambda)$. Из функционального исчисления для самосопряженных операторов мы уже знаем, что $\|p_k(A) - f(A)\| \to 0$ при $k \to \infty$. Аналогично, из предыдущей оценки $(*)$, для нормы интеграла, мы получаем равенство

$$f(A) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} p_k(\lambda) dE_\lambda = \int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} f(\lambda)\, dE_\lambda,$$

То есть, с помощью разложения единицы мы получили явную формулу для вычисления непрерывной функции от оператора.

Основные свойства разложения единицы.

(а) Точка $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ принадлежит резольвентному множеству оператора A тогда и только тогда, когда для некоторого $\delta > 0$ выполняется $E_{\lambda_0-\delta} = E_{\lambda_0+\delta}$ (т. е. функция E_λ постоянна на интервале $(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$).

(б) Точка λ_0 принадлежит дискретному спектру оператора A тогда и только тогда, когда λ_0 является точкой разрыва (справа) функции E_λ, при этом $P_{\lambda_0} = E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0}$ является проектором на подпространство собственных векторов оператора A, отвечающих числу λ_0.

(в) Точка λ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора A тогда и только тогда, когда λ_0 является точкой непрерывности функции E_λ и E_λ не является постоянной ни в какой окрестности $(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$ (т. е. для любого $\delta > 0$ выполняется $E_{\lambda_0-\delta} \ne E_{\lambda_0+\delta}$).

Докажем свойство (а). Если $E_{\lambda_0-\delta} = E_{\lambda_0+\delta}$ при некотором $\delta > 0$, то интеграл Стильтьеса по участку $(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$ равен нулю и мы получаем

$$A-\lambda_0 I=\int\limits_{m_A}^{\lambda_0-\delta}(\lambda-\lambda_0)\,dE_\lambda+\int\limits_{\lambda_0+\delta}^{M_A+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)\,dE_\lambda$$

Если подействовать правой и левой частью на любой вектор $x\in\mathscr{H}$, то для квадрата нормы получаем аналогичное равенство и оценку снизу

$$\|(A-\lambda_0 I)x\|^2=\int\limits_{m_A}^{\lambda_0-\delta}(\lambda-\lambda_0)^2 d\|E_\lambda x\|^2+\int\limits_{\lambda_0+\delta}^{M_A+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)^2\,d\|E_\lambda x\|^2\geq\delta^2\int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon}d\|E_\lambda x\|^2.$$

В последнем неравенстве мы добавили нулевой интеграл от $d\|E_\lambda x\|^2$ по участку $[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta)$. Так как интеграл от $d\|E_\lambda x\|^2=d(E_\lambda x,x)$ по всему отрезку $[m_A,M_A+\varepsilon)$ равен $(Ix,x)=\|x\|^2$, то получаем оценку $\|(A-\lambda_0 I)x\|\geq\delta\|x\|$. Теперь из критерия Вейля следует, что $\lambda_0\notin\sigma(A)$. Обратно, допустим, что для любого $\delta>0$ выполняется $E_{\lambda_0-\delta}\neq E_{\lambda_0+\delta}$. Пусть $x_n\in(E_{\lambda_0+\frac{1}{n}}-E_{\lambda_0-\frac{1}{n}})\mathscr{H}$ и $\|x_n\|=1$. Тогда $E_\lambda x_n=0$ при $\lambda<\lambda_0-\frac{1}{n}$ и $E_\lambda x_n=x_n$ при $\lambda\geq\lambda_0+\frac{1}{n}$. Поэтому

$$\|(A-\lambda_0 I)x_n\|^2=\int\limits_{\lambda_0-\frac{1}{n}}^{\lambda_0+\frac{1}{n}}(\lambda-\lambda_0)^2\,d\|E_\lambda x\|^2\leq\frac{1}{n^2}\|x_n\|^2=\frac{1}{n^2}\to 0$$

и по тому же критерию Вейля мы получаем $\lambda_0\in\sigma(A)$.

Докажем свойство (б). Пусть x_0 – собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению λ_0. Рассмотрим равенство

$$0=\|(A-\lambda_0 I)x_0\|^2=\int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)^2 d\|E_\lambda x_0\|^2.$$

Отсюда следует, что $d\|E_\lambda x_0\|^2=0$ для всех $\lambda\neq\lambda_0$, т.е. функция $\|E_\lambda x_0\|^2$ постоянна при $\lambda<\lambda_0$ и при $\lambda>\lambda_0$. Так как $E_\lambda=I$ при $\lambda>M_A$ и $E_\lambda=O$ при $\lambda\leq\lambda_0$, то $\|E_\lambda x_0\|^2=\|x_0\|^2$ при $\lambda>\lambda_0$ и $\|E_\lambda x_0\|^2=0$ при $\lambda<\lambda_0$. Поэтому $E_{\lambda_0+0}x_0=\lim\limits_{n\to\infty}E_{\lambda_0+\frac{1}{n}}x_0=x_0$, $E_{\lambda_0}x_0=\lim\limits_{n\to\infty}E_{\lambda_0-\frac{1}{n}}x_0=0$. Это означает, что $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}\neq O$ и любой собственный вектор x_0 принадлежит подпространству $(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})\mathscr{H}$. Обратно, допустим, что $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}\neq O$ и рассмотрим любой вектор $x\in(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})\mathscr{H}$. Тогда для любого $\delta>0$ получаем

$$\|(A-\lambda_0 I)x\|^2=\int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon}(\lambda-\lambda_0)^2 d\|E_\lambda x\|^2=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+\delta}(\lambda-\lambda_0)^2 d\|E_\lambda x\|^2\to 0\quad\text{при}\quad\delta\to 0.$$

То есть $\|(A-\lambda_0 I)x\|=0$ и любой вектор $x\in(E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0})\mathscr{H}$ является собственным для A.

Свойство (в) сразу следует из только что доказанных свойств (а), (б).

Следствие. Разложение единицы $\{E_\lambda:\lambda\in\mathbb{R}\}$ может иметь не более чем счетное число точек разрыва.

Из свойства (б) следует, что точки разрыва функции E_λ являются точками дискретного спектра. Для каждого такого числа λ существует ненулевой собственный вектор x_λ. Но для самосопряженного оператора собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны. А в сепарабельном гильбертовом пространстве существует не более чем счетное число ненулевых попарно ортогональных векторов.

Мы теперь в состоянии доказать единственность разложения единицы.

Теорема. *Пусть A – самосопряженный оператор. Существует единственное разложение единицы $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$, для которого выполняются свойства* 2), 3), 4) *и равенство*

$$A = \int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} \lambda \, dE_\lambda.$$

Доказательство. Допустим, что, кроме построенного выше разбиения единицы $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$, существует еще одно разбиение единицы $\{F_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$, удовлетворяющее свойствам 1) – 4) и равенству

$$A = \int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} \lambda \, dF_\lambda.$$

Отсюда (заменяя во всех предыдущих выкладках E_λ на F_λ) сразу получаем, что

$$f(A) = \int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} f(\lambda) \, dF_\lambda.$$

для любой функции f, непрерывной на $[m_A, M_A+\varepsilon]$. Обозначим $G_\lambda = E_\lambda - F_\lambda$. Тогда

$$\int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} f(\lambda) \, dG_\lambda = 0$$

для любой функции f, непрерывной на $[m_A, M_A+\varepsilon]$. Фиксируем вектор $x \in \mathscr{H}$. Пусть λ_0 – точка непрерывности для E_λ и F_λ. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \le \lambda_0 \\ n(\lambda_0 + \frac{1}{n} - \lambda) & \lambda_0 < \lambda \le \lambda_0 + \frac{1}{n} \\ 0 & \lambda > \lambda_0 + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Так как функции f_n непрерывны и $0 \le f_n(\lambda) \le 1$, то в равенстве

$$0 = \int\limits_{m_A}^{M_A+\varepsilon} f_n(\lambda) \, d(G_\lambda x, x) = (G_{\lambda_0} x, x) + \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+\frac{1}{n}} f_n(\lambda) \, d(G_\lambda x, x)$$

последний интеграл не превосходит величины $\|E_{\lambda_0+\frac{1}{n}} x\|^2 - \|E_{\lambda_0}\|^2 + \|F_{\lambda_0+\frac{1}{n}}\|^2 - \|F_{\lambda_0}\|$, которая стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому $(G_{\lambda_0} x, x) = 0$. Точки разрыва, как для E_λ так и для и F_λ, это точки дискретного спектра оператора A.

Допустим, что λ_0 является такой точкой разрыва. Так как таких точек не более чем счетное число, то существует возрастающая последовательность $\lambda_n \uparrow \lambda_0$, такая, что все λ_n являются точками непрерывности как для E_λ, так и для F_λ. Так как функция G_λ непрерывна слева, то $(G_{\lambda_0}x, x) = \lim\limits_{n\to\infty}(G_{\lambda_n}x, x) = 0$. То есть, $(G_\lambda x, x) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех $x \in \mathscr{H}$. Отсюда следует, что $G_\lambda = E_\lambda - F_\lambda \equiv 0$. Теорема доказана.

4^0. **Борелевские функции от самосопряженного оператора.**

Подмножество $F \subset \mathbb{R}$ вида $F = \bigcup\limits_{j=1}^{m}[a_j, b_j)$ (где $b_j \le a_{j+1}$, $j = 1, \dots, m-1$) называется *простым.* Обозначим через $\mathscr{S}$ семейство всех таких множеств. Семейство $\mathscr{S}$ является *алгеброй множеств*, т. е., если $F_1, F_2 \in \mathscr{S}$, то множества $F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2$, $\mathbb{R} \setminus F_1$ тоже принадлежат семейству $\mathscr{S}$. Пусть $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ – самосопряженный оператор и $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ – его разложение единицы. Отображение E из $\mathscr{S}$ в множество ортогональных проекторов вида $E(F) = \sum\limits_{j=1}^{m}(E_{b_j} - E_{a_j})$ (для любого $F = \bigcup\limits_{j=1}^{m}[a_j, b_j) \in \mathscr{S}$) называется *спектральной мерой* оператора A. Спектральная мера обладает свойством аддитивности, т. е., если $F_1, F_2 \in \mathscr{S}$ и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, то $E(F_1 \cup F_2) = E(F_1) + E(F_2)$. Так как $E(F_1) + E(F_2)$ является проектором, то проекторы $E(F_1)$ и $E(F_2)$ ортогональны друг другу, т. е. $E(F_1)E(F_2) = 0$.

Задача 55. Докажите, что $E(F_1 \cap F_2) = E(F_1)E(F_2)$ и $E(F_1 \cup F_2) = E(F_1) + E(F_2) - E(F_1)E(F_2)$ для любых $F_1, F_2 \in \mathscr{S}$.

Символом $F_1 \sqcup F_2$ будем обозначать объединение двух непересекающихся множеств F_1 и F_2. Аналогично, символ $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ означает объединение счетного семейства попарно непересекающихся множеств. Важнейшим свойством спектральной меры является её счетная аддитивность (или σ-аддитивность).

Лемма. *Спектральная мера самосопряженного оператора A является счетно-аддитивной относительно сильной операторной сходимости. То есть, если $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ – счетное семейство попарно непересекающихся простых множеств, и $F = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathscr{S}$, то для любого $x \in \mathscr{H}$ имеет место равенство*

$$E(F)x = \sum_{n=1}^{\infty} E(F_n)x.$$

Доказательство. Пусть $F \in \mathscr{S}$ и $F = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m}[a_j, b_j)$. Для любого $\delta > 0$ назовем δ-*сжатием* (соответственно, δ-*расширением*) множества F множество $F_{(\delta)} = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m}[a_j, b_j - \delta)$ (сответственно, множество $F^{(\delta)} = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m}[a_j - \delta, b_j)$). Из сильной непрерывности разложения единицы слева следует, что для любого $x \in \mathscr{H}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ-сжатие $F_{(\delta)}$ и такое δ-расширение $F^{(\delta)}$ множества $F \in \mathscr{S}$, что $\|(E(F) - E(F_{(\delta)}))x\|^2 < \varepsilon$ и $\|(E(F^{(\delta)}) - E(F))x\|^2 < \varepsilon$. Кроме этого, для замыкания $cl(F_{(\delta)})$ и внутренности $int(F^{(\delta)})$ выполняются включения $F_{(\delta)} \subset cl(F_{(\delta)}) \subset F$ и $F \subset int(F_{(\delta)}) \subset F_{(\delta)}$. Рассмотрим теперь любое счетное семейство попарно непересекающихся множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, такое что

$F = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathscr{S}$. Пусть $x \in \mathscr{H}$ и $\varepsilon > 0$. Выберем такое δ-сжатие $F_{(\delta)}$ множества F, чтобы выполнялась оценка $\|E(F) - E(F_{(\delta)})\| < \varepsilon$. Далее, для каждого $n \in \mathbb{N}$ выбираем такое δ_n-расширение $F_n^{(\delta_n)}$ множества F_n, чтобы выполнялась оценка $\|E(F_n^{(\delta_n)}) - E(F_n)\| < \varepsilon/2^n$. Очевидно, $cl(F_{(\delta)}) \subset F = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} int(F_n^{(\delta_n)})$. Так как $cl(F_{(\delta)})$ является компактом, то из его покрытия множествами $int(F_n^{(\delta_n)})$ можно выделить конечное подпокрытие, т.е. $F_{(\delta)} \subset cl(F_{(\delta)}) \subset \bigcup_{n=1}^{N} int(F_n^{(\delta_n)}) \subset \bigcup_{n=1}^{m} F_n^{(\delta_n)}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Это включение будет справедливым и для любого номера $N \geq m$ Функция $\mu_x(F) = (E(F)x, x) = \|E(F)x\|^2$ является положительной мерой. То есть $0 \leq \mu_x(F) \leq \mu_x(G)$ при $F \subset G$ и $\mu_x(F \sqcup G) = \mu_x(F) + \mu_x(G)$ при $F \cap G = \emptyset$. Отсюда следует, в частности, что $\mu_x(F \cup G) \leq \mu_x(F) + \mu_x(G)$ для любых $F, G \in \mathscr{S}$. Поэтому справедливы следующие оценки:

$$\mu_x(F_{(\delta)}) \leq \mu_x(\bigcup_{n=1}^{N} F_n^{(\delta)}) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu_x(F_n^{(\delta_n)}) = \sum_{n=1}^{N} \Big(\mu_x(F_n) + \mu_x(F_n^{(\delta_n)} \setminus F_n)\Big).$$

Так как $\mu_x(F_n^{(\delta_n)} \setminus F_n) = \|E(F_n^{(\delta_n)} \setminus F_n)x\|^2 = \|E(F_n^{(\delta_n)})x - E(F_n)x\|^2 < \varepsilon/2^n$ и $\mu_x(F \setminus F_{(\delta)}) = \|E(F \setminus F_\delta)x\|^2 < \varepsilon$, то получаем оценку

$$\mu_x(F) = \mu_x(F_{(\delta)}) + \mu_x(F \setminus F_{(\delta)}) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu_x(F_n) + 2\varepsilon = \mu_x\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} F_n\right) + 2\varepsilon.$$

Так как $\bigsqcup_{n=1}^{N} F_n \subset F$, то для любого $N \geq m$ имеем оценку

$$\mu_x(F \setminus \bigsqcup_{n=1}^{N} F_n) = \|E(F \setminus \bigsqcup_{n=1}^{N} F_n)x\|^2 = \|E(F)x - E(\bigsqcup_{n=1}^{N} F_n)x\|^2 < 2\varepsilon.$$

Это означает, что последовательность векторов $E(\bigsqcup_{n=1}^{N} F_n)x = \sum_{n=1}^{N} E(F_n)x$ сходится при $N \to \infty$ к вектору $E(F)x$, что и означает сильную счетную аддитивность спектральной меры E. Лемма доказана.

Эта лемма является ключевой для продолжения спектральной меры на гораздо более широкий класс множеств. Семейство множеств $\mathscr{A}$ называется σ-алгеброй, если из $F_1, F_2 \in \mathscr{A}$ следует $F_1 \cup F_2, F_1 \cap F_2, F_1 \setminus F_2 \in \mathscr{A}$ и если $F_n \in \mathscr{A}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathscr{A}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathscr{A}$. Очевидно пересечение любого семейства σ-алгебр является σ-алгеброй. Поэтому пересечение всех σ-алгебр, содержащих нашу алгебру $\mathscr{S}$, будет наименьшей σ-алгеброй, содержащей $\mathscr{S}$ (она называется σ-алгеброй, порожденной семейством $\mathscr{S}$). Она также называется борелевской σ-алгеброй и обозначается символом $\mathscr{B}or(\mathbb{R})$. Основная теорема о продолжении меры (которая в данном курсе не доказывается) гласит, что спектральная мера E может быть продолжена единственным образом на борелевскую σ-алгебру с сохранением свойства счетной аддитивности. Это продолжение спектральной меры мы далее будем обозначать тем же символом E. Так как любой открытый интервал (a, b) есть счетное объединение полуоткрытых интервалов $[a + \frac{1}{n}, b)$, то открытые интервалы являются борелевскими множествами. Далее, известно, что любое открытое множество является счетным объединением попарно непересекающихся открытых интервалов, поэтому все открытые множества являются борелевскими. Все замкнутые множества являются дополнениями к открытым множествам, поэтому они являются борелевскими. В частности все счетные множества, являющиеся счетными объединениями одноточечных (т. е. замкнутых) множеств, тоже борелевские. Построение явных примеров неборелевских множеств является непростой задачей. Один из подходов использует так называемые суслинские множества. Протое (но неконструктивное) доказательство существования неборелевских множеств следующее: доказывается, что семейство всех борелевских множеств на пря мой имеет континуальную мощность, в то время как мощность множества всех подмножеств прямой больше континума.

Основные свойства спектральной меры

1) Если $F \cap \sigma(A) = \emptyset$, то $E(F) = O$.

2) $E(\sigma(A)) = I$.

3) Если F_n – убывающая (соответственно, возрастающая) последовательность борелевских множеств и $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ (соответственно, $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$), то последовательность $E(F_n)$ сильно сходится к $E(F)$.

4) Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ принадлежит дискретному спектру оператора A тогда и только тогда, когда $E(\{\lambda_0\}) \neq O$, при этом $E(\{\lambda_0\})$ является проектором на соответствующее подпространство собственных векторов.

5) Число λ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора A тогда и только тогда, когда $E(\{\lambda_0\}) = O$ и $E((\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)) \neq O$ для любого $\delta > 0$.

Свойство 1) сразу следует из того, что открытое множество $\mathbb{R} \setminus \sigma(A)$ является счетным объединением открытых интервалов (a_j, b_j), а каждый такой интервал является участком постянства для разложения единицы E_λ. Поэтому $E(\mathbb{R} \setminus \sigma(A))x = \sum\limits_{j=1}^{\infty}(E_{b_j} - E_{a_j})x = 0$ для любого $x \in \mathscr{H}$. В частности, из $F \cap \sigma(A) = \emptyset$ следует $F \subset \mathbb{R} \setminus \sigma(A)$, т. е. $O \le E(F) \le E(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = O$. Свойство 2) сразу следует из 1).

Докажем свойство 3). Пусть F_n – убывающая последовательность борелевских множеств и $F = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} F_j$. Так как $F_1 = F \sqcup \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(F_n \setminus F_{n+1})$, то из счетной аддитивности меры E получим $E(F_1)x = E(F)x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(E(F_n) - E(F_{n+1}))x$ для любого $x \in \mathscr{H}$. То есть, $E(F_N)x = E(F_1)x - \sum\limits_{n=1}^{N}(E(F_n) - E(F_{n+1}))x$ стремится к $E(F)x$ при $N \to \infty$. Мы доказали, что $\lim\limits_{N\to\infty} E(F_N)x = E\left(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} F_j\right)x$ для каждого $x \in \mathscr{H}$. Для возрастающей последовательности борелевских множеств F_n доказательство проводится аналогично.

Докажем свойство 4). Пусть последовательность λ_n монотонно убывает к λ_0. Полагаем $F_n = [\lambda_0, \lambda_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $(E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0})x = \lim\limits_{n\to\infty}(E_{\lambda_n} - E_{\lambda_0})x = \lim\limits_{n\to\infty} E([\lambda_0, \lambda_n))x = E\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[\lambda_0, \lambda_n)\right)x = E(\{\lambda_0\})x$. Свойство 4) теперь сразу следует из соответствующего свойства (б) для разложения единицы E_λ. Точки λ_0, для которых $E(\{\lambda_0\}) \neq O$ обычно называют *атомами* меры E.

Докажем свойство 5). Если $E((\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)) = 0$ при некотором $\delta > 0$, то при любом $0 < \delta' < \delta$ выполняется $E_{\lambda_0+\delta'} - E_{\lambda_0-\delta'} = E([\lambda_0-\delta', \lambda_0+\delta')) \leq E(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta) = O$. Поэтому λ_0 является точкой постоянства для разложения единицы E_λ и $\lambda_0 \notin \sigma(A)$. Верно также обратное, если для любого $\delta > 0$ выполняется $E((\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)) \neq O$, то также $E_{\lambda_0+\delta} - E_{\lambda_0-\delta} = E([\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)) \geq E((\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)) \neq 0$, и λ_0 не является точкой постоянства для E_λ. Поэтому $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Если при этом $E(\{\lambda_0\}) = 0$, то из свойства 4) следует, что λ_0 может быть только точкой непрерывного спектра.

Одним из основных достоинств интегрирования по σ-аддитивной мере, заданной на σ-алгебре состоит в том, что можно определить интеграл, обладающий весьма хорошими свойствоами, для очень широкого класса функций. Этот класс функций замкнут относительно поточечной сходимости. Говорим, что последовательность функций $f_n(\lambda)$ *поточечно* сходится к функции $f(\lambda)$, если для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\lambda) = f(\lambda)$. Классом *борелевских функций* называется наименьший класс функций, замкнутый относительно поточечной сходимости и содержащий класс всех непрерывных функций. Класс всех борелевских функций, заданных на $\mathbb{R}$, будем обозначать через $\mathscr{M}(\mathbb{R})$. Принадлежность функции $f(\lambda)$ к классу борелевских функций можно проверять с помощью следующего критерия (который в этом курсе приводится без доказательства):

Критерий борелевости. *Функция $f(\lambda)$ является борелевской тогда и только тогда, когда для любого борелевского множества $F \in \mathscr{B}or(\mathbb{R})$ прообраз $f^{-1}(F)$ тоже является борелевским множеством.*

Так как мы сейчас изучаем ограниченные операторы, то будем интегрировать только ограниченные борелевские функции. В связи с этим введем обозначение $\mathscr{M}_b(\mathbb{R})$ для класса всех ограниченных борелевских функций. *Ступенчатой функцией* называем любую конечную линейную комбинацию характеристических функций борелевских множеств. Любая ступенчатая функция $s(\lambda)$ единственным образом представляется в виде

$$s(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{F_k}(\lambda),$$

где $c_k \in \mathbb{R}$ $(1 \leq k \leq n)$, $\{F_k\}_{k=1}^n$ – семейство попарно непересекающихся борелевских множеств, а $\chi_{F_k}(\lambda)$ – характеристическая функция множества F_k,

$$\chi_{F_k}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in F_k \\ 0 & \lambda \notin F_k \end{cases}$$

Если E – спектральная мера самосопряженного оператора A, заданная на $\mathscr{B}or(\mathbb{R})$, и $s(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{F_k}(\lambda)$ – ступенчатая функция, то *интегральной суммой* от s по мере E называется выражение

$$\int\limits_{\mathbb{R}} s(\lambda) E(d\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k E(F_k).$$

Если $f(\lambda)$ – любая ограниченная борелевская функция, то она, как легко заметить, есть равномерный предел последовательности ступенчатых функций $s_n(\lambda) =$

$\sum\limits_{k=a_n}^{b_n} c_k\chi_{F_k}(\lambda)$, где $c_k = \frac{k}{n}$ $(1 \le k \le n)$, $F_k = \{\lambda : \frac{k}{n} \le f(\lambda) < \frac{k+1}{n}\}$ (эти множества F_k иногда называются *лебеговскими множествами* функции f); здесь пределы суммирования a_n, b_n выбраны так, чтобы выполнялись неравенства $\frac{a_n}{n} \le f(\lambda) < \frac{b_n+1}{n}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. *Интегралом Лебега* от функции f по спектральной мере E назывется предел по операторной норме последовательности интегральных сумм

$$\int\limits_{\mathbb{R}} s_n(\lambda)E(d\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k E(F_k).$$

Интеграл Лебега от ограниченной борелевской функции f по спектральной мере E называется *борелевской функцией* от оператора A. Символически это записывается формулой

$$f(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda)E(d\lambda).$$

Для ограниченной борелевской функции $f \in \mathscr{M}_b(\mathbb{R})$ определим норму $\|f\|_\infty$, которую называют *существенным супремумом* от $|f|$, по формуле

$\|f\|_\infty = \inf\{a : E(\{\lambda : |f(\lambda)| > a\}) = O\}.$

Из этого определения следует, что существенный супремум $\|f\|_\infty$ обладает следующими, характеризующими это число, свойствами:

1) $E(\{\lambda : |f(\lambda)| > \|f\|_\infty\}) = O$,
2) $E(\{\lambda : |f(\lambda)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}) \ne O$ для любого $\varepsilon > 0$.

Лемма 5. *Для любой ограниченной борелевской функции* $f \in \mathscr{M}_b(\mathbb{R})$ *выполняется равенство* $\|f(A)\| = \|f\|_\infty$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathscr{R}$. Из оценок

$$\|f(A)x\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x) \le \|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{R}} (E(d\lambda)x, x) = \|f\|_\infty^2 \|x\|^2$$

следует, что $\|f(A)\| \le \|f\|_\infty$. Если $\varepsilon > 0$, то существует ненулевой вектор x из образа проектора $E(\{\lambda : |f(\lambda)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\})$. Можно считать, что $\|x\| = 1$. Обозначим $F_\varepsilon = \{\lambda : |f(\lambda)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$. Тогда

$$\|f(A)x\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)x, x) \ge \int\limits_{F_\varepsilon} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^2 (E(d\lambda)x, x) =$$

$$(\|f\|_\infty - \varepsilon)^2 \int\limits_{\mathbb{R}} (E(d\lambda)x, x) = (\|f\|_\infty - \varepsilon)^2 \|x\| = (\|f\|_\infty - \varepsilon)^2.$$

Здесь предпоследнее равенство следует из того, что проекторы $E(F_\varepsilon)$ и $E(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon)$ ортогональны и поэтому

$$E(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon)x = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus F_\varepsilon} E(d\lambda)x = 0.$$

Следовательно, $\|f(A)\| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и поэтому $\|f(A)\| = \|f\|_\infty$. Лемма доказана.

Еще одно достоинство интеграла Лебега в том, что для него есть очень хорошие теоремы о предельном переходе. Предварительно введем понятие о сходимости почти всюду. Борелевские множества F, для которых $E(F) = O$ называются *нулевыми.* Говорим, что последовательность борелевских функций сходится почти всюду к (борелевской) функции f, если равенство $f(\lambda) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\lambda)$ выполняется для всех λ, не принадлежащих некоторому нулевому множеству.

Теорема Лебега о предельном переходе. *Пусть последовательность борелевских функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена в совокупности и сходится почти всюду к борелевской функции f. тогда для любого $x \in \mathscr{H}$ выполняется*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda)E(d\lambda)x = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(\lambda)E(d\lambda)x.$$

Следствие. Для любой ограниченной в совокупности последовательности борелевских функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящейся почти всюду к функции f, последовательность операторов $f_n(A)$ сильно сходится к $f(A)$, т. е. $\text{s-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(A) = f(A)$.

Лемма 6. *Для любых двух ограниченных борелевских функций $f, g \in \mathscr{M}_b(\mathbb{R})$ выполняется $(fg)(A) = f(A)g(A)$.*

Доказательство. Пусть F, G – борелевские множества. Для характеристических функций χ_F и χ_G это мультипликативное свойство следует из равенств $\chi_F(A) = E(F)$, $\chi_G(A) = E(G)$ и из того, что $E(F \cap G) = E(F)E(G)$. Так как $\chi_F(\lambda)\chi_G(\lambda) = \chi_{F\cap G}(\lambda)$, то

$$(\chi_F \cdot \chi_G)(A) = \chi_{F\cap G}(A) = E(F \cap G) = E(F)E(G) = \chi_F(A)\chi_G(A).$$

Операция $f, g \longmapsto f \cdot g$ линейна по f и по g, поэтому мультипликативное свойство будет верно для любых двух ступенчатых функций s и t, так как каждая из них является линейной комбинацией ступенчатых функций:
$s = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k \chi_{F_k}$, $t = \sum\limits_{l=1}^{n} d_l \chi_{G_l}$. То есть

$$(s \cdot t)(A) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_k d_l (\chi_{F_k} \cdot \chi_{G_l})(A) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_k d_l \chi_{F_k}(A)\chi_{G_k}(A) =$$
$$\left(\sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{F_k}(A)\right)\left(\sum_{l=1}^{n} d_l \chi_{G_l}(A)\right) = s(A)t(A).$$

В общем случае ограниченные борелевские функции f и g являются равномерными пределами последовательностей ступенчатых функций s_n и t_n. Отсюда, пользуясь непрерывностью операторного умножение, сразу получаем $f(A)g(A) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(A) \lim\limits_{n\to\infty} t_n(A) = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n t_n)(A) = (f \cdot g)(A)$. Лемма доказана.

Будем считать борелевские функции f и g эквивалентными, если они равны почти всюду (относительно спектральной меры E). Через $\widetilde{\mathscr{M}_b}$ обозначим нормированное пространство классов эквивалентности всех ограниченных борелевских функций с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Из лемм 5 и 6 следует, что отображение $f \longmapsto f(A)$ является сохраняющим норму кольцевым изоморфизмом пространства $\widetilde{\mathscr{M}_b}$ и пространства всех борелевских функций от оператора A, наделенного операторной нормой.

В следующей теореме устанавливается связь между спектральной мерой оператора A и спектральной мерой оператора $f(A)$. Далее удобно будет спектральную меру оператора A обозначать через E_A.

Теорема *Пусть A – самосопряженный оператор и f – ограниченная борелевская функция. Тогда $E_{f(A)} = E_A \circ f^{-1}$, то есть $E_{f(A)}(F) = E_A(f^{-1}(F))$ для любого борелевского множества F.*

Доказательство. По определению

$$f(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda) E_A(d\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu\, E_{f(A)}(d\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu\, dE_{f(A),\mu}.$$

Здесь мы обозначили через $E_{f(A),\mu}$ разложение единицы для оператора $f(A)$. В силу единственности разложения единицы (и единственности спектральной меры) нам необходимо доказать, что

$$f(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu\, d(E_A \circ f^{-1})_\mu. \tag{$*$}$$

Проверим сперва это равенство для ступенчатой функции $s(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k \chi_{F_k}(\lambda)$, где $(F_k)_{k=1}^m$ – семейство попарно непересекающихся борелевских множеств, объединение которых все $\mathbb{R}$, а $c_k \in \mathbb{R}$ $(1 \le k \le m)$ упорядочены по возрастанию. Тогда $s(A) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k E_A(F_k)$. Вычислим теперь правую часть равенства $(*)$.

$$(E_A \circ s^{-1})_\mu = E_A \circ s^{-1}((-\infty, \mu)) = \begin{cases} O & \mu \le c_1 \\ E_A(F_1) & c_1 < \mu \le c_2 \\ E_A(F_1 \cup F_2) & c_2 < \mu \le c_3 \\ \dots\ \dots & \dots\ \dots \\ I & c_m < \mu. \end{cases}$$

Соответственно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mu\, dE_A \circ f^{-1})_\mu = c_1 E_A(F_1) + c_2 E_A(F_1 \cup F_2) - E_A(F_1)) + \dots =$$

$c_1 E_A(F_1) + \dots + c_m E_A(F_m)$. Если f – любая ограниченная борелевская функция, то сущесвует монотонно убывающая последовательность ступенчатых функций $(s_n)_{n=1}^\infty$, равномерно сходящаяся к f. Нам необходимо доказать, что для любого $x \in \mathscr{H}$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \mu\, d((E_A \circ s_n^{-1})_\mu x, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu\, d((E_A \circ f^{-1})_\mu x, x).$$

Так как последовательность s_n убывает, то, для любого фиксированного μ, последовательность $(E_A \circ s_n^{-1})_\mu = E_A(\{\lambda : s_n(\lambda) < \mu\})$ возрастает к $(E_A \circ f^{-1})_\mu = E_A(\{\lambda : f(\lambda) < \mu\})$. Нам необходимо сделать предельный переход в интеграле Стильтьеса по возрастающей последовательности функций распределения $((E_A \circ s_n^{-1})_\mu x, x)$. Здесь необходимо сослаться на *первую теорему Хелли*, излагаемую в руководствах по интегралу Стильтьеса. Теорема доказана.

Доказанная сейчас теорема позволяет получить общую теорему об отображении спектра для борелевских функций.

Следствие 1. Пусть A – самосопряженный оператор и f – ограниченная борелевская функция. В этом случае $\mu \in \sigma(f(A)) \Longleftrightarrow$ для любого $\delta > 0$ выполняется $E_A(f^{-1}(\mu - \delta, \mu + \delta)) \neq O$.

Этот факт сразу следует из доказанной выше теоремы и из свойства (а) для разложения единицы $E_A \circ f^{-1}((-\infty, \lambda))$ оператора $f(A)$.

Следствие 2. Для любого самосопряженного оператора A и любых двух ограниченных борелевских функций $f, g \in \mathscr{M}_b(\mathbb{R})$ выполняется равенство $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

Это следствие сразу получается из выкладки $E_{(g\circ f)(A)} = E_A \circ (g \circ f)^{-1} = E_A \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = (E_A \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = E_{f(A)} \circ g^{-1} = E_{g(f(A))}$ и из равенства

$$(g \circ f)(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_{(g\circ f)(A)} = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_{g(f(A))} = g(f(A)).$$

Теорема. *Ограниченный самосопряженный оператор B является борелевской функцией от ограниченного самосопряженного оператора A тогда и только тогда, когда $E_B(\mathscr{B}or(\mathbb{R})) \subset E_A(\mathscr{B}or(\mathbb{R}))$.*

Неформально эта теорема утверждает, что оператор B является борелевской функцией от оператора A тогда и только тогда, когда у A больше спектральных проекторов, чем у B.

5^0. Совместное разложение единицы и произведение спектральных мер.

Пусть $\{A_1, \ldots, A_m\}$ – конечный набор коммутирующих между собой самосопряженных операторов. Обозначим через E_k разложение единицы для оператора A_k $(k = 1, \ldots, m)$. Отображение $E^{(m)}$, задаваемое формулой

$E^{(m)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m} = E_{1,\lambda_1} \ldots E_{m,\lambda_m}$

совместным разложением единицы. Так как операторы A_k коммутируют между собой, то их разложения единицы E_{k,λ_k} тоже коммутируют между собой. Поэтому семейство $E^{(m)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m}$ состоит из ортогональных проекторов. Если мы обозначим $dE^{(m)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m} = dE_{1,\lambda_1} \ldots dE_{m,\lambda_m}$, то для любого $k = 1, \ldots, m$ будем иметь

$$A_k = \iint\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_k \, dE^{(m)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m} = \iint\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_k \, dE_{1,\lambda_1} \ldots dE_{m,\lambda_m}.$$

Далее мы более подробно рассмотрим частный случай, когда $m = 2$ и $A_1 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, $A_2 = \frac{1}{2i}(A_1 - A_2)$, где A – произвольный нормальный оператор. С помощью совместного разложения единицы $E^{(2)}_{\mu,\nu}$ получаем следующую спектральную теорему для нормального оператора:

$$A = A_1 + iA_2 = \iint \lambda \, dE^{(2)}_{\mu,\nu} = \iint (\mu + i\nu) \, dE_{1,\mu} dE_{2,\nu} \quad (\lambda = \mu + i\nu).$$

Совместное разложение единицы $E^{(2)}_{\mu,\nu}$ порождает спектральную меру $E^{(2)}_A$, которая на прямоугольниках $[\mu_1, \mu_2) \times [\nu_1, \nu_2)$ задается формулой

$$E_A^{(2)}([\mu_1,\mu_2)\times[\nu_1,\nu_2)) = (E_{1,\mu_2}-E_{1,\mu_1})(E_{2,\nu_2}-E_{2,\nu_1}).$$

Семейство $\mathscr{S}^{(2)}$ всех множеств, являющихся конечными объединениями попарно непересекающихся прямоугольников такого вида, образует алгебру множеств на плоскости. Спектральная мера $E_A^{(2)}$ может быть продолжена по аддитивности на алгебру $\mathscr{S}^{(2)}$. Она называется *прямым произведением* спектральных мер E_1, E_2 и обозначается через $E_1\times E_2$. Далее теория спектральных мер для нормальных операторов строится по аналогии с теорией спектральных мер для самосопряженных операторов. Сперва доказывается счетная аддитивность меры $E_A^{(2)}$ на алгебре $\mathscr{S}^{(2)}$. Затем она продолжается до счетно-аддитивной спектральной меры на борелевскую σ-алгебру $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^2)$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Для совместного разложения единицы $E_{\mu,\nu}^{(2)}=E_{1,\mu}E_{2,\nu}$ и спектральной меры $E_A^{(2)}$ сохраняются те же свойства, которые были установлены для разложения единицы и спектральной меры самосопряженного оператора. Ниже перечислены (без доказательств) все эти свойства.

(а) Точка $\lambda_0\in\mathbb{C}$ ($\lambda_0=\mu_0+i\nu_0$) принадлежит резольвентному множеству оператора A тогда и только тогда, когда для некоторого $\delta>0$ проекторы $E_{1,\mu_0-\delta}-E_{1,\mu_0+\delta}$ и $E_{2,\nu_0-\delta}-E_{2,\nu_0+\delta}$ ортогональны друг другу.

(б) Точка $\lambda_0=\mu_0+i\nu_0$ принадлежит дискретному спектру оператора A тогда и только тогда, когда μ_0 является точкой разрыва (справа) функции $E_{1,\mu}$, а ν_0 является точкой разрыва (справа) функции $E_{2,\nu}$, при этом проекторы $E_{1,\mu_0+0}-E_{1,\mu_0}$ и $E_{2,\nu_0+0}-E_{2,\nu_0}$ не ортогональны друг другу. В этом случае $P_{\lambda_0}=(E_{1,\mu_0+0}-E_{1,\mu_0})(E_{2,\nu_0+0}-E_{2,\nu_0})$ является проектором на подпространство собственных векторов оператора A, отвечающих числу λ_0.

(в) Точка $\lambda_0=\mu_0+i\nu_0$, не принадлежащая резольвентному множеству, принадлежит непрерывному спектру оператора A тогда и только тогда, когда либо μ_0 является точкой непрерывности для $E_{1,\mu}$, либо ν_0 является точкой непрерывности для $E_{2,\nu}$.

Свойства 1), 2), 3) для спектральной меры $E_A^{(2)}$ в точности такие же, как и для случая самосопряженного оператора.

4) Число $\lambda_0\in\mathbb{C}$ принадлежит дискретному спектру оператора A тогда и только тогда, когда $E_A^{(2)}(\{\lambda_0\})\neq O$, при этом $E_A^{(2)}(\{\lambda_0\})$ является проектором на соответствующее подпространство собственных векторов.

5) Число $\lambda_0\in\mathbb{C}$ принадлежит непрерывному спектру оператора A тогда и только тогда, когда $E_A^{(2)}(\{\lambda_0\})=O$ и $E_A^{(2)}(\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-\lambda_0|<\delta\})\neq O$ для любого $\delta>0$.

Наиболее важными примерами нормальных операторов являются унитарные операторы.

Лемма 7. *Спектр унитарного оператора лежит на единичной окружности* $C_1=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$.

Доказательство. Пусть U – унитарный оператор и $\lambda\in\sigma(U)$. Так как оператор U обратим, то $\lambda\neq 0$. По критерию Вейля существует последовательность векторов $x_n\in\mathscr{H}$, $\|x_n\|=1$, такая что $(U-\lambda I)x_n\to 0$ при $n\to\infty$. Из нормальности оператора U следует равенство $\|(U-\lambda I)x_n\|^2=\|(U^*-\overline{\lambda}I)x_n\|^2$, поэтому $(U^*-\overline{\lambda}I)x_n\to 0$ при $n\to\infty$. Домножая последнее равенство на U, получаем $UU^*x_n - \overline{\lambda}Ux_n = x_n - \overline{\lambda}Ux_n \to 0$, что означает $(\overline{\lambda})^{-1}x_n - Ux_n \to 0$ или $(\lambda - (\overline{\lambda})^{-1})x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как $\|x_n\| = 1$, то это возможно только при $\overline{\lambda}\lambda = 1$. Лемма доказана.

Если U – унитарный оператор, то из спектральной теоремы для нормального оператора следуют равенства

$$U = \iint_{\mathbb{C}} \lambda E_U^{(2)}(d\mu d\nu) = \iint_{\sigma(U)} \lambda E_U^{(2)}(d\mu d\nu) = \iint_{|\lambda|=1} \lambda E_U^{(1)}(d\varphi).$$

Здесь, как обычно, $\lambda = \mu + i\nu$, а φ – параметризация единичной окружности ($\lambda = e^{i\varphi}$). В последнем интеграле $E_U^{(1)}$ обозначает меру, заданную на борелевских подмножествах единичной окружности, $E_U^{(1)}(F) = E_U^{(2)}(F)$, $(F \in \mathscr{B}or(C_1) \subset \mathscr{B}or(\mathbb{C}))$. Введем обозначение для дуги единичной окружности $C_{1,\varphi} = \{\lambda \in C_1 : \lambda = e^{i\psi},\ 0 \le \psi < \varphi\}$ и положим $E_{U,\varphi} = E^{(1)}(C_{1,\varphi})$. Семейство проекторов $\{E_{U,\varphi} : 0 \le \varphi < 2\pi\}$ называется *разложением единицы для унитарного оператора U*. В этих обозначениях мы получим следующую *спектральну теорему для унитарного оператора U*

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE_{U,\varphi}.$$

В качестве первого применения этой спектральной теоремы мы докажем следующее

Следствие. Для любого унитарного оператора U существует самосопряженный оператор Φ, такой что $O \le \Phi \le 2\pi I$ и $U = e^{i\Phi}$.

Для доказательства этого факта мы сначала продолжим разложение единицы $E_{U,\varphi}$ на всю прямую, положив $E_{U,\varphi} = O$ для $\varphi < 0$ и $E_{U,\varphi} = I$ для $\varphi \ge 2\pi$. Теперь можно рассмотреть самосопряженный оператор

$$\Phi = \int\limits_0^{2\pi} \varphi\, dE_{U,\varphi}.$$

(Так как разложение единицы $E_{U,\varphi}$ непрерывно (слева и справа) в точке 2π, то мы можем в качестве верхнего предела интегрирования брать 2π, а не $2\pi + \varepsilon$). Очевидно, $O \le \Phi \le 2\pi I$. Из функционального исчисления для самосопряженных операторов следует, что

$$e^{i\Phi} = \cos\Phi + i\sin\Phi = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi}\, dE_{U,\varphi} = U.$$

На самом деле не только унитарный, а любой нормальный оператор является комплексной борелевской функцией от некоторого самосопряженного оператора.

Теорема фон Неймана. *Для любого конечного набора ограниченных попарно коммутирующих операторов $A_1, \dots A_m$ существуют ограниченные борелевские функции $f_1, \dots, f_m$ и самосопряженный оператор B, такие что $A_k = f_k(B)$, $k = 1, \dots, m$.*

Мы только наметим доказательство этой теоремы. Пусть $E^{(m)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m}$ – совместное разложение единицы для семейства операторов $\{A_1,\ldots,A_m\}$. Тогда для любого $k=1,\ldots,m$ имеем

$$A_k = \iint \lambda_k \, dE^{(m)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m}$$

Теперь продолжим совметное разложение единицы $E^{(m)}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m}$ до совместной спектральной меры $E^{(m)}$, заданной на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^m)$. Предыдущее равенство теперь примет вид

$$A_k = \iint\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_k E^{(m)}(d\lambda_1 \ldots d\lambda_m), \quad k=1,\ldots,m.$$

Следующий шаг состоит в преобразовании пространства $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$. Такая, на первый взгляд невозможная, операция возможна в классе борелевских функций.

Теорема Куратовского. *Существует взимно однозначное отображение $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, такое что для любого $F \subset \mathbb{R}$, F является борелевским подмножеством в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(F)$ есть борелевское подмножество в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство этой теоремы о *поточечном борелевском изоморфизме* евклидовых пространств различной размерности мы не приводим. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ – поточечный борелевский изоморфизм, $\varphi(\mu) = (\varphi_1(\mu),\ldots,\varphi_m(\mu))$ $(\mu \in \mathbb{R})$. В теории меры есть общая теорема о замене переменной в различных измеримых пространствах, в силу которой

$$A_k = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_k(\mu) E^{(m)} \circ \varphi(d\mu).$$

Проекторнозначная мера $E^{(1)} = E^{(m)} \circ \varphi$ уже задана на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}or(\mathbb{R})$ и мы можем рассмотреть самосопряженный оператор

$$B = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu \, E^{(1)}(d\mu).$$

По определению борелевской функции от оператора имеем

$$\varphi_k(B) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_k(\mu) E^{(1)}(d\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_k(\mu) E^{(m)} \circ \varphi(d\mu) = \iint\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_k \, E^{(m)}(d\lambda_1 \ldots d\lambda_m) = A_k,$$

$k=1,\ldots,m$.

Эта теорема имеет важное следствие для нормальных операторов.

Следствие. Для любого нормального оператора A существует комплексно-значная борелевская функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(f(t) = \mu(t) + i\nu(t),\ t \in \mathbb{R})$ и существует самосопряженный оператор B, такой что

$$A = \mu(B) + i\nu(B) = \int\limits_{\mathbb{R}} (\mu(t) + i\nu(t)) E_B(dt).$$

В теории операторов есть еще один глубокий результат, который связывает борелевское функциональное исчисление с чисто алгебраическим свойством – коммутируемостью операторов. Пусть A – самосопряженный оператор. *Коммутантом* $\{A\}'$ называется пространство всех ограниченных операторов B, коммутирующих с A, $\{A\}' = \{B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) : [A, B] = 0\}$. *Бикоммутантом* $\{A\}''$ называется пространство всех ограниченных операторов C, коммутирующих со всеми операторами из коммутанта $\{A\}'$, $\{A\}'' = \{C \in \mathscr{B}(\mathscr{H}) : [B, C] = 0$ для всех $B \in \{A\}'\}$.

Теорема (о бикоммутанте). *Если A – самосопряженный оператор, то его бикоммутант $\{A\}''$ состоит из всевозможных комплекснозначных борелевских функций от оператора A.*

Тот факт, что любая борелевская функция от A принадлежит бикоммутанту, следует из того, что разложение единицы оператора A коммутирует с любым оператором B, коммутирующим с A. Гораздо более тонким является обратный факт: если оператор C коммутирует с любым оператором B, коммутирующим с A, то C обязан быть функцией от A. В настоящем курсе мы не будем доказывать это утверждение.

Задача 56. Докажите, что если A – самосопряженный оператор и $C \in \{A\}''$, то C является нормальным оператором.

§ 7. Неограниченные операторы

1^0. **Определения и основные операции с неограниченными операторами.** В кванотовой физике изучение неограниченных операторов не вызывает сомнений. Например, оператор импульса P и оператор координаты Q должны быть связаны между собой коммутационным соотношением Гейзенберга $PQ - QP = -i\hbar I$. Даже одно это уравнение не может быть выполнено в классе ограниченных операторов.

Задача 57. Докажите, что не существует двух ограниченных операторов $A, B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, удовлетворяющих равенству $[A, B] = \alpha I$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

Наибольший интерес для физиков представляют самосопряженные (неограниченные) операторы. Оказалось, что для того, чтобы все эти свойства совместить, необходимо рассматривать операторы, заданные не на всем гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, а только на некотором его собственном плотном подпространстве. Необходимость этого диктуется следующей теоремой

Теорема. Хеллингера-Теплица. *Если линейный оператор $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ удовлетворяет условию $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x, y \in \mathscr{H}$, то он ограничен (т. е. $\|A\| < \infty$).*

Позднее эта теорема будет доказана в более общей формулировке. Следовательно, нас будут интересовать линейные операторы $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, для которых, во-первых, $\|A\| = \infty$, во-вторых, $\operatorname{dom} A \neq \mathscr{H}$. Отметим без доказательства, что если не требовать выполнения равенства $(Ax, y) = (x, Ay)$, то можно построить пример такого линейного оператора $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, для которого $\operatorname{dom} A = \mathscr{H}$ и $\|A\| = \infty$.

Если оператор A непрерывен (т. е. $\|A\| < \infty$) и область определения $\operatorname{dom} A$ плотна в $\mathscr{H}$, то его можно продолжить на все пространство $\mathscr{H}$ с сохранением свойства непрерывности следующим образом. Пусть $x \in \mathscr{H}$. Так как подпространство $\operatorname{dom} A$ плотно в $\mathscr{H}$, то существует последовательность $x_n \in \operatorname{dom} A$, сходящаяся к x. Сходящаяся последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной, т.е. $x_n - x_m \to 0$ при $m, n \to \infty$. Из непрерывности оператора A следует, что $\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \|x_n - x_m\| \to 0$ при $m, n \to \infty$. Поэтому последовательность Ax_n тоже фундаментальна и поэтому она сходится к некоторому элементу $y \in \mathscr{H}$. Полагаем по определению $\overline{A}x = y$. Так мы построим линейный оператор $\overline{A}$, который задан на всем $\mathscr{H}$, имеет ту же норму ($\|A\| = \|\overline{A}\|$), и который является продолжением A. Далее, если нам встретится ограниченный оператор, мы будем всегда считать его определенным на всем пространстве $\mathscr{H}$.

Для неограниченных операторов могут возникнуть трудности с определением алгебраических операций и проверкой их свойств (разве, что не вызывает затруднений умножение оператора на скаляр по формуле $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$, $x \in \operatorname{dom} A$). Например, сумма двух операторов A и B может быть корректно определена только при $x = 0$, если $\operatorname{dom} A \cap \operatorname{dom} B = \{0\}$. В общем случае считаем по определению, что $\operatorname{dom}(A+B) = \operatorname{dom} A \cap \operatorname{dom} B$ и $(A+B)x = Ax + Bx$, для всех $x \in \operatorname{dom}(A+B)$. Для произведения двух частично заданных операторов A и B считаем по определению, что $\operatorname{dom}(AB) = B^{-1}(\operatorname{dom} A) = \{x : x \in \operatorname{dom} B,\ Bx \in \operatorname{dom} A\}$ и $(AB)x = A(Bx)$ для всех $x \in \operatorname{dom}(AB)$.

Символ $A \subseteq B$ означает, что оператор B является продолжением оператора A, т.е. $\operatorname{dom} A \subseteq \operatorname{dom} B$ и $Ax = Bx$ для всех $x \in \operatorname{dom} A$. В частности. равенство $A = B$ двух операторов A и B означает, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, или $\operatorname{dom} A = \operatorname{dom} B$ и $Ax = Bx$ для всех $x \in \operatorname{dom} A$).

Задача 58. Докажите следующие равенства для частично заданных линейных операторов A_1, A_2, A_3:

1) $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$
2) $(A_1 A_2)A_3 = A_1(A_2 A_3)$
3) $(A_1 + A_2)A_3 = A_1 A_2 + A_1 A_3$
4) $A_1(A_2 + A_3) \supseteq A_1 A_2 + A_1 A_3$, приведите пример со строгим включением и докажите, что если $\operatorname{dom} A_1 = \mathscr{H}$, то имеет место равенство.

2^0. **Сопряженный и замкнутый операторы. Операция замыкания.**

Пусть A – неограниченный оператор с плотной областью определения $\operatorname{dom} A$. Определим оператор A^*, сопряженный к A, следующим образом:

1) $\operatorname{dom} A^* = \{y : |(Ax, y)| \leq c_y \|x\|$ при некотором $c_y \geq 0$ и всех $x \in \operatorname{dom} A\}$,

2) $(Ax, y) = (x, A^* y)$ для всех $x \in \operatorname{dom} A$, $y \in \operatorname{dom} A^*$.

Поясним более подробно это определение. Если $y \in \operatorname{dom} A^*$, то линейный функцинал $f_y(x) = (Ax, y)$ является непрерывным, так как его норма $\|f_y\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, y)| \leq c_y$ конечна. Так как $\operatorname{dom} A$ плотно в $\mathscr{H}$, то его можно продолжить по непрерывности с подпространства $\operatorname{dom} A$ на все пространство $\mathscr{H}$ (см. выше). Обозначим это продолжение через $\overline{f}_y$. По теореме Рисса существует единственный вектор $z \in \mathscr{H}$, такой что $\overline{f}_y(x) = (x, z)$ $(x \in \mathscr{H})$. После этого можно положить по определению $A^* y = z$. По построению, для этого элемента y выполнено тождество $(Ax, y) = (x, A^* y)$ для всех $x \in \operatorname{dom} A$. Не может существовать двух различных элементов z_1, z_2, для которых верно тождество $(Ax, y) = (x, z_1) = (x, z_2)$ для всех $x \in \operatorname{dom} A$. Это следуе из того, что элемент $z_1 - z_2$ ортогонален плотному подпространству $\operatorname{dom} A$, поэтому он нулевой. Из только что доказанной корректности определения сопряженного оператора A^* следует его линейность (доказать самостоятельно). Кроме этого, очевидно, из $B \subseteq A$ следует $A^* \subseteq B^*$.

Задача 59. Докажите, что если оператор A неограничен и его область определения $\mathrm{dom}A$ плотна в $\mathscr{H}$, а $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то $(A+B)^* = A^* + B^*$.

Пример 1. Пусть $\mathrm{dom}A = C[0,1] \subset L_2[0,1]$ и $(Ax)(t) = x(1)$ для всех $x \in C[0,1]$. Обозначим $\mathbb{1}(t) = 1$ $(t \in [0,1])$. Пусть $y \in L_2[0,1]$. Линейный функционал $f_y(x) = (Ax, y) = x(1)(\mathbb{1}, y)$ разрывен по x, если $(\mathbb{1}, y) \neq 0$. Для доказательства этого рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = t^n$. Очевидно, $\|x_n\|^2 = \int\limits_0^1 t^{2n} dt = (2n+1)^{-1} \to 0$ при $n \to \infty$. В то же время $f(x_n) = x_n(1)(\mathbb{1}, y) = (\mathbb{1}, y) = const \neq 0$. Поэтому $\mathrm{dom}A^* = \{y \in L_2[0,1] : (\mathbb{1}, y) = 0\} = \{\mathbb{1}\}^\perp$. Так как в этом случае $f_y(x) = 0$ для всех $x \in C[0,1]$, то $A^* y = 0$. То есть, A^* – тождественно нулевой оператор, заданный на подпространстве $\{\mathbb{1}\}^\perp$.

В последнем примере сопряженный оператор A^* оказался определен на неплотном подпространстве. Чтобы исключить из рассмотрения такие примеры, введем следующее определение:

Определение. Линейный оператор $A : \mathrm{dom}A \to \mathscr{H}$ называем *замкнутым*, если для любой последовательности $x_n \in \mathrm{dom}A$ из $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ следует, что $x \in \mathrm{dom}A$ и $Ax = y$.

Оператор из предыдущего примера не является замкнутым, так как $x_n(t)$ стремится в $L_2[0,1]$ к нулю при $n \to \infty$, а значения Ax_n равны $\mathbb{1}$. Если бы оператор A был замкнутым, то должно выполняться противоречивое равенство $A0 = \mathbb{1}$.

Говорим, что линейный оператор A *имеет замыкание* (*замыкаем*), если существует замкнутый оператор B, такой что $A \subseteq B$.

Свойство замкнутости очень наглядно интерпретируется на графике оператора A. Рассмотрим прямую сумму пространства $\mathscr{H}$ с самим собой. Подмножество $G(A) \subset \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ вида $G(A) = \{\{x, Ax\} : x \in \mathrm{dom}A\}$ называется *графиком* линейного оператора A.

Лемма 1. *Линейный оператор A является замкнутым тогда и только тогда, когда график $G(A)$ является замкнутым подпространством в $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$.*

Доказательство. Допустим, что оператор A замкнут и нам дана любая последовательность $\{x_n, y_n\} \in G(A)$, сходящаяся в пространстве $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ к некоторому элементу $\{x, y\} \in \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Это означает, что $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Так как $x_n \in \mathrm{dom}A$ и $y_n = Ax_n$ для всех n, то $Ax_n \to y$. Из замкнутости оператора A следует, что $x \in \mathrm{dom}A$ и $Ax = y$, что означает $\{x, y\} \in G(A)$. Мы доказали замкнутость множества $G(A)$ в пространстве $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Обратное утверждение доказывается так же просто. Лемма доказана.

Если линейный оператор A допускает замыкание, то существует наименьший (по включению) замкнутый оператор $\overline{A} \supseteq A$, т.е. для любого замкнутого оператора $B \supseteq A$ выполняется $B \supseteq \overline{A}$. Этот факт сразу следует из следующего простого наблюдения $A \subseteq B \Longleftrightarrow G(A) \subseteq G(B)$. Если существует замкнутый оператор $B \supseteq A$, то график $G(B)$ является замкнутым подпространством, содержащем график $G(A)$. Замыкание $cl(G(A))$ тоже является графиком некоторого оператора, так как $cl(G(A)) \subseteq G(B)$ (т.е. из $(x, y_1), (x, y_2) \in cl(G(A))$ следует $y_1 = y_2$). Более подробно, $\mathrm{dom}\overline{A} = \{x \in \mathscr{H} : (x, y) \in cl(G(A))$ для некоторого $y \in \mathscr{H}\}$ и для любого $x \in \mathrm{dom}\overline{A}$ полагаем Ax равно тому самому y, для которого $(x, y) \in cl(G(A))$. Из этого построения следует, что $x \in \mathrm{dom}\overline{A}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $x_n \in \mathrm{dom}A$ сходящаяся к x и такая, что последовательность Ax_n тоже сходится к некоторому элементу y (в этом случае будет $y = \overline{A}x$). Мы на самом деле доказали равенство $G(\overline{A}) = cl(G(A))$.

Теорема о замыкании оператора. $\mathrm{dom}A^*$ *является плотным подпространством в* $\mathscr{H}$ *тогда и только тогда, когда оператор* A *допускает замыкание. При этом* $\overline{A} = A^{**}$.

Доказательство. Из определения сопряженного оператора A^* следует, что $\{x, z\} \in G(A^*) \Longleftrightarrow (Ax, y) = (x, z)$ для всех $x \in \mathrm{dom}A$. Это равенство можно записать через скалярное произведение пространства $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ в виде $(\{x, Ax\}, \{z, -y\}) = 0$ для всех $\{x, Ax\} \in G(A)$. Другими словами $\{z, -y\} \perp G(A)$. В этом случае мы считаем, что $\{y, z\} \in G(A^*)$. Введем вспомогательный унитарный оператор, действующий в $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ по формуле $V\{y, z\} = \{z, -y\}$. В этих обозначениях получаем $\{y, z\} \perp VG(A)$. Это верно для любой пары $\{y, z\} \in G(A^*)$. То есть $G(A^*) \subseteq VG(A)^{\perp}$. Очевидно верно и обратное включение, т.е. $G(A^*) = VG(A)^{\perp}$. Если область определения $\mathrm{dom}A^*$ плотна в $\mathscr{H}$, то существует сопряженный оператор $A^{**} = (A^*)^*$ и для него будем иметь такое же равенство $G(A^{**}) = VG(A^*)^{\perp} = V(VG(A)^{\perp})^{\perp} = G(A)^{\perp\perp}$. Последнее равенство следует из того, что $V^2 = -I$ и $-G(A) = G(A)$ (так как $G(A)$ является линейным подпространством в $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$). Из теории гильбертовых пространств следует, что $G(A)^{\perp\perp} = cl(G(A))$ (доказано в основном курсе). Следовательно, $G(A^{**}) = cl(G(A))$. Это означает, оператор A имеет замыкание и $\overline{A} = A^{**}$. Обратно, допустим, что оператор A имеет замыкание. Рассмотрим любой вектор $h \perp \mathrm{dom}A^*$. Из предыдущего следует, что $y \in \mathrm{dom}A^* \Longleftrightarrow$ существует z, такой что $\{z, -y\} \perp G(A)$. Для все таких элементов y будем иметь $(\{0, h\}, \{z, -y\}) = 0$ поэтому $\{0, h\} \perp VG(A^*)$, то есть, $\{0, h\} \in VG(A^*)^{\perp} = V(VG(A)^{\perp})^{\perp} = cl(G(A)) = G(\overline{A})$. Отсюда сразу следует $h = 0$. Это означает, что $(\mathrm{dom}A^*)^{\perp} = 0$, отсюда сразу следует, что $cl(\mathrm{dom}A^*) = \mathscr{H}$. Теорема доказана.

Так как ортогональное дополненеие всегда является замкнутым подпространством, то из доказательства приведенной выше теоремы следует, что оператор A^* всегда является замкнутым (даже если он определен не на плотном подпространстве). Из доказательства этой теоремы также следует, что $A^* = (\overline{A})^*$ и $A^{***} = A^*$.

Теорема о замкнутом графике. *Пусть* A *– линейный оператор и* $domA = \mathscr{H}$. *В этом случае оператор* A *является непрерывным тогда и только тогда, когда он имеет замкнутый график.*

Доказательство. Если A непрерывен, то его график очевидно замкнут. Обратно. пусть график $G(A)$ замкнут в $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Докажем от противного, что оператор A^* ограничен на $\mathrm{dom}A^*$. Предположим, что $y_n \in \mathrm{dom}A^*$, $\|y_n\| = 1$ и $\|A^*y_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность линейных функционалов $f_n(x) = (Ax, y_n)$. Они ограничены на $\mathscr{H}$, так как $f_n(x) = (x, A^*y_n)$ и, по теореме Рисса, $\|f_n\| = \|A^*y_n\| < \infty$. Кроме этого, для любого фиксированного $x \in \mathscr{H}$ последовательность $f_n(x)$ ограничена, так как $|f_n(x)| = |(Ax, y_n)| \leq \|Ax\|\|y_n\| = \|Ax\|$. Из теоремы Банаха-Штейнгауза (см. § 3) следует, что последовательность норм $\{\|f_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ тоже ограничена.Но по условию $\|f_n\| = \|A^*y_n\| \to \infty$. Это противоречие доказывает, что оператор A^* ограничен. Так как оператор A замкнут, то domA^* плотна в $\mathscr{H}$ (предыдущая теорема). Поэтому исходный оператор $A = A^{**}$, как сопряженный к ограниченному оператору A^* тоже ограничен (значит и непрерывен). Теорема доказана.

Лемма 2. $(\operatorname{im} A)^{\perp} = \ker A^*$ и $(\operatorname{im} A^*)^{\perp} = \ker \overline{A}$.

Доказательство. Пусть $y \in \ker A^*$. Это означает, что $(Ax, y) = (x, A^*y) = 0$ для всех $x \in \mathrm{dom}A$, то есть, $y \perp \mathrm{im}A$ или $y \in (\operatorname{im} A)^{\perp}$. Обратно, если $y \perp \mathrm{im}A$, то $(Ax, y) = 0$ для всех $x \in \mathrm{dom}A$. Нулевой функционал $f_y(x) = (Ax, y) = 0$, очевидно, непрерывен и поэтому $y \in \mathrm{dom}A^*$, причем $0 = (Ax, y) = (x, A^*y)$ для всех x из плотного подпространства dom$A$. Поэтому $A^*y = 0$ и $y \in \ker A^*$. Подставив в доказанное равенство A^* вместо A, мы получим $(\mathrm{im}A^*)^{\perp} = \ker(A^{**}) = \ker \overline{A}$. Лемма доказана.

Заадача 60. Приведите пример, показывающий, что во втором равенстве нельзя заменить $\ker \overline{A}$ на $\ker A$.

Теорема. *Допустим, что* $\ker A = 0$ *и* $\mathrm{im}A$ *плотно в* $\mathscr{H}$. *Тогда* $\ker A^* = \{0\}$ *и* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Доказательство. Так как im$A$ плотно в $\mathscr{H}$, то $\ker A^* = \mathrm{im}A^{\perp} = \{0\}$. Следовательно, оператор A^* обратим на своей области определения. Исходя из доказанных ранее свойств, мы докажем равенство графиков $G((A^*)^{-1}) = G((A^{-1})^*)$. Для этого рассмотрим в $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ еще один унитарный оператор $U(\{x, y\}) = \{y, x\}$. С помощью него выражается график обратного оператора по формуле $G(A^{-1}) = UG(A)$. Кроме этого, легко проверяется, что $UV = -VU$. Отсюда следует, что

$G((A^*)^{-1}) = UG(A^*) = U(VG(A))^{\perp} = (UVG(A))^{\perp} = (-VUG(A))^{\perp} =$
$VG(A^{-1})^{\perp} = G((A^{-1})^*)$. Теорема доказана.

3^0. **Симметричный и самосопряженный оператор.**

Определение. Пусть A – линейный оператор с плотной областью определения dom$A$. Говорим, что

(а) оператор A симметричен, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x, y \in \mathrm{dom}A$;

(б) оператор A самосопряжен, если $A = A^*$, то есть $\mathrm{dom}A = \mathrm{dom}A^*$ и $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x, y \in \mathrm{dom}A$.

(в) оператор A существенно самосопряжен, если его замыкание $\overline{A}$ является самосопряженным оператором.

Первый результат, который мы сейчас докажем, это

Теорема Хеллингера-Теплица. *Если оператор A симметричен и* $\mathrm{dom}A = \mathscr{H}$, *то он непрерывен.*

Доказательство. Из теоремы о замкнутом графике следует, что достаточно доказать замкнутость оператора A. Допустим, что $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$. Тогда для любого $z \in \mathscr{H}$ имеем

$(Ax_n, z) = (x_n, Az) \to (x, Az)$ и $(Ax_n, z) \to (y, z)$,

что дает равенство $(y, z) = (x, Az) = (Ax, z)$ для всех $z \in \mathscr{H}$. Отсюда следует равенство $Ax = y$. Теорема доказана.

Лемма 3. *Если оператор A симметричен, то он замыкаем и его замыкание тоже симметричный оператор. Если оператор A самосопряжен и B – симметричный оператор, $B \supseteq A$, то $B = A$.*

Доказательство. Пусть A – симметричный оператор с плотной областью определения. Из равенства $(Ax,y)=(x,Ay)$ $(x,y\in\mathrm{dom}A)$ следует, что $\mathrm{dom}A^*\supseteq\mathrm{dom}A$. Поэтому область определения оператора A^* тоже плотна в $\mathscr{H}$ и из включения $\mathrm{dom}A\subseteq\mathrm{dom}A^*$ следует $\overline{A}=A^{**}\subseteq A^*=(\overline{A})^*$. То есть, $\overline{A}\subseteq(\overline{A})^*$, что эквивалентно симметричности оператора $\overline{A}$.

Допустим теперь, что оператор A самосопряжен, а симметричный оператор B является является продолжением оператора A $(B\supseteq A)$. Из $B\supseteq A$ сразу следует, что $B^*\subseteq A^*=A$. Но оператор B симметричен, поэтому $B\subseteq B^*\subseteq A$. Сравнивая с предыдущим включением $A\subseteq B$, подучаем $B=A$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если A – самосопряженный оператор и $\ker A=\{0\}$, $cl(\mathrm{dom}A)=\mathscr{H}$, то оператор A^{-1} тоже самосопряжен.*

Доказательство. Доказательство сразу следует из равенства
$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=A^{-1}$.

Пример 2. Рассмотрим в $L_2[0,2\pi]$ дифференциальный оператор $Ax(t)=-ix'(t)$ с областью определения $\mathrm{dom}A=C_0^\infty[0,2\pi]$ – пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций (носители которых лежат в интервале $(0,2\pi)$). Так как $x(0)=x(2\pi)=0$ $(x\in C_0^\infty[0,2\pi])$, то с помощью интегрирования по частям мы легко убеждаемся в том, что оператор A симметричен, т. е. $(Ax,y)=(x,Ay)$. Найдем сопряженный оператор A^*. Пусть $y\in\mathrm{dom}A^*$. Из равенства

$$(Ax,y)=-i\int\limits_0^{2\pi}x'(t)\overline{y(t)}\,dt=(x,A^*y)=\int\limits_0^{2\pi}x(t)\overline{(A^*y)(t)}\,dt\quad(x\in C_0^\infty[0,2\pi])$$

следует, что функция $i(A^*y)(t)$ равна производной $y'(t)$ в смысле обощенных функций. То есть функция $y(t)$ и ее обобщенная производная $y'(t)$ являются регулярными обобщенными функциями, принадлежащими $L_2[0,2\pi]\subset L_1[0,2\pi]$ (так как из $y\in L_2[0,2\pi]$ следует

$$\int\limits_0^{2\pi}|y(t)|dt\le\left(\int\limits_0^{2\pi}|y(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{2\pi}1\,dt\right)^{1/2}<\infty,$$

т. е. $y\in L_1[0,2\pi]$). Докажем, что в этом случае $y(t)$ является первообразной от интегрируемой функции. Для этого положим

$$z(t)=i\int\limits_0^t(A^*y)(s)\,ds\quad t\in[0,1].$$

Из теории интеграла Лебега следует, что функция $z(t)$ дифференцируема почти всюду и ее производная $z'(t)$ почти всюду равна функции $i(A^*y)(t)$. Такие функции называются *абсолютно непрерывными.* Из теории интеграла Лебега известно, что для таких функций справедлива формула интегрирования по частям. Поэтому

$$\int\limits_0^{2\pi}x(t)z'(t)\,dt=-\int\limits_0^{2\pi}x'(t)z(t)\,dt$$

для всех $x \in C_0^\infty[0,2\pi]$. Это означает, что обобщенная производная функции $z(t)$ тоже равна $i(A^*y)(t)$. Ранее было показано, что функция $i(A^*y)(t)$ равна обобщенной производной $y'(t)$. Поэтому обобщенная производная от разности $y(t)-z(t)$ равна 0, и функция $y(t)=z(t)+const$ тоже абсолютно непрерывна. Следовательно, функция $y(t)$ почти всюду дифференцируема и ее (обычная) производная почти всюду равна $i(A^*y)(t)$. Пространство всех абсолютно непрерывных функций на отрезке $[0,2\pi]$ обозначим через $AC[0,2\pi]$. Мы доказали, что

$$\mathrm{dom} A^* = \{y : y \in AC[0,2\pi],\ y' \in L_2[0,2\pi]\},$$

при этом оператор A^* действует на векторы $y \in \mathrm{dom} A^*$ по той же формуле $(A^*y)(t) = -iy'(t)$. Теперь определим оператор $A^{**} = \overline{A}$. Если $x \in \mathrm{dom} A^{**}$, то из предудущих вычислений следует, что функция $x(t)$ абсолютно непрерывна и $(A^{**}x)(t) = -ix'(t)$. Кроме этого, из равенства $(A^{**}x, y) = (x, A^*y)$ $(x \in \mathrm{dom} A^{**}$, $y \in \mathrm{dom} A^*)$, или

$$-i\int_0^{2\pi} x'(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} x(t)\overline{(-iy'(t))}\,dt.$$

Если перенесем второй интеграл в левую часть и выделим полную производную, то получим

$$-i\int_0^{2\pi} (x(t)\overline{y(t)})'dt = x(t)\overline{y(t)}|_0^{2\pi} = 0. \qquad (*)$$

Функции $y(t)=t$ и $y(t)=2\pi-t$ принадлежат $\mathrm{dom} A^*$. Подставив их в предыдущее равенство, получим $x(0)=x(2\pi)=0$. Итак, для замыкания $\overline{A}=A^{**}$ мы получили

$$\mathrm{dom}(\overline{A}) = \{x : x \in AC[0,2\pi],\ x' \in L_2[0,2\pi],\ x(0)=x(2\pi)=0\}.$$

Мы получили, что симметричный оператор A, как и его замыкание $\overline{A}$, не является самосопряженным. Тем не менее оператор A имеет самосопряженные расширения. Пусть $\widetilde{A}$ – самосопряженное расширение оператора A. Из $A \subseteq \widetilde{A}$ следует включение $\widetilde{A} = \widetilde{A}^* \subseteq A^*$. То есть, в $\mathrm{dom}\widetilde{A}$ входят только функции из $AC[0,2\pi]$, причем $(\widetilde{A})x(t) = -ix'(t)$. Подставив это в $(*)$, получим $x(t)\overline{y(t)}|_0^{2\pi} = 0$ для всех $x, y \in \mathrm{dom}\widetilde{A}$. Если $x(0)=x(1)=0$ для всех $x \in \mathrm{dom}\widetilde{A}$, то сразу получим, что $\mathrm{dom}\,(\widetilde{A})^* = \{y : y \in AC[0,2\pi],\ y' \in L_2[0,2\pi]\} \neq \mathrm{dom}\widetilde{A}$. Поэтому существует такая функция $x_0 \in \mathrm{dom}\widetilde{A}$, что $x_0(0) \neq 0$ или $x_0(1) \neq 0$. Далее будем считать, что $x_0(0) \neq 0$. Тогда для любых $y \in \mathrm{dom}\widetilde{A}$ получаем граничное условие

$\overline{y(0)} = \dfrac{x_0(2\pi)}{x_0(0)}\,\overline{y(2\pi)}$. Подставив сюда x_0 вместо y, получим $|x_0(0)|^2 = |x_0(2\pi)|^2$.

Если обозначить $\alpha = x_0(2\pi)/x_0(0)$, то получим $|\alpha| = 1$ и $y(2\pi) = \alpha y(0)$ для всех $y \in \mathrm{dom}\widetilde{A}$. Обозначив $\alpha = e^{i\varphi}$, получим следующее описание области определения оператора $\widetilde{A}$:

$$\mathrm{dom}\widetilde{A} = \{x : x \in AC[0,2\pi],\ x' \in L_2[0,2\pi],\ x(2\pi) = e^{i\varphi}x(0)\}.$$

Далее будем обозначать это самосопряженное расширение оператора A через A_φ $(\varphi \in [0,2\pi))$. Итак, мы получили континум различных самосопряженных расширений первоначального оператора A. Среди них особую роль играет случай

$\varphi = 0$, так как в квантовой механике A_0 отождествляется с оператором углового момента. Возможно, что и другим самосопряженным операторам A_φ ($\varphi \neq 0$) можно придать какой-то физический смысл.

Пример 3. Рассмотрим тот же дифференциальный оператор $Ax(t) = -ix'(t)$ в гильбертовом пространстве $L_2([0,\infty))$ с областью определения $\mathrm{dom}A = C_0^\infty[0,\infty)$. Из предыдущего примера следует, что

$$\mathrm{dom}A^* = \{y : y \in AC[0,\infty),\ y, y' \in L_2[0,\infty)\},$$

причем оператор A^* действует по формуле $(A^*y)(t) = -iy'(t)$. Сперва докажем, что для любой функции y из $\mathrm{dom}\,A^*$ выполняется $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Для любых $t_0, t_1 \geq 0$ рассмотрим оценку разности

$$|y(t_1)|^2 - |y(t_0)|^2 = \int_{t_0}^{t_1} (|y(t)|^2)' = \int_{t_0}^{t_1} (y(t)(\overline{y(t)})' + y'(t)\overline{y(t)})dt \leq$$

$$2\left(\int_{t_0}^{t_1} |y(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t_1} |y'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t_0, t_1 \to \infty.$$

Из критерия Коши следует, что существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} |y(t)|$, который может быть равен только 0, иначе получим, что $y \notin L_2([0,\infty))$. Определим теперь $\mathrm{dom}\,A^{**} = \mathrm{dom}\overline{A}$. Заменяя в тождестве $(A^{**}x, y) = (x, A^*y)$ скалярные произведения на интегралы и интегрируя по частям, получим уравнение $x(0)\overline{y(0)} = 0$ для всех $x \in \mathrm{dom}A$, $y \in \mathrm{dom}A^*$. Так как $y(0)$ может быть любым, то $x(0) = 0$ для всех $x \in \mathrm{dom}\overline{A}$. Поэтому операторы $A, \overline{A}$ не являются самосопряженными. Более того, оператор A не имеет ниодного самосопряженного расширения. Это следует из того, что условие $x(0)\overline{y(0)}$ не может быть симметричным по x и y.

Пример 4. Рассмотрим оператор $Ax(t) = -ix'(t)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $\mathrm{dom}\,A = C_0^\infty(\mathbb{R})$. В предыдущих примерах мы уже доказали, что

$$\mathrm{dom}A^* = \{y : y \in AC(\mathbb{R}),\ y, y' \in L_2(\mathbb{R})\},$$

причем $y(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Так как после интегрирования по частям подстановок не возникает, то получим $\mathrm{dom}\,A^{**} = \mathrm{dom}A^*$. То есть, оператор $\overline{A} = A^{**}$ самосопряжен, а оператор A существенно самосопряжен. Данный самосопряженный оператор является оператором импульса для частицы, движущейся по прямой.

4^0. **Резольвента и спектр неограниченного оператора.**

Определение. Пусть A – неограниченный линейный оператор, определенный на плотном подпространстве $\mathrm{dom}\,A$. Говорим, что комплексное число $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит резольвентному множеству оператора A, если

1) $\ker(A\lambda I) = \{0\}$,
2) $\mathrm{im}(A - \lambda I) = \mathrm{dom}(A - \lambda I)^{-1} = \mathscr{H}$,
3) $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Если оператор A ограничен, то условие 3) автоматически выполняется в силу теоремы Банаха об обратном операторе. Для неограниченных операторов теорема Банаха неверна, поэтому условие 3) является существенным.

Резольвентное множество оператора A мы по прежнему будем обозначать символом $\rho(A)$, а ограниченный оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ будем называть резольвентой оператора A.

Лемма 5. *Если $\lambda \in \rho(A)$ и B – ограниченный оператор с нормой $\|B\| < \|R_\lambda(A)\|^{-1}$, то $\lambda \in \rho(A + B)$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $C = R_\lambda(A)(A + B - \lambda I)$ с той же областью определения $\operatorname{dom} A$. Он ограничен, так как $C = (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I + B) = (I + (A - \lambda I)^{-1}B)$. По условию, норма оператора $(A - \lambda I)^{-1}B$ (как произведения двух ограниченных операторов) не превосходит $\|R_\lambda(A)\|\|B\| < 1$. Пусть $x \in \operatorname{dom} A$. Домножая слева на C^{-1} равенство $R_\lambda(A)(A + B - \lambda I)x = Cx$, мы получим $C^{-1}R_\lambda(A)(A + B + \lambda I)x = x$. Поэтому оператор $C^{-1}R_\lambda(A)$ является левым обратным для $(A + B - \lambda I)$. Отсюда следует, в частности, что $\ker(A + B - \lambda I) = \{0\}$. Покажем теперь, что $\operatorname{im}(A + B - \lambda I) = \mathscr{H}$. Пусть $y \in \mathscr{H}$. Нам необходимо решить уравнение $(A + B - \lambda I)x = y$, которое можно представить в следущем виде $(I + B(A - \lambda I)^{-1})(A - \lambda I)x = y$. Оператор $D = I + BR_\lambda(A)$ тоже ограничен и обратим, так как $\|BR_\lambda(A)\| \le \|B\|\|R_\lambda(A)\| < 1$. Предыдущее уравнение примет вид $(A - \lambda I)x = D^{-1}y$. То есть $x = R_\lambda(A)D^{-1}y$ является его решением. Мы доказали, что $\operatorname{im}(A + B - \lambda I) = \mathscr{H}$. Поэтому оператор $(A + B - \lambda I)$ имеет обратный, определенный навсем пространстве, причем $(A + B - \lambda I)^{-1} = C^{-1}R_\lambda(A) = R_\lambda(A)D^{-1}$ – ограниченный оператор. Лемма доказана.

Если оператор B удовлетворяет условию предыдущей леммы, то домножая справа и слева тождество $(A + B - \lambda I) - (A - \lambda I) = B$ на $R_\lambda(A + B)$ и $R_\lambda(A)$, мы получим второе тождество Гильберта для неограниченных операторов

$$R_\lambda(A + B) - R_\lambda(A) = R_\lambda(A + B)BR_\lambda(A) = R_\lambda(A)BR_\lambda(A + B).$$

Подставив сюда вместо B оператор $(\lambda - \mu)I$, мы получим первое тождество Гильберта

$$R_\mu(A) - R_\lambda(A) = (\mu - \lambda)R_\mu(A)R_\lambda(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A),$$

которое на самом деле будет справедливым для всех $\lambda, \mu \in \rho(A)$.

Следствие. резольвентное множество $\rho(A)$ является открытым подмножеством в $\mathbb{C}$.

Пусть $\lambda \in \rho(A)$ и $|\mu - \lambda| < \|R_\lambda(A)\|^{-1}$. Если мы положим в предыдущей лемме $B = (\lambda - \mu)I$, то получим $\lambda \in \rho(A + (\lambda - \mu)I)$, что эквивалентно обратимости оператора $A + (\lambda - \mu)I - \lambda I = A - \mu I$. То есть, $\mu \in \rho(A)$, что и доказывает наше следствие.

Множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром* неограниченного оператора A. Из предыдущих утверждений следует, что спектр $\sigma(A)$ является замкнутым подмножеством в $\mathbb{C}$. В отличие от случая ограниченных операторов, спектр неограниченного оператора может оказаться пустым множеством.

Пример 5. Рассмотрим оператор из примера 2 $Ax(t) = -ix'(t)$ с областью определения

$$\operatorname{dom} A = \{x : x \in AC[0, 2\pi],\ x' \in L_2[0, 2\pi],\ x(0) = 0\}, \text{ плотной в } L_2[0, 2\pi].$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Решим однородное уравнение $(A - \lambda I)x = -ix'(t) - \lambda x(t) = 0$. Его решение $x(t) = Ce^{i\lambda t}$. Подставив начальное условие $x(0) = 0$, получим $x(t) \equiv 0$. Решим теперь неоднородное уравнение $(A - \lambda I)x = y$, или $-ix'(t) - \lambda x = y$. Методом вариации постоянной решение, с начальным условием $x(0)=0$, находится в виде

$$x(t) = i\int\limits_0^t y(s)e^{i\lambda(t-s)}ds.$$

То есть, $x(t)$ выражается через $y(t)$ с помощью интегрального уравнения первого рода с ядром

$$K(t,s) = \begin{cases} ie^{i\lambda(t-s)} & 0 \le s \le t \le 2\pi \\ 0 & 0 \le t < s \le 2\pi. \end{cases}$$

Это ядро ограничено, поэтому оно является ядром Гильберта-Шмидта, а резольвента $R_\lambda(A)x = y$ является интегральным оператором Гильберта-Шмидта. Отсюда следует, что $R_\lambda(A)$ является ограниченным оператором, определенным на всем пространстве $L_2[0,2\pi]$. Поэтому $\rho(A) = \mathbb{C}$ или $\sigma(A) = \emptyset$.

Пример 6. Рассмотрим оператор A^*, сопряженный к оператору A из примера 5. Он действует по той же формуле $(A^*x)(t) = -ix'(t)$ с областью определения

$\mathrm{dom}A^* = \{x : x \in AC[0,2\pi],\ x' \in L_2[0,2\pi]\}.$

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение $(A^*x)(t)$ имеет теперь нетривиальное решение $x(t) = e^{\lambda t} \in \mathrm{dom}A^*$. Поэтому A^* имеет чисто дискретный спектр и $\sigma(A^*) = \mathbb{C}$.

5^0. **Критерий самосопряженности симметричного оператора. Спектр самосопряженного оператора.** В этом пункте мы будем считать оператор A симметричным, то есть $A \subseteq A^*$.

Лемма 6. *Для любого симметричного оператора A всегда выполняется* $\ker(A \pm iI) = \{0\}$. *Кроме этого, область значений* $\mathrm{im}(A \pm iI)$ *является замкнутым подпространством тогда и только тогда, когда оператор A замкнут.*

Доказательство. Найдем квадрат нормы

$\|(A \pm iI)x\|^2 = ((A \pm iI)x(A \pm iI)x) = (Ax, Ax) \pm i(x, Ax) \mp i(Ax, x) + (x,x) = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$. Поэтому из $x \in \ker(A \pm iI)$ следует $x = 0$. Далее, рассмотрим линейный оператор $T : G(A \pm iI) \to \mathscr{H}$, действующий по формуле

$T(\{x, Ax\}) = A \pm iI$. Норма вектора $\{x, Ax\}$ в пространстве $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ равна $(\|Ax\|^2 + \|x\|^2)^{1/2}$. Как мы видели выше, такая же норма и у вектора $(A \pm iI)x$. Поэтому оператор T является изометричным. Изометричный оператор сохраняет свойство замкнутости. То есть, график $G(A)$ замкнут в $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ тогда и только тогда, когда замкнут образ $\mathrm{im}T = \mathrm{im}(A \pm iI)$. Лемма доказана.

Теорема (критерий самосопряженности). *Для симметричного оператора A с плотной областью определения* $\mathrm{dom}A$ *следующие условия эквивалентны*:

1) $A = A^*$ (*оператор A самосопряжен*);

2) *оператор A замкнут и* $\ker(A^* \pm iI) = \{0\}$;

3) $\mathrm{im}(A \pm iI) = \mathscr{H}$ *и существует резольвента* $R_{\pm i}(A)$.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Если оператор A самосопряжен, то из $A = A^* = A^{**} = \overline{A}$ следует, что он замкнут. Из леммы 6 получаем, что

$\ker(A^* \pm iI) = \ker(A \pm iI) = \{0\}$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Так как A замкнут, то из леммы 6 следует замкнутость образа $\mathrm{im}(A \pm iI)$. В силу леммы 2, $\{0\} = \ker(A * \pm iI) = (\mathrm{im}(A \mp iI))^{\perp}$. Из замкнутости $\mathrm{im}(A \mp iI)$ следует, что $\mathscr{H} = (\mathrm{im}(A \mp iI))^{\perp\perp} = \mathrm{im}(A \mp iI)$. То есть, обратный оператор $(A \mp iI)^{-1}$ определен на всем $\mathscr{H}$ и он ограничен, так как из доказательства леммы 6 следует оценка $\|(A \mp iI)x\|^2 \geq \|x\|^2$ или $\|(A \mp iI)^{-1}y\| \leq \|y\|$, где $y = (A \mp iI)x$ пробегает все пространство $\mathscr{H}$. Поэтому $\|(A \pm iI)^{-1}\| \leq 1$, что означает существование резольвенты $R_{\pm iI}(A)$.

3) $\Longrightarrow$ 1). Рассмотрим любой элемент $x \in \mathrm{dom} A^*$. Из равентсва $\mathrm{im}(A+iI) = \mathscr{H}$ следует разрешимость уравнения $(A^*+iI)x = (A+iI)y$ при некотором $y \in \mathrm{dom} A = \mathrm{dom}(A+iI)$. Так как $A \subseteq A^*$, то $y \in \mathrm{dom} A^*$ и $A^*y = Ay$. Поэтому $(A^*+iI)(x-y) = 0$. Из леммы 2 следует равенство $\ker(A^*+iI) = (\mathrm{im}(A-iI))^{\perp} = \mathscr{H}^{\perp} = \{0\}$. Отсюда получаем равенство $x - y = 0$ или $x = y \in \mathrm{dom} A$. Мы доказали $\mathrm{dom} A \supseteq \mathrm{dom} A^*$, что вместе с $A \subseteq A^*$ дает равенства $\mathrm{dom} A = \mathrm{dom} A^*$ и $A = A^*$. Теорема доказана.

Следствие. Спектр симметричного оператора A вещественен тогда и только тогда, когда A самосопряжен.

Допустим $A = A^*$ и $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Оператор $B = \beta^{-1}(A - \alpha I)$ тоже самосопряжен. По критерию 3) существует резольвента $R_i(B) = (B - iI)^{-1} = \beta(A - \alpha I - \beta iI)^{-1}$, что эквивалентно существованию ограниченного обратного $(A - \lambda I)^{-1}$. То есть, из $\lambda \notin \mathbb{R}$ следует $\lambda \in \rho(A)$. Поэтому $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Далее мы докажем, пользуясь спектральной теоремой, что спектр самосопряженного оператора непуст.

Обратно, допустим оператор A симметричен и $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Тогда выполнены условия 3), так как $\pm i \in \rho(A)$ и значит существует резольвента $R_{\pm i}(A) = (A \pm iI)^{-1}$. Это означает, в частности, что $\mathrm{im}(A \pm iI) = \mathscr{H}$.

Лемма 7. *Пусть A – симметричный оператор и $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$ и $\mathrm{im}(A - \lambda I) = \mathscr{H}$, то $\lambda \in \rho(A)$.*

Доказательство. Если $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, то оператор $B = \beta^{-1}(A - \alpha I)$ тоже симметричен и $\mathrm{dom}(B - iI) = \mathscr{H}$. Из доказательства предыдущей теоремы (2) $\Longrightarrow$ 3)) следует, что $\|B - iI\| \leq 1$. Поэтому $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq |\beta|^{-1}$, что означает $\lambda \in \rho(A)$. Пусть теперь $\beta = 0$ ($\lambda = \alpha$). Так как $\mathrm{im}(A - \alpha I) = \mathscr{H}$, то оператор $B = (A - \alpha I)^{-1}$ определен на всем $\mathscr{H}$. Докажем, что оператор B тоже симметричный. Пусть $x, y \in \mathscr{H}$. Существуют $u, v \in \mathscr{H}$, такие что $(A - \alpha I)u = x$, $(A - \alpha I)v = y$. Тогда $(Bx, y) = (B(A - \alpha I)u, (A - \alpha I)v) = (u, (A - \alpha I)v) = ((A - \alpha I), u, v) = (x, By)$.По теореме Хеллингера-Теплица симметричный оператор B должен быть ограниченным. Поэтому $\lambda = \alpha \in \rho(A)$. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что для симметричных операторов (а также для любых операторов, имеющих замыкание) признак принадлежности резольвентному множеству такой же как и в случае ограниченных операторов. Если $\mathrm{dom}(A - \lambda I)^{-1} = \mathscr{H}$, то сразу можно сказать, что $\lambda \in \rho(A)$ (то есть, в отличие от произвольных неограниченных операторов, нам не требуется еще проверять ограниченность резольвенты $(A - \lambda I)^{-1}$). Деление спектра на точечный, непрерывный и остаточный проводится по тем же правилам, что и для случая ограниченных операторов.

Если оператор A самосопряжен, то $\sigma_r(A) = \emptyset$. Мы уже знаем, что $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Пусть $\lambda \in \sigma_r(A) \subseteq \mathbb{R}$. Так как $\lambda \notin \sigma_p(A)$, то $\ker(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I)^* = \{0\}$. Из леммы 2 следует, что $(\mathrm{im}(A - \lambda I))^{\perp} = \{0\}$, что означает $\mathrm{dom}(A - \lambda I)^{-1}$ плотен в

$\mathscr{H}$, а это противоречит тому, что $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Для неограниченного самосопряженного оператора A остается справедливым *критерий Вейля*: $\lambda \in \sigma(A) \iff$ *существует последовательность векторов* $x_n \in \mathrm{dom}A$ *такая, что* $\|x_n\| = 1$ *и* $Ax_n - \lambda x_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Если $\lambda \in \sigma_p(A)$, то в качестве последовательности x_n можно взять нормированный собственный вектор x. Если $\lambda \in \sigma_c(A)$, то оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определен на плотном подпространстве, не совпадающим со всем пространством $\mathscr{H}$ (иначе будет $\lambda \in \rho(A)$). Оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ замкнут (как обратный к замкнутому оператору). Допустим, что оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ ограничен и пусть $y \notin \mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}$. Из плотности подпространства $\mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}$ следует, что существует последовательность $y_n \in \mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}$, сходящаяся к y. Из ограниченности оператора $(A-\lambda I)^{-1}$ следует, что последовательность векторов $x_n = (A-\lambda I)^{-1}y_n$ фундаментальна (последовательность Коши). Поэтому x_n сходится к некоторому элементу $x \in \mathscr{H}$. Из замкнутости оператора $(A-\lambda I)^{-1}$ следует, что $y \in \mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}$ и $(A-\lambda I)^{-1}y = x$. Это противоречие доказывает неограниченность оператора $(A-\lambda I)^{-1}$. Доказательство теперь можно закончить так же как и доказательство критерия Вейля для ограниченных операторов.

Задача 61. Докажите, что замкнутый симметричный оператор самосопряжен тогда и только тогда, когда его остаточный спектр пуст.

Мы применим критерий самосопряженности для доказательства следующей теоремы, имеющей важные применения в математической физике. Предварительно введем следующее определение:

Определение. Пусть A – самосопряженный оператор, а B – симметричный оператор, такой что $\mathrm{dom}B \supseteq \mathrm{dom}A$. Говорим, что оператор B является *A-ограниченным*, если существуют числа $a, b \in \mathbb{R}^+$, такие что для любого $x \in \mathrm{dom}A$ справедливо неравенство

$$\|Bx\| \le a\|x\| + b\|Ax\|. \qquad (*)$$

В этом случае число b называется *A-гранью* оператора B.

Теорема Като-Реллиха. *Пусть A – самосопряженный оператор, B – симметричный A-ограниченный оператор с A-гранью $b < 1$ и такой, что* $\mathrm{dom}B \supset \mathrm{dom}A$. *Тогда оператор $A+B$ с областью определения* $\mathrm{dom}(A+B) = \mathrm{dom}A$ *является самосопряженным.*

Доказательство. Очевидно, оператор $A + B$ симметричен на $\mathrm{dom}\,A$. Нам достаточно проверить выполнимость условия 3) предыдущей теоремы. Для этого необходимо доказать разрешимость уравнения $(A + B + i\alpha I)x = y$ принекотором $\alpha \in \mathbb{R}$ и всех $y \in \mathscr{H}$. Так как оператор A самосопряжен, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует резольвента $R_{-i\alpha}(A) = (A + i\alpha I)^{-1}$. В частности, для любого $z \in \mathscr{H}$ имеем $(A + i\alpha I)^{-1}z \in \mathrm{dom}A \subseteq \mathrm{dom}B$. То есть $\mathrm{dom}(B(A + i\alpha I)) = \mathscr{H}$. Докажем, что существует такое $\beta \in \mathbb{R}^+$, $\beta < 1$, что при некотором (достаточно большом) $\alpha > 0$ выполняется оценка $\|B(A - \alpha I)^{-1}z\| \le \beta\|z\|$ для всех $z \in \mathscr{H}$. Для этого возведем неравенство $(*)$ в квадрат:

$$\|Bx\|^2 \le a^2\|x\|^2 + 2ab\|x\|\|Ax\| + b^2\|Ax\|^2$$

Воспользовавшись неравенством $2uv = 2\,\dfrac{u}{\varepsilon}\,\varepsilon v \le \left(\dfrac{u}{\varepsilon}\right)^2 + \varepsilon^2 v^2$, которое справедливо для любых u, v, ε, мы получим следующее неравенство

$$\|Bx\|^2 \le \|x\|^2+\frac{a^2}{\varepsilon^2}\|x\|^2+\varepsilon^2 b^2\|Ax\|^2+b^2\|Ax\|^2 = \beta^2(\alpha^2\|x\|^2+\|Ax\|^2) = \beta^2\|(A+i\alpha I)x\|^2,$$

здесь мы ввели обозначения $\beta = b\sqrt{1+\varepsilon^2}$, $\alpha = \sqrt{a^2+\varepsilon^2}/\varepsilon b\sqrt{1+\varepsilon^2}$. Так как $b<1$, то можно выбрать ε таким, чтобы выполнялось $\beta<1$. Обозначим $z=(A+i\alpha I)x$. Так как $-i\alpha \in \rho(A)$, то z пробегает все $\mathscr{H}$, если x пробегает $\operatorname{dom} A$. В новых обозначениях предыдущее неравенство приобретает требуемый вид

$\|B(A+i\alpha I)^{-1}z\| \le \beta\|z\|,\ \ z\in\mathscr{H},\ $ то есть, $\ \|B(A+i\alpha I)^{-1}\| \le \beta < 1.$

Запишем теперь уравнение $(A+B+i\alpha I)x = y$ в следующем виде

$[I+B(A+i\alpha I)^{-1}](A+i\alpha I)x = y.$

Оператор в квадратных скобках обратим по теореме Неймана, оператор $(A+i\alpha I)$ тоже имеет ограниченный обратный (т.к. $-i\alpha\in\rho(A)$). Поэтому уравнение имеет решение $x = R_{-i\alpha}(A)[I+BR_{-i\alpha}(A)]^{-1}y$. Аналогичным образом доказывается разрешимость при любом $y\in\mathscr{H}$ уравнения $(A+B-i\alpha I)x = y$. Условие 3) предыдущей теоремы выполнено для оператора $\alpha^{-1}(A+B)$. То есть, оно выполнено и для оператора $A+B$. Поэтому оператор $A+B$ с областью определения $\operatorname{dom}(A+B) = \operatorname{dom}A$ самосопряжен. Теорема доказана.

Теорема Като-Реллиха применяется для доказательства самосопряженности операторов Гамильтона в квантовой механике. В качестве оператора A рассмотрим оператор Лапласа $-\Delta$, заданный пространстве быстро убывающих функций $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. В квантовой механике он ассоциируется с оператором кинетической энергии. Докажем его существенную самосопряженность. Рассмотрим преобразование Фурье $\mathscr{F}:\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$.

$$\widehat{\psi}(y) = (\mathscr{F}\psi)(y) = (2\pi)^{-n/2}\iint\limits_{\mathbb{R}^m}\psi(x)e^{-ix\cdot y}d^m x,$$

где $x\cdot y = x_1y_1+\cdots+x_my_m$. Оператор $\mathscr{F}$ является унитарным на пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Рассмотрим оператор $\widehat{-\Delta} = \mathscr{F}(-\Delta)\mathscr{F}^{-1}$. Он действует на том же пространстве $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ по формуле $\widehat{-\Delta}\psi(y) = |y|^2\psi(y)$, где $|y|^2 = y_1^2+\cdots+y_m^2$. Такой оператор очевидно симметричен на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Область определения $\operatorname{dom}\widehat{-\Delta}^*$ состоит и таких функций $\chi\in L_2(\mathbb{R}^m)$, для которых функционал

$$l_\chi(\psi) = \iint\limits_{\mathbb{R}^m}|y|^2\psi(y)\overline{\chi(y)}d^m y$$

непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^m)$ по ψ. Из теоремы Рисса следует, что он непрерывен тогда и только тогда, когда $|y|^2\chi(y)\in L_2(\mathbb{R}^m)$. Итак,

$$\operatorname{dom}\widehat{-\Delta}^* = \{\chi(y)\in L_2(\mathbb{R}^m) : |y|^2\chi(y)\in L_2(\mathbb{R}^m)\} = \{\chi(y) : (1+|y|^2)\chi(y)\in L_2(\mathbb{R}^m)\}.$$

Такая же область определения, очевидно, будет и у оператора $\widehat{-\Delta}^{**}$. Поэтому $\widehat{-\Delta}^* = \widehat{-\Delta}^{**}$ и оператор $\widehat{-\Delta}$ существенно самосопряжен, а его замыкание $\widehat{-\Delta}^*$ с областью определения $\{\chi(y) : (1+|y|^2)\chi(y)\in L_2(\mathbb{R}^m)\}$ является самосопряженным оператором.

Далее нам потребуется следующий факт, доказательство которого, ввиду очевидности, мы опускаем. Если оператор A самосопряжен, а U унитарный оператор, то оператор $B = UAU^{-1}$ с областью определения $\mathrm{dom}B = U(\mathrm{dom}A)$ тоже самосопряжен.

Переходя к обратному преобразованию Фурье, мы получим самосопряженный оператор $-\overline{\Delta} = \mathscr{F}^{-1}\widehat{-\Delta}^{*}\mathscr{F}$ с областью определения

$\mathscr{F}^{-1}(\{\chi(y) : (1+|y|^2)\chi(y) \in L_2(\mathbb{R}^m)\})$.

Это пространство мы будем далее обозначать через $W_2^2(\mathbb{R}^m)$ – пространство Соболева, которое состоит из всех функций $\psi(x) \in L_2(\mathbb{R}^m)$, для которых вторые обобщенные частные производные являются регулярными обобщенными функциями, тоже принадлежащими $L_2(\mathbb{R}^m)$ (это можно записать в виде $(1-\Delta)\psi \in L_2(\mathbb{R})^m$). Самосопряженный оператор $-\overline{\Delta}$ мы будем далее обозначать тем же символом $-\Delta$.

Оператор Гамильтона в квантовой механике состоит чаще всего из суммы двух слагаемых: оператора кинетической энергии $-\Delta$ и оператора потенциала, действие которого на волновую функцию $\psi(x)$ состоит в умножении на обычную вещественную функцию $V(x)$. То есть, $H = -\Delta + V(x)$.

Теорема. *Пусть самосопряженный оператор $-\Delta$ определен на пространстве $W_2^2(\mathbb{R}^3)$, а потенциал V представляется в виде суммы $V = V_1+V_2$, где $V_1 \in L_2(\mathbb{R}^3)$, а $V_2 \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда оператор Гамильтона $H = -\Delta+V(x)$ является самосопряженным оператором на той же области определения* $\mathrm{dom}H = \mathrm{dom}\Delta = W_2^2(\mathbb{R}^3)$.

Доказательство. Оценим норму

$\|V\psi\|_2 \le \|V_1\psi\|_2 + \|V_2\psi\|_2 \le \|V_1\|_2\|\psi\|_\infty + \|V_2\|_\infty\|\psi\|_2$.

Во избежании путаницы, мы обозначаем здесь норму в гильберотовом пространстве $\mathscr{H}$ через $\|\cdot\|_2$. Далее необходимо оценить равномерную норму $\|\psi\|_\infty$ через норму $\|\Delta\psi\|_2$. Для этого опять перейдем к преобразованию Фурье

$$(2\pi)^{3/2}\|\psi\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\iint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{ip\cdot x}\widehat{\psi}(p)d^3p\right| \le \|\widehat{\psi}(p)\|_1 =$$

$\|(|p|^2+1)^{-1}(|p|^2+1)\widehat{\psi}(p)\|_1 \le \|(|p|^2+1)^{-1}\|_2\,\|(|p|^2+1)\widehat{\psi}(p)\|_2$.

Последнее неравенство следует из неравенства Гёльдера. Та как $\|(|p|^2+1)^{-1}\|_2 = \pi^2$, то применяя равенство Парсеваля, мы получим оценку

$\|\psi\|_\infty \le C(\|\psi\|_2 + \|\Delta\psi\|_2), \quad C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Для применения теоремы Като-Реллиха необходимо, чтобы коэффициент при $\|\Delta\psi\|_2$ был меньше единицы. Для достижения этой цели сделаем линейную замену переменной $x = \varepsilon y$, тогда получим, что

$\|\psi(x)\|_\infty = \|\psi(\varepsilon y)\|_\infty \le C(\varepsilon^{-3/2}\|\psi(y)\|_2 + \varepsilon^{1/2}\|\Delta\psi(y)\|_2)$.

Взяв параметр ε таким, чтобы выполнялось $b = C\|V_1\|_2\varepsilon^{1/2} < 1$, мы получим необходимую оценку $\|V\psi\|_2 \le a\|\psi\| + b\|\Delta\psi\|_2$, где $a = \|V_2\|_\infty + C\varepsilon^{-3/2}$. Заключение теоремы теперь следует из теоремы Като-Реллиха. Теорема доказана.

Предыдущая теорема применима, в частности, к оператору Гамильтона для атома водорода (и водородо-подобных ионов), так как потенциал $V(x) = -Ze^2/|x|$

удовлетворяет предъявляемым требованиям. Пусть $\chi_1(x) = 1$ при $|x| \le 1$ и $\chi_1(x) = 0$ при $|x| > 1$. Тогда мы можем положить $V_1(x) = -\chi_1(x)Ze^2/|x|$, $V_2(x) = -(1-\chi_1(x))Ze^2/|x|$. Тогда потенциал $V_2(x)$ ограничен, а тройной интеграл от $|V_1(x)|^2$ по единичному шару конечен.

Предыдущая теорема применима также и к сложному атому. В этом случае оператор Гамильтона имеет вид

$$H = \sum_{k=1}^{m}\left(-\Delta_k - \frac{Ze^2}{|x_k|}\right) + \sum_{k<1}\frac{e^2}{|x_k - x_l|},$$

здесь $-\Delta_k = -\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta_k^2}\right)$ – оператор кинетической энергии k-го электрона с координатами $x_k = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, $-Ze^2/|x_k|$ – его потенциальная энергия в поле ядра с зарядом Ze, $e^2/|x_k - x_l|$ – энергия взаимодействия k-го и l-го электрона. Задача состоит в оценке нормы $\|V\psi\|_2 = \|\sum\limits_{k=1}^{m} V_k\psi + \sum\limits_{k<l} V_{k,l}\psi\|_2$ через норму $\|\Delta\psi\|_2 = \|\sum\limits_{k=1}^{m}\Delta_k\psi\|_2$ с коэффициентом $b < 1$. Оценка каждого члена $\|V_k\psi\|_2$ проводится с помощью частичного преобразования Фурье только по переменной x_k (у нас теперь $\psi = \psi(x_1, \dots, x_m)$ зависит от $3m$ переменных). Как и раньше, мы получим оценку вида $\|V_k\psi\|_{k,2} \le a_k\|\psi\|_{k,2} + b_k\|\Delta_k\psi\|_{k,2}$ со сколь угодно малым коэффициентом b_k. Норма $\|\cdot\|_{k,2}$ в этой оценке означает, что интегрирование проводится только по переменной x_k, переменные x_l при $l \ne k$ считаются свободными параметрами. Далее мы возводим эту оценку в квадрат $\|V_k\psi\|_{k,2}^2 \le a_k^2\|\psi\|_{k,2}^2 + 2a_kb_k\|\psi\|_{k,2}\|\Delta_k\psi\|_{k,2} + b_k^2\|\Delta_k\psi\|_{k,2}^2 \le (a_k^2 + \frac{a_k^2}{\varepsilon^2})\|\psi\|_{k,2}^2 + (b_k^2 + \varepsilon^2)\|\Delta_k\psi\|_{k,2}^2$. Это неравенство мы интегрируем по всем свободным параметрам x_l при $l \ne k$ и полагаем $\varepsilon = b_k$. В результате получается оценка $\|V_k\psi\|_2^2 \le (a_k')^2\|\psi\|_2^2 + 2b_k^2\|\Delta\psi\|_2^2$ с новой константой a_k'. Извлекая квадратный корень, получим $\|V_k\psi\|_2 \le a_k'\|\psi\|_2 + \sqrt{2}b_k\|\Delta\psi\|_2$. В этой оценке норма $\|\cdot\|_2$ вычисляется интегрированием по всем переменным $x_1, \dots, x_m$. Оценка члена $\|V_{k,l}\psi\|_2 = \|\frac{e^2}{|x_k - x_l|}\psi\|_2$ проводится, после замены переменных $y = (x_k + x_l)/\sqrt{2}$, $z = (x_k - x_l)/\sqrt{2}$, как и раньше. Коэффициенты при лапласах b_k, $b_{k,l}$ можно взять столь малыми, чтобы суммарный коэффициент b был меньше единицы. Наконец, заменяя $\|\Delta_k\psi\|_2$ на большие величины $\|\sum\limits_{k=1}^{m}\Delta_k\psi\|_2$ (с помощью преобразоваия Фурье по всем переменным x_k это следует из оценки $\||p_k|^2\widehat{\psi}\|_2 \le \|(\sum\limits_{k=1}^{m}|p_k|^2)\widehat{\psi}\|_2$) мы получим требуемую оценку с параметром $b = \sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{2}b_k + \sum\limits_{k<l}\sqrt{2}b_{k,l} < 1$.

Следующая теорема, из за отсутствия времени, приводится без доказательства.

Теорема Сирса. *Допустим, что потенциал $V(x)$ локально ограничен и для любого $x \in \mathbb{R}^m$ верна оценка $V(x) \ge -Q(|x|)$, где $Q(r)$ – возрастающая непрерывная положительная функция на $[0, \infty)$, такая что*

$$\int\limits_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{Q(r)}} = \infty.$$

Тогда оператор Гамильтона $H=-\Delta+V$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Для одномерного случая $m=1$ теорема Сирса гарантирует, что операторы $-\frac{d^2}{dx^2}+x$ и $-\frac{d^2}{dx^2}-x^2$ существенно самосопряжены на $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Для любого $\varepsilon>0$ оператор $-\frac{d^2}{dx^2}-x^{2+\varepsilon}$ уже не будет существенно самосопряженным. Но он будет иметь континум самосопряженных расширений. Классическое решение задачи движения в таком потенциале говорит, что частица уходит в бесконечность за конечный промежуток времени. То есть выбор самосопряженного расширения оператора Гамильтона на физическом языке должен соответствовать выбору модели поведения частицы в бесконечности. На самом деле данная задача теряет физический смысл по совершенно другой причине – она нерелятивистская.

Приведем без доказательства две теоремы, в которых дается характеристика спектра оператора Гамильтона.

Теорема 1. *Предположим, что $V(x)\in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и для некоторого $\varepsilon>0$ потенциал $V(x)$ удовлетворяет условию $V(x)=O(|x|^{-1-\varepsilon})$ при $|x|\to\infty$. Тогда у оператора Шредингера $H=-\Delta+V$ непрерывный спектр есть $[0,\infty)$ (более того, он абсолютно непрерывен, т.е. функция распределения $(E_\lambda\psi,\psi)$ имеет плотность), а $\sigma(H)\cap(-\infty,0)$ состоит из собственных чисел конечной кратности и 0 может быть единственной их предельной точкой.*

Теорема 1'. *Допустим, что потенциал $V(x)$ локально ограничен в $\mathbb{R}^m$ и $a<\varliminf\limits_{|x|\to\infty} V(x)$. Тогда спектр оператора Гамильтона $H=-\Delta+V(x)$ на $(-\infty,a)$ состоит из конечного числа собственных значений конечной кратности. В частности, если $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x)=+\infty$, то в $L_2(\mathbb{R}^m)$ существует базис из собственных функций $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$, причем соответствующие собственные значения $E_j\to+\infty$ при $j\to\infty$.*

6^0. **Преобразование Кэли и индексы дефекта симметричного оператора.** Пусть A – симметричный оператор. Мы уже знаем из леммы 6, что $\ker(A\pm iI)=\{0\}$ и $\mathrm{dom}(A\pm iI)=\mathrm{dom}A$. Поэтому сущесвует обратный оператор $(A-iI)^{-1}$, определенный на образе $\mathrm{im}(A-iI)$ принимающий значения в подпространстве $\mathrm{dom}A$. Следовательно, линейный оператор $U=(A+iI)(A-iI)^{-1}$ определен на $\mathrm{im}(A-iI)$ и принимает значения в $\mathrm{im}(A+iI)$.

Теорема. *Оператор $U=(A+iI)(A-iI)^{-1}$ (называемый преобразованием Кэли оператора A) изометрично отображает $\mathrm{im}(A-iI)$ на $\mathrm{im}(A+iI)$. При этом, оператор $\widetilde{U}$ является изометричным расширением оператора U тогда и только тогда, когда существует (единственное) симметричное расширение $\widetilde{A}$ оператора A, для которого $\widetilde{U}=(\widetilde{A}+iI)(\widetilde{A}-iI)^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $x\in\mathrm{im}(A-iI)$ и $y=Ux$. Положим $z=(A-iI)^{-1}x$, тогда $y=(A+iI)z$ и $x=(A-iI)z$. В лемме 6 было доказано, что $\|(A\pm iI)z\|^2=\|Az\|^2+\|z\|^2$, т.е. $\|y\|^2=\|(A+iI)z\|^2=\|Az\|^2+\|z\|^2=\|(A-iI)z\|^2=\|x\|^2$. Рассмотрим теперь некоторое расширение $\widetilde{U}$ оператора U, которое изометрично отображает замкнутое подпространство $\mathscr{H}_1\supseteq\mathrm{im}(A-iI)$ на замкнутое подпространство $\mathscr{H}_2\supseteq\mathrm{im}(A+iI)$. Без ограничения общности можно считать оператор A замкнутым (заменяя, при необходимости, A его замыканием). В этом случае, в силу леммы 6, подпространства $\mathrm{im}(A\pm iI)$ тоже будут замкнутыми (в общем случае верно $\mathrm{im}(\overline{A} \pm iI) = cl(\mathrm{im}(A \pm iI))$. Пусть $\mathscr{H}_{1,-} = \mathscr{H}_1 \ominus \mathrm{im}(A - iI)$, $\mathscr{H}_{2,+} = \mathscr{H}_2 \ominus \mathrm{im}(A + iI)$. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^N$ – ортогональный базис (конечный или бесконечный) в пространстве $\mathscr{H}_{1,-}$. Положим $f_j = \widetilde{U} e_j$ $(j = 1, 2, \dots)$. Так как $\widetilde{U}$ изометрично отображает $\mathscr{H}_{1,-}$ на $\mathscr{H}_{2,+}$, то $\{f_j\}_{j=1}^N$ является ортогональным базисом в $\mathscr{H}_{2,+}$. По лемме 2, $\ker(A^* \pm iI) = (\mathrm{im}(A \mp iI))^\perp$, поэтому $(A^* + iI)e_j = 0$ и $(A^* - iI)f_j = 0$ $(j = 1, 2, \dots)$. Симметричное продолжение оператора A будем строить индуктивно. На первом шаге полагаем $\widetilde{A}_1(e_1 - f_1) = -i(e_1 + f_1)$. Сначала покажем, что $e_1 - f_1 \notin \mathrm{im}(A - iI)$. Иначе из $e_1 \perp \mathrm{im}(A - iI)$ будет следовать $0 = (e_1, (A - iI)(e_1 - f_1)) =$[так как $A \subseteq A^*$]$= (e_1, (A^* - iI)(e_1 - f_1)) = (e_1, (-ie_1 - if_1) - i(e_1 - f_1)) = 2i(e_1, e_1) = 2i$. Итак, мы корректно определили оператор $\widetilde{A}_1$ на линейной оболочке множества $\mathrm{dom}A \cup \{e_1 - f_1\}$ по формуле $\widetilde{A}_1(x + \alpha(e_1 - f_1)) = Ax - i\alpha(e_1 + f_1)$, $x \in \mathrm{dom}A$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Проверим его симметричность. Симметричность на $\mathrm{dom}A$ дана по определению. Поэтому достаточно проверить два равенства: $(Ax, e_1 - f_1) = (x, \widetilde{A}_1(e_1 - f_1))$ и $(\widetilde{A}_1(e_1 - f_1), e_1 - f_1) = (e_1 - f_1, \widetilde{A}_1(e_1 - f_1))$. Первое равенство следует из тождеств $(Ax, e_1 - f_1) = (x, A^*(e_1 - f_1)) = (x, -ie_1 - if_1) = (x, \widetilde{A}_1(e_1 - f_1))$. Второе равенство тоже просто проверяется: $(\widetilde{A}_1(e_1 - f_1), e_1 - f_1) = -i(e_1 + f_1, e_1 - f_1) = -i(\|e_1\|^2 + \underline{(f_1, e_1) - (e_1, f_1)}) - \|f_1\|^2 = 2\,\mathrm{Im}(f_1, e_1) \in \mathbb{R}$. Поэтому $(\widetilde{A}_1(e_1 - f_1), e_1 - f_1) = \overline{((\widetilde{A}_1(e_1 - f_1)), e_1 - f_1)} = (e_1 - f_1, \widetilde{A}_1(e_1 - f_1))$. Ранее мы уже проверяли, что $(\widetilde{A}_1 - iI)(e_1 - f_1) = -2ie_1$, т.е. $(\widetilde{A}_1 - iI)^{-1}e_1 = \frac{i}{2}(e_1 - f_1)$. Поэтому $(\widetilde{A}_1 + iI)(\widetilde{A}_1 - iI)^{-1}e_1 = \frac{i}{2}[-i(e_1 + f_1) + i(e_1 - f_1)] = f_1 = \widetilde{U}e_1$. Это означает, что на подпространстве $\mathrm{im}(A - iI) \oplus \{\lambda e_1\}$ оператор $\widetilde{U}$ является преобразованием Кэли симметричного расширения $\widetilde{A}_1$. Далее мы в точности так же строим индуктивно последовательность симметричных расширений $A \subset \widetilde{A}_1 \subset \widetilde{A}_2$ до тех пор, пока не исчерпаем набор пар $\{e_j, f_j\}_{j=1}^N$. Если $N < \infty$, то искомое симметричное расширение будет $\widetilde{A} = \bigcup\limits_{j=1}^N \widetilde{A}_j$. Если $N = \infty$, то преобразование Кэли оператора $\widetilde{A}$ будет задано только на конечных линейных комбинациях векторов $x \in \mathrm{im}(A - iI)$ и e_j $(j = 1, 2, \dots)$. В этом случае следует рассмотреть замыкание $\overline{\widetilde{A}}$ полученного симметричного оператора $\widetilde{A}$, тогда преобразование Кэли оператора $\overline{\widetilde{A}}$ совпадет с изометричным расширением $\widetilde{U}$. Теорема доказана.

Определение. Для симметричного оператора A подпространства $\mathscr{H}_- = \mathscr{H} \ominus \mathrm{im}(A - iI)$ и $\mathscr{H}_+ = \mathscr{H} \ominus \mathrm{im}(A + iI)$ называются *дефектными подпространствами*, а числа $n_\pm = \dim \mathscr{H}_\pm$ называются *индексами дефекта*.

Из этого определения следует, что $\mathscr{H}_+$ состоит из собственных векторов оператора A^* с собственным числом $+i$, а $\mathscr{H}_-$ – из собственных векторов с собственным числом $-i$.

Следствие. Симметричный оператор A имеет самосопряженные расширения тогда и только тогда, когда равны его индексы дефекта, т.е. $n_+ = n_-$. Симметричный оператор существенно самосопряжен тогда и только тогда, когда $n_+ = n_- = 0$, т.е., когда уравнения $A^*x = ix$ и $A^*x = -ix$ имеют только тривиальные решения.

Пример 2' Вернемся к примеру 2. В этом примере

$\mathrm{dom}A^* = \{y : y \in AC[0, 2\pi],\ y' \in L_2[0, 2\pi]\}$, причем $(A^*x)(t) = -ix'(t)$. Для нахождения дефектных подпространств необходимо решить уравнения $-ix'(t) = ix(t)$ и $-ix'(t) = -ix(t)$. Нормированное решение первого уравнения есть

$$x_+(t) = \frac{e^{\pi-t}}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,\pi}}, \quad x_-(t) = \frac{e^{t-\pi}}{\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,\pi}}.$$

Это означает, что $n_+ = n_- = 1$ и данный оператор имеет однопараметрическое семейство самосопряженных расширений. Допустим, что изометричный оператор $\widetilde{U}$ действует по формуле $(\widetilde{U}x_-)(t) = e^{i\psi}x_+(t)$ (здесь произвол только в выборе фазы ψ). Тогда, следуя доказательству теоремы, мы должны положить $\widetilde{A}(x_- - e^{i\psi}x_+) = -i(x_- + e^{i\psi}x_+)$. К области определения

$$\mathrm{dom}A = \{x : x \in AC[0, 2\pi],\ x' \in L_2[0, 2\pi],\ x(0) = x(2\pi) = 0\}$$

добавилась новая функция $x_1(t) = x_-(t) - e^{i\psi}x_+(t)$. Легко проверяется, что на концах отрезка $|x_1(0)| = |x_1(2\pi)|$. Поэтому $x_1(2\pi) = e^{i\varphi}x_1(0)$ для некоторого фиксированного φ. Это граничное условие сохраняется и для произвольных линейных комбинаций с функциями из $\mathrm{dom}A$. Следовательно,

$$\mathrm{dom}\widetilde{A} = \{x : x \in AC[0, 2\pi],\ x' \in L_2[0, 2\pi],\ x(2\pi) = e^{i\varphi}x(0)\}.$$

Кроме этого, $\widetilde{A}(x_- - x_+) = -i(x_- + x_+) = -i(x_- - x_+)'$. То есть, на новой области определения $\mathrm{dom}\widetilde{A}$ оператор $\widetilde{A}$ действует по той же формуле $(\widetilde{A}x)(t) = -ix'(t)$.

Задача 62. В примере 2' найдите спектр оператора $A = -i\frac{d}{dt}$. В случае $\varphi \neq 2\pi k$ $(k \in \mathbb{N})$ дайте физическую постановку задачи, в которой A будет оператором импульса.

Пример 3'. Рассмотрим еще раз пример 3, в котором симметричный оператор $A = -i\frac{d}{dt}$ задан на подпространстве $C_0^\infty[0, \infty)$. Сопряженный оператор имеет область определения

$$\mathrm{dom}A^* = \{y : y \in AC[0, \infty),\ y, y' \in L_2[0, \infty)\}.$$

Уравнения для нахождения дефектных пространств имеют такой же вид $-ix'(t) = ix(t)$ и $-ix'(t) = -ix(t)$. Решениями будут, соответственно, $x_+(t) = Ce^{-t},\ x_-(t) = Ce^t$. Из них только первое решение интегрируемо с квадратом. Поэтому $\mathscr{H}_+ = \{Ce^{-t}\}$, $\mathscr{H}_- = \{0\}$. Индексы дефекта есть $n_+ = 1$, $n_- = 0$. Преобразование Кэли U определено на всем пространстве $\mathscr{H}$ и изометрично отображает его на собственное подпространство $(e^{-t})^\perp$. Поэтому симметричный оператор $A = -i\frac{d}{dt}$ с областью определения $\mathrm{dom}A = C_0^\infty[0, \infty)$ не может иметь спмосопряженных расширений.

Отметим без доказательства еще один признак существования самосопряженного расширения. Симметричный оператор A называется *полуограниченным снизу* (*сверху*), если существует число $m \in \mathbb{R}$, такое что $(Ax, x) \geq m(x, x)$ $((Ax, x) \leq m(x, x))$ для всех $x \in \mathrm{dom}A$. В этом слкчае число m называется *нижней* (*верхней*) *границей* оператора A.

Задача 63. Докажите, что если симметричный оператор полуограничен снизу и сверху, т.е. $m \leq (Ax, x) \leq M$ для некоторых $m, M \in \mathbb{R}$ и всех $x \in \mathrm{dom}A$, то он ограничен (имеет конечную норму).

Теорема Фридрихса. *Пусть A – симметричный полуограниченный снизу оператор с нижней границей m. Тогда существует самосопряженное ограниченное снизу расширение оператора A с той же нижней границей m.*

Большинство операторов Гамильтона ограничены снизу; в качестве нижней границы выступает обычно энергия основного состояния.

Симметричный оператор A с областью определения $\mathrm{dom}A \subseteq L_2(\mathbb{R}^m)$ и принимающий значения в $L_2(\mathbb{R}^m)$ называется *вещественным*, если из $\psi \in \mathrm{dom}A$ следует $\overline{\psi} \in \mathrm{dom}A$ и $\overline{A\psi} = A\overline{\psi}$. Примерами вещественных операторов являются операторы Гамильтона $H = -\Delta + V(x)$ с вещественным потенциалом $V(x)$.

Теорема. *Любой вещественный симметричный оператор A, действующий в $L_2(\mathbb{R}^m)$ имеет самосопряженные расширения.*

Доказательство. Мы докажем равенство индексов дефекта $n_+ = n_-$. Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ – базис дефектного пространства $\mathscr{H}_+$. То есть, для любого $\psi_n \in \mathscr{H}_+$ имеем $A\psi_n = i\psi_n$. Так как A – вещественный оператор, то $A\overline{\psi}_n = \overline{A\psi_n} = -i\overline{\psi}_n$. Поэтому набор $\{\overline{\psi}_n\}_{n=1}^N$ является базисом второго дефектного пространства $\mathscr{H}_-$. Поэтому $n_+ = n_-$, что означает существование самосопряженных расширений. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что упоминаемый выше оператор Гамильтона $H = -\frac{d^2}{dx^2} - x^{2+\varepsilon}$ имеет самосопряженные расширения. Невещественные операторы Гамильтона бывают в случае, когда в их выражении есть оператор импульса в первой степени. Такие операторы появляются в задачах с магнитными полями. Невещественен также оператор Гамильтона сложного атома с поправками на спин-орбитальное взаимодействие. Как правило такие гамильтонианы ограничены снизу и, по предыдущей теореме, тоже имеют самосопряженные расширения.

7^0. **Спектральная теорема для самосопряженных неограниченных операторов.** Предварительно рассмотрим еще один важный пример самосопряженных неограниченных операторов. Пусть A – ограниченный самосопряженный оператор и f – борелевская вещественная функция, заданная на $[m_A, M_A]$ и почти всюду конечная (не обязательно ограниченная). Мы хотим определить неограниченную борелевскую функцию f от ограниченного оператора A. Ее будум обозначать таким же символом $f(A)$. Пусть E_A – спектральная мера оператора A, то есть,

$$A = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda E_A(d\lambda).$$

Рассмотрим в качестве области определения оператора $f(A)$ подпространвнство

$$\mathrm{dom}f(A) = \left\{ x \in \mathscr{H} : \int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda)^2 \|E_A(d\lambda)x\|^2 \right\}.$$

Пусть

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda) & |f(\lambda)| \leq n, \\ 0 & |f(\lambda)| > n. \end{cases}$$

Борелевские функции $f_n(\lambda)$ ограничены, поэтому определены ограниченные самосопряженные операторы

$$f_n(A)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(\lambda) E_A(d\lambda) x$$

для любого $x \in \mathscr{H}$. Если же $x \in \mathrm{dom} f(A)$, то

$$\|(f_n(A) - f_m(A))x\|^2 = \int\limits_{m<|f(\lambda)|\leq n} |f(\lambda)|^2 \|E_A(d\lambda)x\|^2 \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty \ (m < n).$$

Это означает, что последовательность $f_n(A)x$ фундаментальна и мы полагаем по определению $f(A)x = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(A)x$. В результате получим линейный (неограниченный) оператор с указанной выше областью определения.

Теорема. *Для любой борелевской почти всюду конечной функции $f(\lambda)$ оператор $f(A)$ самосопряжен на указанной выше области определения* $\mathrm{dom}A$.

Доказательство. Симметричность оператора $f(A)$ следует из равенства

$$(f(A)x, y) = \lim_{n\to\infty}(f_n(A)x, y) = \lim_{n\to\infty}(x, f_n(A)y) = (x, f(A)y)$$

для любых $x, y \in \mathrm{dom} f(A)$. Из критерия 3) самосопряженности следует, что достаточно установить равенства $\mathrm{im}(f(A) \pm iI) = \mathscr{H}$. Функция $g(\lambda) = (f(\lambda) - i)^{-1}$ ограничена по модулю единицей. Поэтому для любого вектора $y \in \mathscr{H}$ мы можем определить вектор x по формуле $x = g(A)y = g_1(A)y + ig_2(A)y$, где $g_1(\lambda) = \mathrm{Re}\, g(\lambda)$, $g_2(\lambda) = \mathrm{Im}\, g(\lambda)$. Так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(\lambda) - i|^2 \|E(d\lambda)x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} |f_n(\lambda) - i|^2 \|E(d\lambda)x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|(f_n(A) - iI)x\|^2 =$$

$\|((f_n - i)\cdot g)(A)y\|^2 \leq \|y\|^2$, то $x \in \mathrm{dom}A$ (последнее неравенство справедливо в силу того, что $|(f_n(\lambda) - i)g(\lambda)| = |(f_n(\lambda) - i)/(f(\lambda) - i)| \leq 1$). Обозначим $h_n(\lambda) = (f_n(\lambda) - i)/(f(\lambda) - i)$, тогда, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(\lambda) = 1$ и $|h_n(\lambda)| \leq 1$. Поэтому $(f(A) - iI)x = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n(A) - iI)g(A)y = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(A)y = y$. То есть, $y \in \mathrm{im}(f(A) - iI)$. Отсюда следует, что $\mathrm{im}\,(f(A) - iI) = \mathscr{H}$. Равенство $\mathrm{im}(f(A) + iI) = \mathscr{H}$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

Задача 64. Рассмотрим последовательность ограниченных самосопряженных операторов $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, такую, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, и $x \in \mathscr{H}$ выполняется $A_m x \perp A_n x$. Построим (не обязательно ограниченный) оператор A следующим образом.

$$\mathrm{dom}A = \{x \in \mathscr{H} : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n x\|^2 < \infty\},$$

и для любого $x \in \mathrm{dom}A$ полагаем $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n x$. Докажите, что оператор A самосопряжен.

Теорема (Спектральная теорема). *Для любого самосопряженного оператора A существует (единственное) разложение единицы $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, такое что*

$$\mathrm{dom}\, A = \left\{ x \in \mathscr{H} : \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\|E_\lambda x\|^2 < \infty \right\} \quad \text{и} \quad Ax = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda\, dE_\lambda x = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \lambda\, dE_\lambda x$$

для любого $x \in \mathrm{dom}A$.

Доказательство. Из критерия самосопряженности следует, что $\mathrm{im}(A\pm iI) = \mathscr{H}$ и $\ker(A \pm iI) = \{0\}$. Пусть $x \in \mathscr{H}$ и $z = (A - iI)^{-1}x$. Так как $z \in \mathrm{dom}A$, то существует элемент $y \in \mathscr{H}$, такой что $y = (A + iI)z$, при этом $\|y\|^2 = \|Az\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$. Так как $\mathrm{im}(A+iI) = \mathscr{H}$, то оператор $U = (A+iI)(A-iI)^{-1}$ является унитарным. Докажем, что $\ker(U-I) = \{0\}$. Допустим, что для некоторого $x \in \mathscr{H}$ имеем $Ux(A + iI)(A - iI)^{-1}x = x$. Полагая опять $z = (A - iI)^{-1}x$, получим $(A-iI)z = x$ и $(A+iI)z = y = x$. Значит $(A+iI)z = (A-iI)z$, отсюда получаем $2iz = 0$ или $z = 0$. Значит $x = (A-iI)z = 0$.

Мы можем выразить оператор A через унитарный оператор $U = (A+iI)(A-iI)^{-1}$ следующим образом. Пусть $z \in \mathrm{dom}A$. Полагаем $x = (A - iI)z$, $y = (A + iI)z$. Ранее мы показали, что $Ux = y$, поэтому $Ux - x = y - x = 2iz$. Поэтому $z \in \mathrm{im}(U-I)$ и $(U-I)^{-1}z = x = Az - iz$. Значит $Az = 2i(U-I)^{-1}z + iz$. Обратно, если $z \in \mathrm{dom}(U-I)^{-1}$, то $Ux' - x' = z$ при некотором $x' \in \mathscr{H}$. Поэтому $Ux' - x' = (A+iI)(A-iI)^{-1}x' - x' = (A+iI)(A-iI)^{-1}x' - (A-iI)(A-iI)^{-1}x' = 2i(A-iI)^{-1}x' = z$. Это означает, что $z \in \mathrm{dom}(A - iI) = \mathrm{dom}A$ и $(A - iI)z = 2ix'$. Теперь мы имеем право написать равенство $A = 2i(U-I)^{-1} + iI = i(U+I)(U-I)^{-1}$. Ранее была доказана спектральная теорема для унитарных операторов. Существует разложение единицы $(E_\varphi)_{\varphi\in\mathbb{R}}$, такое что $E_\varphi = O$ при $\varphi \le 0$, $E_\varphi = I$ при $\varphi \ge 2\pi$ и

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE_\varphi.$$

Так как $\ker(U - I) = \{0\}$, то точка $\varphi = 0$ не является атомом, т.е. $E_{0+} = O$ и мы можем в предыдущем спектральном разложении интегрировать по открытому интервалу $(0, 2\pi)$. Так как неограниченная борелевская функция $f(\varphi) = 2i(e^{i\varphi} - 1)^{-1} + i$ равна бесконечности только в одной точке $\varphi = 0$, т.е. на множестве нулевой меры относительно E_φ, то мы можем рассмотреть спектральное разложение для функции $f(U)$:

$$Az = f(U)z = \int\limits_{(0,2\pi)} [2i(e^{i\varphi} - 1)^{-1} + i]\, dE_\varphi z = \int\limits_{(0,2\pi)} \mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}\, dE_\varphi z = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda\, dE_{A,\lambda} z,$$

для любого $z \in \mathrm{dom}A$. В последнем равенстве мы сделали монотонно возрастающую замену переменных $\lambda = \mathrm{ctg}\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right)$ и рассмотрели новое разложение единицы $E_{A,\lambda} = E_{2\pi - 2\,\mathrm{arcctg}\,\lambda}$. Кроме отмеченных выше стандартных свойств, спектральное разложение $E_{A,\lambda}$ обладает еще свойствами $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E_{A,\lambda}x = 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E_{A,\lambda}x = x$ для любого $x \in \mathscr{H}$. Кроме этого, из предыдущего изложения следует, что $z \in \mathrm{dom}A$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{(0,2\pi)} \mathrm{ctg}^2\,\frac{\varphi}{2}\, d\|E_\varphi z\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^2\, d\|E_{A,\lambda} z\|^2 < \infty.$$

Теорема о спектральном разложении доказана.

Осталось неотмеченным еще одно свойство спектрального разложения – это свойство коммутируемости.

Определение. Говорим, что ограниченный (и всюду определенный) оператор *B коммутирует с неограниченным оператором A*, если для любого $x \in \mathrm{dom}A$

выполняется $Bx \in \mathrm{dom}A$ и $ABx = BAx$. Это свойство эквивалентно тому, что $BA \subseteq AB$.

Свойство коммутируемости ограниченного оператора B с неограниченным оператором A символически обозначается через $A \smile B$.

Лемма 8. *Пусть $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность ограниченных операторов. Определим оператор A следующим образом.*

$\mathrm{dom}A = \{x \in \mathscr{H} : \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x\}$ *и для любого $x \in domA$ полагаем $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Если ограниченный оператор B удовлетворяет условию $[A_n, B] = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, то $A \smile B$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{dom}A$. Так как $A_nBx = BA_nx$, то сужествует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_nBx = \lim\limits_{n\to\infty} BA_nx =$(в силу непрерывности оператора B)$= B(\lim\limits_{n\to\infty} A_nx) = BAx$. Поэтому $Bx \in \mathrm{dom}A$ и $ABx = BAx$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть A – самосопряженный оператор. Тогда для любого ограниченного оператора B выполняется $A \smile B \iff [B, E_{A,\lambda}] = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, где $(E_{A,\lambda})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ – разложение единицы для A.

Допустим, что $[B, E_{A,\lambda}] = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Рассмотрим ограниченные операторы

$$A_n = \int\limits_{-n}^{n} \lambda\, dE_{A,\lambda}.$$

По определению $x \in \mathrm{dom}A$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda^2\, d\|E_{A,\lambda}x\|^2 < \infty,$$

что эквивалентно тому, что последовательность A_nx фундаментальна, так как

$$\|(A_n - A_m)x\|^2 = \int\limits_{m<|\lambda|\le n} \lambda^2\, d\|E_{A,\lambda}\|^2 \to 0 \quad \text{при } m, n \to \infty.$$

Поэтому свойство $A \smile B$ сразу следует из леммы 8.

Обратно, допустим, что $A \smile B$ для некоторого ограниченного оператора B. Для любого $x \in \mathscr{H}$ положим $z = (A - iI)^{-1}x$. Так как $z \in \mathrm{dom}A = \mathrm{dom}(A - iI)$, то $Bz \in \mathrm{dom}(A \pm iI)$ и $(A - iI)Bz = B(A - iI)z$. Подставляя сюда $z = (A - iI)^{-1}x$ и домножая слева на $(A - iI)^{-1}$, получим $(A - iI)^{-1}Bx = B(A - iI)^{-1}x$. Так как $Bz \in \mathrm{dom}(A + iI)$, то это равенство можно домножить слева на $(A + iI)$ и мы получим $UBx = (A + iI)(A - iI)^{-1}Bx = (A + iI)B(A - iI)^{-1}x = B(A + iI)(A - iI)^{-1}x = BUx$ для любого $x \in \mathscr{H}$. Мы доказали, что $[B, U] = 0$. Из спектральной теоремы для ограниченных операторов следует, что $[B, E_\varphi] = 0$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$. Так как спектральное разложение $(E_{A,\lambda})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ получается из разложения $(E_\varphi)_{\varphi\in(0,2\pi)}$ простой заменой параметра $\varphi = 2\pi - 2\,\mathrm{arcctg}\,\lambda$, то автоматически получаем $[B, E_{A,\lambda}] = 0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Следствие доказано.

Для неограниченного самосопряженного оператора A разложение единицы $E_{A,\lambda}$ может быть продолжено до спектральной меры E_A, определенной на σ-алгебре борелевских множеств $\mathscr{B}or(\mathbb{R})$. Теперь можно определить борелевскую функцию f (не обязательно ограниченную) от оператора A следующим образом.

$$\mathrm{dom} f(A) = \left\{ x \in \mathscr{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, \|E_A(d\lambda)x\|^2 < \infty \right\} \quad \text{и}$$

$$f(A)x = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) E_A(d\lambda)x \quad (x \in \mathrm{dom} f(A)).$$

Для неограниченных борелевских функций от неограниченных самосопряженных операторов остаются справедливыми все теоремы, которые были установлены ранее для ограниченных борелевских функций от ограниченных операторов.

8^0. **Теорема Стоуна.** Для самоспряженного оператора A рассмотрим оператор e^{itA}, который можно определить с помощью развитого ранее функционального исчисления по формуле

$$e^{itA}x = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \, dE_{A,\lambda}x \quad (x \in \mathscr{H}).$$

Теорема. *Пусть A – самосопряженный оператор. Положим $U(t) = e^{itA}$ $(t \in \mathbb{R})$. Тогда*

(а) *для любого $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t)$ унитарен и $U(t+s) = U(t)U(s)$ $(t, s \in \mathbb{R})$;*

(б) $\lim\limits_{t \to t_0} U(t)x = U(t_0)x$ *для любых $x \in \mathscr{H}$, $t_0 \in \mathbb{R}$;*

(в) *для любого $x \in \mathrm{dom} A$ имеем* $\dfrac{U(t)x - x}{t} \longrightarrow iAx$ *при* $t \to 0$;

(г) *если* $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{U(t)x - x}{t}$ *существует, то* $x \in \mathrm{dom} A$.

Доказательство. (а) сразу следует из свойств функционального исчисления. Для доказательства (б) заметим, что

$$\|e^{itA}x - x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{it\lambda} - 1|^2 \, d\|E_{A,\lambda}x\|^2.$$

Так как $|e^{t\lambda} - 1|^2 \le 4$ и $|e^{it\lambda} - 1|^2 \to 0$ при $t \to 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получим $\|U(t)x - x\|^2 \to 0$ при $t \to 0$. В силу группового свойства мы получаем сильную непрерывность в любой точке t_0, так как $\|U(t + t_0)x - U(t_0)x\| = \|U(t_0)(U(t)x - x)\| = \|U(t)x - x\| \to 0$ при $t \to 0$. Для доказательства (в) мы применяет теорему о мажорантной сходимости, используя неравенство $|e^{it\lambda} - 1| \le |t\lambda|$. Для доказательства (г) определим оператор линейный B следующим образом.

$$\mathrm{dom} B = \left\{ x \in \mathscr{H} : \exists \lim_{t \to 0} \frac{U(t)x - x}{t} \right\} \quad \text{и} \quad Bx = \lim_{t \to 0} \frac{U(t)x - x}{it}.$$

Оператор B является симметричным, так как $(Bx, y) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{it}(U(t)x - x, y) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{it}(x, U(t)^*y - y) = (x, \lim\limits_{t \to 0} \frac{U(-t)y - y}{-it}) = (x, By)$. Кроме этого, по построению, $B \supseteq A$. По лемме 3 получаем $B = A$. Теорема доказана.

Определение. Операторнозначная функция $U(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, удовлетворяющая условиям (а) и (б) предыдущей теоремы, называется *сильно непрерывной однопараметрической унитарной группой.*

Теорема Стоуна. *Пусть $U(t)$ – сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существует самосопряженный оператор A, такой что $U(t) = e^{itA}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Для любого $x \in \mathscr{H}$ рассмотрим

$$x_\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)U(t)x\,dt = \int\limits_{-N}^{N} \varphi(t)U(t)x\,dt,$$

где число N выбирается из условия $\varphi(t) = 0$ для всех $|t| \geq N$. Так как группа $U(t)$ сильно непрерывна, то интеграл существует как предел римановых сумм. Пусть D – линейная оболочка множества $\{x_\varphi : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ x \in \mathscr{H}\}$. Докажем, что подпространство D плотно в $\mathscr{H}$. Рассмотрим любую δ-образную последовательность $\varphi_n(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ (например $\varphi_n(t) = C_n \exp\left(-\frac{1}{1-n^2t^2}\right)$ при $|t| < n^{-1}$ и $\varphi_n(t) = 0$ при $|t| \geq n^{-1}$, константа C_n находится из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,dt = 1$). Оценим разность

$$\|x_{\varphi_n} - x\| = \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)(U(t)x - x)\,dt \right\| \leq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)dt \right) \sup_{|t|\leq n^{-1}} \|U(t)x - x\| \to 0$$

при $n \to \infty$. То есть, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi_n} = x$ для любого $x \in \mathscr{H}$, поэтому D плотно в $\mathscr{H}$. Для любого фиксированного $x_\varphi \in D$ получим

$$\left(\frac{U(s) - I}{s}\right) x_\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\frac{U(t+s) - U(t)}{s} x\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t-s) - \varphi(t)}{s}\,U(t)x\,dt \to x_{-\varphi'},$$

при $s \to 0$, так как, в силу финитности и гладкости φ, разность $(\varphi(t-s) - \varphi(t))/s$ равномерно сходится к $-\varphi'(t)$. Для любого x_φ положим $Ax_\varphi = -ix_{-\varphi'}$ и продолжим по линейности оператор A на все подпространство D. Отметим, что A и $U(t)$ переводят D в D (очевидно, $U(t)x_{\varphi(s)} = x_{\varphi(s-t)}$). Кроме этого, $U(t)Ax_{\varphi(s)} = -ix_{\varphi'(s-t)} = AU(t)x_{\varphi(s)}$ при $x_\varphi \in D$. Далее, если $x_\varphi, y_\psi \in D$, то

$$(Ax_\varphi, y_\psi) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{U(s) - I}{is}\,x_\varphi, y_\psi\right) = \lim_{s\to 0}\left(x_\varphi, \frac{I - U(-s)}{is}\,y_\psi\right) = (x_\varphi, -iy_{-\psi'}) = (x_\varphi, Ay_\psi),$$

что доказывает симметричность оператора A на подпространстве $\mathrm{dom}A = D$.

Теперь докажем, что симметричный оператор A в существенном самосопряжен. Для этого достаточно проверить, что уравнения $A^*y = \pm iy$ имеют только тривиальные решения. Рассмотрим вектор $y \in \mathrm{dom}A^*$, для которого $A^*y = iy$. Тогда для любого $x_\varphi \in D = \mathrm{dom}A$ имеем

$\frac{d}{dt}(U(t)x_{\varphi(s)}, y) = \frac{d}{dt}(x_{\varphi(s-t)}, y) = (x_{-\varphi'(s-t)}, y) = (iAx_{\varphi(s-t)}, y) = i(U(t)x_\varphi, A^*y) =$ $i(U(t)x_\varphi, iy) = (U(t)x_\varphi, y)$.

Решением этого дифференциального уравнения является функция $(U(t)x_\varphi, y) = (U(0)x_\varphi, y)e^t = (x_\varphi, y)e^t$. Если $(x_\varphi, y) \neq 0$, то функция $(U(t)x_\varphi, y)$ будет экспоненциально расти при $t \to \infty$, что противоречит равенству $\|U(t)\| = 1$. Поэтому $y \perp D$ и из плотности D в $\mathscr{H}$ следует $y = 0$. Аналогично доказывается, что уравнение $A^*y = -iy$ тоже имеет только нулевое решение.

Итак, оператор A существенно самосопряжен и его замыкание $\overline{A}$ является самосопряженным оператором. Положим $V(t) = e^{it\overline{A}}$ и докажем, что $U(t) = V(t)$. Пусть $x_\varphi \in D$. Так как $x_\varphi \in \mathrm{dom}\overline{A}$, то из пунктов (в), (г) предыдущей теоремы (для группы $V(t)$) следует, что $V(t)x_\varphi \in \mathrm{dom}\overline{A}$ и $V'(t)x_\varphi = i\overline{A}V(t)x_\varphi$. Так как $U(t)x_{\varphi(s)} = x_{\varphi(s-t)} \in D \subseteq \mathrm{dom}\overline{A}$ и $U'(t)x_{\varphi(s)} = x_{-\varphi'(s-t)} = iAU(t)x_{\varphi(s)}$, то векторная функция $w(t) = U(t)x_\varphi - V(t)x_\varphi$ дифференцируема и

$$w'(t) = iAU(t) - i\overline{A}V(t) = i\overline{A}w(t).$$

Поэтому

$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = i(\overline{A}w(t), w(t)) - i(w(t), \overline{A}w(t)) = 0$, и так как $w(0) = 0$, то $w(t) = 0$ для всех t. Отсюда получаем равенство $U(t)x_\varphi = V(t)x_\varphi$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x_\varphi \in D$. Из плотности D в $\mathscr{H}$ и ограниченности операторов $U(t)$, $V(t)$ выводим $U(t) = V(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Теорема Стоуна доказана.

Если $U(t)$ – сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа, то самосопряженный оператор A, для которого $e^{itA} = U(t)$ называется *инфинитезимальным генератором* группы $U(t)$.

Пример 7. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ группу переносов $(U(t)x)(s) = x(s+t)$. Эта группа сильно непрерывна, так как

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}} |x(s+t) - x(s)|^2 ds = 0.$$

Сначала докажем это свойство для функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Существует такое N, что $\varphi(s) = 0$ при $|s| > N$. На отрезке $[-2N, 2N]$ семейство функций $\varphi(s+t)$ равномерно сходится к $\varphi(s)$ при $t \to 0$. Поэтому

$$\|\varphi(s+t) - \varphi(s)\|^2 = \int\limits_{-2N}^{2N} |\varphi(s+t) - \varphi(s)|^2 ds \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Пусть теперь $x(s) \in L_2(\mathbb{R})$. Так как $C_0^\infty(\mathbb{R})$ плотно в $L_2(\mathbb{R})$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi(s) \in C_0^\infty$, для которой $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. Существует $\delta > 0$, такое что для всех $|t| < \delta$ будем иметь $\|\varphi(s+t) - \varphi(s)\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|x(s+t) - x(s)\| \le \|x(s+t) - \varphi(s+t)\| + \|\varphi(s+t) - \varphi(s)\| + \|x(s) - \varphi(s)\| < 3\varepsilon$$

для всех $|t| < \delta$.

Определим теперь инфинитезимальный генератор этой сильно непрерывной группы. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. По определению нам необходимо предел в $L_2(\mathbb{R})$ от выражения

$$\frac{(U(t)\varphi)(s) - \varphi(s)}{it} = \frac{\varphi(s+t) - \varphi(s)}{it}$$

при $t \to 0$. Пусть $\varphi(s) = 0$ при $|s| > N$. Тогда , очевидно, этот предел равен $-i\varphi'(s)$ и он равномерный на отрезке $[-2N, 2N]$. А из равномерной сходимости финитных функций на $[-2N, 2N]$ следует сходимость в $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому $A = -i\frac{d}{dt}$. Оператор A существенно самосопряжен на C_0^∞. Так как A является инфинитезимальным оператором группы трансляций, то в квантовой физике его ассоциируют с оператором импульса.

Задача 65. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^3)$ операторы поворота поворота на угол φ вокруг оси z:

$$U_{3,\varphi}\psi(x, y, z) = \psi(x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi, z)$$

Докажите сильную непрерывность группы поворотов $(U_{3,\varphi})_{\varphi\in\mathbb{R}}$. Докажите, что инфинитезимальный генератор этой группы на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ имеет вид

$$M_3\psi = -i\left(y\frac{\partial\psi}{\partial z} - z\frac{\partial\psi}{\partial y}\right).$$

Найдите также инфинитезимальные генераторы M_1, M_2, групп поворотов вокруг осей x и y.

Задача 66. Докажите, что оператор поворота на угол φ вокруг оси, проходящей через единичный вектор $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ равен

$$U_{\mathbf{n},\varphi} = e^{i\varphi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M})},$$

где $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ – оператор углового момента, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{M} = n_1M_1 + n_2M_2 + n_3M_3$.

9^0. **Коммутируемость неограниченных операторов.** Введем еще одно новое понятие коммутируемости двух неограниченных самосопряженных операторов A и B.

Определение. Говорим, что два неограниченных самосопряженных оператора A и B, действующие в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, коммутируют, если коммутируют их разложения единицы (или спектральные меры), т.е. $[E_{A,\lambda}, E_{B,\mu}] = 0$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Свойство коммутируемости самосопряженных операторов A, B будем обозначать тем же символом $A \smile B$. Для любого неограниченного самосопряженного оператора A определена функция $\operatorname{arctg} A$. Введем для неё более краткое обозначение $\underline{A} = \operatorname{arctg} A$ – “ограниченная версия неограниченного оператора A”. Ясно, что $A = \operatorname{tg}\overline{A}$.

Теорема. *Следующие утверждения для двух самосопряженных операторов A и B эквивалентны*:

(а) $A \smile B$;

(б) $[\underline{A}, \underline{B}] = 0$;

(в) $[R_\lambda(A), R_\mu(B)] = 0$ *для любых* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$;

(г) $[e^{itA}, e^{isB}] = 0$ *для любых* $t, s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Тот факт, что (а) влечет за собой (б),(в),(г), следует из функционального исчисления. (б) влечет (а) потому, что коммутируемость ограниченных операторов $\underline{A}$, $\underline{B}$ эквивалентна коммутируемости их разложений единицы $E_{\underline{A},\lambda}$, $B_{\underline{B},\mu}$. Но спектральные проекторы у операторов A и $\underline{A} = \operatorname{arctg} A$ одни и те же, так как $E_{\underline{A},\lambda} = E_{A,\operatorname{tg}\lambda}$; то же самое можно сказать про операторы B и $\underline{B}$. Докажем, что из (в) следует (а). По условию ограниченный оператор $R_\mu(B)$ коммутирует с $R_{-i}(A) = (A + iI)^{-1}$. Для любого $y \in \mathscr{H}$ имеем $(A +$

$iI)^{-1}R_\mu(B)y = R_\mu(B)(A+iI)^{-1}y$. Так как $(A+iI)^{-1} : \mathscr{H} \to \mathrm{dom}(A+iI) = \mathrm{dom}A$, то $R_\mu(B)(A+iI)^{-1}y \in \mathrm{dom}A$ и поэтому $R_\mu(B)y = (A+iI)R_\mu(B)(A+iI)^{-1}y$. Заменяя в этом равенстве y на $Ux = (A+iI)(A-iI)^{-1}x$, получим $R_\mu(B)Ux = (A+iI)R_\mu(B)(A-iI)^{-1}x = (A+iI)R_\mu(B)R_i(A)x = (A+iI)R_i(A)R_\mu(B)x = UR_\mu(B)x$ для любого $x \in \mathscr{H}$. Это означает, что $[U, R_\mu(B)] = 0$. Действуя еще раз таким же методом, мы получим $[U,V] = 0$, где $V = (B+iI)(B-iI)^{-1}$. Унитарные операторы U и V имеют спектральные разложения

$$U = \int\limits_{(0,2\pi)} e^{i\varphi}\, dE_\varphi, \quad V = \int\limits_{(0,2\pi)} e^{i\psi}\, dF_\psi.$$

Так же как и в случае самосопряженных операторов, из коммутируемости унитарных операторов U и V следует коммутируемость их разложений единицы, т.е. $[E_\varphi, F_\psi] = 0$. Осталось вспомнить, что $E_{A,\lambda} = E_{2\pi - 2\,\mathrm{arcctg}\,\lambda}$ и $E_{B,\mu} = F_{2\pi-2\,\mathrm{arcctg}\,\mu}$.

Осталось установить, что (г) влечет (а). Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ – пространство быстро убывающих функций. Тогда по теореме Фубини получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)(e^{itA}x,y)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} d(E_{A,\lambda}x,y)\right)dt = \sqrt{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-\lambda)d(E_{A,\lambda}x,y) =$$

$= \sqrt{2\pi}(x, \widehat{f}(A)y)$. Используя (г) и еще раз теорему Фубини, получим

$$(x, \widehat{f}(A)\widehat{g}(B)y) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(t)g(s)(x, e^{-itA}e^{-isB}y)dsdt = (x, \widehat{g}(B)\widehat{f}(A)y).$$

Так как эти равенства верны для любых $x, y \in \mathscr{H}$, то $[\widehat{f}(A), \widehat{g}(B)] = 0$ для любых $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Преобразование Фурье переводит $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ на все $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, поэтому $[f(A), g(B)] = 0$ для любых $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Но характеристическая функция $\chi_{(-\infty,\lambda)}$ является поточечным пределом ограниченной последовательности функций $f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Аналогично существует ограниченная последовательность функций $g_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, сходящаяся поточечно к $\chi_{(-\infty,\mu)}$. Из функционального исчисления следует, что $f_n(A)x \to \chi_{(-\infty,\lambda)}(A)x = E_{A,\lambda}x$ и $g_n(B)x \to \chi_{(-\infty,\mu)}(B)x = E_{B,\mu}x$ для любого $x \in \mathscr{H}$. Поэтому проекторы $E_{A,\lambda}$ и $E_{B,\mu}$ коммутируют для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Теорема доказана.

Хотя, как показывает теорема, данное определение коммутируемости разумно, с ним не всегда легко иметь дело, так как строить проекторы, резольвенты, или группы зачастую очень трудно. Следующий (на первый взгляд парадоксальный) пример показывает, что ничего лучшего для проверки коммутируемости предложить нельзя.

Пример Нельсона. Пусть M – двулистная риманова поверхность комплекасной функции $\sqrt{z}$ и $\mathscr{H} = L_2(M)$ (с обычной лебеговой мерой на плоскости). Пусть $A = -i\partial/\partial x$ и $B = -i\partial/\partial y$ на области определения $D = C_0^\infty(M)$, состоящей из всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, не содержащими точки ветвления $z = 0$. Тогда

(а) A и B существенно самосопряжены на D;

(б) $A : D \to D$ и $B : D \to D$;

(в) $AB\varphi = BA\varphi$ для всех $\varphi \in D$;

(г) однопараметрические группы $e^{it\overline{A}}$ и $e^{is\overline{B}}$ не коммутируют.

Оставляя доказательства (а),(б),(в) читаелям, покажем, что группы $e^{it\overline{A}}$ и $e^{is\overline{B}}$ не коммутируют. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию φ с носителем в малой окрестности точки $(-1,-1)$ на первом листе. Тогда

$U(2)V(2)\varphi \neq V(2)U(2)\varphi$,

поскольку функции, стоящие в разных частях этого неравенства, имеют носители в малой окрестности точки $(1,1)$, но на разных листах.

Этот пример показывает, что движение квантовой частицы на двулистной римановой поверхности отличается от движения ее по обычной плоскости, так как теперь операторы импульса $p_x = -i\partial/\partial x$ и $p_y = -i\partial/\partial y$ уже не коммутируют (в частности, нельзя одновременно измерить x-ю и y-ю проекции импульса).

Аналогичные трудности возникают с математической трактовкой коммутационного соотношения Гейзенберга $PQ - QP = -iI$. Ранее было отмечено, что такое соотношение не может выполняться для ограниченных операторов P и Q. Стандартная реализация этого соотношения называется *представлением Шредингера*: $\mathscr{H} = L_2(\mathbb{R})$, $P = -i\frac{d}{dt}$, $Q\psi(t) = t\psi(t)$. Общая область определения этих операторов, на которой они существенно самосопряжены, это пространство быстро убывающих функций $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, либо $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Возникает вопрос: в каком смысле шредингеровское представление – "единственно возможное". Для исследования этого вопроса рассмотрим две унитарные группы $U(t) = e^{itP}$ и $V(s) = e^{isQ}$. Формальные вычмсления в шредингеровском представлении дают результат

$U(t)V(s) = e^{its}V(s)U(t)$.

Эти очень важные уравнения называются *соотношениями Вейля.* Несколько неожиданным является тот факт, что соотношение Вейля и коммутационное соотношение Гейзенберга не эквивалентны друг другу. Это утверждение верно только в одну сторону: из соотношения Вейля следует коммутационное соотношение Гейзенберга для генераторов P и Q однопараметрических групп $U(t)$ и $V(s)$.

Теорема (фон Неймана). *Пусть $U(t)$ и $V(s)$ – однопараметрические сильно непрерывные унитарные группы в гильбертовом пространств $\mathscr{H}$, удовлетворяющие соотношениям Вейля. Тогда существуют такие замкнутые подпространства $\mathscr{H}_n$, что*

(а) $\mathscr{H} = \bigoplus\limits_{n=1}^{N} \mathscr{H}_n$ ($N \in \mathbb{N}$, либо $N = \infty$);

(б) $U(t) : \mathscr{H}_n \to \mathscr{H}_n$, $V(s) : \mathscr{H}_n \to \mathscr{H}_n$ для всех n и $t, s \in \mathbb{R}$;

(в) для каждого n существует такой унитарный оператор $T_n : \mathscr{H}_n \to L_2(\mathbb{R})$, что $(T_nU(t)T_n^{-1}\psi)(u) = \psi(u+t)$, $(T_nV(s)T_n^{-1}\psi)(u) = e^{isu}\psi(u)$ для всех $\psi \in L_2(\mathbb{R})$.

Доказательство этой теоремы, которое использует так называемое *преобразование Вейля* мы не приводим (из за отсутствия времени). Из этой теоремы сразу получается

Следствие. Пусть $U(t)$ и $V(s)$ – однопараметрические сильно непрерывные унитарные группы в гильбертовом пространств $\mathscr{H}$, удовлетворяющие соотношениям Вейля. Пусть P – генератор группы $U(t)$, Q – генератор группы $V(s)$. Тогда существует плотная область $D \subseteq \mathscr{H}$, такая что (а) $P : D \to D$, $Q : D \to D$;

(б) $PQx - QPx = -ix$ для всех $x \in \mathscr{H}$;

(в) P и Q существенно самосопряжены на D.

Обратное утверждение неверно! То есть, из коммутационного соотношения Гейзенберга (понимаемом в смысле предыдущего следствия) не следет соотношение Вейля.

Пример Нельсона 2. Рассмотрим в примере Нельсона два оператора $P = -i\partial/\partial x$, $Q = x + i\partial/\partial y$ на той же области определения $D = C_0^\infty(M)$. Очевидно, операторы P и Q обладают свойствами (а),(б),(в) из предыдущего следствия. Но порождаемые унитарные группы не удовлетворяют соотношению Вейля, так как операторы $-i\partial/\partial x$ и $-i\partial/\partial y$ не коммутируют друг с другом (как это было доказано в первом примере Нельсона).

Лектор.— Сергей Артемьевич Малюгин

Спецкурс, 5-й семестр

Алгебра ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве. Определение функций от ограниченных операторов с помощью степенных рядов. Основные операторные функции (резольвента, экспонента, логарифм, тригонометрические функции). Простейшие свойства операторных функций. Мультипликативное свойство экспоненты, ряд Кемпбела-Хаусдорфа. Непрерывность и дифференцирование операторных функций, применение операторных функций для решения дифференциальных уравнений. Интегрирование операторных функций. Аналитические свойства резольвенты. Тождества Гильберта. Общее определение аналитической функции от ограниченного оперетора с помощью итеграла Коши. Основные свойства аналитического функционального исчисления. Теоремы о непустоте спектра, о спектральном радиусе и об отображении спектра. Функции от операторов, удовлетворяющих полиномиальному тождеству. Многочлен Лагранжа-Сильвестра. Случай операторов, действующих в конечномерном пространсве, функции от матриц. Функции от матриц, приведенных к Жордановой форме.

2. Непрерывные функции от ограниченных самосопряженных операторов

Вещественность спектра самосопряженного оператора. Положительные операторы и сравнение операторов. Теорема о границах спектра. Непрерывные функции от ограниченного самосопряженного оператора, теорема об отображении спектра. Степенная функция, модуль, положительная и отрицательная часть оператора. Полярное разложение ограниченного оператора. Нормальные операторы и их свойства. Полярное разложение нормального оператора.

3. Некоторые специальные классы операторов

Компактные операторы и их свойства. Критерии компактности оператора. Теорема Гильберта-Шмидта и альтернатива Фредгольма для компактных операторов. Теорема Гильберта-Шмидта для компактного самосопряженного оператора. Вариационные принципы Куранта и Фишера. Сингулярные числа компактного оператора. Разложение Шмидта компактного оператора. Операторы Гильберта-Шмидта и их основные свойства. Норма Гильберта-Шмидта. Ядерные операторы. Опреление следа ядерного оператора и его свойства. Теорема Мерсера и формула для следа интегрального оператора с непрерывным ядром.

4. Спектральное разложение ограниченных самосопряженных, нормальных и унитарных операторов

Ортогональные проекторы и их основные свойства. Спектральная функция ограниченного самосопряженного оператора. Свойства участков постоянства, точек непрерывности и точек разрыва спектральной функции. Операторный интеграл Стилтьеса по спектральной функции. Разложение самосопряженного оператора по спектральной функции. Вычисление функций от оператора с помощью спектрального разложения. Спектральная мера и борелевские функции от самосопряженного оператора. Совместная спектральная функция нескольких коммутирующих самосопряженных операторов. Спектральное разложение нормальных и унитарных операторов, теорема фон Неймана о функциях от коммутирующих операторов.

5. Неограниченные операторы

Невыполнимость коммутационного соотношения $[A, B] = \alpha I$ для ограниченных операторов A и B. Теорема Хеллингера—Теплица. Определение оператора, сопряженного к неограниченному оператору. График оператора. Замкнутый оператор и замыкание неограниченного оператора. Определения симметричного, самосопряженного и существенно самосопряженного оператора. Преобразование Келли и индексы дефекта. Самосопряженные расширения симметричного оператора. Относительная ограниченность симметричного оператора, теорема Като-Реллиха. Спектральное разложение неограниченного самосопряженного оператора. Функционалное исчисление неограниченных операторов. Коммутирующие операторы, теорема фон Неймана о функциях от коммутирущих операторов. Теорема Стоуна об инфинитезимальном генераторе. Примеры и задачи.

6. Математические основания квантовой механики

Наблюдаемые, состояния и динамика. Чистые и смешанные состояния, матрица плотности. Аксиомы Дирака—фон Неймана. Определения операторов координаты, импульса и углового момента. Волновая функция в координатном и импульсном представлении. Эволюционный оператор и оператор Гамильтона. Уравнение Шредингера. Уравнение Гейзенберга. Стационарные состояния. Интегралы движения.

Литература

1. *Н. Л. Абашеева*, Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах. (Методическое пособие). Новосибирск: НГУ, 2007.

2. *В. А. Александров*, Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах. (Методическое пособие). Новосибирск: НГУ, 1996.

3. *А. Б. Антоневич, П. Н. Князев, Я. В. Радыно*, Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Вышейш. шк., 1978.

4. *А. А. Арсеньев*, Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. 2-е изд. Москва—Ижевск: РХД, 2011.

5. *В. И. Богачев, О. Г. Смолянов*, Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 2-е изд. Москва—Ижевск: РХД, 2011.

6. *А. А. Кириллов, Ф. Д. Гвишиани*, Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

7. *И. фон Нейман*, Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

8. *М. Рид, Б. Саймон*, Методы современной математической физики. Т. 1. (Функциональный анализ). М.: Мир, 1977.

9. *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь*, Лекции по функциональному анализу. 2-е изд.: М.: Мир, 1979.

10. *Р. Рихтмайер*, Принципы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1982.

Программу спецкурса «Дополнительные
главы функционального анализа»
составили: д.ф.-м.н. С. А. Малюгин,
к.ф.-м.н. И. В. Подвигин