ЛЕКЦИИ ПО МЕТОДАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н. Л. Абашеева, А. С. Сердюков

НГУ

2012

Определение.

Уравнение с частными производными — это уравнение вида

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0,$$

где F — функция многих переменных, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ — неизвестная функция от n переменных, $k_1 + \dots + k_n = m$.

Порядком уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Определение.

Уравнение с частными производными — это уравнение вида

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0,$$

где F — функция многих переменных, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ — неизвестная функция от n переменных, $k_1 + \dots + k_n = m$.

Порядком уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Можно писать

$$u_{x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}} = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Определение.

Уравнение называется *линейным*, если функция F линейна по u и ее частным производным, т. е. уравнение можно записать в виде

$$\sum_{k_1+\dots+k_n=l\le m} a_{k_1\dots k_n}(\mathbf{x})\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}=f(\mathbf{x}).$$

Если $f\equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*.

Для уравнений с частными производными (УЧП), как и для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), можно искать *общее решение*, но в формуле решения будут участвовать произвольные функции, а не произвольные постоянные, как для ОДУ. Вообще говоря, число этих функций равно порядку УЧП, а число аргументов этих функций на единицу меньше числа аргументов неизвестной функции u.

Пример 1.

Ищем функцию $u(x, y)$ такую, что

$$u_y = 0,$$

т. е. $n = 2$, $m = 1$.
Решением этого уравнения будет функция $u = \varphi(x)$.

Пример 1.

Ищем функцию $u(x, y)$ такую, что

$$u_y = 0,$$

т. е. $n = 2$, $m = 1$.
Решением этого уравнения будет функция $u = \varphi(x)$.

Пример 2.

Ищем функцию $u(x, y)$ такую, что

$$u_{xy} = 0,$$

т. е. $n = 2$, $m = 2$.
Решением этого уравнения будет функция $u = \varphi(x) + \psi(y)$.

Пример 1. Задача о распространении тепла

Пусть $u(\mathbf{x}, t)$ — температура в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t, $c(\mathbf{x})$ — теплоемкость тела в точке $\mathbf{x}$, $\rho(\mathbf{x})$ — плотность тела в точке $\mathbf{x}$, $k(\mathbf{x})$ — коэффициент теплопроводности.

Уравнение распространения тепла выглядит так

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}\,(k\,\mathrm{grad}\;u) + F(\mathbf{x}, t),$$

Если среда однородна, то получаем *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(\mathbf{x}, t).$$

Пример 2.

Если плотность тепловых источников и температура тела не зависят от времени, то функция $u(\mathbf{x})$ задает стационарное распределение температуры и удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{div}\,(k\,\mathrm{grad}\;u) = F(\mathbf{x}).$$

Если тело однородное, то получаем *уравнение Пуассона*

$$\Delta u = F,$$

а при $F = 0$ — *уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0.$$

Пример 3.

Колебательные процессы описываются *волновым уравнением*

$$a^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \mathrm{const} > 0.$$

В случае $n = 1$ это уравнение описывает колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

в случае $n = 2$ — колебания мембраны.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Пример 4.

Волновая функция $\psi(\mathbf{x}, t)$ квантовой частицы массы m_0, движущейся во внешнем силовом поле с потенциалом $V(\mathbf{x})$, удовлетворяет *уравнению Шредингера*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{m_0}\Delta\psi + V\psi,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка.

Пример 5.

Система уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = 4\pi\rho, \\ \operatorname{div}(\mu \vec{H}) = 0, \\ \operatorname{rot}\ \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\ \vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{I}, \end{cases}$$

$\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ — напряженность электрического поля, $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ — напряженность магнитного поля, ρ — плотность зарядов, ε — диэлектрическая постоянная среды, μ — коэффициент магнитной проницаемости среды, $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$ — ток проводимости, c — скорость света.

Рассмотрим линейное однородное уравнение вида

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция, $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = \overline{1, n})$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

Определение.

Автономная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{ds} = a_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dfrac{dx_n}{ds} = a_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{2}$$

называется *характеристической* системой уравнения (1). В симметричной форме эта система имеет вид

$$\frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}. \tag{2'}$$

Определение.

Характеристиками уравнения (1) называются траектории системы (2), т. е. интегральные кривые системы (2′).

Заметим, что характеристики линейного однородного уравнения — кривые в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение.

Характеристиками уравнения (1) называются траектории системы (2), т. е. интегральные кривые системы (2′).

Заметим, что характеристики линейного однородного уравнения — кривые в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение.

Первым интегралом системы (2′) называется любая функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, принимающая постоянное значение на решениях этой системы (т. е. на характеристиках уравнения (1)).

Теорема 1.

Любое решение уравнения (1) является первым интегралом системы (2′). И обратно, любой первый интеграл системы (2′) является решением уравнения (1).

Общее решение системы (2′) (системы ОДУ, если считать, что x_n — независимая переменная) записывается в виде

$$\begin{aligned}
&x_1 = f_1(x_n, C_1, \dots, C_{n-1}),\\
&\dots\\
&x_{n-1} = f_{n-1}(x_n, C_1, \dots, C_{n-1}).
\end{aligned}$$

Выражая отсюда $C_1, \dots, C_{n-1}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1,\\
&\dots\\
&\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1},
\end{aligned}$$

причем якобиан $\dfrac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_{n-1})} \neq 0.$

Теорема 2.

Любое решение уравнения (1) *имеет вид*

$$u = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \tag{3}$$

где F *— произвольная гладкая функция от* $n - 1$ *переменной.*

Пример.

Для уравнения

$$u_x + u_y + u_z = 0$$

характеристическая система имеет вид

$$dx = dy = dz.$$

Характеристиками этого уравнения будут семейства

$$x - y = C_1, \quad x - z = C_2,$$

следовательно, общее решение имеет вид

$$u = F(x - y, x - z).$$

Пусть S — гладкая $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$.

Задача Коши.

Найти решение уравнения (1) такое, что

$$u\Big|_S = u_0, \tag{4}$$

где u_0 — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Определение.

Точка $M \in S$ называется *нехарактеристической*, если характеристика, проходящая через точку M, не касается поверхности S.

Определение.

Точка $M \in S$ называется *нехарактеристической*, если характеристика, проходящая через точку M, не касается поверхности S.

Если поверхность S задана уравнением

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

то условие нехарактеристичности в точке M можно записать в виде

$$(\vec{a}, \mathrm{grad}\ f) \neq 0 \quad \text{в точке } M,$$

где $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$.

Теорема 3.

Задача Коши имеет единственное решение в окрестности любой нехарактеристической точки.

Теорема 3.

Задача Коши имеет единственное решение в окрестности любой нехарактеристической точки.

Идея доказательства состоит в том, чтобы в окрестности нехарактеристической точки M перейти в новую систему координат, в которой поверхность S задавалась бы уравнением

$$y_n = 0,$$

а уравнение (1) принимало бы вид

$$\frac{\partial u}{\partial y_n} = 0.$$

Пример.

Рассмотрим задачу Коши

$$u_x + u_y = 0,$$
$$u\Big|_{y=x} = \varphi(x),$$

т. е. задачу, поставленную на характеристике. Общим решением уравнения будет функция $u = F(x - y)$. Чтобы эта функция удовлетворяла условию Коши, должно быть выполнено равенство $\varphi(x) = F(0)$.

Следовательно, если $\varphi(x) \neq \mathrm{const}$, то решение задачи Коши не существует.

Если же $\varphi(x) \equiv A$, то решением задачи Коши будет функция $u = F(x - y)$, где F — произвольная гладкая функция такая, что $F(0) = A$.

Теперь рассмотрим уравнение

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = b, \tag{1}$$

где $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = \overline{1, n})$, $b(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

Теорема 1.

Если u_1, u_2 *— решения* (1), *то* $v = u_1 - u_2$ *является решением соответствующего однородного уравнения* (3.1).

Теорема 1.

Если u_1, u_2 *— решения* (1), *то* $v = u_1 - u_2$ *является решением соответствующего однородного уравнения* (3.1).

Отсюда

$$u_{\text{о.р.н.}} = u_{\text{о.р.о.}} + u_{\text{ч.р.н.}}, \tag{2}$$

где $u_{\text{о.р.н.}}$ — общее решение неоднородного уравнения,
$u_{\text{о.р.о.}}$ — общее решение однородного уравнения,
$u_{\text{ч.р.н.}}$ — частное решение неоднородного уравнения.

Задача Коши ставится так же, как и для однородного уравнения.

Теорема 2.

Задача Коши имеет единственное решение в окрестности любой нехарактеристической точки.

Теперь коэффициенты уравнения могут зависеть и от искомой функции u, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, \ldots, x_n, u),$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

Теперь коэффициенты уравнения могут зависеть и от искомой функции u, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, \dots, x_n, u),$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0.$

Для наглядности будем рассматривать случай $n = 2$, т. е. уравнение вида

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u). \qquad (1)$$

Определение.

Автономная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a(x, y, u), \\ \dfrac{dy}{ds} = b(x, y, u), \\ \dfrac{du}{ds} = c(x, y, u) \end{cases} \tag{2}$$

называется *характеристической* системой уравнения (1). В симметричной форме эта система имеет вид

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}. \tag{2'}$$

Определение.

Характеристиками уравнения (1) называются траектории системы (2) (или интегральные кривые системы (2′)).

Заметим, что в случае квазилинейного уравнения характеристики — кривые в пространстве $\mathbb{R}^3$ (в n-мерном случае в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$).

Теорема 1.

Непрерывно дифференцируемая поверхность $u = u(x, y)$ *является интегральной поверхностью уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда она образована характеристиками уравнения* (1).

Сформулируем задачу Коши для случая $n = 2$. Пусть γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$.

Задача Коши.

Найти решение уравнения (1) такое, что

$$u\Big|_{\gamma} = u_0, \tag{3}$$

где u_0 — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Сформулируем задачу Коши для случая $n = 2$. Пусть γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$.

Задача Коши.

Найти решение уравнения (1) такое, что

$$u\big|_{\gamma} = u_0, \tag{3}$$

где u_0 — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Геометрически это означает, что нужно построить интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через заданную кривую Г:

$$x = x_0(t), \quad y = y_0(t), \quad u = u_0(t),$$

где уравнения

$$x = x_0(t), \quad y = y_0(t)$$

параметрически задают кривую γ.

Определение.

Условие Коши (3) называется *нехарактеристическим в точке* $M(x_0, y_0) \in \gamma$, если проекция характеристики, проходящей через точку (x_0, y_0, u_0), не касается кривой γ в точке $M(x_0, y_0)$.

Определение.

Условие Коши (3) называется *нехарактеристическим в точке* $M(x_0, y_0) \in \gamma$, если проекция характеристики, проходящей через точку (x_0, y_0, u_0), не касается кривой γ в точке $M(x_0, y_0)$.

Аналитически это условие записывается в виде

$$b\frac{dx_0}{dt} - a\frac{dy_0}{dt}\bigg|_{t=t_0} \neq 0,$$

где t_0 — параметр, соответствующий точке $M \in \gamma$.

Теорема 2.

Задача Коши имеет единственное решение в окрестности любой точки кривой γ*, в которой условие Коши нехарактеристично.*

Теорема 2.

Задача Коши имеет единственное решение в окрестности любой точки кривой γ, в которой условие Коши нехарактеристично.

Доказательство. Нужно найти поверхность, заданную параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t,s), \\ y = y(t,s), \\ u = u(t,s), \end{cases}$$

проходящую через кривую Г.

Из теоремы 1 следует, что для этого нужно решить задачу Коши для системы (при каждом фиксированном t)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a(x, y, u), \\ \dfrac{dy}{ds} = b(x, y, u), \\ \dfrac{du}{ds} = c(x, y, u) \end{cases}$$

с данными

$$\begin{cases} x\big|_{s=0} = x_0(t), \\ y\big|_{s=0} = y_0(t), \\ u\big|_{s=0} = u_0(t). \end{cases}$$

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1)$$

где a, b, c, F — заданные вещественные функции.
Задача — с помощью невырожденного преобразования переменных

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned}$$

упростить уравнение (1).

Частные производные пересчитываются по формулам

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},
\end{aligned}
$$

Частные производные пересчитываются по формулам

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},
\end{aligned}
$$

В результате получаем уравнение

$$
\tilde{a}u_{\xi\xi} + 2\tilde{b}u_{\xi\eta} + \tilde{c}u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \qquad (2)
$$

где

$$
\begin{aligned}
\tilde{a} &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,\\
\tilde{b} &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y,\\
\tilde{c} &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2.
\end{aligned}
$$

Определение.

Уравнение

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0 \tag{3}$$

называется *характеристическим* для уравнения (1).
Кривая γ, заданная уравнением $\varphi(x, y) = \mathrm{const}$, называется *характеристикой* для уравнения (1), если вектор нормали (φ_x, φ_y) удовлетворяет характеристическому уравнению.

Определение.

Уравнение

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0 \tag{3}$$

называется *характеристическим* для уравнения (1).
Кривая γ, заданная уравнением $\varphi(x, y) = \mathrm{const}$, называется *характеристикой* для уравнения (1), если вектор нормали (φ_x, φ_y) удовлетворяет характеристическому уравнению.

Характеристическому уравнению соответствует квадратичная форма

$$\Phi(\lambda, \mu) = a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2$$

и квадратное уравнение (при $a \neq 0$, случай $a = 0$ рассматривается аналогично):

$$ak^2 + 2bk + c = 0. \tag{4}$$

Дискриминант этого уравнения $D = 4(b^2 - ac)$.

Определение.

Уравнение (1) называется уравнением

- *гиперболического типа*, если $D > 0$ (квадратичная форма Φ знакопеременна);
- *эллиптического типа*, если $D < 0$ (квадратичная форма Φ знакоопределена);
- *параболического типа*, если $D = 0$ (квадратичная форма Φ вырождена).

Определение.

Уравнение (1) называется уравнением

- *гиперболического типа*, если $D > 0$ (квадратичная форма Φ знакопеременна);
- *эллиптического типа*, если $D < 0$ (квадратичная форма Φ знакоопределена);
- *параболического типа*, если $D = 0$ (квадратичная форма Φ вырождена).

Заметим, что

$$\tilde{D} = 4(\tilde{b}^2 - \tilde{a}\tilde{c}) = 4(b^2 - ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 = D\left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right)^2.$$

1-й случай — уравнение гиперболического типа

В этом случае квадратное уравнение (4) имеет два вещественных различных корня k_1, k_2.
Характеристическое уравнение (3) распадается на

$$\varphi_x - k_1\varphi_y = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_x - k_2\varphi_y = 0.$$

Имеем два семейства вещественных характеристик

$$\varphi_1(x, y) = C_1 \quad \text{и} \quad \varphi_2(x, y) = C_2.$$

После замены

$$\xi = \varphi_1(x, y),$$
$$\eta = \varphi_2(x, y)$$

уравнение (1) приводится к *первому каноническому виду*

$$u_{\xi\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

После замены

$$\xi = \varphi_1(x, y),$$
$$\eta = \varphi_2(x, y)$$

уравнение (1) приводится к *первому каноническому виду*

$$u_{\xi\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

Заменой

$$\xi = \alpha + \beta,$$
$$\eta = \alpha - \beta$$

это уравнение приводится ко *второму каноническому виду*

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + H(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) = 0.$$

2-й случай — уравнение эллиптического типа

Квадратное уравнение (4) имеет два комплексно сопряженных корня k, $\overline{k}$.
Характеристическое уравнение (3) распадается на

$$\varphi_x - k\varphi_y = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_x - \overline{k}\varphi_y = 0.$$

Первые интегралы этих уравнений имеют вид

$$\varphi_1(x, y) \pm i\varphi_2(x, y) = C,$$

где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ — вещественные функции. Вещественных характеристик в этом случае нет.

2-й случай — уравнение эллиптического типа

Квадратное уравнение (4) имеет два комплексно сопряженных корня k, $\overline{k}$.
Характеристическое уравнение (3) распадается на

$$\varphi_x - k\varphi_y = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_x - \overline{k}\varphi_y = 0.$$

Первые интегралы этих уравнений имеют вид

$$\varphi_1(x, y) \pm i\varphi_2(x, y) = C,$$

где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ — вещественные функции. Вещественных характеристик в этом случае нет.
После замены

$$\xi = \varphi_1(x, y),$$
$$\eta = \varphi_2(x, y)$$

уравнение (4.1) приводится к *канонческому виду*

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

3-й случай — уравнение параболического типа

Квадратное уравнение (4) имеет один вещественный корень k. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\varphi_x - k\varphi_y = 0.$$

Имеем одно семейство вещественных характеристик

$$\varphi(x, y) = C.$$

3-й случай — уравнение параболического типа

Квадратное уравнение (4) имеет один вещественный корень k. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\varphi_x - k\varphi_y = 0.$$

Имеем одно семейство вещественных характеристик

$$\varphi(x, y) = C.$$

После замены

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y), \\ \eta &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

где ψ — произвольная независимая с φ функция, уравнение (1) приводится к <u>*каноническому виду*</u>

$$u_{\eta\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_{x_i x_j} + F(x_1, \dots, x_n, u, \mathrm{grad}\; u) = 0, \qquad (1)$$

где a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$, F — заданные вещественные функции, $a_{ij} = a_{ji}$.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_{x_i x_j} + F(x_1, \dots, x_n, u, \mathrm{grad}\ u) = 0, \qquad (1)$$

где a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$, F — заданные вещественные функции, $a_{ij} = a_{ji}$.

Вообще говоря, в случае $n > 2$ матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ привести к диагональной с элементами на диагонали равными 0 или ± 1 *в области* нельзя.

В этом параграфе будем рассматривать случай, когда коэффициенты a_{ij} постоянные.

Главной части уравнения (1) соответствует квадратичная форма

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j = (A\mathbf{p}, \mathbf{p}), \tag{2}$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T$.
Как известно, квадратичная форма заменой $\mathbf{p} = S\mathbf{q}$ (где S — некоторая невырожденная матрица) приводится к каноническому виду, т. е. матрица

$$\widetilde{A} = S^T A S = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix}$$

диагональная с элементами на диагонали, равными 0 или ± 1.

После линейной замены

$$\mathbf{y} = S^T \mathbf{x},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, уравнение (1) приводится к *канонического виду*

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i u_{y_i y_i} + G(y_1, \dots, y_n, u, \mathrm{grad}\ u) = 0.$$

Определение.

Уравнение (1) называется уравнением

- *гиперболического типа*, если квадратичная форма Φ знакопеременна, причем $n-1$ коэффициент δ_i — одного знака, а последний — другого;
- *эллиптического типа*, если квадратичная форма Φ знакоопределена, т. е. все коэффициенты δ_i одного знака;
- *параболического типа*, если квадратичная форма Φ вырождена, т. е. хотя бы один из коэффициентов δ_i равен нулю.

Примеры.

Уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0$$

является уравнением эллиптического типа.

Примеры.

Уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0$$

является уравнением эллиптического типа.
Волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

является уравнением гиперболического типа.

Примеры.

Уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0$$

является уравнением эллиптического типа.
Волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2 \Delta u$$

является уравнением гиперболического типа.
Уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u$$

является уравнением параболического типа.

Волновое уравнение при $n = 1$ (уравнение колебаний струны) имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

где $a = \mathrm{const} > 0$.

Волновое уравнение при $n = 1$ (уравнение колебаний струны) имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

где $a = \mathrm{const} > 0$.
Это уравнение является уравнением гиперболического типа.

Волновое уравнение при $n = 1$ (уравнение колебаний струны) имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

где $a = \mathrm{const} > 0$.

Это уравнение является уравнением гиперболического типа.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\varphi_t^2 - a^2 \varphi_x^2 = 0$$

и распадается на два:

$$\varphi_t \pm a\varphi_x = 0$$

Отсюда получаем два семейства вещественных характеристик:

$$x \pm at = C.$$

После замены

$$\xi = x + at,$$
$$\eta = x - at$$

уравнение (1) приводится к виду

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

После замены

$$\begin{aligned} \xi &= x + at, \\ \eta &= x - at \end{aligned}$$

уравнение (1) приводится к виду

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Общее решение этого уравнения задается формулой

$$u = F(\xi) + G(\eta) = F(x + at) + G(x - at), \tag{2}$$

т. е. является суммой двух волн.

Задача Коши (неограниченная струна).

Найти решение при $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ уравнения (1) такое, что

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \psi(x),$$

где φ, ψ — заданные функции.

Задача Коши (неограниченная струна).

Найти решение при $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ уравнения (1) такое, что

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x),$$

где φ, ψ — заданные функции.

Подставляя (2) в условия Коши, находим

$$F(y) = \frac{\varphi(y)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{y_0}^{y} \psi(s)ds + C,$$

$$G(y) = \frac{\varphi(y)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{y_0}^{y} \psi(s)ds - C,$$

где C — произвольная постоянная.

Следовательно, существует единственное решение задачи Коши и оно задается

формулой Д'Аламбера

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds. \qquad (3)$$

Замечание.

Решение смешанной задачи в области $x > 0$, $t > 0$:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ &u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x > 0, \\ &u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \\ &u\big|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

где φ, ψ — заданные функции, находится по формуле

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds, & x \geq at, \\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at} \psi(s)ds, & x < at. \end{cases}$$

Однородное волновое уравнение в случае $n = 3$ имеет вид

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \tag{1}$$

где $a = \mathrm{const} > 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Задача Коши.

Найти решение уравнения (1) при $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ такое, что

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x, y, z),$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \psi(x, y, z),$$

где φ, ψ — заданные функции.

Решение задачи Коши задается

формулой Кирхгофа

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(tM_{at}[\varphi]\Big) + tM_{at}[\psi], \tag{2}$$

где

$$M_{at}[\varphi] = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint\limits_{S_{at}} \varphi(\xi, \eta, \zeta) dS$$

— среднее значение функции φ по сфере $S_{at} \subset \mathbb{R}^3$ с центром в точке (x, y, z) радиуса at, т. е. по границе основания характеристического конуса при $\tau = 0$.

Выведем эту формулу, сведя нашу задачу Коши к одномерному случаю.

План.

1. Рассмотрим средние значения U нашего искомого решения u по сферам $S_r \subset \mathbb{R}^3$ с центром в точке (x, y, z) радиуса r и покажем, что эти средние будут решениями уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу.

Выведем эту формулу, сведя нашу задачу Коши к одномерному случаю.

План.

1. Рассмотрим средние значения U нашего искомого решения u по сферам $S_r \subset \mathbb{R}^3$ с центром в точке (x, y, z) радиуса r и покажем, что эти средние будут решениями уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу.
2. Преобразуем уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу к одномерному волновому уравнению.

Определение.

Для фиксированной точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ и для $t > 0$, $r > 0$ определим *средние* по сфере $S_r \subset \mathbb{R}^3$ с центром в точке (x, y, z) радиуса r:

$$U(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r} u(\xi, \eta, \zeta, t) dS = M_r[u],$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r} \varphi(\xi, \eta, \zeta) dS = M_r[\varphi],$$

$$\Psi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r} \psi(\xi, \eta, \zeta) dS = M_r[\psi].$$

Лемма 1.

Если u — решение задачи Коши для уравнения (1), то для фиксированной точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *и произвольных* $t > 0$, $r > 0$ *среднее* U *удовлетворяет следующему уравнению и условиям:*

$$U_{tt} = a^2\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right), \quad t, r > 0,$$

$$U\Big|_{t=0} = \Phi, \quad r > 0,$$

$$U_t\Big|_{t=0} = \Psi, \quad r > 0.$$

Положим

$$\tilde{U} = rU, \quad \tilde{\Phi} = r\Phi, \quad \tilde{\Psi} = r\Psi.$$

Лемма 2.

Если u — решение задачи Коши для уравнения (1), то для фиксированной точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ и произвольных $t > 0$, $r > 0$ функция $\tilde{U}$ удовлетворяет следующему уравнению и условиям:

$$\tilde{U}_{tt} = a^2 \tilde{U}_{rr}, \quad r, t > 0,$$

$$\tilde{U}\Big|_{t=0} = \Phi, \quad r > 0,$$

$$\tilde{U}_t\Big|_{t=0} = \Psi, \quad r > 0,$$

$$\tilde{U}\Big|_{r=0} = 0, \quad t > 0.$$

Итак, $\tilde{U}$ — решение смешанной задачи в области $r > 0$, $t > 0$, решение которой находится по формуле

$$\tilde{U} = \frac{\tilde{\Phi}(r + at) - \tilde{\Phi}(at - r)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{at-r}^{r+at} \tilde{\Psi}(s) ds, \quad r < at.$$

Переходя к пределу при $r \to +0$, получаем искомую формулу Кирхгофа.

Рассмотрим теперь случай $n = 2$.

Задача Коши.

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \tag{1}$$

при $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ такое, что

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x, y),$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \psi(x, y),$$

где $a = \mathrm{const} > 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, φ, ψ — заданные функции.

Решение задачи Коши задается

формулой Пуассона

$$u(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(tM_{at}[\varphi]\Big) + tM_{at}[\psi], \tag{2}$$

где

$$M_{at}[\varphi] = \frac{1}{2\pi at} \iint\limits_{B_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}},$$

$B_{at} \subset \mathbb{R}^2$ — шар с центром в точке (x, y) радиуса at, т. е. по основанию характеристического конуса при $\tau = 0$.

Анализируя формулы Кирхгофа, Пуассона и Д'Аламбера, мы видим, что значение решения в точке (x_0, y_0, z_0) в момент времени t_0 задается значениями начальных функций φ, ψ

- в случае $n = 3$ на границе основания характеристического конуса, т. е. на сфере
  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2(t - t_0)^2$,

Анализируя формулы Кирхгофа, Пуассона и Д'Аламбера, мы видим, что значение решения в точке (x_0, y_0, z_0) в момент времени t_0 задается значениями начальных функций φ, ψ

- в случае $n = 3$ на границе основания характеристического конуса, т. е. на сфере $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2(t - t_0)^2$,
- в случае $n = 2$ на основании характеристического конуса, т. е. в круге $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2(t - t_0)^2$, в момент времени t_0 задается значениями начальных функций φ, ψ

Анализируя формулы Кирхгофа, Пуассона и Д'Аламбера, мы видим, что значение решения в точке (x_0, y_0, z_0) в момент времени t_0 задается значениями начальных функций φ, ψ

- в случае $n = 3$ на границе основания характеристического конуса, т. е. на сфере $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2(t - t_0)^2$,
- в случае $n = 2$ на основании характеристического конуса, т. е. в круге $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2(t - t_0)^2$, в момент времени t_0 задается значениями начальных функций φ, ψ
- в случае $n = 1$ на основании характеристического треугольника, т. е. на отрезке $(x - x_0)^2 \leq a^2(t - t_0)^2$.

Рассмотрим сначала $\underline{n = 3}$.

Пусть функции φ, ψ — финитные, т. е. равны нулю вне некоторого шара $\{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Значение решения в точке (x_0, y_0, z_0) в момент времени t равно

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } at \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} - R, \\ 0 & \text{при } at \geq \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} + R. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала $\underline{n = 3}$.

Пусть функции φ, ψ — финитные, т. е. равны нулю вне некоторого шара $\{(x, y, z):\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$. Значение решения в точке (x_0, y_0, z_0) в момент времени t равно

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } at \le \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} - R, \\ 0 & \text{при } at \ge \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} + R. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к

принципу Гюйгенса

имеет место распространение волны в трехмерном пространстве с четкими передним и задним фронтами.

В случае $\underline{n = 2}$ значение решения в точке (x_0, y_0) в момент времени t задается значениями начальных функций φ, ψ в круге $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 t^2$. Следовательно, можно только сказать, что решение равно 0 при $at \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - R$.

В случае $\underline{n = 2}$ значение решения в точке (x_0, y_0) в момент времени t задается значениями начальных функций φ, ψ в круге $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq a^2 t^2$. Следовательно, можно только сказать, что решение равно 0 при $at \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - R$.

Таким образом,

принцип Гюйгенса при $n = 2$ не имеет места

при распространении колебаний в двумерном пространстве имеется передний фронт волны и нет заднего.

В случае $\underline{n = 1}$ значение решения в точке x_0 в момент времени t задается значениями функции φ в точках $x_0 - at$ и $x_0 + at$ и функции ψ на отрезке $[x_0 - at, x_0 + at]$.

В случае $\underline{n = 1}$ значение решения в точке x_0 в момент времени t задается значениями функции φ в точках $x_0 - at$ и $x_0 + at$ и функции ψ на отрезке $[x_0 - at, x_0 + at]$.
Следовательно,

в общем случае при $n = 1$ принцип Гюйгенса не имеет места

при распространении колебаний в двумерном пространстве имеется передний фронт волны и нет заднего.

Обозначим при фиксированном $t \geq 0$ шар

$$\Omega_t = \{(x, y, z, t) : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < a^2(t - t_0)^2\}.$$

и внутренность усеченного конуса

$$K_t = \{(x, y, z, \tau) : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < a^2(\tau - t_0)^2, \ 0 < \tau < t$$

Введем *интеграл энергии*

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\Omega_t} \left[u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\right] dxdydz.$$

Теорема (энергетическое неравенство).

Пусть $u \in C^2$ *удовлетворяет однородному волновому уравнению*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u.$$

Тогда при $t > 0$

$$E(t) \leq E(0).$$

Теорема (энергетическое неравенство).

Пусть $u \in C^2$ *удовлетворяет однородному волновому уравнению*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u.$$

Тогда при $t > 0$

$$E(t) \leq E(0).$$

Следствие.

Решение задачи Коши для волнового уравнения единственно.

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \tag{1}$$

где $a = \mathrm{const} > 0$, f — заданная функция.

Задача Коши.

Найти решение уравнения (1) в области $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0\}$, удовлетворяющее однородным условиям

$$u\big|_{t=0} = 0,$$

$$u_t\big|_{t=0} = 0.$$

Теорема (принцип Дюамеля).

Пусть функция $v(x,y,z,t,\tau)$ *— решение задачи*

$$\begin{aligned} &v_{tt} = a^2 \Delta v, \\ &v\Big|_{t=\tau} = 0, \quad v_t\Big|_{t=\tau} = f(x,y,z,\tau). \end{aligned}$$

Тогда функция

$$u(x,y,z,t) = \int\limits_0^t v(x,y,z,t,\tau)\,d\tau$$

является решением задачи Коши для уравнения (1) *с однородными условиями.*

Таким образом, получаем следующие формулы для решения задачи Коши для неоднородного уравнения:

формулу Кирхгофа при $n = 3$

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}} \varphi(\xi,\eta,\zeta)dS\right)+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}} \psi(\xi,\eta,\zeta)dS+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^t \iint\limits_{S_{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{t-\tau}dSd\tau,$$

где S_{at} — сфера с центром в точке (x,y,z) радиуса at;

формулу Пуассона при $n = 2$

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{B_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{B_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t \iint\limits_{B_{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi,\eta,\tau)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(a(t-\tau))^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\,d\tau,$$

где $B_{at} \subset \mathbb{R}^2$ — круг с центром в точке (x,y) радиуса at;

формулу Д'Аламбера при $n = 1$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(x,s)dsd\tau.$$

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D. Обозначим через Q — цилиндр $D \times (0, T)$, S — боковую поверхность $\partial D \times [0, T]$.

Смешанная задача с условиями Дирихле.

Требуется найти решение волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\Big|_{t=0} = \psi, \quad \mathbf{x} \in D \tag{2}$$

и граничным условиям Дирихле

$$u\Big|_S = 0, \tag{3}$$

Смешанная задача с условиями Неймана.

Требуется найти решение волнового уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) и граничным условиям Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = 0. \tag{4}$$

Смешанная задача с условиями Неймана.

Требуется найти решение волнового уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) и граничным условиям Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = 0. \tag{4}$$

Теорема.

Решение смешанной задачи единственно.

Смешанная задача с условиями Неймана.

Требуется найти решение волнового уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) и граничным условиям Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = 0. \tag{4}$$

Теорема.

Решение смешанной задачи единственно.

Доказательство аналогично доказательству теоремы единственности решения задачи Коши.

В этом случае интегрирование проводится по цилиндру $Q_t = D \times (0, t)$.

Задача решается *методом разделения переменных*.

Ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$u = V(x, y, z)T(t).$$

Задача решается *методом разделения переменных*.

Ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$u = V(x, y, z)T(t).$$

При этом уравнение (1) распадается на уравнения

$$\Delta V = \lambda V \tag{5}$$

и

$$T'' = \lambda a^2 T, \tag{6}$$

где λ — некоторое неизвестное число.

Задача решается *методом разделения переменных*.

Ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$u = V(x, y, z)T(t).$$

При этом уравнение (1) распадается на уравнения

$$\Delta V = \lambda V \tag{5}$$

и

$$T'' = \lambda a^2 T, \tag{6}$$

где λ — некоторое неизвестное число.

Задача отыскания числа λ и нетривиального решения $V(x, y, z)$ уравнения (5), удовлетворяющего граничному условию (3) или (4), — это многомерная задача Штурма — Лиувилля.

Задача Штурма — Лиувилля.

Найти собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в области D, удовлетворяющие условиям Дирихле или Неймана, т. е. найти ненулевые функции V и числа λ такие, что

$$\Delta V = \lambda V, \quad (x, y, z) \in D,$$
$$V\Big|_{\partial D} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial D} = 0.$$

Теорема.

- Все собственные значения задачи Штурма — Лиувилля вещественны и неположительны.
- Кратность каждого собственного значения конечна. Множество собственных значений задачи Штурма — Лиувилля счетно, и предельной точкой этого множества является $-\infty$, т. е. собственные значения можно упорядочить следующим образом:

$$\ldots \leq \lambda_k \leq \ldots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq 0.$$

- Существует ортонормированный базис в пространстве $L_2(D)$, состоящий из собственных функций $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи Штурма — Лиувилля, т. е. любую функцию $f \in L_2(D)$ можно представить в виде ряда

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k V_k, \quad c_k = (f, u_k), \tag{7}$$

  сходящегося в пространстве $L_2(D)$.
- Если функция $f \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ (или $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$) и удовлетворяет однородным условиям Дирихле (или Неймана), то ряд (7) сходится равномерно в $\overline{D}$.

Доказательство.

Докажем первое утверждение.

Доказательство.

Докажем первое утверждение.

Второе утверждение теоремы — это теорема о спектре компактного самосопряженного оператора Δ^{-1} в случае условий Дирихле и Δ^{-1} на подпространстве $\{1\}^{\perp}$ в случае условий Неймана.

Доказательство.
Докажем первое утверждение.
Второе утверждение теоремы — это теорема о спектре компактного самосопряженного оператора Δ^{-1} в случае условий Дирихле и Δ^{-1} на подпространстве $\{1\}^{\perp}$ в случае условий Неймана.
Третье утверждение — это теорема Гильберта — Шмидта.

Доказательство.

Докажем первое утверждение.

Второе утверждение теоремы — это теорема о спектре компактного самосопряженного оператора Δ^{-1} в случае условий Дирихле и Δ^{-1} на подпространстве $\{1\}^{\perp}$ в случае условий Неймана.

Третье утверждение — это теорема Гильберта — Шмидта.

Последнее утверждение — это теорема Стеклова.

Итак, нашлась последовательность собственных значений $\lambda_k = -\varkappa_k^2$, $k \in \mathbb{N}$, $\varkappa_k \geq 0$, и собственных функций $V_k(x, y, z)$. Решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos a\varkappa_k t + B_k \sin a\varkappa_k t, \quad \text{если } \lambda_k \neq 0,$$

и

$$T_k(t) = A_k + B_k t, \quad \text{если } \lambda_k = 0.$$

Итак, нашлась последовательность собственных значений $\lambda_k = -\varkappa_k^2$, $k \in \mathbb{N}$, $\varkappa_k \geq 0$, и собственных функций $V_k(x, y, z)$. Решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos a\varkappa_k t + B_k \sin a\varkappa_k t, \quad \text{если } \lambda_k \neq 0,$$

и

$$T_k(t) = A_k + B_k t, \quad \text{если } \lambda_k = 0.$$

В результате найдено частное решение волнового уравнения, удовлетворяющее граничному условию,

$$u_k = T_k(t) V_k(x, y, z),$$

называемое *стоячей волной*.

Решение исходной смешанной задачи будем искать в виде ряда

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

Решение исходной смешанной задачи будем искать в виде ряда

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

Из начальных условий (2), (3) находим коэффициенты

$$A_k = (\varphi, V_k),$$

$$B_k = \frac{1}{a\varkappa_k}(\psi, V_k), \quad \text{если } \varkappa_k \neq 0,$$

$$B_k = (\psi, V_k), \quad \text{если } \varkappa_k = 0,$$

Итак, формальное построение решения завершено.

Пусть

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_0, \ 0 < z < h\}.$$

Смешанная задачи с граничным условием Дирихле.

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad (x, y, z, t) \in Q = D \times (0, T), \tag{1}$$

такое, что

$$u\Big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\Big|_{t=0} = \psi$$

и

$$u\Big|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad u\Big|_{z=0} = 0, \quad u\Big|_{z=h} = 0.$$

Как мы выяснили в прошлом параграфе, смешанная задача сводится к

задаче Штурма — Лиувилля

$$\Delta V = -\varkappa^2 V, \tag{2}$$

$$V\Big|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad V\Big|_{z=0} = 0, \quad V\Big|_{z=h} = 0.$$

Как мы выяснили в прошлом параграфе, смешанная задача сводится к

задаче Штурма — Лиувилля

$$\Delta V = -\varkappa^2 V, \tag{2}$$

$$V\Big|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad V\Big|_{z=0} = 0, \quad V\Big|_{z=h} = 0.$$

Перейдем в цилиндрическую систему координат:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z.$$

Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Ищем частное решение в виде

$$V = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

Из уравнения (2) получаем уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{(\rho R')'}{R} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = -\varkappa^2,$$

распадающееся на следующие три:

$$\Phi'' = \alpha\Phi, \quad Z'' = \beta Z, \quad \frac{1}{\rho}(\rho R')' + \left[\varkappa^2 + \beta + \frac{\alpha}{\rho^2}\right]R = 0,$$

где α, β — некоторые постоянные.

Решая задачу Штурма — Лиувилля

$$\Phi'' = \alpha\Phi, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi),$$

находим

$$\Phi_n = e^{in\varphi}, \quad \alpha_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решая задачу Штурма — Лиувилля

$$\Phi'' = \alpha\Phi, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi),$$

находим

$$\Phi_n = e^{in\varphi}, \quad \alpha_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Решениями задачи Штурма — Лиувилля:

$$Z'' = \beta Z, \quad Z(0) = Z(h) = 0,$$

будут

$$Z_m = \sin\frac{\pi mz}{h}, \quad \beta_m = -\left(\frac{\pi m}{h}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Теперь решаем оставшееся уравнение с найденными α_n и β_m, т. е.

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left[\varkappa^2 - \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right]R = 0,$$

$$R(\rho_0) = 0, \quad R = O(1) \text{ при } \rho \to +0.$$

Теперь решаем оставшееся уравнение с найденными α_n и β_m, т. е.

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left[\varkappa^2 - \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right]R = 0,$$

$$R(\rho_0) = 0, \quad R = O(1) \text{ при } \rho \to +0.$$

Это уравнение имеет ограниченное в окрестности нуля решение вида

$$R_{nm} = J_n\left(\rho\sqrt{\varkappa^2 - \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где J_n — функции Бесселя. Заметим, что поскольку

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

при $n \in \mathbb{N}$, то можно рассматривать и $n \in \mathbb{Z}$.

Из условия $R(\rho_0) = 0$ находим

$$\varkappa_{nmk}^2 = \left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2,$$

где μ_k^n — положительные нули функции Бесселя J_n, $k \in \mathbb{N}$.

Из условия $R(\rho_0) = 0$ находим

$$\varkappa^2_{nmk} = \left(\frac{\mu^n_k}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2,$$

где μ^n_k — положительные нули функции Бесселя J_n, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, найдена система собственных функций

$$V_{nmk} = J_n\left(\frac{\mu^n_k}{\rho_0}\rho\right) e^{in\varphi} \sin\frac{\pi m z}{h}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m, k \in \mathbb{N},$$

являющаяся ортогональным базисом в пространстве $L_2(D)$

Решением смешанной задачи будет ряд

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{nmk} \cos at \sqrt{\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2} + \right.$$
$$\left. + B_{nmk} \sin at \sqrt{\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2} \right] \times$$
$$\times J_n\left(\frac{\mu_k^n}{\rho_0}\rho\right) e^{in\varphi} \sin \frac{\pi m z}{h}.$$

Коэффициенты A_{nmk}, B_{nmk} находятся из начальных условий при $t = 0$.

Пусть

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < r_0\}.$$

Смешанная задача с граничным условием Дирихле.

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad (x, y, z, t) \in Q = D \times (0, T), \tag{1}$$

такое, что

$$u\Big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\Big|_{t=0} = \psi$$

и

$$u\Big|_{r=r_0} = 0.$$

Будем искать собственные функции соответствующей

задачи Штурма — Лиувилля

$$\Delta V = -\varkappa^2 V, \tag{2}$$

$$V\Big|_{r=r_0} = 0$$

в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta, \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

Оператор Лапласа запишется в виде

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Ищем частное решение в виде

$$V = R(r)\Phi(\varphi)F(\theta).$$

Из (2) получаем уравнение

$$\frac{(r^2R')'}{R} + \frac{(\sin\theta F')'}{\sin\theta F} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi} = -\varkappa^2 r^2,$$

распадающееся на следующие три:

$$\Phi'' = \alpha\Phi, \quad \frac{(\sin\theta F')'}{\sin\theta} + \frac{\alpha F}{\sin^2\theta} = \beta F, \quad (r^2R')' = -(\varkappa^2r^2 + \beta)R,$$

где α, β — некоторые постоянные.

Решениями задачи Штурма — Лиувилля

$$\Phi'' = \alpha\Phi, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi),$$

являются

$$\Phi_m = e^{im\varphi}, \quad \alpha_m = -m^2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Решениями задачи Штурма — Лиувилля

$$\Phi'' = \alpha\Phi, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi),$$

являются

$$\Phi_m = e^{im\varphi}, \quad \alpha_m = -m^2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для функции F возникает следующая задача Штурма — Лиувилля:

$$\frac{(\sin\theta F')'}{\sin\theta} - \frac{m^2 F}{\sin^2\theta} = \beta F,$$

$$F(\theta) = O(1) \ \text{ при } \theta \to 0 \ \text{ и } \ \text{при } \theta \to \pi,$$

решениями которой будут присоединенные функции Лежандра:

$$F_{nm}(\theta) = P_n^m(\cos\theta), \quad \beta_{nm} = -n(n+1),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = \overline{-n, n}.$$

Теперь решаем оставшееся уравнение с найденными β_{nm}, т. е.

$$(r^2R')' + (\varkappa^2 r^2 - n(n+1))R = 0.$$

или

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left(\varkappa^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)R = 0.$$

Теперь решаем оставшееся уравнение с найденными β_{nm}, т. е.

$$(r^2R')' + (\varkappa^2r^2 - n(n+1))R = 0.$$

или

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left(\varkappa^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)R = 0.$$

После замены $R = \frac{w}{\sqrt{r}}$ получаем уравнение

$$w'' + \frac{1}{r}w' + \left(\varkappa^2 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right)w = 0.$$

Поскольку $\varkappa \neq 0$, то ограниченным решением этого уравнения будет

$$w = J_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е.

$$R = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из условия $R(r_0) = 0$ находим

$$\varkappa_{nmk} = \frac{\mu_k^{n+\frac{1}{2}}}{r_0},$$

где $\mu_k^{n+\frac{1}{2}}$ — положительные нули функции Бесселя $J_{n+\frac{1}{2}}$, $k \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \dots,$ $m = \overline{-n, n}$.

Из условия $R(r_0) = 0$ находим

$$\varkappa_{nmk} = \frac{\mu_k^{n+\frac{1}{2}}}{r_0},$$

где $\mu_k^{n+\frac{1}{2}}$ — положительные нули функции Бесселя $J_{n+\frac{1}{2}}$, $k \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \dots,$ $m = \overline{-n, n}$.

Таким образом, найдена ортогональная система собственных функций

$$V_{nmk} = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{n+\frac{1}{2}}}{r_0} r\right)}{\sqrt{r}} e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta),$$

$n = 0, 1, 2, \dots,$ $m = \overline{-n, n}$, $k = 1, 2, \dots$

Решением смешанной задачи будет ряд

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{nmk} \cos \frac{a\mu_k^{n+\frac{1}{2}} t}{r_0} + B_{nmk} \sin \frac{a\mu_k^{n+\frac{1}{2}} t}{r_0} \right] \times \\ \times J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_k^{n+\frac{1}{2}}}{r_0} r \right) e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta).$$

Коэффициенты A_{nmk}, B_{nmk} находятся из начальных условий при $t = 0$.

Определение.

Фундаментальным решением линейного дифференциального оператора L называется такая обобщенная функция $E(\mathbf{x})$, что

$$LE(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}),$$

где $\delta(\mathbf{x})$ — дельта-функция Дирака.

Определение.

Фундаментальным решением линейного дифференциального оператора L называется такая обобщенная функция $E(\mathbf{x})$, что

$$LE(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}),$$

где $\delta(\mathbf{x})$ — дельта-функция Дирака.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей. Напомним первую и вторую формулы Грина:

$$\int\limits_D u\Delta v d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} dS - \int\limits_D \nabla u \nabla v d\mathbf{x}, \quad u, v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}),$$

$$\int\limits_D (u\Delta v - \Delta u\, v) d\mathbf{x} = \int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \right) dS, \quad u, v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}).$$

Теорема.

Фундаментальным решением оператора Лапласа при $n = 3$ *является функция*

$$E(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} = -\frac{1}{4\pi r},$$

при $n = 2$ — *функция*

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{x}| = \frac{1}{2\pi}\ln\rho.$$

Положим

$$E(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=E(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\begin{cases}-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}, & n=3,\\ -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}, & n=2.\end{cases}$$

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

Теорема.

Для $u\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ справедливо следующей интегральное представление

$$u(\mathbf{x}_0)=\iiint\limits_D \Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})E(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,d\mathbf{x}+$$

$$+\iint\limits_{\partial D} u(\mathbf{x})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}}dS_{\mathbf{x}}-\iint\limits_{\partial D}\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}}E(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)dS_{\mathbf{x}},\quad \mathbf{x}_0\in D.$$

Задача Дирихле.

Найти решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = f \quad \text{в области } D$$

такое, что

$$u\big|_{\partial D} = \varphi,$$

где f, φ — заданные функции.

Определение.

Функцией Грина задачи Дирихле называется функция

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=E(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)+g(\mathbf{x},\mathbf{x}_0),$$

такая, что для $\mathbf{x}_0\in D$:

1) $\Delta_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=0$ в D;
2) $G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\big|_{\mathbf{x}\in\partial D}=0.$

Определение.

Функцией Грина задачи Дирихле называется функция

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=E(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)+g(\mathbf{x},\mathbf{x}_0),$$

такая, что для $\mathbf{x}_0\in D$:

1) $\Delta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)=0$ в D;
2) $G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\big|_{\mathbf{x}\in\partial D}=0.$

Теорема.

Решение задачи Дирихле задается формулой

$$u(\mathbf{x}_0)=\iiint\limits_D f(\mathbf{x})G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,d\mathbf{x}+\iint\limits_{\partial D}\varphi(\mathbf{x})\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}}dS_{\mathbf{x}},\quad \mathbf{x}_0\in D.$$

Задача Неймана.

Найти решение уравнения Пуассона такое, что

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial D} = \psi,$$

где ψ — заданная функция.

Задача Неймана.

Найти решение уравнения Пуассона такое, что

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial D} = \psi,$$

где ψ — заданная функция.

Определение.

Функцией Грина задачи Неймана называется функция

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0),$$

такая, что для $\mathbf{x}_0 \in D$:

1) $\Delta_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$ в D;
2) $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Big|_{\mathbf{x} \in \partial D} = 0.$

Теорема.

Решение задачи Неймана задается формулой

$$u(\mathbf{x}_0) = \iiint\limits_{D} f(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\, d\mathbf{x} - \int\limits_{\partial D} \psi(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)dS_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}_0 \in D.$$

Определение.

Функция u называется *гармонической* в области $D \subset \mathbb{R}^n$, если $u \in C^2(D)$ и

$$\Delta u = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Определение.

Функция u называется *гармонической* в области $D \subset \mathbb{R}^n$, если $u \in C^2(D)$ и

$$\Delta u = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Примеры.

1) При $n = 2$ действительная и мнимая часть аналитической функции являются гармоническими функциями.
Для аналитической функции $f(z) = z^m = \rho^m e^{im\varphi}$ $(m \in \mathbb{N})$ действительной частью является функция $\rho^m \cos m\varphi$, мнимой — $\rho^m \sin m\varphi$.
Для аналитической функции $f(z) = \ln z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)$ действительной частью является функция $\ln \rho$.

Определение.

Функция u называется *гармонической* в области $D \subset \mathbb{R}^n$, если $u \in C^2(D)$ и

$$\Delta u = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Примеры.

1) При $n = 2$ действительная и мнимая часть аналитической функции являются гармоническими функциями.
   Для аналитической функции $f(z) = z^m = \rho^m e^{im\varphi}$ $(m \in \mathbb{N})$ действительной частью является функция $\rho^m \cos m\varphi$, мнимой — $\rho^m \sin m\varphi$.
   Для аналитической функции $f(z) = \ln z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+)$ действительной частью является функция $\ln \rho$.
2) При $n = 3$ примерами гармонических функций являются функции $r^n Y_n^m(\varphi, \theta)$, где Y_n^m — сферические гармоники, $n = 0, 1, 2, \dots,$ $m = \overline{-n, n}$.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

Теорема 1.

Для гармонической функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ справедливо следующей интегральное представление

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint\limits_{\partial D} u(\mathbf{x}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}} dS_\mathbf{x} - \iint\limits_{\partial D} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}} E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dS_\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 \in D.$$

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

Теорема 1.

Для гармонической функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ *справедливо следующей интегральное представление*

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint\limits_{\partial D} u(\mathbf{x}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}} dS_\mathbf{x} - \iint\limits_{\partial D} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}} E(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dS_\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 \in D.$$

Теорема 2 (о потоке тепла).

Для гармонической функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$

$$\iint\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0.$$

Теорема 3 (о среднем).

Для гармонической функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, *где* D — *шар в* $\mathbb{R}^3$ *с центром в точке* $\mathbf{x}_0$ *радиуса* R

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\partial D} u(\mathbf{x}) dS.$$

Теорема 3 (о среднем).

Для гармонической функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, *где* D *— шар в* $\mathbb{R}^3$ *с центром в точке* $\mathbf{x}_0$ *радиуса* R

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\partial D} u(\mathbf{x})dS.$$

Теорема 4 (принцип максимума).

Пусть $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ *— гармоническая функция отличная от постоянной. Тогда максимальное и минимальное значение этой функции достигается на границе области* D.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

Теорема 1.

Решение внутренней задачи Дирихле в области D единственно.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

Теорема 1.

Решение внутренней задачи Дирихле в области D единственно.

Теорема 2.

Решение внутренней задачи Неймана в области D определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$). Будем обозначать область D через D^-, а область $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ — через D^+.

Определение.

Объемным потенциалом называется функция

$$U_3(\mathbf{x}) = \iiint\limits_D \frac{f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y},$$

где f — заданная функция, называемая плотностью потенциала. *Логарифмическим потенциалом* называется функция

$$U_2(\mathbf{x}) = \iint\limits_D f(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}.$$

Будем обозначать

$$U_n(\mathbf{x}) = U_n^{\pm}(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in D^{\pm}.$$

Свойства объемного и логарифмического потенциалов.

Пусть функция $f \in C(D)$. Тогда

1) $U_n \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad U_n^+ \in C^\infty(D^+), \quad U_n^- \in C^2(D^-);$

2) $\Delta U_n^+ = 0$ в D^+;
если $f \in C^1(D)$, то $\Delta U_n^- = -2^{n-1}\pi f$ в D^-;

3) $$U_3^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\iiint\limits_D f(\mathbf{y})d\mathbf{y} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{при } \mathbf{x}\to\infty,$$
$$U_2^+(\mathbf{x}) = \ln\frac{1}{|\mathbf{x}|}\iint\limits_D f(\mathbf{y})d\mathbf{y} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{при } \mathbf{x}\to\infty.$$

Предполагаем, что граница области $\partial D = S$ $(\partial D = \gamma)$ является C^2-гладкой поверхностью (кривой).

Определение.

Потенциалом простого слоя называется функция

$$V_3(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \frac{\mu(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, dS_{\mathbf{y}},$$

где μ — заданная функция, называемая плотностью потенциала. *Логарифмическим потенциалом простого слоя* называется функция

$$V_2(\mathbf{x}) = \int\limits_\gamma \mu(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, ds_{\mathbf{y}}.$$

Будем обозначать

$$V_n(\mathbf{x}) = V_n^{\pm}(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in D^{\pm}.$$

Будем обозначать

$$V_n(\mathbf{x}) = V_n^{\pm}(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in D^{\pm}.$$

Также будем обозначать внешнее (внутреннее) предельное значение нормальной производной в точке $\mathbf{x} \in S$ $(\mathbf{x} \in \gamma)$ через

$$\left(\frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}\right)^{\pm}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in D^{\pm}} \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})$$

Будем обозначать

$$V_n(\mathbf{x}) = V_n^{\pm}(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \in D^{\pm}.$$

Также будем обозначать внешнее (внутреннее) предельное значение нормальной производной в точке $\mathbf{x} \in S$ $(\mathbf{x} \in \gamma)$ через

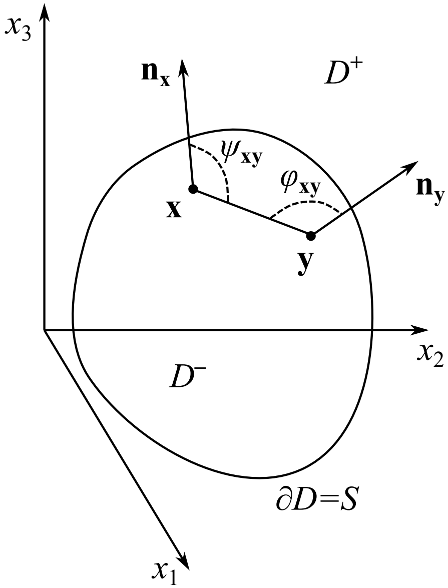
$$\left(\frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}\right)^{\pm}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in D^{\pm}} \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})$$

и непосредственное значение нормальной производной в точке $\mathbf{x} \in S$ $(\mathbf{x} \in \gamma)$ через

$$\left(\frac{\partial V_3}{\partial \mathbf{n}}\right)^{0}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}} \iint\limits_S \frac{\mu(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dS_\mathbf{y} = \iint\limits_S \mu(\mathbf{y}) \frac{\cos\psi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_\mathbf{y},$$

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{n}}\right)^{0}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}} \int\limits_\gamma \mu(\mathbf{y}) \ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} ds_\mathbf{y} = \int\limits_\gamma \mu(\mathbf{y}) \frac{\cos\psi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} ds_\mathbf{y},$$

где $\psi_{\mathbf{xy}}$ — угол между внешней нормалью к поверхности S (кривой γ) в точке $\mathbf{x}$ и вектором $\mathbf{y}-\mathbf{x}$.


x_3
$\mathbf{n_x}$
D^+
$\psi_{\mathbf{xy}}$
$\varphi_{\mathbf{xy}}$
$\mathbf{n_y}$
$\mathbf{x}$
$\mathbf{y}$
x_2
D^-
$\partial D = S$
x_1

Свойства потенциалов простого слоя.

Пусть функция $\mu \in C(S)$ $(C(\gamma))$. Тогда

1) $V_n \in C(\mathbb{R}^n)$, $\quad V_n^{\pm} \in C^{\infty}(D^{\pm})$,
$$\left(\frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}\right)^{\pm} = \left(\frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{n}}\right)^{0} \mp 2^{n-2}\pi\mu \text{ для } \mathbf{x} \in S \text{ или } \gamma;$$

2) $\Delta V_n^{\pm} = 0$ в $D^{\pm}$;

3) $$V_3^{+}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\iint\limits_S \mu(\mathbf{y})dS_{\mathbf{y}} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{при } \mathbf{x} \to \infty,$$
$$V_2^{+}(\mathbf{x}) = \ln\frac{1}{|\mathbf{x}|}\int\limits_{\gamma} \mu(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{при } \mathbf{x} \to \infty.$$

Определение.

Потенциалом двойного слоя называется функция

$$W_3(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \nu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n_y}} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) dS_{\mathbf{y}} = \iint\limits_S \nu(\mathbf{y}) \frac{\cos \varphi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}},$$

где ν — заданная функция, называемая плотностью потенциала. *Логарифмическим потенциалом двойного слоя* называется функция

$$W_2(\mathbf{x}) = \int\limits_\gamma \nu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n_y}} \left(\ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) ds_{\mathbf{y}} = \int\limits_\gamma \nu(\mathbf{y}) \frac{\cos \varphi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} ds_{\mathbf{y}}.$$

Здесь $\varphi_{\mathbf{xy}}$ — угол между внешней нормалью к поверхности S (кривой γ) в точке $\mathbf{y}$ и вектором $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Будем обозначать через $W_n^0(\mathbf{x})$ непосредственное значение потенциала двойного слоя для точек $\mathbf{x} \in S$ $(\mathbf{x} \in \gamma)$, Будем обозначать через $W_n^0(\mathbf{x})$ непосредственное значение потенциала двойного слоя для точек $\mathbf{x} \in S$ $(\mathbf{x} \in \gamma)$, через

$$W_n^{\pm}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in D^{\pm}} W_n^{\pm}(\mathbf{y})$$

предельное значение потенциала в точке $\mathbf{x} \in S$ $(\mathbf{x} \in \gamma)$ на поверхности или кривой снаружи (изнутри).

Свойства потенциалов двойного слоя.

Пусть функция $\nu \in C(S)$ (или $C(\gamma)$). Тогда

1) $W_n^{\pm} \in C^{\infty}(D^{\pm})$,
$W_n^{\pm}(\mathbf{x}) = W_n^0(\mathbf{x}) \pm 2^{n-2}\pi\nu(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in S$ или γ;

2) $\Delta W_n^{\pm} = 0$ в $D^{\pm}$;

3) $W_n^{+}(\mathbf{x}) = O\left(\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^{n-1}}\right)$ при $\mathbf{x} \to \infty$.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей S. Обозначим область D через D^-, а область $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ — через D^+.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей S. Обозначим область D через D^-, а область $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ — через D^+.

Внутренняя задача Дирихле.

Найти решение уравнения Лапласа в области D^-, такое, что

$$u\big|_S = f^-,$$

где f^- — заданная функция.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей S. Обозначим область D через D^-, а область $\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$ — через D^+.

Внутренняя задача Дирихле.

Найти решение уравнения Лапласа в области D^-, такое, что

$$u\big|_S = f^-,$$

где f^- — заданная функция.

Внешняя задача Дирихле.

Найти решение уравнения Лапласа в области D^+, такое, что

$$\begin{aligned} &u\big|_S = f^+, \\ &u \to 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \to \infty, \end{aligned}$$

где f^+ — заданная функция.

Внутренняя задача Неймана.

Найти решение уравнения Лапласа в области D^-, такое, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = g^-,$$

где g^- — заданная функция, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе S.

Внутренняя задача Неймана.

Найти решение уравнения Лапласа в области D^-, такое, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = g^-,$$

где g^- — заданная функция, **n** — вектор внешней нормали к границе S.

Внешняя задача Неймана.

Найти решение уравнения Лапласа в области D^+, такое, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = g^+,$$
$$u \to 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \to \infty,$$

где g^- — заданная функция.

Будем искать решения внутренней и внешней задач Дирихле в виде потенциалов двойного слоя с неизвестными плотностями ν^- и ν^+

$$u(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \nu^{\mp}(\mathbf{y}) \frac{\cos\varphi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}}$$

($\varphi_{\mathbf{xy}}$ — угол между внешней нормалью к поверхности S в точке $\mathbf{y}$ и вектором $\mathbf{x}-\mathbf{y}$), Будем искать решения внутренней и внешней задач Дирихле в виде потенциалов двойного слоя с неизвестными плотностями ν^- и ν^+

$$u(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \nu^{\mp}(\mathbf{y}) \frac{\cos \varphi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}}$$

($\varphi_{\mathbf{xy}}$ — угол между внешней нормалью к поверхности S в точке $\mathbf{y}$ и вектором $\mathbf{x}-\mathbf{y}$),
внутренней и внешней задач Неймана — в виде потенциалов простого слоя с неизвестными плотностями μ^- и μ^+

$$u(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \frac{\mu^{\mp}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dS_{\mathbf{y}}.$$

Из свойств поверхностных потенциалов получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода:

$$f^-(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \nu^-(\mathbf{y}) \frac{\cos\varphi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}} - 2\pi\nu^-(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \qquad (D^-)$$

$$f^+(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \nu^+(\mathbf{y}) \frac{\cos\varphi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}} + 2\pi\nu^+(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \qquad (D^+)$$

$$g^-(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \mu^-(\mathbf{y}) \frac{\cos\psi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}} + 2\pi\mu^-(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \qquad (N^-)$$

$$g^+(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \mu^+(\mathbf{y}) \frac{\cos\psi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} ds_{\mathbf{y}} - 2\pi\mu^+(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \qquad (N^+)$$

где $\psi_{\mathbf{xy}}$ — угол между внешней нормалью к поверхности S в точке $\mathbf{x}$ и вектором $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Т. к. $\varphi_{\mathbf{xy}} = \psi_{\mathbf{yx}}$ для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, т. е. пары (D^-) и (N^+), (D^+) и (N^-) являются парами сопряженных интегральных уравнений.

Исследуем разрешимость полученных интегральных уравнений с помощью теорем Фредгольма.
Составим соответствующие однородные интегральные уравнения.

$$0 = \iint\limits_S \nu^-(\mathbf{y}) \frac{\cos \varphi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}} - 2\pi\nu^-(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \qquad (D_0^-)$$

$$0 = \iint\limits_S \nu^+(\mathbf{y}) \frac{\cos \varphi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}} + 2\pi\nu^+(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \qquad (D_0^+)$$

$$0 = \iint\limits_S \mu^-(\mathbf{y}) \frac{\cos \psi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} dS_{\mathbf{y}} + 2\pi\mu^-(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \qquad (N_0^-)$$

$$0 = \iint\limits_S \mu^+(\mathbf{y}) \frac{\cos \psi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} ds_{\mathbf{y}} - 2\pi\mu^+(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \qquad (N_0^+)$$

Согласно теоремам Фредгольма возможны только следующие

два случая

(i) однородные уравнения $(D_0^{\mp})$ и $(N_0^{\pm})$, имеют только нулевые решения, при этом неоднородные уравнения $(D^{\mp})$ и $(N^{\pm})$ имеют единственное решение при любых $f^{\mp} \in L_2(S)$ и $g^{\pm} \in L_2(S)$;

(ii) однородные уравнения $(D_0^{\mp})$ и $(N_0^{\pm})$, имеют ненулевые решения, при этом количество линейно независимых решений этих уравнений совпадает и конечно. Неоднородное уравнение $(D^{\mp})$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f^{\mp}$ ортогональна в пространстве $L_2(S)$ всем решениям $(N_0^{\pm})$, а неоднородное уравнение $(N^{\pm})$ разрешимо тогда и только тогда, когда $g^{\pm}$ ортогональна в пространстве $L_2(S)$ всем решениям $(D_0^{\mp})$.

Теорема 1.

Решения внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана существуют при любых f^{-} *и* g^{+}.

Теорема 1.

Решения внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана существуют при любых f^- и g^+.

Доказательство.

Нужно показать, что имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, т. е. однородные уравнения (D_0^-), (N_0^+) имеют только тривиальные решения.

Достаточно рассмотреть только одно из этих однородных уравнений, например, уравнение (N_0^+).

Прежде, чем исследовать оставшиеся уравнения, докажем следующее вспомогательное утверждение.

Теорема Гаусса.

При $n = 3$

$$\iint\limits_S \frac{\cos\varphi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\,dS_{\mathbf{y}} = \begin{cases} -4\pi, & x \in D^-, \\ -2\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in D^+. \end{cases}$$

Теорема 2.

Внутренняя задача Неймана разрешима для любой g^- такой, что

$$\iint\limits_S g^- \, dS = 0.$$

Теорема 2.

Внутренняя задача Неймана разрешима для любой g^- такой, что

$$\iint\limits_S g^- \, dS = 0.$$

Доказательство.

Нужно показать, что имеет место второй случай альтернативы Фредгольма, т. е. однородные уравнения (D_0^+), (N_0^-) имеют нетривиальные решения.

Затем нужно найти количество линейно независимых решений этих однородных уравнений и воспользоваться теоремой Фредгольма.

Теорема 3.

Внешняя задача Дирихле разрешима для любой f^+.

Теорема 3.

Внешняя задача Дирихле разрешима для любой f^+.

Доказательство.

Хотя имеет место второй случай альтернативы Фредгольма, мы имеем безусловную разрешимость внешней задачи Дирихле. Это связано с тем, что мы искали решение в виде потенциала двойного слоя, ведущее себя как $O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right)$ при $\mathbf{x} \to \infty$.

Чтобы исправить эту ситуацию, будем искать решение внешней задачи Дирихле в виде

$$u(\mathbf{x}) = \iint\limits_S \nu^{\mp}(\mathbf{y}) \frac{\cos\varphi_{\mathbf{xy}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\, dS_{\mathbf{y}} + \frac{A}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|},$$

где $\mathbf{x}_0 \in D^-$ — некоторая фиксированная точка, A — неизвестная постоянная, ν^+ — неизвестная плотность.