Баллы: $30 \cdot 6 + 50 = 230$ . . . , www.techlibrary.ru

§1 Ряды Фурье

1.1 Задача о разложении 2π-периодич. ф-ции в ряд Фурье

Общие функц. ряды: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ - степенные ряды

тригонометрич. ряд - $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Задача о разложении ф-ции в ряд Фурье:

Для каких ф-ций $f: R \to R$ найдутся коэф-ты $a_n, b_n \in R$ такие, что $\forall x \in R$ справедливо рав-во: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Как найти a_n, b_n?

Замеч. 1. Задачу следует решать только для 2π-периодич. ф-ций

Зам 2. Рав-во достаточно установить на $\forall$ пром-ке длины 2π, например $[-\pi; \pi]$

Допустим, что рав-во есть и его можно интегр. почленно. Тогда $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx) = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - b_n \underbrace{\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0}) = \pi a_0$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Умножим исходное рав-во на $\cos mx$ ($m \neq 0$) и проинт. почленно

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\underbrace{\cos(m+n)x}_{0} + \cos(m-n)x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \pi & \text{если } m = n \end{cases}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)dx = 0$

$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$, $m = 0, 1, 2..$ $\quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$ (*), $m = 1, 2...$

Замеч. Теперь понятно, почему в тригон. ряде пишут $\frac{a_0}{2}$

Опр: Ф-лы (*) назыв. ф-лами Эйлера-Фурье. Если ф-ция f дана, то тригон. ряд $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где a_n, b_n найдены по ф-лам Эйлера-Фурье назыв. рядом Фурье ф-ции f. Числа a_n и b_n, найденные по ф-лам (*) назыв. коэф-тами Фурье ф-ции f.

1.2 Разложение ф-ций с произв. периодом

Пусть $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – $2l$-периодич. ф-ция. Рассмотрим ф-цию $g(x)=f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$. g – 2π-периодич.

$$\cancel{g(x+2l)=f\left(\frac{\pi(x+2l)}{l}\right)=f\left(\frac{\pi x}{l}+2\frac{\pi^2}{l}\right)}$$

$$g(x+2\pi)=f\left(\frac{l(x+2\pi)}{\pi}\right)=f\left(\frac{lx}{\pi}+2l\right)=f\left(\frac{lx}{\pi}\right)=g(x).$$

Значит g можно разложить в ряд Фурье:

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f\Big(\overbrace{\frac{lx}{\pi}}^{=y}\Big) \qquad \frac{lx}{\pi}=y$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,dx \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\,dx \qquad x=\frac{\pi y}{l}$$

$$f(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n y}{l}+b_n\sin\frac{\pi n y}{l}\right)$$

$$a_n=\frac{1\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}l}\int_{-l}^{l}f(y)\cos\frac{\pi n y}{l}\,dy \qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(y)\sin\frac{\pi n y}{l}\,dy$$

1.3 Разложение только по sin или cos

1) Если ф-ция $f:[-a;a]\to\mathbb{R}$ – нечетная ($\forall x\in[-a,a]$ $f(-x)=-f(x)$), то $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\underbrace{\int_{-a}^{0}f(x)\,dx}_{\text{замена } x=-y}+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=\int_{a}^{0}f(-y)(-dy)+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=$$

$$=\int_{a}^{0}f(y)\,dy+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=-\int_{0}^{a}f(y)\,dy+\int_{0}^{a}f(x)\,dx=0$$

Аналогично: если $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ – четная (т.е. $\forall x\in[-a,a]$ $f(-x)=f(x)$), то $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$

2) Если $f: [-\pi;\pi] \to R$ — нечетная. Тогда $\forall n = 0, 1, 2 \ldots$

ф-ция $f(x)\cos nx$ — нечетная, а значит

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$, а $f(x)\cdot\sin nx$ — четная $\Rightarrow$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

Аналогично если f — четная, то все $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

3) Пусть $f: [0;\pi] \to R$. Принудительно продолжим ее на пром-к от $[-\pi;\pi]$ так, чтобы в результате получилась нечетная ф-ция $f: [-\pi;\pi] \to R$

По 2) знаем, что $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

Аналогично: продолжив f до четной ф-ции получим

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, где $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

1.4 Лемма Римана-Лебега

Лемма (Риман-Лебег) Пусть $f: (a,b) \to R$ и $\int_a^b |f(x)|dx$ — сход.
конечный

Тогда $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,dx = 0$

Д-во: (только для непр. дифф. ф-ций)

$\left|\int_a^b f(x)\cos px\,dx\right| = \left|\frac{1}{p}\int_a^b f(x)\,d(\sin(px))\right| \overset{\text{по частям}}{=} \left|\frac{1}{p}\left(-\int_a^b f'(x)\sin px\,dx + f(x)\sin px\Big|_{x=a}^{x=b}\right)\right| \underset{|u+v|\le|u|+|v|}{\le} \frac{1}{p}\left|\int_a^b f'(x)\sin px\,dx\right| + \frac{1}{p}|f(b)\sin bp| + \frac{1}{p}|f(a)\sin pa|$

$\left|\int_a^b f'(x)\sin px\,dx\right| \le \int_a^b |f'(x)||\sin px|\,dx \le \int_a^b |f'(x)|\,dx$ — const ($|\sin px| \le 1$); $|f(b)\sin bp| \le |f(b)|$, $|f(a)\sin pa| \le |f(a)|$; $\xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

Замеч1: В общ. случае лемма доказывается приближением $\forall$ инт. ф-ция с помощью непрерывно-дифф.

Замеч. 2: Таким же способом можно д-ть, что

$\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,dx = \lim\limits_{p\to\pm\infty}\int_a^b f(x)e^{ipx}\,dx = 0$

1.5 Ядро Дирихле

Задача: Дана 2π-периодич. ф-ция f. По ф-лам Эйлера-Фурье находим a_n, b_n. Строим ряд Фурье $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$
Верно ли, что Σ этого ряда равна $f(x)$?

Другими словами: $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\xrightarrow[n\to\infty]{?}f(x)$

$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos mt\,dt,\quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin mt\,dt$ 13.09

$$S_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\Big[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\underbrace{(\cos mx\cos mt+\sin mx\sin mt)}_{\cos m(x-t)}\Big]dt=(2)$$

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=(1)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\qquad=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{3}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}=2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2};\quad\sin\frac{5}{2}\alpha-\sin\frac{3}{2}\alpha=2\cos2\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\ \ldots$$

$$\sin\frac{2n+1}{2}\alpha-\sin\frac{2n-1}{2}\alpha=2\cos n\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{2n+1}{2}\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\Big[\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos2\alpha+\ldots+\cos n\alpha\Big]$$

$$(1)=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$(2)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{2\pi\sin\frac{x-t}{2}}dt\overset{\text{замена } z=t-x}{=}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(z+x)\underbrace{\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\pi\sin\frac{z}{2}}}_{D_n(z)\text{ - ядро Дирихле}}dz=\int_{-\pi}^{\pi}f(z+x)D_n(z)dz$$

Упр: если $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - 2π-периодич., т.е. $g(x+2\pi)=g(x)\ \forall x$, то $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha}g(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx$ - д-ть.

Св-ва ядра Дирихле:

1) $D_n(z)$ - чётная ф-ция (отнош. 2-х нечетных; Σ чётных)

2) $\int_{-\pi}^{\pi}D_n(z)dz=1\qquad\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2\pi}+\Sigma\cos\ldots\Big)dz=\frac{2\pi}{2\pi}=1$

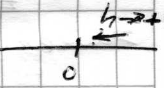
1.6 Теор о ~~разложении~~ представимости ф-ции в точке своим рядом Фурье.

Опр: Кусочно-гладкая ф-ция $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$: Ф-ция $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ назыв. кусочно-гладкой, если $\exists\ -\pi=x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=\pi$ таких, что выполн.: $\forall j=1..n-1$ ф-ция f - непр. дифф. в откр.

интервале (x_j, x_{j+1})

2) $\forall j=1..n$ $\exists$ и конечны пределы ф-ции f слева и справа в т. x_j,

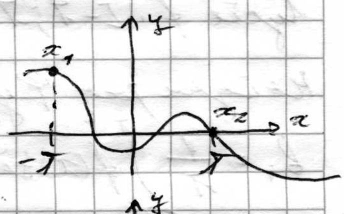
т.е. $f(x_j+0)=\lim\limits_{h\to+0} f(x_j+h)$ $\quad f(x_j-0)=\lim\limits_{h\to+0} f(x_j-h)$



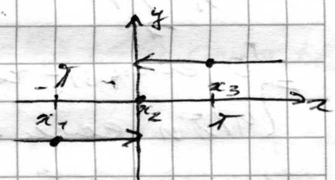
3) $\forall j=1..n$ $\exists$ и конечны след пределы, похожие на левую и правую производные ф-ции f в т. x_j:

$$\underbrace{\lim_{h\to+0}\frac{f(x_j+h)-f(x_j+0)}{h}}_{\text{правая}},\quad \lim_{h\to+0}\frac{f(x_j-h)-f(x_j-0)}{h}$$ – левая произв.

Примеры кусочно-гладких ф-ций:



1) Сужение $\forall$ гл. ф-ции $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на $[-\pi;\pi]$



2) Ф-ция Хевисайда, „знак числа": $\theta(x)= \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x>0\\ 0, & \text{если } x=0\\ -1, & \text{если } x<0\end{cases}$

3) Ф-ция „модуль числа" $f(x)=|x|$

Теор (о представимости ф-ции в точке своим рядом Фурье):

Пусть $f:[-\pi;\pi]\to\mathbb{R}$ – кусочно-гладкая, тогда $\forall x\in[-\pi,\pi]$

$$S_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Замеч: Если x – точка непр-ти ф-ции f, т.е. $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$, то $S_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Д-во: $\left|S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x+z)D_n(z)dz-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}D_n(z)dz\right|=$

$=\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+z)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right)D_n(z)dz\right|=\left|\int_{-\pi}^{0}\ldots+\int_{0}^{\pi}\ldots\right|=\left|\int_0^{\pi}\cancel{f(x+z)-f(x+0)}\right.$

замена $z=-z$

$=\left|\int_0^{\pi}\left[f(x+z)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{\cancel{2}}+f(x-z)\right]D_n(z)dz\right|=$

$=\left|\int_0^{\pi}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}+\frac{f(x-z)-f(x-0)}{z}\right]\frac{z}{\sin\frac{z}{2}}}_{\text{интегр на } [0,\pi]?}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}z\,dz\right|$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ по лемме Римана-Лебега

Ф-ция $z/\sin\frac{z}{2}$ непр. дифф-ка и $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\sin\frac{z}{2}}=2$

$\lim\limits_{z\to+0}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}$ — $\exists$ и конечен по усл (3) кусочн. гл-ти ч.т.д.

Замеч.: Известны и другие усл, гарантирующие сход-ть ряда Фурье.

Однако известны примеры непр. ф-ций, для кот. ряд Фурье не сход-ся ни в одной точке.

1.7 Пример разложения ф-ции в ряд Фурье и нахождения суммы числового ряда.

Пусть $f:[-\pi;\pi]\to\mathbb{R}$ задается ф-лой $f(x)=\operatorname{sign} x$ $\forall x\in[-\pi;\pi]$

Найдем ряд Фурье ф-ции f: $a_n=0\ \forall n$, т.к. f — нечетн.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=\frac{-2\cos nx}{\pi n}\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n}=$$

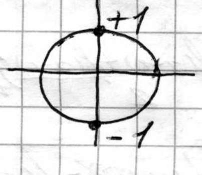
$$=\begin{cases}0, & \text{если } n\text{ — четное}\\ 4/\pi n & \text{если } n\text{ — нечетное}\end{cases}$$

$$f(x)\sim\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ — нечетное}}}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\sin nx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin(2k+1)x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Т.к. f — кусочно-гладк. и уже ~~точки~~ ~~1.1 разрыва~~ и в т. разрыва ($x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\dots$) $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, т.е. $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Подст. в это рав-во $x=\frac{\pi}{2}$ $\quad 1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}}{2k+1}$



$\sin\frac{2k+1}{2}\pi=(-1)^k$

Значит: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$ — ряд Лейбница

$= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$

1.8 Комплексная форма ряда Фурье.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Из алгебры: $\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$, $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ — ф-ла Эйлера

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\cdot\frac{i}{i}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}-\frac{ib_n}{2}\right)e^{inx}+$$

$$+\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx},\ \text{где}$$

$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$, если $n>0$; $\quad\frac{a_0}{2}$ $n=0$; $\quad\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}$, если $n<0$

$$C_n=\begin{cases}\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[\cos nx-i\sin nx]dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx\\ \frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-i0x}dx\\ \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[\cos(-nx)+i\sin(-nx)]dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx \quad \forall n\in\mathbb{Z}\\ &f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{+inx}.\end{aligned}}$$
— разложение ф-ции f в ряд Фурье в компл. форме

1.9 Почленное интегр. и дифф. рядов Фурье.

Теор (о почленном дифф. рядов Фурье). Пусть $f(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-периодич, гладкая ф-ция. Знаем, что $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

Обозначим через a_n' и b_n' коэф-ты Фурье ф-ции f' (2π-период, непр)

$f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)$. Тогда $a_n'=nb_n, b_n'=-na_n, a_0'=0$

20.09 Д-во: $a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}[\underbrace{f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{\to 0}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot n\sin nx\,dx]=$

$=nb_n$, остальные аналогично.

Замеч: $f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}^{\to 0}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'\cos nx+b_n'\sin nx$

$\frac{d}{dx}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(-n)\sin nx)+$

$+b_nn\cos nx)$

Пусть $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π периодич, непр. и $\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx=0 \Rightarrow a_0=0$ Тогда

$g(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

Рассм. новую ф-цию $G(x)=\int_0^x g(t)dt$ — первообр ф-ции $g(t)$; $G(0)=0$

Тогда G — непр дифф (гладкая), 2π-периодич. ф-ция (т.к. $\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx=0$)

$G(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$

Теор (об интегр. ряда Фурье) При сделанных выше обознач. и допущениях имеем $A_n=-\frac{b_n}{n}$, $B_n=\frac{a_n}{n}$, $\frac{A_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$

Д-во: т.к. $g(x)=G'(x)$, то ф-лы $A_n=-\frac{b_n}{n}$ и $B_n=\frac{a_n}{n}$ следуют из предыдущ. теор.

из опред. $G(x)=\int_0^x\dots$

Кроме того $0=G(0)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n = \frac{A_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} \Rightarrow \frac{A_0}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$

Замеч.: $G(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,dt\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_0^x\cos nt\,dt+b_n\int_0^x\sin nt\,dt\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^x-b_n\frac{\cos nt}{n}\Big|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\cos nx\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

1.10 Приближение тригонометрич. мн-нами. Нер-во Бесселя.

Опр: Выражение $T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx)$, где α_m,β_m - произв. числа назыв. тригонометрич. мн-ном порядка n.

Задача: Дана 2π периодич. ф-ция f, Найти триг. мн-н $T_n(x)$, наилучшим образом приближающий ф-цию f.

Кандидаты на термин „наилучш. образом приближает":

$\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)-T_n(x)|$; $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|\,dx$ — среднее отклон. ; $\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx}$ — среднеквадр. отклон. $\to \min$

Замеч.: Дана 2π-периодич. ф-ция f и число n. Найти триг. мн-н степени $T_n(x)$ такой, чтобы величина $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx$ была наим.

$$|f(x)-T_n(x)|^2=|f(x)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx)|^2=$$

$$=f^2(x)+\frac{\alpha_0^2}{4}+\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^2\cos^2mx+\sum_{m=1}^{n}\beta_m^2\sin^2mx-f(x)\alpha_0-2\sum_{m=1}^{n}\alpha_m f(x)\cos mx$$

$-\sum_{m=1}^{n}\beta_m f(x)\sin mx+\sigma_n(x)$, где $\sigma_n(x)$ = лин. комбинация ф-ций $\cos mx$, $\sin mx$, $\cos mx\cos kx$, $\cos mx\sin kx$, $\sin mx\sin kx$ $(m\neq k)$

Т.к. $\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\,dx=0$, то интегрируя все рав-во получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx+\frac{\alpha_0^2}{2}\pi+\pi\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m^2+\beta_m^2)-\pi\alpha_0\cdot a_0-*$$

Здесь учли еще, что $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2mx\,dx=\pi$, $a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx$, $b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx$

$$*-2\pi\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m a_m+\beta_m b_m)\overset{\text{выделим полный квадрат}}{=}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx+\frac{\pi}{2}\underbrace{(\alpha_0^2-2a_0\alpha_0+a_0^2)}_{=\pi/2(\alpha_0-a_0)^2}-\frac{\pi}{2}a_0^2+$$

$+\sum_{m=1}^{n}\left[(\alpha_m-a_m)^2+(\beta_m-b_m)^2\right]$ $-\pi\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)$ ⊛ — не зав-т от T_n (от α и β)

min, когда $=0$, т.е. $\alpha_m=a_m$, $\beta_m=b_m$

Теор. о мн-не наилучшего приближ. $\forall f$ $\exists!$ мн-н T_n наилучш. приближ. для него $\forall n$ $\alpha_m=a_m, \beta_m=b_m$

Теор (нер-во Бесселя) Если $f:[-\pi;\pi]\to\mathbb{R}$ и $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx<\infty$, то ряд $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ — сход-ся и $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

Д-во: в ⊛ подставим частичн. Σ ряда Фурье

$S_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$ вместо T_n:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{a_0^2}{2}\pi-\pi\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\geq 0.$$

Значит $\forall n$ $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$ (0)

Значит посл-ть част. сумм ряда $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 b_n^2)$ имеет конечный предел (монот. огранич. посл-ть)

Перейдем к пределу в рав-ве (0). Получим:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \text{ ч.т.д.}$$

1.11 Равномерная сход-ть ряда Фурье.

(Напоминание: Говорим, что функц. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сход-ся равном. к ф-ции $u(x)$ на $[a,b]$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists n(\varepsilon)$: $\forall n\geq n(\varepsilon)$ не зав-т от x

$|u(x)-\sum_{m=1}^{n}u_m(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in[a,b]$

Теор. Вейерштрасса (о мажорир. сход-ти): Если $\forall x\in[a,b]$ $|u_n(x)|\leq C_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}C_n$ — сход-ся, то $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сход-ся равном на $[a,b]$

Теор: (о равном. сход-ти ряда Фурье:

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-периодич, гладкая. Тогда ряд Фурье ф-ции f сход-ся к ней равномерно на всей $\mathbb{R}$.

Д-во: Достаточно д-ть, что ряд Фурье сход. равн на $[-\pi;\pi]$

~~Ра~~ Применим теор. Вейер. к функц. ряду: (забросим const a_0)

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, где $u_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx$. ищем посл-ть C_n.

$|u_n(x)| =$

Теор. о диффер. р. Фурье $a_n' = nb_n,\ b_n' = -na_n$

$= |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n|\cdot 1 + |b_n|\cdot 1 = \frac{|b_n'|}{n} + \frac{|a_n'|}{n} \le \frac{1}{2}\left(|b_n'|^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) +$ $\left(u\cdot v \le \frac{1}{2}(u^2+v^2)\right)$

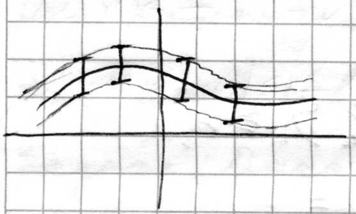
$+ \frac{1}{2}\left(|a_n'|^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(|a_n'|^2 + |b_n'|^2\right) = c_n$ ← обознач.

Убедимся, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — сход-ся.

$\frac{1}{n^2}$ — сход-ся (=> из матана), $\frac{1}{2}\left(|a_n'|^2 + |b_n'|^2\right)$ — сход-ся ← нер-во Бесселя для ф-ции f' =>

$\Rightarrow \frac{a_0'^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'^2 + b_n'^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,dx$ — конечное => ряд сход-ся =>

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — сход-ся => по т. Вейер. ряд Фурье сход. равн.



для дост. больших n знач. Σ ряда попадет в полосу $\pm\varepsilon$ $f(x) \pm \varepsilon$ $\forall x$

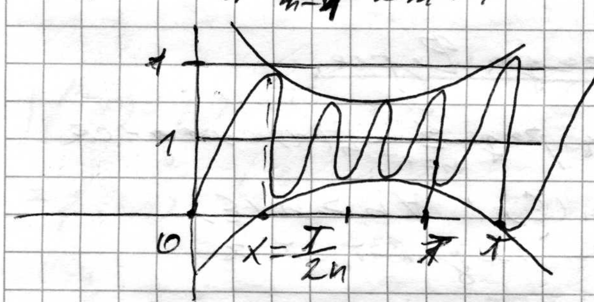
1.12 Явление Гиббса.

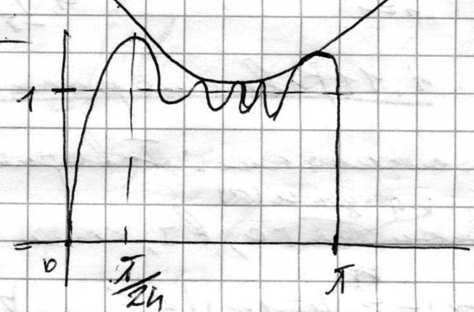
Что можно сказать о сход-ти ряда Фурье в окр-ти т. разрыва?

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0, \pi \\ +1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$

$S_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{n} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$

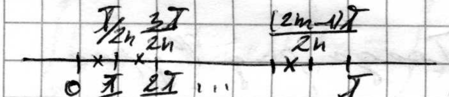




$\max_{x\in[0;\pi]} |S_n(x)| = S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = ..$ $\quad \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{n} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$

← амплитуда

27.09 $\quad A(S_{2n-1}(x)) := \max_{x\in[0;\pi]} |S_{2n-1}(x)| = S_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{n} \frac{\sin(2m-1)\frac{\pi}{2n}}{(2m-1)\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2n}$



значение • на длину пром-ка

Сумма Римана интеграла $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$

$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 1{,}1789..$

при $n \to \infty$ Сумма Римана → к $\int$-у.

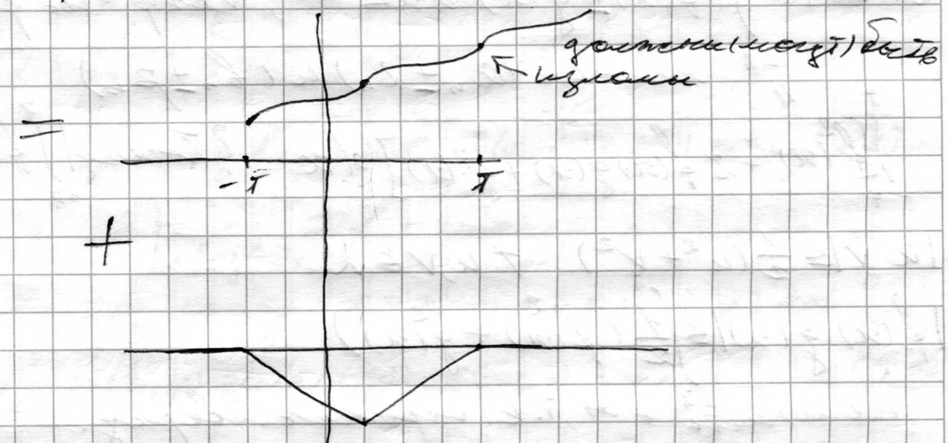
$Si(x) = \int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ — интегральный синус, в элемент. ф-циях не выражается.

Ошибка на 18% м/у max и приближением.

Опр: Говорим, что в т. x_0, где $f(x_0-0)<f(x_0+0)$ (пределы слева, справа) имеет место явление Гиббса, если $\underline{\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0-0}}}\, S_n(x) < f(x_0-0) < f(x_0+0) < \overline{\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0+0}}}\, S_n(x)$

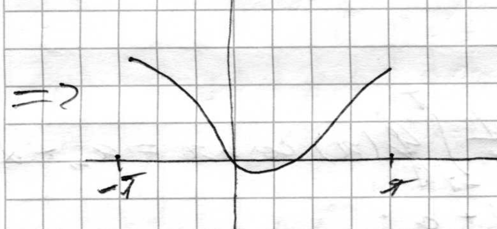
нижний предел

Замеч: Явление Гиббса имеет место в каждой т. разрыва ∀ кус-гладкой ф-ции, причем с теми же 18%.



явл. Гиббса есть с 18%

=>



– гладкая (ряд Ф сходится к ней равномерно => явл Гиббса нет. Д-ть – упр.)

1.13 Равенство Ляпунова.

Теор: Пусть $f:[-\pi;\pi]\to R$, причем $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx<+\infty$. Тогда

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$ – равенство Ляпунова

Замеч: Условия этой теор. в точности такие же, как в нер-ве Бесселя. Но здесь утв рав-во, а у Бесселя – нер-во (≤)

1) Нер-во Бесселя доказали строго, а рав-во Ляпунова докажем только в частном случае.

2) Подобные утв. справедливы для произв. ортонормир. систем

Д-во: Пусть ф-ция $f:[-\pi;\pi]\to R$ такова, что после продолж. до 2π-периодич. ф-ции $R\to R$ она остается гладкой. Докажем рав-во Ляпунова для таких ф-ций.

Для таких ф-ций ряд Фурье сход равномерно на R. Из д-ва нер-ва Бесселя $\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2dx=\pi\left[-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{n=1}^{n}(a_n^2+b_n^2)\right]+\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$

Перейдем в этом рав-ве к пределу при $n\to\infty$ – сход из нер-ва Б.

$$0=\left(-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)+\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx\right)\cdot\pi$$ ч.т.д.

Теор: обобщенное рав-во Ляпунова: Если $f: [-\pi;\pi] \to R$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$

$g: [-\pi;\pi] \to R$ и $\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)dx < \infty$ и a_n, b_n — коэф-ты Фурье ф-ции f
α_n, β_n — и — ф-ции g

$$\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n a_n + \beta_n b_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Д-во: $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \pm g(x))^2 dx < \infty$, коэф-ты фурье ф-ции $f(x) \pm g(x)$ явл-ся $(a_n \pm \alpha_n)$ и $(b_n \pm \beta_n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)]dx \quad ? \text{ Почему } \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\right| < \infty$$

$|u\,v| \le \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad \forall u, v \in R$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\,g(x)| \le \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x))$$

не м.быть $+\infty$, т.к. огранич. сверху.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)+g(x)]\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx = a_n + \alpha_n$$

Применим рав-во Ляпунова к ф-циям $f \pm g$:

$$\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\alpha_n)^2 + (b_n+\beta_n)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)+g(x)]^2 dx$$

$-$

$$\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\alpha_n)^2 + (b_n-\beta_n)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2 dx$$

$(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv \quad \forall u,v$

$$\frac{4a_0\alpha_0}{2} + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n\alpha_n + b_n\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}4f(x)\cdot g(x)dx \quad \Big|:4 \text{ ч.т.д.}$$

Теор: (рав-во Ляпунова в компл. форме). Пусть $f: [-\pi;\pi] \to R$, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ — сход, $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$ (т.е. $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}$)

Тогда $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

Д-во: $C_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \text{ если } n > 0 \\ \frac{1}{2}a_0, \text{ если } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), \text{ если } n < 0 \end{cases}$ $\quad |C_n|^2 = C_n \cdot \overline{C_n} = \begin{cases} \frac{1}{4}(a_n - ib_n)(a_n + ib_n) = \frac{1}{4}(a_n^2 + \\ \frac{1}{4}a_0^2 \\ \frac{1}{4}(a_{-n} + ib_{-n})(a_{-n} - ib_{-n}) = \frac{1}{4}(a_{-n}^2 \end{cases}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1}|C_n|^2 + |C_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2 = \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}(a_{-n}^2 + b_{-n}^2)}_{\text{замена } n \to -n} + \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right] \underset{\text{рав-во Ляпунова}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

ч.т.д.

Зар: д-во. Пусть $f[-\pi;\pi] \to \mathbb{C}$ и $\int_{-\pi}^{\pi} |f^2(x)|dx < \infty$. Тогда
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

∇ - не явл. греч. буквой

1.14 Нахождение гармонич. ф-ции в круге по ее значениям на границе.

Опр: ф-ция $u: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ назыв. гармонич., если $\Delta u = 0$ в D.

(т.е. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в D) уравн. Лапласа

Задача: найти ф-цию, опред в круге $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$

$u: D \to \mathbb{R}$ - гармонич. и $u\big|_{x^2+y^2=1} = f$ - значения на границе

Решение: перейдем к полярн. коорд: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$; $0<r<1$, $-\infty<\varphi<+\infty$, $\varphi \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2\pi$ периодич. ф-ция - $u(r,\varphi) = u(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$ по φ.

При каждом фикс. $0<r<1$ разложим ф-цию $u(r,\varphi)$ в ряд Фурье:

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi)$$ "=" - законно - д-во.

Из матана: в пол. коорд. уравнение Лапласа имеет вид:

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

допустим, что $u(r,\varphi)$ - дважды дифф по r

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a_0'(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'(r)\cos n\varphi + b_n'(r)\sin n\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r} = \frac{a_0''(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n''(r)\cos n\varphi + b_n''(r)\sin n\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(r)n(-\sin n\varphi) + n b_n(r)\cos n\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n(r)\cos n\varphi - n^2 b_n(r)\sin n\varphi$$

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2}[r^2 a_0''(r) + r a_0'(r)] + \sum_{n=1}^{\infty}[(r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r)]\cos n\varphi + (r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r))\sin n\varphi] = 0$$

0 разложили в ряд Фурье $\Rightarrow \forall n$

$$\begin{cases} r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) = 0 & n = 0,1,2.. \\ r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r) & n = 1,2,3\dots \end{cases}$$

система обыкн. диф. уравн.

Произошло разделение переменных

Ответ: $a_n(r) = C r^n$

$r^2 \cdot Cn(n-1)r^{n-2} + r\,Cn r^{n-1} + n^2 C r^n$

$n(n-1) + n - n^2 = 0$ - верно.

лекция 5 4.10.10 1.14 (продолжение)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ в круге } x^2+y^2<1 \text{ при усл. } u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1}=f$$

перейти к пол. коорд. Тогда $u(r,\varphi)=\frac{a_0(r)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(r)\cos n\varphi+b_n(r)\sin n\varphi)$

$a_n(r)=C_n r^n$, $b_n(r)=\tilde{C}_n r^n = b_n(1) r^n$
$\quad\quad \overset{\shortparallel}{a_n(1) r^n}$

Как найти константы?

$u(1,\varphi)=f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi)$
$\overset{\shortparallel}{\frac{a_0(1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(1)\cos n\varphi+b_n(1)\sin n\varphi)$ $\Rightarrow a_n(1)=\alpha_n;\ b_n(1)=\beta_n$

Итог: $u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi)$ = (подставляя вместо α_n,β_n ф-лы Эйлера-Фурье, после преобраз. можем получить) $=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(t-\varphi)\,dt$

где $P_r(\theta)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ - ядро Пуассона $\quad\int$-л Пуассона

Замеч: из матана известно $\Rightarrow$ уравн. Лапласа в круге имеет не более 1 решения $\Rightarrow$ никаких других выражений для ответа нет.

1.15 Теор. Вейерштрасса о равном. приближ. тригонометрич. и алгебраич. мн-нами

Лемма (Римана-Лебега для несобств. инт-ла):

Если $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\cos px\,dx \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (без д-ва)

Опр: Кусочно-гладкая ф-ция $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Теор (Вейерштрасса о равном. приближ. непр. ф-ции тригон. мн-нами)

Пусть $f:[-\pi;\pi]\to\mathbb{R}$ - непр и $f(-\pi)=f(\pi)$, тогда $\forall\,\varepsilon>0\ \exists$ триг. мн-н $T_n(x)$: $\forall x\in[-\pi;\pi]\quad |f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$, или, что то же самое,

обознач. $\|f-T_n\|=\sup_{x\in[-\pi;\pi]}|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$

Д-во: I шаг - продолжим f на $\mathbb{R}$ до 2π-периодич. ф-ции F.

Т.к. $f(-\pi)=f(\pi)$, то F - непр.

II шаг. Фиксируем $h>0$ и построим вспомогат. ф-цию

$F_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}F(t)\,dt$ - усреднение по Стеклову

Св-ва ф-ции F_h:

1) $\forall\, h>0 \quad F_h$ - непр. дифф

2) $F_h \underset{h\to0}{\rightrightarrows} F$ т.е. ~~$\forall\varepsilon>0$~~ $\|F_h-F\|=\sup_{x\in[-\pi;\pi]}|F_h(x)-F(x)| \xrightarrow[h\to0]{} 0$

равномерно стремится

III шаг: Фикс. $\varepsilon>0$. Пользуясь св-вом 2 найдем $h>0$: $\|F_h-F\|<\frac{\varepsilon}{2}$

Т.к. F_h - непр.дифф, 2π-периодич. ф-ция, то по теор о равном. сход-ти ряда Фурье заключ, что $\exists$ номер $n_0\in\mathbb{N}$ такой, что $\|F_h-S_{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{2}$, где S_{n_0} - частичная Σ ряда Фурье ф-ции F_h. Тогда, выбрав S_{n_0} в качестве T_n можем написать: $\sup\limits_{x\in[-\pi;\pi]}|f(x)-T_n(x)|=\|F-S_{n_0}\|=$

$=\|F-S_{n_0}+F_h-F_h\|\le\|F-F_h\|+\|F_h-S_{n_0}\|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Осталось убедиться в справедливости св-в 1 и 2.

1) Из матана: $\frac{d}{dy}\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\,dx=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx+\beta'(y)\cdot f(\beta(y),y)-\alpha'(y)f(\alpha(y),y)$:

В нашем случае: $\frac{d}{dx}F_h(x)=\frac{1}{2h}\left[0+1\cdot F(x+h)-1\cdot F(x-h)\right]$ - непр.

2) Из матана $\Rightarrow$ теор. Кантора: Всякая непр. на замкн. пром-ке $[a,b]$ ф-ция g равном. непр-на на нем, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x,y\in[a,b]$ и $|x-y|<\delta$, то $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$

Значит, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x,y\in[-\pi;\pi]$, $|x-y|<\delta\Rightarrow|F(x)-F(y)|<\varepsilon$.

Фиксируем $0<h<\frac{\delta}{2}$. Тогда $|F_h(x)-F(x)|=\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h}F(t)\,dt-\right.$

$\left.-\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h}F(x)\,dt\right|\le\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h}\underbrace{|F(t)-F(x)|}_{\le\varepsilon,\text{ т.к.}}dt$ $\quad|t-x|\le h<\frac{\delta}{2}<\delta$ (т.к. $t\in[x-h;x+h]$)

$\forall x\in[-\pi;\pi]\quad\Rightarrow\sup\limits_{x\in[-\pi;\pi]}|F_h(x)-F(x)|\le\varepsilon\quad\Rightarrow\|F_h-F\|\xrightarrow[h\to\infty]{}0$

~~Teo~~

Теор. (Вейерштрасса о равном. приближ. алгебраич. мн-нами)

Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ - непр., тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists$ алгебраич. мн-н $P_n(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}a_mx^m$ такой, что $\|P_n(x)-f(x)\|=\sup\limits_{x\in[a,b]}|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

Идея д-ва: I шаг: достаточно д-ть эту теор для случая $[a,b]=[0,\pi]$ т.к. потом можно лин. заменой $\forall[a;b]\to[0;\pi]$

II шаг: Продолжим ф-цию $f:[0;\pi]\to\mathbb{K}$ на пром-к $[-\pi;\pi]$ четным образом. Эта ф-ция непр и принимает одинаковые значения в т. $-\pi$ и $\pi\Rightarrow$ по теор. Вейер... о равном. приближ. тригонометрич. мн-нами, $\forall\varepsilon>0\ \exists T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n}\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx$ - триг. мн-н такой, что $\forall x\in[-\pi;\pi]$: $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$

III шаг: Заменим в $T_n(x)$ каждый $\cos mx$ и $\sin mx$ частичной Σ ряда Тейлора.

§2 Преобразование Фурье

2.1 $\int$-л Фурье как предельная форма ряда Фурье.

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Фикс. $l>0$ и разложим f на $[-l; l]$ в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \text{ где } a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt.$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{l\cdot 2}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt}_{\xrightarrow{l\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \text{ - сход, делим } \frac{1}{2l} \Rightarrow \text{все} \to 0} + \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n t}{l}\cos\frac{\pi n x}{l} + \sin\frac{\pi n t}{l}\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}\right) f(t)\,dt \xrightarrow{l\to\infty}$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n(t-x)}{l} f(t)\,dt =$$

обознач. $y_n = \pi n / l$

$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = \pi / l$

$$= \frac{1}{l}\frac{l}{\pi}\int_{-l}^{l}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\cos y_n(t-x)\cdot \Delta y_n}\, f(t)\,dt =$$

- сумма Римана для $\int$-ла $\int_0^{\infty}\cos[y(t-x)]\,dy$, расход-ся

(*): $$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{\infty}\cos[y(t-x)]\,dy\right] f(t)\,dt = (\text{поменяем порядок интегр.}) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\underbrace{\cos[y(t-x)]}_{\cos yt\cdot\cos yx + \sin yt\sin yx}\,dt\right]dy = \int_0^{+\infty}(a(y)\cos xy + b(y)\sin xy)\,dy, \text{ где}$$

← интеграл Фурье.

$$\boxed{a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ty\,dt,\quad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ty\,dt \text{ - сход.}}$$

Замеч: $\int$-л Фурье оч. похож на разлож. ф-ции в ряд Фурье.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \quad n \in \text{дискр. стал непр.}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

2.2 Теор. о представимости ф-ции в точке своим $\int$-лом Фурье

11.10.10

Теор (о представ-ти...): Пусть $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - кусочно гл., абс. интегр. ф-ция. Тогда $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x) = \int_0^{+\infty}[a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$,

где $a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ty\,dt$, $b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ty\,dt$

Замеч: 1) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - кус. гл. $\Leftrightarrow$ f явл. кус. гл. на $\forall$ конечном пром-ке

2) f - абс. интегр. на $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx < \infty$

3) все $\int$-ы уже были на предыдущей лекции.

Д-во: Обозначим $f_A(x)=\int\limits_0^A[a(y)\cos xy+b(y)\sin xy]\,dy$. Утв. теор. эквив-но

$\lim\limits_{A\to\infty} f_A(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$

$$f_A(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^A\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\underbrace{(\cos ty\cos xy+\sin ty\sin xy)}_{=\cos((t-x)y)}dt\Big]dy = \text{меняем порядок интегрир.}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[f(t)\int\limits_0^A\cos((t-x)y)\,dy\Big]dt \ominus$$

Общая теорема	Использование в нашем д-ве.
1) Теор. Фубини: Если $I=\int\limits_a^b\int\limits_c^d g(y,t)\,dy\,dt$ -сход-ся, то каждый из $\int$-лов $I_2=\int\limits_a^b\Big[\int\limits_c^d g(y,t)\,dt\Big]dy$ и $I_3=\int\limits_c^d\Big[\int\limits_a^b g(y,t)\,dy\Big]dt$ -сход. и имеет место рав-во $I_1=I_2=I_3$	Достаточно проверить, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^A[f(t)\cos((t-x)y)\,dt\,dy]$ - сход-ся
2) Теор: всякая абс. интегр. ф-ция -интегрируема	Достаточно д-ть, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^A\lvert f(x)\cos((t-y)y)\rvert\,dt\,dy$ -сход-ся
3) Теор: Если $g\geq 0$ и I_2 - сход, то сход $\int$-лы I_1 и I_3 и имеет место рав-во $I_1=I_2=I_3$.	Достат. проверить, что сход. $\int$-л $I_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\lvert f(t)\rvert\int\limits_0^A\underbrace{\lvert\cos((t-y)y)\rvert}_{\leq 1}dy\Big]dt$ $I_2\leq\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lvert f(x)\rvert\cdot A\,dt<\infty$, т.к. f-абс. интегр.

$\Rightarrow$ перестановка порядка интегр. возможна.

$$\ominus\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin((t-x)y)}{t-x}\Big|_0^A dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin(A(t-x))}{t-x}dt = \text{замена } t-x=u$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du=\frac{1}{\pi}\Big[\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0}}_{\text{замена } u=-u}+\int\limits_0^{\infty}\Big]=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin Au}{u}du \ominus$$

Лемма Римана-Лебега для несобств. инт-ла)

Если $\int\limits_a^{+\infty}\lvert h(z)\rvert dz<\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty}h(z)\sin pz\,dz\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$ (без д-ва)

$$\ominus\ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1+\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\overset{\text{обознач.}}{=}I_4+I_5$$

Применим лемму Римана-Лебега к $\int$-у I_5:

$$\int\limits_1^{+\infty}\Big|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{u}\Big|du\leq\int\limits_1^{\infty}\lvert f(x+u)+f(x-u)\rvert du\leq\int\limits_1^{\infty}\lvert f(x+u)\rvert du+\int\limits_1^{\infty}\lvert f(x-u)\rvert du$$

$$\leq\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lvert f(x+u)\rvert du+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lvert f(x-u)\rvert du=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lvert f(v)\rvert dv<+\infty$$

замена $x+u=v$ $x-u=v$

Значит, по лемме Римана-Лебега $I_5 \to 0$ $A \to \infty$

$$I_4 = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x+u)+f(x-u) \overset{\pm f(x\pm 0)}{}}{u}\sin Au\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\sin Au\,du +$$

кус. гл. ф-ция - огранич. в 0 ⇒ она абс. интегр. ⇒ по л. Р-Л 1ый $\int \to 0$ $A\to\infty$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1 \underbrace{\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\sin Au\,du}_{\to 0\ A\to\infty} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x+0)+f(x-0)}{u}\sin Au\,du$$

аналогично (см выше)

$$= \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin Au}{u}\,du =$$ замена $Au = w$

$$= \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi}\int_0^A \frac{\sin w}{w}\,dw \xrightarrow[A\to\infty]{} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

напомним: из МА $\int_0^\infty \frac{\sin w}{w}\,dw = \frac{\pi}{2}$

Итог: $f_A(x) = I_4 + I_5 \xrightarrow[A\to\infty]{} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ чтд.

Замеч: бывают и другие усл., гарантирующие представл. ф-ции в т. ее $\int$-лом Фурье, но только непр-ти недостаточно!

2.3 Разложение на полупрямой. Синус- и косинус-преобр. Фурье.

Пусть $f(x) = \int_0^\infty [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy$ И пусть f — четная ф-ция.

Тогда $a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\cos ty\,dt}_{четн.} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos ty\,dt$ ← прямое косинус-преобр. ф-ции f.

$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\sin ty\,dt}_{нечетн.} = 0 \Rightarrow f(x) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos xy\,dy$ ← обратное косинус-преобр. ф-ции f

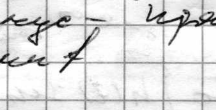
Если ф-ция f опред. на пром-ке $(0;+\infty)$, то продолжив ее до четной ф-ции на $\mathbb{R}$ можем применять прямое и обратное косинус-преобраз. Фурье.

Аналогично, если f-нечетная, то $b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin ty\,dy$, $a(y) \equiv 0$ ← прямое синус-преобр. Фурье ф-ции f.

$f(x) = \int_0^\infty b(y)\sin xy\,dy$ ← обратное синус-преобр. ф-ции f

2.4 Пример вычисления синус- и косинус-преобр. Фурье.

Пусть $f(x) = e^{-ax}$, $a>0$, $x>0$

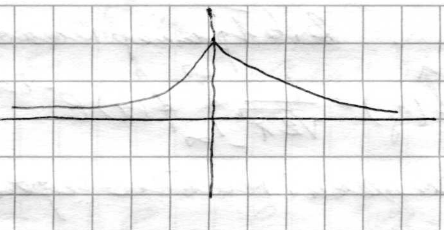


найдем ее косинус и синус преобр. Фурье.

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-at}\cos ty\,dt = -\frac{2}{\pi a}\int_0^\infty \cos ty\,de^{-at} = -\frac{2}{\pi a}\left[e^{-at}\cos ty\Big|_0^\infty + y\int_0^\infty e^{-at}\sin ty\,dt\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi a}\left[-1 - \frac{y}{a}\int_0^\infty \sin ty\,d(e^{-at})\right] = \frac{2}{\pi a}\left[1 + \frac{y}{a}\left(\underbrace{e^{-at}\sin ty\Big|_0^\infty}_{0} - y\int_0^\infty e^{-at}\cos ty\,dt\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi a} - \frac{y^2}{a^2}a(y) = a(y)$$



$$\frac{2}{\pi a} = a(y)\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right) \qquad a(y) = \frac{2}{\pi}\,\frac{a}{a^2+y^2}$$

Заметим, что f - кус. гладкая и абс. интегр. $\Rightarrow$ по теор. о представ-ти ф-ции в т. ее $\int$-лом Фурье можем написать: $\underbrace{f(x)}_{=e^{-ax}} = \int_0^\infty a(y)\cos xy\,dy =$

$$= \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+y^2}dy \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos xy}{a^2+y^2}dy = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}, \quad a>0,\ x>0$$

$\int$-л Лапласа.

Аналогично: можно разложить f с помощью синус-преобраз. Фурье

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\,\frac{y}{a^2+y^2} \qquad e^{-ax} = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{y\sin xy}{y^2+a^2}dy \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{y\sin xy}{a^2+y^2}dy = \frac{\pi}{2}e^{-ax}, \quad a>0,\ x>0$$ — $\int$-л Лапласа (еще один)

2.5 Компл. форма $\int$-ла Фурье. Прямое и обр. преобр. Фурье. Ф-ла обращения

Пусть $f(x) = \int_0^\infty [a(y)\underbrace{\cos xy}_{=\frac{e^{ixy}+e^{-ixy}}{2}} + b(y)\underbrace{\sin xy}_{=\frac{e^{ixy}-e^{-ixy}}{2i}}]dy = \int_0^\infty \frac{a(y)+ib(y)}{2}e^{-ixy}dy +$ (замена $y=-y$)

$$+\int_0^\infty \frac{a(y)-ib(y)}{2}e^{ixy}dy \ominus$$

Замеч.: $a(y)$ - четная, т.к. $a(-y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overbrace{\cos t(-y)}^{=\cos ty}dt = a(y)$

Аналогич. $b(y)$ - нечетная

$$\ominus -\int_0^{-\infty}\frac{a(y)-ib(y)}{2}e^{ixy}dy + \int_0^\infty \frac{a(y)-ib(y)}{2}e^{ixy}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(y)-ib(y)}{2}e^{ixy}dy$$

$$\frac{a(y)-ib(y)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\underbrace{[\cos ty - i\sin ty]}_{=e^{-ity}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ity}dt$$

Значит $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ity}dt\right]\cdot e^{ixy}dy$ - компл. форма $\int$-ла Фурье.

Имеет смысл рассмотреть 2 $\int$-ла:

$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ity}dt}_{=\hat f(y)}$ - прямое преобраз. Фурье ф-ции f в т. y

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy}dy = \check g(x)$ - обратное преобраз. Фурье ф-ции g в т. x

Следоват-но компл. форма $\int$-ла Фурье м.б. записана в виде:

$f(x) = \check{\hat f}(x)$ аналогично можно показать, что $f(x) = \hat{\check f}(x)$ - ф-ла обращения

18.10

2.6 Пример нахожд. прямого и обратного преобр. Фурье.

$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$; $\check{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{+ixy}dx$

Задача: найти прямое и обр. преобр. Фурье ф-ции $f(x)=e^{-ax^2}$, $a>0$, $x\in\mathbb{R}$.

I шаг: Вычислим вспомогат. $\int$-л $J(a)=\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos x\,dx =$ по частям

$=\int_0^{\infty} e^{-ax^2}d\sin x = e^{-ax^2}\sin x\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\sin x(-2xa e^{-ax^2})dx =$

$=-2a\int_0^{\infty} xe^{-ax^2}d\cos x = -2a\Big[\cancel{xe^{-ax^2}\cos x\Big|_0^{\infty}} - \int_0^{\infty}\cos x(e^{-ax^2}+$

$+x(-2ax)e^{-ax^2})dx\Big] = 2a\underbrace{\int_0^{\infty}\cos\, e^{-ax^2}dx}_{=J(a)} + \Big(-4a^2\int_0^{\infty}x^2e^{-ax^2}\cos x\,dx\Big)$

$$\frac{d}{da}J(a)=\frac{d}{da}\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos x\,dx \overset{?}{=} \int_0^{\infty}\frac{d}{da}(e^{-ax^2}\cos x)dx = -\int_0^{\infty}x^2e^{-ax^2}\cos x\,dx$$

Из анализа: $\int$-л можно дифф по параметру под знаком $\int$-ла, если выполн. 3 усл.: 1) подынтегр. ф-ция имеет производную по параметру, 2) исх. $\int$-л сход-ся, 3) ~~[...]~~ производная по парам-ру имеет интегр. мажоранту, т.е. $\exists g(x)$: $|x^2e^{-ax^2}\cos x|\le g(x)$ и $\int_0^{\infty}g(x)dx<\infty$

В нашем случае: допустим, что мы хотим найти $\frac{d}{da}J(a)$ в т. $a_0>0$. Тогда в кач-ве $g(x)$ возьмем ф-цию $g(x)=x^2e^{-a_0x^2/2}$. Тогда $\forall a\ge\frac{a_0}{2}$ и $\forall x\in[0;\infty)$ имеем $|x^2e^{-ax^2}\cos x|\le x^2e^{-a_0x^2/2}$ и $\int_0^{\infty}x^2e^{-a_0x^2/2}dx$ - сход-ся

Тем самым: $J(a)=2aJ(a)+4a^2\frac{dJ}{da}$ $\Rightarrow$

$(1-2a)J=4a^2\frac{dJ}{da}$ $\qquad \frac{1-2a}{4a^2}da=\frac{dJ}{J}$ $\Rightarrow$

$\ln J=\int\frac{1}{4a^2}da-\frac{1}{2}\int\frac{1}{a}da+C_1=-\frac{1}{4a}-\frac{1}{2}\ln a+C_1$ $\Rightarrow$

$J=e^{-1/4a}\cdot e^{-\frac{1}{2}\ln a}\cdot e^{C_1}=\frac{C}{\sqrt{a}}e^{-1/4a}$

$$J(a)=\frac{C}{\sqrt{a}}e^{-1/4a}$$

II шаг: $\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overbrace{e^{-ax^2}\cos xy}^{\text{четная}}dx-$

$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-ax^2}\sin xy}_{\text{нечетная}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos xy\,dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos x|y|dx=$

$\Rightarrow\int$-л $\equiv 0$ $\qquad$ замена $z=x|y|$, $y\ne0$

$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{a}{y^2}z^2}\cos z\,dz}_{J\left(\frac{a}{y^2}\right)}\frac{1}{|y|} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,|y|}\frac{C|y|}{\sqrt{a}}e^{-y^2/4a} = \frac{2C}{\sqrt{2\pi a}}e^{-y^2/4a}$, $y\neq 0$

$\underline{\text{III}}$ шаг: Убедимся, что ф-ция $\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-ixy}dx$ — непр. по y

Напомн. из матана $\Rightarrow$ $\int$-л зависящий от парам-ра явл. непр. ф-цией параметра, если выполн. усл.: 1) несоб. $\int$-л сход-ся 2) подынтегр. ф-ция непр-на по парам-ру, 3) у подынтегр. ф-ции есть интегр. мажоранта.

В нашем случае надо проверить усл. 3: $|e^{-ax^2}e^{-ixy}|\le e^{-ax^2}$

~~$\le e^{-ax^2}$~~ Значит $\hat{f}$ — непр. ф-ция. Следовательно рав-во

(*) $\hat{f}(y)=\frac{2C}{\sqrt{2\pi a}}e^{-y^2/4a}$, $y\neq 0$ утв., что две непр. ф-ции равны всюду, кроме м/б точки $y=0$ $\Rightarrow$ они равны и в т. $y=0$.

$\underline{\text{IV}}$ шаг: будем искать C — подставим в ф-лу (*) $y=0$

$\hat{f}(0)=\frac{2C}{\sqrt{2\pi a}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{ix\cdot 0}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx \overset{\text{замена}}{\underset{t=\sqrt{a}x}{=}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt}_{=\sqrt{\pi}\text{ — }\int\text{-л Пуассона}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi a}} \Rightarrow C=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow$

$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-y^2/4a}$

$\underline{\text{V}}$ шаг: $\check{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{+ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix(-y)}dx=\hat{f}(-y)$

$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(y)=\check{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-y^2/4a}}$

2.7 Пр-во быстро убывающих ф-ций.

Опр 1: Мультииндексом называется вектор $\alpha=(\alpha_1,..,\alpha_n)$ с целыми, неотриц. компонентами α_j

Операции над мультииндексами:

1) сложение $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n)$

2) $\alpha! = \alpha_1!\cdot\alpha_2!\dots\alpha_n!$

3) $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$

4) $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$ где $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$

дифференц. порядка α

Ф-ция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) назыв ~~быстроуб~~ $\quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Опр 2: Быстро убывающей ф-цией ~~в $\mathbb{R}^n$~~ если $\forall\, \alpha$-мультииндекс и $\forall p > 0$ $\exists K = K(\alpha, p)$ - постоянная такая, что 1) $|D^\alpha f(x)| \le \dfrac{K}{1+|x|^p}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

2) f - ∞ дифференц.

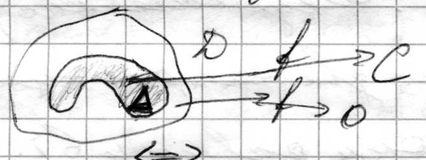
Опр 3: Ф-ция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ назыв. быстро убывающей, если

1) $\forall$ мультииндексов α, β $\quad \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \qquad D^\beta f(x)$ - β-ая производная ф-ции f

2) f - ∞ дифф

Лемма (без д-ва): Опред 2 и 3 эквивалентны

Напомин: из матана $\Rightarrow$ ф-ция $g: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ - обл-ть, откр связн мн-во, g назыв финитной, если $\exists$ замкн ~~огр~~ мн-во $\Delta \subset D$ такое, что $\forall x \in D \setminus \Delta$ $f(x) = 0$



Если $D = \mathbb{R}^n$, то опред. финитности ф-ции выглядит так:

f - финитна, если $\exists$ замкн шар $B \subset \mathbb{R}^n$: $\forall x \in B$ $f(x) = 0$

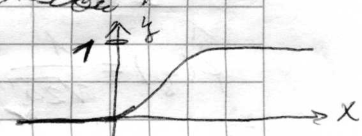
Пример 1 (быстро убыв ф-ция) Всякая финитная ∞ дифф ф-ция в $\mathbb{R}^n$ явл б.у.

Д-во: $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| = \sup\limits_{x \in B} |x^\alpha D^\beta f(x)| = |x_0^\alpha D^\alpha f(x_0)| < \infty$, где $x_0 \in$ (Теор Вейштр из МА)

Напомин из МА: ф-ция $\omega: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная ф-лой:

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

обладает след св-вами:



1) $\omega(x)$ - ∞ дифф. все произв в т.0 $= 0$ $\quad$ 2) $\omega(x) = 0$ $\forall x < 0$ $\quad$ 3) $\omega(x) > 0$ $\forall x > 0$

Пример 2 (финитная ф-ция в $D \subset \mathbb{R}^n$): Фиксируем т. $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Найдем $\varepsilon > 0$: $\forall x: |x - x_0| \le \varepsilon$ верно $x \in D$ - замкн шар рад ε лежит

Построим ф-цию $\omega_{x_0, \varepsilon} = \omega(\varepsilon^2 - |x - x_0|^2)$. Она обладает св-вами:

1) $\omega_{x_0, \varepsilon}$ - ∞ дифф

2) $\omega_{x_0, \varepsilon}(x) = 0$ $\forall x: |x - x_0| > \varepsilon$ (по св-ву 2 ф-ции ω)

3) $\omega_{x_0, \varepsilon} > 0$ $\forall x: |x - x_0| < \varepsilon$

Пример 3 (быстро убыв нефинитная ф-ция в $\mathbb{R}^n$): $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = e^{-a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 - \ldots - a_n x_n^2}$, $a_j > 0$

Д-во: Пусть α, β - $\forall$ мультииндексы. Убедимся, что $D^\beta f(x) = \underset{\text{многочлен}}{P(x)} f(x)$

25.10

$f(x) > 0\ \forall x \Rightarrow$ нефинитна, ∞ дифф - „очевидно"

По индукции можно убедиться, что $D^\beta f(x) = P(x) f(x)$, $P(x)$ - многочлен

Поэтому $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \cdot P(x) f(x)|$ - конечная сумма выражений вида $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\gamma e^{-a_1x_1^2 - \ldots - a_nx_n^2}| < \infty \Rightarrow$ сумма тоже $< \infty$

$\Rightarrow f(x)$ - быстроубыв.

Св-ва быстроубывающих ф-ций:

1) Если f, g - быстр. убыв. ф-ции, то $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ф-ция $af + bg$ - б.у.

Д-во: Очевидно, что $af + bg \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ - ∞ дифф.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(af(x) + bg(x))| \le |a| \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|}_{<\infty} + |b| \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta g(x)|}_{<\infty}$$

2) Если f - б.у. ф-ция, то $\forall$ мультиинд. α $D^\alpha f(x)$ - б.у.

Д-во: $D^\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ - очевидно; и $\forall \beta, \gamma$ - мультиинд.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\gamma [D^\alpha f(x)]| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^{\gamma+\alpha} f(x)| < \infty \ (\text{т.к. } f \text{ - б.у.})$$

3) Если f - б.у. ф-ция, то $\forall$ мульт. α $x^\alpha \cdot f(x)$ - б.у. ф-ция

Д-во: $x^\alpha f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ - очевидно, т.к. по правилу Лейбница $\frac{d}{dx}(u(x)\cdot v(x)) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$, для ф-ций многих переменных и произв. высокого порядка оно выглядит так:

$$D^\alpha(u\cdot v) = \sum_{\beta\le\alpha} (D^\beta u)\cdot(D^{\alpha-\beta} v)\cdot C_\alpha^\beta, \text{ где } C_\alpha^\beta \text{ - некая const.}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\gamma [x^\alpha f(x)]| \underset{\text{по правилу Лейбница}}{\le} \sum_{\delta\le\gamma} |C_\gamma^\delta| \cancel{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(D^\delta x^\alpha)\cdot(D^{\gamma-\delta} f(x)|\cdot|x}$$

$$\le \sum_{\delta\le\gamma} |C_\gamma^\delta| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\underbrace{x^\beta (D^\delta x^\alpha)}_{k\cdot x^{\alpha-\delta+\beta}} (D^{\gamma-\delta} f(x)| < \infty \quad \text{т.к. кол-во б-конеч.}$$

4) Если f - б.у. ф-ция, $P(x)$ - мн-н, то $f(x)\cdot P(x)$ - б.у. ф-ция

Д-во: $\Rightarrow$ из лин-ти и св-ва 3.

Обознач. пр-во б.у. ф-ций обозначают $\underline{S(\mathbb{R}^n)}$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2.8 Преобраз. Фурье для б.у. ф-ций

Опр.: Если $f \in S(\mathbb{R}^n)$, то можно построить 2 новых ф-ции:

$$\hat f(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)} dx, \quad \check f(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i(x,y)} dx,$$

где $(x\cdot y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ - скал. произвед. в $\mathbb{R}^n$; прямое преобраз. Фурье ф-ции f; обратное преобр. Фурье ф-ции f

Для $n=1$ совпадают с теми, что были раньше.

Замеч 1: Для $n=1$ эти ф-лы совпадают с введенными ранее опред. преобраз. Фурье.

Замеч 2: $\int$-лы сходятся. Достаточно убедиться, что сход. $\int_{R^n} |f(x) e^{\mp i(x\cdot y)}| dx$, но $|e^{\mp i(x y)}| = 1$, а ф-ция f - б.у. $\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{K}{1+|x|^p}$ (по опр. б.у. ф-ции (для $\alpha=0, \beta=0$)) - $\forall$ф. имеет место $\forall p>0$, в частности для $p>n$, а $\int_{R^n} \frac{dx}{1+|x|^p}$ - сход-ся, если $p>n$ (см МА)

Обознач: $\hat{f}(y) = F_+[f(x)](y)$ и $\check{f}(y) = F_-[f(x)](y)$

Св-ва преобраз. Фурье б.у. ф-ций:

1) Линейность: $\forall f, g$ - б.у. ф-ции, $\forall a, b \in C$ имеем:

$F_\pm[af(x) + bg(x)] = aF_\pm[f(x)](y) + bF_\pm[g(x)](y)$

Д-во $\Rightarrow$ из лин-ти $\int$-ла, очевидно

2) $F_\pm[x^\alpha f(x)] = (\pm i)^{|\alpha|} D^\alpha (F_\pm[f(x)](y))$

Д-во: $D^\alpha(F_\pm[f(x)](y)) = D^\alpha\left((2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} f(x) e^{\mp i(x\cdot y)} dx\right) = (2\pi)^{-n/2} \cdot$

$\cdot \int_{R^n} f(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} e^{\mp i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)} dx = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} f(x) \underbrace{(\mp i x_1)^{\alpha_1} \cdot}$

$\underbrace{\cdot (\mp i x_2)^{\alpha_2} \dots (\mp i x_n)^{\alpha_n}} e^{\mp i(x_1 y_1 + \dots + y_n x_n)} dx = \underline{(\mp i)^{|\alpha|}} F_\pm[x^\alpha f(x)]$

$(\mp i)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} (x_1)^{\alpha_1} \dots (x_n)^{\alpha_n} = (\mp i)^{|\alpha|} = x^\alpha$ перекинем в лев. часть $\Rightarrow$ чтд.

3) $F_\pm[D^\alpha f(x)](y) = (\pm iy)^\alpha F_\pm[f(x)](y)$ - перевод дифф. в умнож.

Д-во: $F_\pm[D^\alpha f(x)](y) = (2\pi)^{-n/2}\int D^\alpha f(x) e^{\mp i(x\cdot y)} dx = (2\pi)^{-n/2} \cdot$ Теор. Фубини

$\cdot \int_{R^{n-1}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^{|\alpha|-1} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1 - 1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right] e^{\mp i x_1 y_1} dx_1 \right\} e^{\mp i(x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)} dx_2 \dots dx_n =$

по частям $= \underbrace{\frac{\partial^{|\alpha|-1} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1 - 1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}}_{\text{бу}} \underbrace{e^{\mp i x_1 y_1}}_{\text{огр}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \to 0 \quad \pm iy_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{|\alpha|-1} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1 - 1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} e^{\mp i x_1 y_1} dx_1 =$

$= (\pm i y_1)(2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \frac{\partial^{|\alpha|-1} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1 - 1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} e^{\mp i(x y)} dx = \dots =$

$= (\pm i y_1)^{\alpha_1} (\pm i y_2)^{\alpha_2} \dots (\pm i y_n)^{\alpha_n} (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} f(x) e^{\mp i(x\cdot y)} dx =$

$= (\pm iy)^\alpha F_\pm[f(x)](y)$ чтд.

В св-ве 2 надо обосновать дифф. под знаком $\int$-ла:

Нужно найти интегр. мажоранту для производной

$$\left|D^\alpha [f(x) e^{\mp i(x,y)}]\right| = \left|(\mp i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x) e^{\mp i(x,y)}\right| = |x^\alpha f(x)|$$

$=$ не зав-т от y и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha f(x)| < \infty$, т.к. $(x^\alpha f(x))$ – б.у. ф-ция т.к. $f(x)$

4) Пусть $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – лин. преобраз. пр-ва $\mathbb{R}^n$ (невырожд. ($\Leftarrow$ м-ца размера $n \times n$, $\det \neq 0$); $b \in \mathbb{R}^n$ – фикс. вектор. Тогда

$$F_\pm [f(Ax+b)](y) = |\det A|^{-1} e^{\pm i(y, A^{-1}b)} F_\pm [f(x)]((A^{-1})^* y)$$

где B^* – ~~сопр~~ лин. преобраз., сопряженное преобраз. B, т.е. такое, что $(Bu, v) = (u, B^* v)$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

Д-во: $F_\pm [f(Ax+b)](y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b) e^{\mp i(x,y)} dx =$ замена $Ax+b=z$, $x = A^{-1}z - A^{-1}b$, $dx = |\det A^{-1}| dz = dz/|\det A|$

$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{\mp i(A^{-1}z, y)} \cdot \underbrace{e^{\pm i(A^{-1}b, y)}}_{(y, A^{-1}b) = (A^{-1}b, y)} \frac{dz}{|\det A|} =$

$= \cancel{(2\pi)^{-n/2}} |\det A|^{-1} e^{\pm i(y, A^{-1}b)} F_\pm [f(x)]((A^{-1})^* y)$

$(y, A^{-1}b) = (A^{-1}b, y)$; $(A^{-1}z, y) = (z, (A^{-1})^* y)$

5) $F_\pm [f(x-x_0)](y) = e^{\mp i(y, x_0)} F_\pm [f(x)](y)$ – перевод сдвига по аргументу в сдвиг по фазе.

Д-во: $\Rightarrow$ из св-ва 4, $A = E = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$, $b = -x_0$. Тогда $A^{-1} = (A^{-1})^* = A = E$

$\det E = 1$; $A^{-1}b = -x_0$, $(y, -x_0) = -(y, x_0)$ $\Rightarrow$ $\mp$ вместо $\pm$

Тогда $((A^{-1})^*) y = y$.

6. $F_\pm [f(ax)](y) = \frac{1}{|a|^n} F_\pm [f(x)](\frac{y}{a})$, где $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ – правило изменения масштаба

Д-во: $\Rightarrow$ из св-ва 4: $A = \begin{bmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{bmatrix}$, $b = 0$. Тогда $A^{-1} = (A^{-1})^* = \begin{bmatrix} a^{-1} & & 0 \\ & a^{-1} & \\ 0 & & a^{-1} \end{bmatrix}$

7) Если $f \in S(\mathbb{R}^n)$, то $F_\pm [f] \in S(\mathbb{R}^n)$ – преобраз. Фурье

Д-во: переводит ~~пр~~-во б.у. ф-ций $S(\mathbb{R}^n)$ в себя,

1.11 1) из св-ва 2 $\Rightarrow$ $F_\pm [f]$ – ∞ дифф. ф-ция

Осталось д-ть, что $\forall \alpha, \beta$ – мультиинд. $\sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} |y^\alpha D^\beta F_\pm [f(x)](y)| < \infty$

Достаточно проверить, что $|y^\alpha D^\beta F_\pm [f(x)](y)| \xrightarrow[|y| \to \infty]{} 0$ – упр.

(предположение, что $y_n \to \infty$. Тогда $|y^\alpha D^\beta F_\pm [f(x)](y)| \overset{(2)}{=} |y^\alpha F_\pm [x^\beta f(x)](y)| =$ (y_n – n-ая компонента)

След. лекция в 402. (8.11)

(3)

$:= g(x)$ - обознач. - б.у. ф-ция

$= |F_{\pm}[D^{\alpha}(x^{\beta}f(x))](y)| = (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{\mp i(x,y)} dx \right| =$ { к повторным $\int$-лам можно, т.к. ф-ция б.у., мажоранта есть.

$= (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{\mp i(x_1y_1+\ldots+x_{n-1}y_{n-1})} \Big[\underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(x_1,\ldots,x_n) e^{\mp i x_n y_n} dx_n}_{\to 0 \text{ при } y_n \to \infty} \Big] dx_1 \ldots dx_{n-1} \right| \xrightarrow[y_n \to \infty]{}$

по лемме Римана-Лебега для ∞ промеж-ка

8) Формула обращения: $F_{\pm}[F_{\mp}[f]] = f \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ - б.у. ф-ция

Д-во: При $n = 1$ эта ф-ла уже доказана. Дальше по индукции.

Докажем ее для $n = 2 \qquad F_+[F_-[f]](x) = f(x)$

$F_+[F_-[f]](x) = (2\pi)^{-\frac{2}{2}} \iint_{\mathbb{R}^2} F_-[f](y) e^{-i(x_1y_1+x_2y_2)} dy_1 dy_2 =$

$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \Big[\iint_{\mathbb{R}^2} f(t) e^{+i(t_1y_1+t_2y_2)} dt_1 dt_2 \Big] \cdot e^{-i(x_1y_1+x_2y_2)} dy_1 dy_2 =$

$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1,t_2) e^{+it_2y_2} dt_2 \Big] e^{-ix_2y_2} dy_2 \Big\} e^{+it_1y_1} e^{-ix_1y_1} dt_1 dy_1 =$

обратное преобраз. Фурье $n=1$
$t_2 \mapsto f(t_1,t_2)$

прямое преобр. Фурье от обратного преобр. Фурье, $n = 1$ $\Rightarrow$ ф-ла обращ. уже есть!

Согласно одномерной ф-ле обращения

$\{\ldots\} = f(t_1, x_2)$. Аналогично продолж. с оставшимися $\int$-лами:

$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}_2} f(t_1,x_2) e^{+it_1y_1} e^{-ix_1y_1} dt_1 dy_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1,x_2) e^{+it_1y_1} dt_1}_{\text{обратное преобр. Фурье}} \Big] \cdot$

$\cdot e^{-ix_1y_1} dy_1 \Big\} =$ весь - прямое преобр. Фурье

$= f(x_1, x_2)$ - чтд

Аналогично для $\forall n \geq 2$.

8о

2.9 Свертка б.у. функций

Опр: Если $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, то сопоставим им новую ф-цию $f * g$, которая назыв. сверткой f и g и значение которой в т. $x \in \mathbb{R}^n$ задается ф-лой $\quad (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$

Замеч: Этот $\int$-л сход-ся,

т.к. f и g - б.у. функции: $|f(x-y)| \leq \frac{K}{1+|x-y|^p} = K$ $\forall p$, пусть $p = 0$

$|g(y)| \leq \frac{C}{1+|y|^p} \underset{p>n}{\Rightarrow} \int$-сход-ся

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dy \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{KC}{1+|y|^p} dy < \infty$, т.к. $p > n$ (см МА)

Замеч: Даже если f и g не явл. б.у. ф-циями, но $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ сход-ся, то говорят, что он задает свертку $f*g$

Замеч: прямого физич. смысла нет, но удобно, особенно в ТФКП

Св-ва свертки б.у. функций:

1) $f*g = g*f$ (коммутативность)

Д-во: $(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \underset{\substack{\text{замена } x-y=z \\ dz = |\det \frac{\partial z}{\partial y}| \cdot dy = dy}}{=\!=\!=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz = (g*f)(x)$

2) $(f*g)*h = f*(g*h)$ (ассоциативность)

Д-во — аналогично (1)

3) $(af+bg)*h = a(f*h) + b(g*h)$ (линейность)

Д-во: $\Rightarrow$ из лин-ти $\int$-лов

4) $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g = f*(D^\alpha g)$, $\forall \alpha$ - мультиинд, $\forall g, f$ - б.у. ф-ции

Д-во: $D^\alpha(f*g)(x) = D_x^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (D_x^\alpha f(x-y))\, g(y)dy = (D^\alpha f)*g$

Второе рав-во вытекает из уже доказанного и коммут-ти свертки:

$D^\alpha(f*g) = D^\alpha(g*f) = (D^\alpha g)*f = f*D^\alpha g$

5) $F_\pm[f*g] = (2\pi)^{n/2} F_\pm[f] \cdot F_\pm[g]$

Д-во: $F_\pm[f*g](x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(y)\, e^{\mp i(x,y)} dy =$

$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y-z)g(z)dz\Big] e^{\mp i(x,y)} dy =$ поменяем порядок интегр., можно, т.к. ф-ции - б.у.

$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y-z)e^{\mp i(x,y)} dy\Big] g(z)dz = \{$ замена $y - z = t$

$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{\mp i(x,z)}\, e^{\mp i(x,t)} dt\Big] g(z)dz =$

$= (2\pi)^{+\frac{n}{2}} \cdot \Big[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int f(t) e^{\mp i(x,t)} dt\Big] \cdot \Big[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(z) e^{\mp i(x,z)} dz\Big] =$

$= (2\pi)^{n/2} F_\pm[f](x) \cdot F_\pm[g](x)$ чтд.

преобр. Фурье переводит свертку в умножение.

6) $F_\pm[f\cdot g]=(2\pi)^{-n/2}F_\pm[f]*F_\pm[g]$

Д-во: (6) => из (5) и ф-ла обращения:

Запишем (5) для прямого преобраз. Фурье и ф-ций $\check{f},\check{g}$

$F_+[\check{f}*\check{g}]=(2\pi)^{n/2}F_+[\check{f}]\cdot F_+[\check{g}]=(2\pi)^{n/2}f\cdot g$ } применим F_-

$\check{f}*\check{g}=F_-[F_+[\check{f}*\check{g}]]=(2\pi)^{n/2}F_-[f\cdot g]$

$F_-[f\cdot g]=(2\pi)^{-n/2}\check{f}*\check{g}$

2.10 Формула Пуассона

Теор (ф-ла Пуассона): Если $f\in S(\mathbb{R})$ - ф-ция от одной переменной, то

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(2\pi n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)$$

Д-во: докажем, что $\forall x\in\mathbb{R}$ верно $\underbrace{\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+2\pi n)}_{=F(x)\text{ - обознач.}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$

Св-ва $F(x)$:

1) F - 2π-периодич. ф-ция: $F(x+2\pi)=\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+\underbrace{2\pi+2\pi n}_{2\pi(n+1)})=$ замена $n+1\to n$

$=\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+2\pi n)=F(x)$

2) F - непр. дифференц.

По теор о представ-ти ф-ции в точке ее рядом Фурье =>

$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$, $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)e^{-inx}dx$

Вычислим $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x+2\pi k)e^{-inx}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+2\pi k)\cdot$

$\cdot e^{-inx}dx=\left\{\begin{matrix}\text{замена}\\ x+2\pi k=y\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}f(y)e^{-iny}\underbrace{e^{+i2\pi kn}}_{=1}dy=$

$-\pi \quad \pi \quad 3\pi$, $k=0$, $k=1$; Объедин. все => получ. $\mathbb{R}$ $=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-iny}dy=\hat{f}(n)$

Чтобы д-ть св-во (2) обоснуем законность почленного дифф. ряда для $F(x)$: если $f\in S(\mathbb{R})$, то $F(x)=\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+2\pi n)$ - непр. дифф в $\mathbb{R}$ $\to[-\pi;\pi]$

Напомин. (МА): Теор. о почленном дифференц. функцион. ряда: 3.11

Если 1) $\forall n$ $u_n(x)$ - непр. дифф. ф-ция

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ - сход-ся

3) $\forall n$ $\exists c_n=const$: $\forall x\in[a,b]$ $|u_n'(x)|\le c_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ - сход-ся

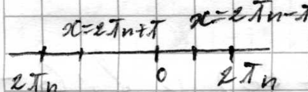
дифф. в конец 6

Тогда ф-ция $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — непр. дифф на $[a,b]$ и $\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$

(1) очевидно, т.к. б.у. ф-ция, (2) тоже

В нашем случае $u_n(x)=f(x+2\pi n)$, надо проверить усл (3)

$$\left|\frac{d}{dx}f(x+2\pi n)\right|\le \frac{K}{1+|x+2\pi n|^p}\sim\frac{K_1}{|n|^p}\underset{\text{обозначим}}{=}C_n,\ \text{положим } p=2.$$



Тогда $|f'(x+2\pi n)|\le C_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} C_n=K_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

2.11 Теор Котельникова-Шеннона

Теор (Кот-Шен) Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\in S(\mathbb{R})$ и $\exists a>0: \hat f(x)=0\ \ \forall |x|>a$.

Тогда $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi n}{a}\right)\mathrm{sinc}\left[a\left(x-\frac{\pi n}{a}\right)\right]$, где синкус

$\mathrm{sinc}\, t=\frac{\sin t}{t}$ — ф-ция отсчетов

Д-во: по ф-ле обращения $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\substack{-\infty\\ -a}}^{\substack{a\\ \infty}}\hat f(y)e^{+ixy}dy$ — обрезали то, где $\hat f=0$

Разложим $\hat f(y)$ в ряд Фурье в компл. форме на $[-a,a]$:

$$\hat f(y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{\pi n}{a}y},\ \text{где } c_n=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\hat f(y)e^{-i\frac{\pi n}{a}y}dy$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\int_{-a}^{a}e^{+i\frac{\pi n}{a}y}\,e^{ixy}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\frac{e^{(i\frac{\pi n}{a}+ix)y}\Big|_{-a}^{a}}{i(\frac{\pi n}{a}+x)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2c_n\left(e^{i(\frac{\pi n}{a}+x)a}+e^{-i(\frac{\pi n}{a}+x)a}\right)}{2\cdot i\left(\frac{\pi n}{a}+x\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2c_n a\sin\left(\left(\frac{\pi n}{a}+x\right)a\right)}{\left(\frac{\pi n}{a}+x\right)\cdot a}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a2c_n}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{sinc}\left[a\left(x+\frac{\pi n}{a}\right)\right]$$

Сделаем замену $n\to -n$. Осталось проверить, что коэф-т

$$\frac{2ac_{-n}}{\sqrt{2\pi}}=f\left(\frac{\pi n}{a}\right)$$

$$\frac{2ac_{-n}}{\sqrt{2\pi}}=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2a}\int\limits_{\substack{-a\\ -\infty}}^{\substack{\infty\\ a}}\hat f(y)e^{+i\frac{\pi n}{a}y}dy\overset{\text{ф-ла обращения}}{=}f\left(\frac{\pi n}{a}\right)$$

Замеч: Теор (Кот-Шен) лежит в основе теории цифровой передачи данных

микрофон $\xrightarrow{\varphi=f}$ преобразователь F_- $\xrightarrow{\hat f}$ передатчик $\xrightarrow{f(\frac{\pi n}{a})}$ приемник $\longrightarrow$

∞, счетное кол-во точек

$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi n}{a}\right)\mathrm{sinc}\left[a\left(x-\frac{\pi n}{a}\right)\right]$

$\xrightarrow{\hat f}$ преобразователь F_+ $\xrightarrow{f=\varphi}$ динамик — сигнал будет без искажений

была проблема — континуум точек