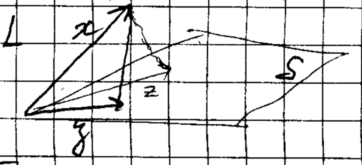
II семестр

4.7 Вектор наилучшего приближения. Нер-во Бесселя. 7.02.1

Ортогональное проектирование и прямая сумма пр-в.

Опр: Если L — лин пр-во со скал. произв, $x \in L$, S — подпр-во в L, то говорят, что $y \in S$ явл. в-ром наилучш. приближ. $\Leftrightarrow \forall z \in S$ $\|x-y\| \le \|x-z\|$ (ближайшим в-ром)



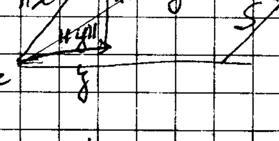
Теор: Пусть L — лин пр-во со скал. произв, S — конечномерное подпр-во в L; $x_1 \dots x_n$ — ортонорм. базис в S. Тогда $\forall x \in L$ $\exists!$ ближайший в S в-р y, причем $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (x, x_k)$ — коэф-т Фурье в-ра x относ. ортонорм. базиса $x_1 \dots x_n$

Д-во: берем $z \in S$, $z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ и вычислим: $\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$ и

$\|x - z\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \lambda_k|^2 + \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$. (*)

Теор (Пифагора): В усл. предыдущ. теор. имеет место рав-во:

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2$



Д-во: $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (x, x_k)^2}_{=\|y\|^2}$ — по ф-ле (*)

Теор (нер-во Бесселя): Пусть L — лин пр-во со скал. произв, $x_1, \dots, x_n, \dots, \infty$ — ортонорм. пос-ть в-ров в L, $x \in L$, $\lambda_k = (x, x_k)$ — коэф-ты Фурье. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ — сход-ся и $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2$

Д-во: Обознач. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Из предыдущ. $\Rightarrow$, что S_n — в-р наилучш. приближ. к в-ру x с помощью в-ров, лежащих в лин. оболочке $x_1, \dots, x_n$.
По теор. Пифагора $0 \le \|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \|S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$

Значит $\forall n$ $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ — сход., т.к. монот. возраст. пос-ть частич. сумм ограничен. $\Rightarrow$ переход к $\lim_{n \to \infty}$ $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \|x\|^2$

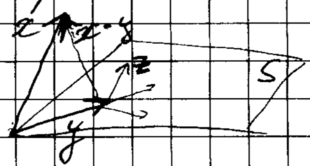
Теор (о $\exists$ в-ра наилучш. приближ.): Пусть H — гильбертово пр-во, S — его замкнутое подпр-во. Тогда $\forall$ в-ра $x \in H$ $\exists!$ в-р $y \in S$, ближайший к x.

Д-во (идея) ф-ция достигает своего мин на замкн. мн-ве (из МА — на компакте) но $\|y\|$ не м.б. $> \|x\|$ дальше см. методички.

! Опр: Пусть L – лин. пр-во со скал. произв., S – подпр-во в нем, $x \in$

Говорят, что $y \in S$ явл. ортогон. проекцией в-ра x на подпр-

если $x - y \perp z \quad \forall z \in S$



Теор: Если L – лин пр-во со скал. произв, S – его подпр-во и $x \in L$

Тогда след утв. эквивалентны:

1) y явл ортогон. проекцией в-ра x на S

2) y явл ближайшим к x в-ром подпр-ва S

Д-во: Из прошлого сем-ра знаем $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) +$

1) ⇒ 2) $\forall z \in S \quad \|x \overset{\pm y}{-} z\|^2 = \|(x-y)+(y-z)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2$

$2\mathrm{Re}(x-y, y-z) = 0$ по опр. y. $\geq \|x-y\|^2 \Rightarrow y$ – ближай

2) ⇒ 1) Рассм вспомогат. ф-цию $f(t) = \|x - y + t\underset{\in S}{z}\|^2 \geq \|x-y\|^2$ т.к. y – ближайш

$\Rightarrow f$ имеет лок мин в т. $0 \Rightarrow f'(0) = 0 = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} =$

$= \lim\limits_{t \to 0} \frac{\|x-y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x-y, tz) + \|tz\|^2 - \|x-y\|^2}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{2t\mathrm{Re}(x-y,z) + t}{t}$

$= 2\mathrm{Re}(x-y, z) = 0$

Заменив z на iz получим, что $\mathrm{Im}(x-y, z) = 0$. Значит $(x-$

$\forall z \in S \Rightarrow y$ – ортогон. проекция x на S

Опр: Если S – подпр-во в L, то $S^\perp = \{x \in L \mid x \perp y \ \forall y \in S\}$ –

ортогон. дополнение подпр-ва S.

Опр: Пусть S и T – подпр-ва пр-ва L, говорят, что $L = S \oplus T$,

$\forall x \in L \ \exists!\, y \in S$ и $\exists!\, z \in T$, что $x = y + z$

Теор: Пусть H – гильбертово пр-во, S – замкнутое подпр-во в H

Тогда $H = S \oplus S^\perp$

Д-во: Фикс. $x \in H$, обозначим y – ближайший к x в-р подпр

Убедимся, что $x - y \in S^\perp$ – по предыдущ. теор.

Значит $x = \underset{\in S}{y} + \underset{\in S^\perp}{(x-y)}$

Убедимся, что разлож. единственно

От противного, пусть $x = \overset{\in S}{y_1} + \overset{\in S^\perp}{z_1} = \overset{\in S}{y_2} + \overset{\in S^\perp}{z_2}$. Тогда $\overset{\in S}{y_2 - y_1} = \overset{\in S^\perp}{z_1 - z_2}$ $\cdot (y_2 - y_1)$

Умн-я g-ть, что $S^\perp$ - подпр-во.

$\|y_2 - y_1\| = (\underset{S^\perp}{z_1 - z_2}, \underset{S}{y_2 - y_1}) = 0 \Rightarrow y_2 = y_1$ и $z_1 = z_2$

4.8 Полнота ортонормир. системы. Рав-во Парсеваля. Замкнутая система. Гильбертов базис.

Опр: Пусть L - лин. пр-во со скал. произв. и $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ - ортонормир. пос-ть в-ров в L. Ортонормир. пос-ть $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ назыв. пополнением ортонорм. пос-ти $x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Полной назыв. такая орт. система, кот. нельзя пополнить, т.е. такая, что если $x_0 \perp x_k \ \forall k$, то $x_0 \equiv 0$

Теор (рав-во Парсеваля) Пусть H - гильбертово пр-во, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ - полная ортонормир. система в H. Тогда $\forall x, y \in H$ справедливо $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k}$, где $\lambda_k = (x, x_k)$, $\mu_k = (y, x_k)$ - коэф-ты Фурье. В частности, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ (в нер-ве Бесселя нер-во, здесь =, т.к. полная система)

Д-во: Обознач. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Тогда $\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \|\sum\limits_{k=1}^{n+p} \lambda_k x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\|^2 = \|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k x_k\|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_k|^2$. По нер-ву Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ - сход-ся $\Rightarrow$ для него выполн. критерий Коши сход-ти ряда, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N : \forall p > 0 \ \forall n \geq n_0 \ \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |\lambda_k|^2 < \varepsilon$

Значит $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall p > 0 \ \forall n \geq n_0 \ \|S_{n+p} - S_n\|^2 < \varepsilon \Rightarrow S_n$ - фундамент. $\Rightarrow$ она сход-ся, т.к. H - полное. Обознач. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = z$

$(x - z, x_k) = (x, x_k) - (z, x_k) = \lambda_k - (\lim\limits_{n\to\infty} S_n, x_k) = \lambda_k - \lim\limits_{n\to\infty} (S_n, x_k) =$
$= \lambda_k - \lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{m=1}^{n} \lambda_m x_m, x_k) = \lambda_k - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} \lambda_m (x_m, x_k) = \lambda_k - \lambda_k = 0$

$(x_m, x_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq k \\ 1, & \text{если } m = k \end{cases}$ т.к. ортонормир. система

Значит $x - z \perp x_k \ \forall k$, но пос-ть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ - полная, то $x - z = 0$

$x = z = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$

Следовательно $(x, y) = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x_k, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{(y, x_k)} =$
$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\mu_k}$

Опр: Ортонормир. система $x_1, \dots, x_n$ назыв. замкнутой, если $\forall x \in L$ выполн. рав-во $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$, где $\lambda_k = (x, x_k)$

9.02 Опр: Пусть $x_1, \dots, x_n, \dots$ — ортонормир. система в гильбертовом пр-ве H.

1) Эта система назыв. полной, если ее нельзя пополнить, т.е. если $\forall x \in H$: $x \perp x_k$ $\forall k$ обязательно $x = 0$.

2) замкнутой, если $\forall x \in H$ $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$, где $\lambda_k = (x, x_k)$

3) гильбертовым базисом, если $\forall x \in H$ справедливо $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (x, x_k)$

Замеч: Основной шаг в д-ве рав-ва Парсеваля состоит в том, что мы доказали, что всякая полная ортонорм. система явл. гильбертовым базисом.

Теор (о $\exists$ гильбертова базиса): Во всяком сепарабельном гильбертовом пр-ве $\exists$ гильбертов базис.

Идея д-ва: Достаточно построить полную ортонорм. систему (ОНС), в ней будет счетное кол-во в-ров (т.к. сепарабельно).

1.9 Теор. Рисса-Фишера. Изоморфизм гильбертовых пр-в.

Теор (Рисса-Фишера): Пусть H — гильбертово пр-во, $x_1, \dots, x_n, \dots$ — ОНС в H и $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ — числа, такие, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$. Тогда $\exists!$ в-р $x \in H$ т.что (1) $\forall k$ $\lambda_k = (x, x_k)$ и (2) $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.

Д-во: Обознач. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Из д-ва рав-ва Парсеваля знаем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (при этом мы использовали тот факт, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$ — сход., но в д-ве рав-ва Парсеваля сход-ть этого ряда $\Rightarrow$ из нер-ва Бесселя, а теперь она дана по усл.)

Обознач. $x = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, убедимся, что это и есть искомый в-р:

1) $(x, x_k) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, x_k\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{(x_j, x_k)}_{\begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \text{ т.к. ОНС}} = \lambda_k$

$\overline{(x,x_j)}=\bar{\lambda}_j$

2) $\|x\|^2=(x,x)=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j,\ x\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x_j,x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^2$

Докажем ед-ть:

Пусть $x=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k$ и пусть $\exists y\in H:\ \forall k\ \ \lambda_k=(y,x_k)$ и $\|y\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2$

$\|x-y\|^2=(x-y,x-y)=\|x\|^2-2Re(x,y)+\|y\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2-2\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2=0$

$(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k,\ y\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\underbrace{(x_k,y)}_{\overline{(y,x_k)}=\bar{\lambda}_k}=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2\in R$

$\Rightarrow x-y=0$, $x=y$

Опр: Говорят, что гильбертовы пр-ва H и H_1 изоморфны, если $\exists$ отображ. $A: H\to H_1$ и $B: H_1\to H$, кот. удовл. след. усл.: 1) $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$ $\forall x,y\in H$, $\forall\alpha,\beta$ - числа, т.е. A - линейно.

2) $(Ax,Ay)_{H_1}=(x,y)_H$ $\forall x,y\in H$ $\Leftrightarrow$ оп-р A сохраняет скалярное произвед.

пр-во, в кот. считаем произведение

3) $B(\alpha u+\beta v)=\alpha Bu+\beta Bv$ $\forall u,v\in H_1$, $\forall\alpha,\beta$ - числа. $\Leftrightarrow B$ - линеен.

4) $(Bu,Bv)_H=(u,v)_{H_1}$ $\forall u,v\in H_1$ $\Leftrightarrow$ B сохраняет скал. произв.

5) $A(Bu)=u$ $\forall u\in H_1$ и $B(Ax)=x$ $\forall x\in H$ $\Leftrightarrow$ A и B взаимно обратные.

Замеч: По сути H и H_1 изоморфны, если они получаются друг из друга переобозначением: $Bu\in H\leftrightarrow x\in H$ т.ч. $x=Bu$ (или $u=Ax$)

Теор (об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пр-в): Всякое ∞-мерное сепарабельное гильбертово пр-во H изоморфно пр-ву l_2.

Д-во: Фиксируем гильбертов базис $x_1,\dots,x_n,\dots$ в пр-ве H. Построим отображение $A: H\to l_2$ по ф-ле $H\ni x\mapsto(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\dots)$, где $\lambda_n=(x,x_n)$

$\in l_2$, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<\infty$

Линейность A $\Rightarrow$ из лин-ти скал. произв. по I аргументу.

нер-во Бесселя

$(Ax,Ay)_{l_2}=((\lambda_1,..,\lambda_n,..),(\mu_1,..,\mu_n,..))_{l_2}:=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\bar{\mu}_n=(x,y)_H$

$\mu_n=(y,x_n)$ рав-во Парсеваля

Построим отображ. $B: l_2\mapsto H$ по след. правилу: $l_2\ni(\lambda_1..\lambda_n..)\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$

тот самый в-р в H с коэф-тами Фурье $\lambda_1..\lambda_n..$, кот. $\exists$ по теор. Рисса-Фишера

Линейность очевидна, сохраняет скал. произв., т.к. его сохраняет A

Убедимся, что $A(\underbrace{B(\lambda_1,..\lambda_n,..)}_{\sum\lambda_n x_n \text{ - очевидно}})=(\lambda_1,..\lambda_n,..)$

Аналогично $B(A(x))=x$

4.10 Критерий полноты ортонормир. системы

Тригонометрич. система как пример полной ОНС в $L_2(-\pi;\pi)$

Теор (критерий полноты). Пусть H — гильбертово пр-во и $x_1, x_n, ..$ — ОНС в нем. Тогда след. утв. эквив-ны:

1) $x_1 .. x_n ..$ — полная

2) $x_1, .. x_n ..$ — замкнутая

3) $x_1 .. x_n ..$ — гильбертов базис.

Д-во: $1 \Rightarrow 2$ — это утверждает рав-во Парсеваля

$2 \Rightarrow 3$ От противного, т. е. предполож. $x_1 .. x_n ..$ — замкн. система, не явл. гильбертовым базисом.

$\exists x \in H$: $x \neq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n}_{y}$, где $\lambda_n = (x, x_n)$ обозначим его так, он $\exists$

Пусть μ_n — коэф-т Фурье в-ра $x-y$: $\mu_n = (x-y, x_n) = (x, x_n) - (y, x_n) =$
$= (x, x_n) - (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, x_n) = \lambda_n - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \underbrace{(x_k, x_n)}_{\begin{cases}1, & k=n\\0, & k\neq n\end{cases}} = \lambda_n - \lambda_n = 0$

т.к. $x_1 .. x_n ..$ — замкнута $\Rightarrow \|x-y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\underbrace{\mu_n}_{0}|^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0$ противореч. $x \neq y$

$3 \Rightarrow 1$ От противного: допустим, что $x_1, .. x_n ..$ — гильбертов базис, но не полная система. Тогда $\exists x_0$: $\|x_0\| = 1$ и $\forall k \geq 1$ $x_0 \perp x_k$ т.е. $(x_0, x_k) = 0$

При этом $\lambda_n = (x_0, x_n) = 0$. Т.к. $x_1 .. x_n ..$ — гильбертов базис, то
$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n = 0$. Пришли к противореч.: $\|x_0\| = \|0\| = 0$ $=1$

~~Вопрос~~ 2

В пр-ве $L_2(-\pi;\pi)$ рассм. тригон. систему ф-ций

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, .., \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx ..$

$(f, g)_{L_2(-\pi;\pi)} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx$. Из 1-й лекции в сентябре известно, что это ОНС в $L_2(-\pi;\pi)$. Явл. ли она полной? (остальное эквив.)

Фикс. $f \in L_2(-\pi;\pi)$ и обознач. $\alpha_k = (f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx)$ и $\beta_k = (f, \sin kx \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}})$

$\alpha_0 = (f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$. Система будет полной, если $\forall f$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$$

Оно лишь обозначениями отличается от рав-ва Ляпунова и поэтому верно => Триг. система полна. В самом деле,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),\text{ где } a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \sqrt{\pi}\,a_k,\quad \beta_k = \sqrt{\pi}\,b_k \text{ - аналогично.}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

§5 Ортогональные многочлены. 21.02

5.1 Ортогональные мн-ны как результат ортогонализации пос-ти мономов. Общие св-ва ортогональных мн-ов.

Опр: ф-ция $h:(a,b)\to\mathbb{R}$ назыв-ся весовой ф-цией (весом), если $h(x)>0$ для почти всех $x\in(a,b)$ (всех кроме мн-ва меры 0) и $\int_a^b h(x)dx<\infty$

Опр: Говорят, что $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ принадлежит весовому пр-ву Лебега $L_2^h(a,b)$, если $\int_a^b f^2(x)h(x)dx<\infty$.

Это пр-во со скал. произв. $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx$. Более того, $L_2^h(a,b)$ явл. сепарабельным гильбертовым пр-вом.

Цель: Изучим ортонорм базис в $L_2^h(a,b)$, состоящий из мн-ов.

Опр: Говорят, что пос-ть мн-ов $q_0(x), q_1(x),\dots, q_n(x)$ явл. пос-тью ортогональных мн-ов на пром-ке (a,b) с весом h, если

1) $\forall n\geq 0$ $q_n(x)$ - мн-н степени n
2) старший коэффициент $q_n(x)>0$
3) $(q_m,q_n)=\int_a^b q_m(x)q_n(x)\,h(x)dx=\delta_{mn}=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 1 & m=n\end{cases}$

Построение: Возьмем пос-ть мономов $x^0, x^1, x^2, \dots, x^n, \dots$ $\forall$ интервала (a,b) эта пос-ть явл. лин. независ. Применим к ней процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

± - чтобы старш. коэф-т>0

$y_0(x) = x_0$ $\quad q_0(x) = \pm\dfrac{y_0(x)}{\|y_0(x)\|}$

$y_1(x) = x^1 - (x^1, q_0(x))q_0(x)$ $\quad q_1(x) = \pm\dfrac{y_1(x)}{\|y_1(x)\|}$

$y_n(x) = x^n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(x^n, q_k(x))q_k(x)$ $\quad q_n(x) = \pm\dfrac{y_n(x)}{\|y_n(x)\|}$

Общие св-ва ортогон. мн-нов:

1. Всякий мн-н $Q(x)$ степени n может быть представлен, как лин. комбинация мн-нов $q_0(x), \dots, q_n(x)$, т.е. $Q(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} C_m q_m(x)$

Д-во: $\langle x^0, x^1, x^2, \dots, x^n, \dots\rangle = \langle q_0, q_1, \dots, q_n, \dots\rangle$.

2. Пос-ть ортогон. мн-нов $q_0(x), \dots, q_n(x)$ опред-ся весом $h(x)$ однозначно.

Д-во: из Гр-Шмидта г-в-ра, одн-ть за счет $\pm$ $\quad (\leftarrow \Rightarrow \uparrow)$

3. Если $Q_n(x)$ - $\forall$ мн-н степени n, то $\forall m > n$ $\quad Q_n \perp q_m$

т.е. $\int\limits_a^b Q_n(x)q_m(x)h(x)\,dx = 0$

Д-во: $Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k q_k(x) \quad \Rightarrow \int\limits_a^b \dots = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \int\limits_a^b q_k(x)q_m(x)h(x)\,dx = 0$ т.к. $k \neq m$

4. Если $h: (-a, a) \to \mathbb{R}$ - четная, то $\forall n$ $\quad q_n(-x) = (-1)^n q_n(x)$

Д-во: рассмотрим вспомогат. мн-ны $\tilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$

1) $\forall n$ $\tilde{q}_n(x)$ - мн-н степени n

2) Ст. коэф-т $\tilde{q}_n(x) > 0$

3) $\int\limits_{-a}^{a} \tilde{q}_n(x)\tilde{q}_m(x)h(x)\,dx \underset{\text{т.к. } h \text{ - четная}}{=} (-1)^{m+n}\int\limits_{-a}^{a} q_n(-x)q_m(-x)h(x)\,dx = \{x \to -x\}$

$= (-1)^{m+n}\int\limits_{-a}^{a} q_n(x)q_m(x)h(x)\,dx = \delta_{mn}$. Значит $\tilde{q}_n(x)$ образует пос-ть ортогон. мн-нов с весом h. Т.к. ортогон. мн-ны задаются весом однозначно, то $\forall n$ $\tilde{q}_n(x) = q_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$ - ч.т.д.

5. Если $q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$, то $\forall n$ ~~...~~ трехчленная рекуррентная ф-ла.

$$\boxed{x q_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x)}$$

Д-во: Из (1) $\Rightarrow x q_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_k q_k(x)$, где $c_k = (x q_n, q_k) =$ Фурье.

$= \int\limits_a^b \underbrace{x q_n(x)}_{Q_{n+1}} q_k(x) h(x)\,dx \underset{\text{св-во 3}}{=}$ 0, если $n+1 < k$, или $n < k-1$; если $k+1 < n$, или $k < n-1$

$\neq 0$, если $k = n-1;\ n;\ n+1$

Значит $x q_n(x) = c_{n+1} q_{n+1}(x) + c_n q_n(x) + c_{n-1} q_{n-1}(x)$

$x(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots) = c_{n+1}(a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + \ldots) + c_n(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots) +$
$+ c_{n-1}(a_{n-1} x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots)$

x^{n+1}: $a_n = c_{n+1} a_{n+1}$ $\Rightarrow c_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$

x^n: $b_n = c_{n+1} b_{n+1} + c_n a_n$ $\Rightarrow c_n = \left(b_n - \frac{a_n}{a_{n+1}} b_{n+1}\right)\frac{1}{a_n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$

$c_{n-1} = (x q_n, q_{n-1}) = \int_a^b x q_n(x) q_{n-1}(x) h(x)\,dx =$

$= \int_a^b x q_{n-1}(x) q_n(x) h(x)\,dx = (x q_{n-1}, q_n) = \frac{a_{n-1}}{a_n}$

Замеч: Трехчленная рекуррентная ф-ла м/б переписана в виде:

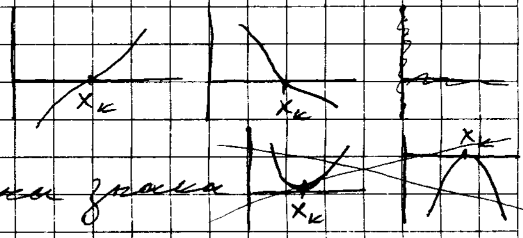
$q_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) q_n(x) + C_n q_{n-1}(x)$

5.2 Св-ва нулей ортогональных мн-нов.

1) $\forall n$ все нули мн-на $q_n(x)$ - вещественные, простые и лежат в (a, b)

Д-во: Обозначим $x_1, \ldots, x_m$ - те точки интервала (a, b), в кот. мн-н $q_n(x)$ меняет знак, т.е. такие точки, что либо немного слева от x_k $q_n(x) < 0$ и справа от x_k $q_n(x) > 0$ либо наоборот.

Значит x_k - корень мн-на $q_n(x)$, но не всякий корень явл. точкой перемены знака



Рассм. вспомогат. мн-н $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)$

Почему есть хоть одна точка перемены знака: от противного:

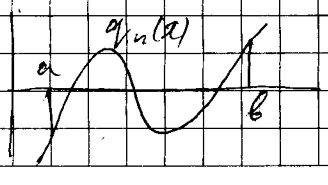
$0 = (q_0, q_n) = \int_a^b q_0 q_n(x) \overset{\geq 0}{h(x)}\,dx \neq 0$, если нет точек перемены знака $\Rightarrow$ хотя бы одна есть.

Если $n = m$, то все доказано.

Допустим, что $m < n$. Тогда $\int_a^b \underbrace{Q(x) q_n(x)}_{\text{не изменяет знака на пром-ке } (a,b)} \overset{\geq 0}{h(x)}\,dx = 0$ по св-ву (3), т.к. $\text{степ } Q = m < n = \text{степ } q_n$ $\Rightarrow \int \neq 0$

- противоречие $\Rightarrow m = n$ т.к. оба меняют знак одновременно.

2) $q_n(b) > 0$ и $(-1)^n q_n(a) > 0$



Ст. коэф-т $q_n(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} q_n(x) = +\infty$

3) $q_{n+1}(x)$ и $q_n(x)$ не могут иметь общего нуля

Д-во: от противного; из трехчл. рек. ф-лы => Пусть x_0 — общий корень,

$0 = \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$, но $a_{n-1}, a_n \neq 0$ => $q_{n-1}(x_0)=0$

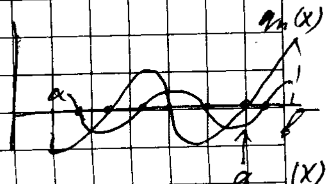
и т.д. => $q_0(x_0)=0$ — противореч.

4) Если $q_n(x_0)=0$, то $q_{n+1}(x_0)\cdot q_{n-1}(x_0)<0$

Д-во: из трехчл. рек. ф-лы

$$x q_n(x_0) = \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x_0) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) q_n(x_0) + \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0)$$

$$0 = \underbrace{\frac{a_n}{a_{n+1}}}_{>0} q_{n+1}(x_0) + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}}_{>0} q_{n-1}(x_0) \Rightarrow \text{чтд.}$$



5) Корни мн-ков $q_n(x)$ и $q_{n+1}(x)$ перемежаются (чередуются)

28.02 т.е. если $x_{лев}$ — самый левый корень мн-на $q_n(x)$,

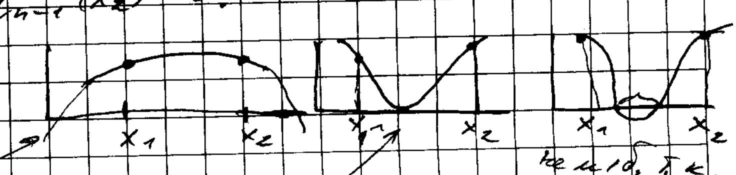
$x_{прав}$ — самый правый корень $q_n(x)$, x_1, x_2 — последоват. корни мн-на $q_n(x)$, то в каждом из интервалов $(a, x_{лев})$, (x_1, x_2), $(x_{прав}, b)$

$\exists!$ корень мн-на $q_{n+1}(x)$ (без д-ва)

Идея д-ва: по индукции по n: пусть $q_n(x_1)=q_n(x_2)=0$. По св-ву (4)

$q_{n+1}(x_1)q_{n-1}(x_1)<0$ и $q_{n+1}(x_2)q_{n-1}(x_2)<0$.

Кроме того, $q_{n-1}(x_1)q_{n-1}(x_2)<0$

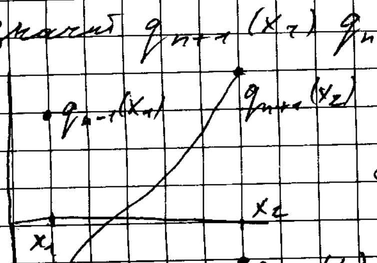


Так м/у двумя корнями q_{n+1} меньше 2 корня q_n — тоже противоречит инд. предполож.

ноль степ. 2, а должны быть все простые

не м.б., т.к. м/у ними нет корней, а по индукции считаем, что должен быть.

Значит $q_{n+1}(x_1)\, q_{n+1}(x_2)<0$



Значит $\exists$ корень мн-на $q_{n+1}(x)$ в (x_1, x_2)

Есть n+1 пром-к, в каждом $\exists$ корень => в каждом $\exists!$

~~5.3 Классические ортогональные мн-ны~~

§3 Классические ортогональные мн-ны

№	название	обозначение	пром-к ортогон-ти	вес	
1	мн-ны Якоби	$P_n(x;\alpha,\beta)$	$(-1,1)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$\alpha>-1$, $\beta>-1$
2	мн-ны Эрмита	$H_n(x)$	$(-\infty;+\infty)$	e^{-x^2}	
3	мн-ны Лагерра	$L_n^{\alpha}(x)$	$(0;+\infty)$	$x^{\alpha}e^{-x}$, $\alpha>-1$	
4	ультрасферические мн-ны мн-ны Гегенбауэра	$C_n(x;\lambda)$	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{\lambda-1/2}$	$\lambda>-\frac{1}{2}$
5	мн-ны Чебышева I рода	$T_n(x)$	$(-1,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
6	мн-ны Чебышева II рода	$U_n(x)$	$(-1,1)$	$\sqrt{1-x^2}$	
7	мн-ны Лежандра	$P_n(x)$	$(-1,1)$	1	

Замеч.: $C_n(x;\lambda)=P_n(x,\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})$

$P_n(x)=C_n(x;\frac{1}{2})=P_n(x,0,0)$

Замеч.: $q_0(x),q_1(x),\dots,q_n(x),\dots$ – посл-ть орт. мн-нов и $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n$ – произв. числ. посл-ть, ($\alpha_j\neq 0\ \forall j$). Рассм. посл-ть $\alpha_0q_0(x),\alpha_1q_1(x),\dots,\alpha_nq_n(x),\dots$ ~~все св-ва справедливы, ф-ла типа трехчленной – изменится, но будут~~

Опр.: Выбрать $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n,\dots$ $\Leftrightarrow$ задать стандартизацию ортогон. мн-нов $q_0,q_1,\dots,q_n,\dots$

Примеры: 1) стар. $q_n>0$ и $\|q_n\|=1$

2) старш. коэф-т $q_n=1$

3) $q_n(1)=1$

4) с помощью производящей ф-ции

Опр.: $w(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{q_n(x)}{\alpha_n}t^n$ Говорят, что w – производящая ф-ция мн-нов $q_0,q_1,\dots,q_n,\dots$

Замеч.: легко проверить, что все классич. ортогон. мн-ны задаются весом h, кот. удовл. диффур Пирсона: $\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{\overbrace{\alpha_0+\alpha_1x}^{=A(x)}}{\underbrace{\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2}_{=B(x)}}$ α,β – числа, коэф-ты

(напр. если $h\equiv1$, то $\alpha_0=\alpha_1=0$)

и граничн. условиям $\lim\limits_{x\to a+0}h(x)\cdot B(x)=\lim\limits_{x\to b-0}h(x)B(x)=0$. И наоборот.

если весовая ф-ция удовл. этим гр. усл и уравн Пирсона, то она линейной заменой приводится к одной из весовых ф-ций 1-7

Св-ва классич. ортогон. м-нов:

1. Дифф. уравнение $B(x)y''(x) + (A(x)+B'(x))y'(x) - \gamma_n y(x) = 0$

где $\gamma_n = n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]$

2. Ф-ла Родрига: $q_n(x) = C_n \frac{1}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n}[h(x)B^n(x)]$, где C_n - нек. коэф-т

3. $q_1'(x), \dots, q_n'(x)$ - произв. исходных

- это посл-ть классич ортогон м-нов на том же пром-ке (a,b) (вес не такой, как у исходных)

4. У каждой посл-ти классич. ортогон м-нов $\exists$ производящая ф-ция, выражающаяся в элемент. ф-циях.

Замеч: св-ва 1-4 вытекают из уравн. Пирсона, но мы не будем доказывать их в общ. случае.

5.4 М-ны Лежандра: производящ. ф-ция и соотношения ортогональности.

Опр: $w(x,t) = 1/\sqrt{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$. Назовем $P_n(x)$ м-нами Лежандра.

Из ф-лы Тейлора $\Rightarrow P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} w(x,t)\Big|_{t=0}$

$P_0(x) = 1 \cdot w(x,0) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$

$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{2}(1-2tx+t^2)^{-3/2} \cdot (-2x+2t) = (1-2tx+t^2)^{-3/2}(x-t)$

$\Rightarrow P_1(x) = x$

$(1-2tx+t^2)\frac{\partial w}{\partial t} - (x-t)w = 0$ Подставим сюда $w = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$

$(1-2tx+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) n t^{n-1} + (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0$

t^m: $(m+1)P_{m+1} - 2x\, m P_m + P_{m-1}(m-1) + P_{m-1} - xP_m = 0 \quad \forall m \geq 1$

(1) $\boxed{(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0}$ - Трехчленная рекуррентная ф-ла.

Индукция по $n \Rightarrow \forall n\ P_n(x)$ - м-н n степени и с положит. старшим коэф-том.

$w=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$

Вычислим $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}(1-2tx+t^2)^{-3/2}(-2t) = t(1-2tx+t^2)^{-3/2}$

$\Rightarrow (1-2tx+t^2)\frac{dw}{dx} - tw = 0$ Подставим сюда вместо w его разложение

$$(1-2tx+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)t^n - t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

$t^m:\quad P_m'(x) - 2xP_{m-1}' + P_{m-2}' - P_{m-1} = 0 \qquad m-1\to n$

(2) $\quad P_{n+1}' - 2xP_n' + P_{n-1}' - P_n = 0$ — еще рекуррентное соотношение

$\frac{d(1)}{dx} \Rightarrow (n+1)P_{n+1}' - (2n+1)P_n - (2n+1)xP_n' + nP_{n-1}' = 0$

$(2)\cdot(n+1) - \frac{d(1)}{dx}:\quad -2x(n+1)+(2n+1)x = -x \quad | P_n'$

$(n+1)-n = 1 \quad | P_{n-1}' \qquad -(n+1)+(2n+1) = n \quad | P_n$

$-xP_n' + P_{n-1}' + nP_n = 0 \qquad (3)$

$(2)\cdot n - \frac{d(1)}{dx}:\quad -P_{n+1}' + xP_n' + (n+1)P_n = 0 \qquad (4)$

$(3)+(4):\quad P_{n-1}' - P_{n+1}' + (2n+1)P_n = 0$

$\boxed{P_{n+1}' - P_{n-1}' = (2n+1)P_n} \qquad (5)$ — вторая рекуррентная ф-ла для мн-нов Лежандра.

5.5 Мн-ны Лежандра: диф. уравнение и соотношение ортогональности

$(-1)\cdot(4)$ и замена $n\to n-1$: $P_n' - xP_{n-1}' - nP_{n-1} = 0 \quad | \cdot 1$

$(3) \Rightarrow -xP_n' + P_{n-1}' + nP_n = 0 \quad | \cdot x$

$(1-x^2)P_n' + n(xP_n - nP_{n-1} = 0 \quad | \frac{d}{dx}$

$\Rightarrow$ по ф-ле (3) $P_{n-1}' = xP_n' - nP_n$

$(1-x^2)P_n'' + (-2x)P_n' + nP_n + nxP_n' - nP_{n-1}' = 0$

$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + nP_n + \cancel{nxP_n'} - \cancel{nxP_n'} + n^2P_n = 0$

$[(1-x^2)P_n']' + n(n+1)P_n = 0$

Опр.: $[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$ — дифференц. уравн. Лежандра.

Мы знаем, что оно имеет частное решение $y = P_n(x)$

$[(1-x^2)P_m']' + m(m+1)P_m = 0 \quad | \cdot P_n$

$[(1-x^2)P_n']' + n(n+1)P_n = 0 \quad | \cdot P_m$

$[(1-x^2)P_n']'P_m - [(1-x^2)P_m']'P_n + [n(n+1)-m(m+1)]P_nP_m = 0$ 7.03

$\{(1-x^2)[P_n'P_m - P_m'P_n]\}' + (n-m)(n+m+1)P_nP_m = 0 \quad | \int_{-1}^{1}$

$\underbrace{(1-x^2)[P_n'P_m - P_m'P_n]\Big|_{-1}^{1}}_{0} + (n-m)\underbrace{(n+m+1)}_{\neq 0}\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$

$(n-m)\int_{-1}^{1} P_n P_m\, dx = 0$ $\Rightarrow$ если $n \neq m$ $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0$

$\Rightarrow$ мн-ны ортогон.

В трехчл. рек. ф-ле заменим n на $n-1$: $nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0$ $\Big|\cdot(2n+1)P_n$

Трехчл. рек. ф-ла: $(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0$ $\Big|\cdot(2n-1)P_{n-1}$

$\int_{-1}^{1}$ $n(2n+1)P_n^2 + (n-1)(2n+1)P_nP_{n-2} - (n+1)(2n-1)P_{n+1}P_{n-1} - n(2n-1)P_{n-1}^2 = 0$

$\cancel{n}(2n+1)\int_{-1}^{1} P_n^2\, dx = \cancel{n}(2n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2\, dx$ $\quad n \neq 0$, т.к. $n \geq 2$

$\int_{-1}^{1} P_n^2\, dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2\, dx = \frac{\cancel{2n-1}}{2n+1}\cdot\frac{\cancel{2n-3}}{\cancel{2n-1}}\cdot\frac{\cancel{2n-5}}{\cancel{2n-3}}\cdots\frac{3}{\cancel{5}}\int_{-1}^{1} P_1^2(x)\, dx =$ ($n=2$)

$= \frac{3}{2n+1}\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{3\cdot 2/3}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$ $\quad n \geq 2$ $\quad \int_{-1}^{1} P_n^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$

$n=1$ - верно, считали. $n=0$ - тоже ($P_0 = 1$, $P_1 = x$) $\Rightarrow$ ф-ла верна $\forall n \geq 0$

Замеч: мн-ны $\sqrt{n+\frac{1}{2}}\,P_n(x)$ образуют ортонорм. базис в $L_2(-1,1)$, в частности они получаются из посл-ти мономов с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта

5.6 Мн-ны Лежандра: ф-ла Родрига и теор о разложении ф-ции в ряд по мн-нам Лежандра.

Теор (ф-ла Родрига): $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ (без д-ва)

Идея д-ва: $\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ явл. мн-ном степени n с положит. старшим коэф-том. (был степ $2n$, стал $2n-1=n$)

Поскольку ортогон. мн-ны с весом однозначно, достаточно д-ть рав-во $\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]\cdot\left[\frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\right] = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$

$\int$ - берется по частям...

Теор (о разложении ф-ции в ряд по мн-нам Лежандра) (без д-ва):

Если $f: [-1;1] \to \mathbb{R}$ - дважды непр. дифф, то $\forall x \in [-1;1]$ имеем $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$, где $c_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = (n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$

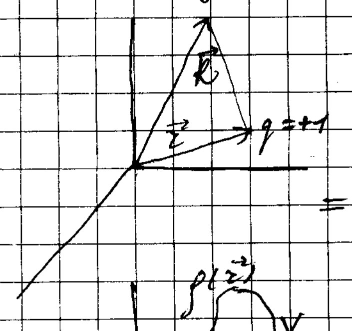
Идея д-ва: посл-ть мн-нов $\frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}$ образует ОНБ в пр-ве $L_2(-1,1)$

Значит ф-ция f м.б. разложена по этому базису:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}$, где $\lambda_n = \left(f, \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}\right) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(f, P_n(x))}{\|P_n(x)\|^2}}_{=c_n} P_n(x)$

Доказали сход-ть в L_2, надо д-ть поточечно $\forall x$ ... см. методичку

Б.7 Мультипольное разложение кулонова потенциала



$|\vec R| \gg |\vec r|$ $\quad R := |\vec R|$, $r = |\vec r|$, θ — угол м/у $\vec r$ и $\vec R$

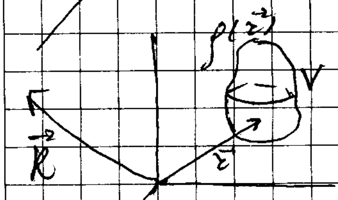
т. косинусов

$$\varphi(\vec R) = \frac{1}{|\vec r - \vec R|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}} = \frac{1}{R\sqrt{1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2}}$$

произв. ф-ция

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \right\} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n P_n(\cos\theta)}{R^{n+1}}$$

t — дост. малое, чтобы не было от



$$\varphi(\vec R) = \iiint_V \frac{\rho(\vec r)}{|\vec r - \vec R|}\,dV = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{R^{n+1}}\iiint_V \rho(\vec r)\, r^n P_n(\cos\theta)\,dV =$$

$$=: \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_n}{R^{n+1}}\ ; \quad \sigma_0 = \iiint_V \rho(r)\,dV = Q \text{ — полный заряд}$$

$$\sigma_1 = \iiint_V \rho(r)\, r\cos\theta\, dV = d \text{ — дипольный момент}$$

$$\sigma_2 = \iiint_V \rho(r)\, r^2\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\,dV \text{ — квадрупольный момент}$$

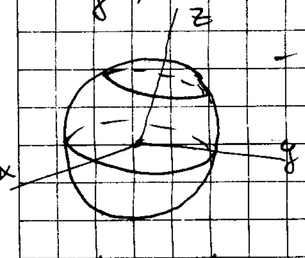
Б.8 Применение мн-нов Лежандра для решения диффуров.

Задача: Требуется найти ф-цию $u: D \subset R^3 \to R$ такую, что $\Delta u = 0$

(т.е. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ и $u|_{\partial D} = f$ $\quad$ в общ. виде не решается

Задача: найти ф-цию $u: B \subset R^3 \to R$, где $\underset{\text{шар}}{B} = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$

такую, чтобы $\Delta u = 0$ и $u|_{\partial B} = f(z)$



— симметричные граничн. усл.

Перейдем к сферич. координатам:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$$

$u|_{r=a} = f(\theta)$

1. Предположим, что $u(r, \varphi, \theta) = R(r)\cdot\Psi(\theta)$, тогда в ур-и Лапласа перем. разделились:

$$\frac{\Psi(\theta)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{R(r)}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi(\theta)}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)}_{\text{зав-т только от } r} = \underbrace{\frac{-1}{\Psi(\theta)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)}_{\text{зав-т только от } \theta} = const = n(n+1) \quad (*) \qquad n - \forall$$

предположим так (*)

Частное решение уравн. $\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = const$ будем искать в виде $R(r) = r^\alpha$

$\frac{1}{r^\alpha}\frac{d}{dr}(\alpha r^{\alpha-1+2}) = \frac{\alpha(\alpha+1) r^\alpha}{r^\alpha} = \alpha(\alpha+1)$ Положим $\alpha = n$

Найдем частное решение уравнения $\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Psi}{d\theta}\right) + n(n+1)\Psi(\theta)\sin\theta = 0$

уравнение Лежандра $\Rightarrow [(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$

Убедимся, что $\Psi(\theta) = P_n(\cos\theta)$ удовл. уравн.

Делаем замену $x = \cos\theta$

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(\cos\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\cos\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{dP(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$\frac{-1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin^2\theta\,\frac{(-1)}{\sin\theta}\,\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right] + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\,\frac{dP(\cos\theta)}{d\theta}\right] + n(n+1)\overbrace{P_n(\cos\theta)}^{=\Psi(\theta)}\sin\theta = 0$$

Следовательно, $u(r,\theta) = r^n P_n(\cos\theta)$ явл. частным решением уравн.*

не будем рассматривать второе лин. независ. решение.

14.03 Значит $\forall c$ ф-ция $u(r,\theta) = c\, r^n P_n(\cos\theta)$ явл. решением уравн. Лапласа

но уравн. Лапласа линейно $\Rightarrow \forall c_n$ $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos\theta)$

Наша задача — подобрать const c_n так, чтобы выполн. гр. усл.

т.е. чтобы $u(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n P_n(\cos\theta) = f(\theta)$

Сделаем замену: $x = \cos\theta$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n P_n(x) = f(\arccos x) =: g(x)$

[Напоминание: Теор. о разложении ф-ции в ряд по м-нам Лежандра:

пусть $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$ — дважды непр. дифф. Тогда $\forall x \in [-1,1]$

выполн. $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(x)$, где $g_n = \frac{(g,P_n)}{(P_n,P_n)} = (n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} g(x)P_n(x)\,dx$.

здесь $c_n a^n = g_n = (n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} g(x)P_n(x)\,dx =$

замена $x = \cos\theta$ $= (n+\frac{1}{2})\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$

$\Rightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)$

т.е. раскл. гранич. ф-цию, каждое слаг. $\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^n \Rightarrow$ ответ.

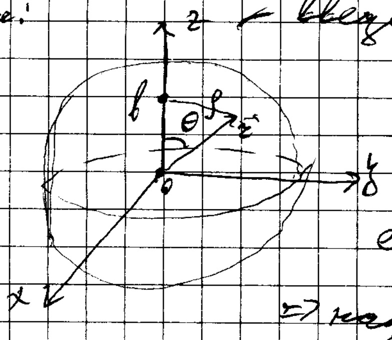
Замеч.: Сравните это решение с реш. задачи о нахожд. гармонич. ф-ции в круге по ее знач. на границе (тема Ряды Фурье)

5.3 Поле точ. заряда, помещ. внутри полой проводящ. сферы.

Дано: сфера рад. a, заряд величины q, находящ. на расст. $b<a$ от центра сферы

Найти: электрич. потенциал φ

Решение:



← введем СК таким образом.

φ – удовл. уравн. Лапласа

$$\varphi = \frac{q}{\rho} + u$$

поправка за счет сферы

если без сферы, особ. ть при $\rho = 0$, но Лаплас иначе

$\Rightarrow$ надо найти гармонич. ф-цию u

Т.к. мы решаем статич. задачу, то $\varphi\big|_{r=a} = 0 \Rightarrow u\big|_{r=a} = -\frac{q}{\rho} =$

$$= -q\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2-2ba\cos\theta}} = -\frac{q}{a}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{b}{a}\cos\theta+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} = -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)$$ т.к.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$ – производящ. ф-ция мн-нов Лежандра

$\Rightarrow$ по предыдущ. пункту (5.8)

$$\varphi(r,\theta) = -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) = -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{br}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta) =$$ производящ. ф-ция

$$= -\frac{q}{a}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{br}{a^2}\cos\theta+\underbrace{\left(\frac{br}{a^2}\right)^2}_{\text{хотим так } r^2}}} = -\frac{q}{a}\frac{1}{\frac{b}{a^2}\sqrt{\frac{a^4}{b^2}-2\frac{a^2r}{b}\cos\theta+r^2}} =$$

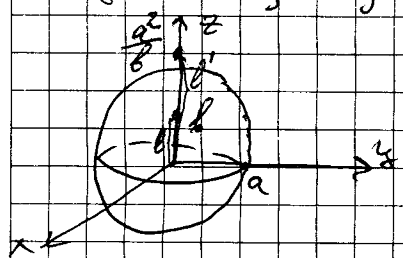
$$= \underbrace{-\frac{qa}{b}}_{q'}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2-2r\frac{a^2}{b}\cos\theta+r^2}}}$$

q' – отраженный заряд

ρ' – расст. от точки наблюдения $\vec{r}$ до $\left(0,0,\frac{a^2}{b}\right)$

~ заряд-изображение

Тогда $\varphi = \frac{q}{\rho} + \frac{q'}{\rho'}$



$$ll' = b\frac{a^2}{b} = a^2 \text{ – не зав-т от } b$$

§6 Ограниченные оп-ры в гильбертовом пр-ве

6.1 Линейные оп-ры и их общие св-ва.

Опр: Пусть H и H_1 - два гильберт. пр-ва. Отображ. $A: H \to H_1$ назыв. (лин.) оп-ром, если $\forall x, y \in H$ и $\forall \alpha, \beta$ - числа $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$

лин оп-р <=> оп-р, $A(x) \Leftrightarrow Ax$

Примеры: 1) Тождественный оп-р: $I: H \to H$ задается ф-лой $Ix = x$ $\forall x \in H$

Проверим, что он лин: $I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha Ix + \beta Iy$ - чтд.

2) Нулевой оп-р $O: H \to H_1$ задается ф-лой $Ox = 0_{\in H_1}$ $\forall x \in H$

3) Конечномерный оп-р: Пусть $x_1 \ldots x_n$ - ОНБ в гильберт. пр-ве H, а $y_1, \ldots, y_m$ - ОНБ в H_1. И пусть есть оп-р $A: H \to H_1$ - лин оп-р.

Построим м-цу оп-ра A: $\forall x \in H$ $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Тогда $Ax = A(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k Ax_k$. Т.к. $Ax_k \in H_1$ $Ax_k = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j \cdot a_{jk}$

$\Rightarrow Ax = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \sum\limits_{j=1}^{m} y_j a_{jk} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_k a_{jk} y_j = \sum\limits_{j=1}^{m} (\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k a_{jk}) y_j$

Совокупность чисел a_{jk} образуют м-цу оп-ра A.

$$Ax = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j \Rightarrow \mu_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{jk} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Т.о. каждому оп-ру A сопоставили м-цу (a_{kj}). И наоборот, каждой м-це (a_{kj}) соотв оп-р A. (при фикс. базисах в H и H_1)

4) Оп-р проектирования: Пусть H - гильбертово пр-во, S - замкнутое подпр-во в H. Знаем, что $H = S \oplus S^\perp$, т.е. $\forall x \in H$ $\exists! y \in S, z \in S^\perp$ т., что $x = y + z$

Опр: Тогда в-р y назыв ортогон проекцией в-ра x на S

Оп-р $P: H \to H$, задан. по ф-ле $Px = y$ назыв. оп-ром проектирования пр-ва H на замкн подпр-во S

Упр: Д-ть, что P - линеен. (без координат)

5) Интегральный оп-р: Пусть $K: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$, причем $\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy < \infty$. Зададим оп-р $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ ф-лой
$$(Af)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$ — интегр. оп-р

Опр: Если $A: H \to H_1$, $B: H \to H_1$ и α, β - числа, то определим новый оп-р $\alpha A + \beta B: H \to H_1$ ф-лой $(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx$ - лин. комбинация двух оп-ров

Опр: Если оп-р $A: H \to H_1$ и $C: H_1 \to H_2$, то опред новый опр. $CA: H \to H_2$
$(CA)x = C(Ax)$

Общие св-ва лин. оп-ров:

1) $\forall A, B$ оп-ров, $\forall \alpha, \beta$ - числа $(\alpha A + \beta B)$ - лин оп-р Д-во - упр.

2) $\forall A, C$ CA - лин опр Д-во - упр.

6.2 Непрерывные и ограниченные оп-ры

Опр: Оп-р $A: H \to H_1$ - непр в т. $x_0 \in H$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$

Др. словами, A - непр в т. $x_0 \Leftrightarrow \forall x_1, \dots x_n, \dots$ т., что $x_n \to x_0$ верно $Ax_n \to Ax_0$

Опр: Опр A непрерывен, если он непр в каждой точке.

Опр: Мн-во $X \subset H$ назыв. огранич, если $\exists R < \infty$: $\forall x \in X$ выполн. $\|x\| \le R$. Др. словами: мн-во огранич, если оно содержится в шаре конечного радиуса.

Опр: Оп-р $A: H \to H_1$ назыв огранич, если он переводит всякое огранич. мн-во в огранич.

Теор: Если оп-р $A: H \to H_1$ - лин оп-р; H, H_1 - гильб. пр-ва, то след. усл. эквив-ны:

1) $\exists x_0 \in H$: A - непрерывен в т. x_0 (т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall x \in H$ и $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$) 21.03

2) A - непрерывен (т.е. A непрерывен в каждой точке)

3) Опр A ограничен (переводит $\forall$ огранич мн-во в огранич.)

4) величина $\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|$ конечна

Д-во: 1=>2 Фикс. точку $x_1 \in H$ и убедимся, что A - непр в x_1

$\forall \varepsilon>0$ возьмем то $\delta>0$, которое имеется по усл (1) для т. x_0.

Тогда $\forall x\in H$: $\|x-x_1\|<\delta$ $\Rightarrow \|A(x-x_1+x_0)-Ax_0\|<\varepsilon \Rightarrow$
$=(x-x_1+x_0)-x_0$

$\|Ax-Ax_1+Ax_0-Ax_0\|<\varepsilon \Rightarrow \|Ax-Ax_1\|<\varepsilon$ - чтд, $\Rightarrow A$ - непр в т. x_1

$\forall x_1 \Rightarrow A$ - непрерывен

2=>3 Мн-во $X\subset H$ назыв-ся огранич, если $\exists k<\infty: \forall x\in X$

$\|x\|\le k$, т.е. мн-во содержится в шаре рад. k.

Нужно убедиться, что $\forall$ огранич мн-ва $X\subset H$ мн-во $AX=\{y\in H_1: \exists x\in X$

$y=Ax\}$ - огранич.

A - непр $\Rightarrow A$ - непр в т. $x=0 \Rightarrow \exists\delta>0: \forall x\in H: \|x\|\le\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Ax\|\le 1$ (ε). Значит $\forall x\in X$ имеем $\|Ax\| = \|\frac{k}{\delta}A(\frac{x}{k}\delta)\| \le$

$\|\delta\frac{x}{k}\| = \frac{\delta}{k}\|x\|\le\delta$ $\quad \le \frac{k}{\delta}\|A(\frac{x}{k}\delta)\| \le \frac{k}{\delta}\cdot 1$

$\Rightarrow AX$ содержится в шаре рад. $\frac{k}{\delta} \Rightarrow AX$ - огр $\Rightarrow A$ - огр

3=>4 $B=\{x\in H: \|x\|\le 1\}$ - замкнутый шар с центром в 0 радиуса 1.

- огранич. мн-во. т.к. оп-р A - огранич $\Rightarrow AB=\{y\in H_1: \exists x\in B$

$y=Ax\}$ - огранич. Значит $\exists k<\infty: \forall y\in AB$ $\|y\|\le k$

$\Rightarrow \forall x\in B$ $\|Ax\|\le k \Rightarrow \sup\limits_{x\in B}\|Ax\|\le k<\infty \Rightarrow$

$\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|\le k<\infty$

4=>1 Пусть $\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\| = k<\infty$

Убедимся, что оп-р A - непр в т. $x=0$. Фикс. $\varepsilon>0$, положим

$\delta=\frac{\varepsilon}{k}$. Тогда $\forall x\in H$ $\|x-0\|<\delta=\frac{\varepsilon}{k}$ будем иметь:

$\|Ax-0\| = \frac{\varepsilon}{k}\|A(\frac{k}{\varepsilon}x)\| \le \frac{\varepsilon}{k}\cdot k=\varepsilon \Rightarrow$ оп-р A - непр. в т. $x=0$

6.3 Норма оператора

Лемма: Если $A: H \to H_1$ — лин. оп-р, то $\underbrace{\sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|}_{:=\alpha} = \underbrace{\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|}_{:=\beta} = \underbrace{\sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{:=\gamma}$

$\gamma = \beta = \alpha$

Д-во: докажем, что $\alpha \ge \beta$ — ~~очевидно~~

однородность нормы, лин-ть A

$\beta \ge \gamma$ Пусть $x \ne 0$ $\quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|\frac{1}{\|x\|} Ax\right\| = \|A(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{=:y})\| \le \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \beta$

$\Rightarrow \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \Rightarrow \gamma \le \beta$ — ч.т.д.

$\gamma \ge \alpha$ Пусть $x \ne 0$ и $\|x\| \le 1$. Тогда $\|Ax\| \le \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sup_{y \ne 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \gamma$

Если $x = 0$ $\quad \|Ax\| = \|0\| \le \gamma$

$\Rightarrow \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| \le \gamma$ т.е. $\alpha \le \gamma$

$\alpha \ge \beta \ge \gamma \ge \alpha \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$

Опр: Общее значение выражений $\alpha = \beta = \gamma$ назыв. нормой оп-ра A и обознач. $\|A\|$

Теор (св-ва нормы операторов). Пусть $A, B: H \to H_1$ — лин. оп-ры и C. Тогда след. утв. справедливы:

1) $\|A\| \ge 0$, причем $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ $\quad \forall \lambda$ — число

3) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$ — нер-во Δ-ка

4) $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ $\quad \forall x \in H$

5) если $C: H_1 \to H_2$, то $\|CA\| \le \|C\| \|A\|$

6) $|\|A\| - \|B\|| \le \|A - B\|$

Д-во: 1) $\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \underbrace{\|Ax\|}_{\text{в-р}}^{\ge 0} \ge 0$ $\quad$ С другой стороны, если $\|A\| = 0$, то

$\sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow \forall x \ne 0 \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \overset{\forall x}{\Rightarrow} Ax = 0 \overset{\forall x}{\Rightarrow} A = 0$

2) ~~λA~~ Фиксируем $x \in H$, $\|x\| \le 1$. Тогда $\|\lambda A x\| = |\lambda| \cdot \|Ax\| \le |\lambda| \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| =$

$= |\lambda| \cdot \|A\| \Rightarrow \sup_{\|x\| \le 1} \|\lambda Ax\| \le |\lambda| \|A\| \Rightarrow \|\lambda A\| \le |\lambda| \|A\|$

Докажем противоположное нер-во: Если $\lambda \ne 0$, тогда

~~$\|\lambda A\| \ge$~~ $\|A\| \ge \frac{\|\lambda A\|}{|\lambda|}$ ~~$\Rightarrow \|\frac{1}{\lambda} A\| \ge \frac{\|A\|}{|\lambda|}$~~

$A := \frac{1}{\lambda} A$

$\|A\| = \|\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda A\| \le \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda A\| \Rightarrow |\lambda|\,\|A\| \le \|\lambda A\|$

$\Rightarrow |\lambda|\,\|A\| = \|\lambda A\|$

Если $\lambda = 0$ – св-во 2 - очевидно, т.к. $0=0$ д-но!

3) Фиксируем $\|x\| \le 1$, Тогда $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le$

$\le \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\| + \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Bx\| = \|A\| + \|B\|$

$\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|(A+B)x\| = \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ – чтд.

4) Для $x \ne 0$ имеем $\|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|$, т.к. $\|A\| = \sup\limits_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Для $x = 0$ имеем $0=0$

5) Надо д-ть, что $\|CA\| \le \|C\|\cdot\|A\|$

Фикс $\|x\| \le 1$. Тогда $\|(CA)x\| = \|C(Ax)\| \overset{(4)}{\le} \|C\|\cdot\|Ax\| \overset{(4)}{\le} \|C\|\cdot\|A\|\cdot\|x\| \le \|C\|\cdot\|A\|$

$\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|(CA)x\| \le \|C\|\|A\| \Rightarrow \|CA\| \le \|C\|\|A\|$

6) Д-ть $|\|A\| - \|B\|| \le \|A-B\| \Leftrightarrow -\|A-B\| \le \|A\| - \|B\| \le \|A-B\|$

$\|A\| = \|A-B+B\| \overset{(3)}{\le} \|A-B\| + \|B\|$

Пример оценивания нормы оператора:

Пусть $x_1, \dots, x_n$ – ОНБ в гильб. пр-ве H; $y_1, \dots, y_m$ – ОНБ в пр-ве H_1

и пусть $A: H \to H_1$ – лин. оп-р.

Тогда $x = \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_j$ и $Ax = \sum\limits_{k=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_j\right)y_k$ – уже было,

a_{kj} – м-ца оп-ра A,

$\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\left\|\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\lambda_j\right)y_k\right\| \le \sup\limits_{\|x\|\le 1}\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\|a_{kj}\lambda_j y_k\| \le$

$\le \sup\limits_{\|x\|\le 1}\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}|\cdot|\lambda_j| \le \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}|$

т.к.

$|\lambda_j| = |(x, x_j)| \le \|x\|\cdot\|x_j\| \le 1$

Следств: Если H и H_1 – конечномерные, то всякий лин оп-р

$A: H \to H_1$ – непрерывен

6.4 Сходимость оп-ров. Операторные ряды.

Опр: говорят, что посл-ть оп-ров $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ сход-ся к оп-ру A, если $\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Обознач: $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ или $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$

Св-ва: 1) Если $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ и $B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} B$ то $\forall \alpha, \beta$ - числа

$\alpha A_n + \beta B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha A + \beta B$ - лин-ть предела

Д-во: $\|(\alpha A_n + \beta B_n) - (\alpha A + \beta B)\| = \|\alpha(A_n - A) + \beta(B_n - B)\| \leq$

$\leq |\alpha| \|A_n - A\| + |\beta| \cdot \|B_n - B\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2) Если $\forall n$ $A_n: H \to H_1$ - ограничен (т.е. $\|A_n\| < \infty$) и $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$. Тогда A - огранич. (т.е. $\|A\| < \infty$)

и $\|A\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$

Д-во: Т.к. $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ $\exists n_0: \|A_{n_0} - A\| < 1$. Тогда $\|A\| = \|A_{n_0} + (A - A_{n_0})\| \leq$

$\leq \|A_{n_0}\| + \|A - A_{n_0}\| \leq \|A_{n_0}\| + 1 < \infty$

Кроме того, $|\|A_n\| - \|A\|| \overset{(6)}{\leq} \|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \|A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|A\|$

Упр: д-ть, что из сход-ти норм не следует сход-ть оп-ров, т.е. построить пример огр оп-ров, таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$ $\exists$ и конечен, а $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ - не существует.

Теор (о полноте пр-ва оп-ров) Если H и H_1 - гильбертовы пр-ва, $A_1, \dots, A_n, \dots$ - фундамент. посл-ть огранич. оп-ров из H в H_1, то $\exists A: H \to H_1: A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ 28.03

Д-во. Пусть $A_1, \dots A_n, \dots$ - фундамент посл-ть $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0:$
$\forall n, m \geq n_0$ $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$. Фикс. $x \in H$. Тогда $A_1 x, A_2 x, \dots, A_n x, \dots$ - фундамент. в H_1, т.к. $\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m) x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|$ ☆

Т.к. H_1 - полное (т.к. гильб.), то $\forall$ фунд. посл-ть в нем сходится $\Rightarrow \exists$ точка $Ax \in H_1$: $A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$. Тем самым вз-нооднозначно сопоставим $\underset{\in H}{x} \mapsto Ax \in H_1$

Убедимся, что это правило задает лин огр оп-р $A: H \to H_1$ и $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

Фикс. в-ры $x, y \in H$, α, β - числа. Тогда

$A(\alpha x+\beta y)=\lim\limits_{n\to\infty}A_n(\alpha x+\beta y)=\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha A_n x+\beta A_n y)\overset{(1)}{=}\alpha\lim\limits_{n\to\infty}A_n x+\beta\lim\limits_{n\to\infty}A_n y=$

$=\alpha Ax+\beta Ay$ - ч.т.д. $\Rightarrow A$ - линейн.

Перейдем в (*) к пределу при $m\to\infty$: $\|A_n x-Ax\|\le\varepsilon\|x\|$

sup $x\neq 0$ $\dfrac{\|(A_n-A)x\|}{\|x\|}\le\varepsilon \Rightarrow \|A_n-A\|<\varepsilon\Rightarrow A_n\to A$

ограничен-ть - из св-ва (2)

Опр: Гов, что операторн. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ сходится, если $\exists\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}A_n$

При этом суммой ряда назыв $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}A_n$ и обознач. его $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$

Св-ва: 1) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ - сход и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ - сход, то $\forall\alpha,\beta$ - числа

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha A_n+\beta B_n)$ - сход и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha A_n+\beta B_n)=\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n+\beta\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n$

- линейность суммы операторн. ряда.

Д-во: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha A_n+\beta B_n)=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}(\alpha A_n+\beta B_n)\overset{(1)}{=}\alpha\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}A_n+$

$+\beta\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}B_n=\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n+\beta\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n$

2) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A_n\|$ - сход-ся, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ - сход-ся, причем

$\|\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\|\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A_n\|$

Д-во: В силу полноты пр-ва оп-ров достаточно д-ть, что посл-ть частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ фундаментальна.

$\|\sum\limits_{n=1}^{N+p}A_n-\sum\limits_{n=1}^{N}A_n\|=\|\sum\limits_{n=N+1}^{N+p}A_n\|\underset{\text{нер-во }\Delta}{\le}\sum\limits_{n=N+1}^{N+p}\|A_n\|$

Известно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A_n\|$ - сход-ся $\Rightarrow$ по крит. Коши сход-ти

числ. ряда $\forall\varepsilon>0\ \exists N_0:\forall N\ge N_0$ и $\forall p\ge 0$ $\sum\limits_{n=N+1}^{N+p}\|A_n\|<\varepsilon$

Следовательно: $\forall\varepsilon>0\ \exists N_0:\forall N\ge N_0$ и $\forall p\ge 0$

$\|\sum\limits_{n=1}^{N+p}A_n-\sum\limits_{n=1}^{N}A_n\|\le\sum\limits_{N+1}^{N+p}\|A_n\|<\varepsilon$

Значит посл-ть частичн. сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ - фундамент.

$\Rightarrow$ ряд сход-ся,

$\|\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\|=\|\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}A_n\|\overset{(2)}{=}\lim\limits_{N\to\infty}\|\sum\limits_{n=1}^{N}A_n\|\le\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\|A_n\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A_n\|$

нер-во Δ

6.5 Обратимость оп-ров. Обратный оп-р.

Опр: Оп-р $A: H \to H_1$ назыв. обратимым, если уравн. $Ax = y$ имеет не более одного решения $x \in H$ для $\forall$ правой части $y \in H_1$.

Опр: Образ A: $\operatorname{im} A = \{y \in H_1 \mid \exists x \in H : y = Ax\}$ — образ оп-ра A.

Лемма: $\operatorname{im} A$ — линейное подпр-во в H_1

Д-во: Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{im} A$ и пусть α, β — числа. Нужно д-ть, что $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \operatorname{im} A$.

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in H : y_1 = Ax_1,\ y_2 = Ax_2$.

Значит $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$

$\Rightarrow \exists\ \alpha x_1 + \beta x_2 \in H : \alpha y_1 + \beta y_2 = A(\alpha x_1 + \beta x_2) \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in \operatorname{im} A$

Опр: каждому в-ру $y \in \operatorname{im} A$ сопоставим тот единств. в-р $x \in H$, кот. удовл. уравн. $Ax = y$ (пусть A — обратимый). Это соответствие $y \mapsto x$ задает лин. оп-р, кот. назыв. оп-ром, обратным к A и обознач. A^{-1}.

Лемма: A^{-1} — лин. оп-р

Д-во: Нужно д-ть, что $\forall y_1, y_2 \in \operatorname{im} A$ и $\forall \alpha, \beta$ — числа справедливо рав-во $A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2$

Нам известно: $\operatorname{im} A$ — лин. пр-во, $Ax_1 = y_1 \Leftrightarrow x_1 = A^{-1} y_1$

$\exists x_2 \in H : Ax_2 = y_2 \Leftrightarrow x_2 = A^{-1} y_2$

Рассм. $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 \Leftrightarrow$

$\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$ или $\alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)$

Замеч: вообще говоря $\operatorname{im} A \neq H_1$. Поэтому логично изначально рассматривать оп-ры $A: H \to H_1$, опр. не во всем пр-ве H, а только в подпр-ве. Это подпр-во назыв. обл-тью опр. оп-ра и обозн. $\operatorname{dom} A$

Св-ва обратного оп-ра:

1) $\operatorname{dom} A^{-1} = \operatorname{im} A$; $\operatorname{dom} A = \operatorname{im} A^{-1}$
2) A^{-1} линеен
3) Если $A: H \to H_1$ обратим и $B: H_1 \to H_2$ — обратим, то $BA: H \to H_2$ — обратим

и $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

Д-во: BA - обратим $\Leftrightarrow$ уравн. $BAx=y$ имеет не более одного реш.

$B(Ax)=y$ т.к. B - обратим, то уравн $Bz=y$ имеет не более одного решения. обознач. его $z=Ax$. Но оп-р A тоже обратим $\Rightarrow$ уравн $Ax=z$ имеет не более одного решения $x=A^{-1}z$

окончательно: уравн. $BAx=y$ имеет не более одного решения

$(BA)^{-1}y = x=A^{-1}z = A^{-1}(B^{-1}y) = (A^{-1}B^{-1})y \quad \forall y \Rightarrow (BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

4) Пусть $A: H\to H_1$ и $B: H_1\to H$, причем $AB=I_{H_1}$ и $BA=I_H$

Тогда A - обратим и $A^{-1}=B$

Д-во: от противного: Допустим, что A не обратим, т.е. $\exists y\in H_1$: $\exists x_1\neq x_2\in H$ $Ax_1=y=Ax_2$. Тогда $x_1=I_Hx_1=(BA)x_1=$
$=B(Ax_1)=By=B(Ax_2)=(BA)x_2=I_Hx_2=x_2$ - противореч.
$\Rightarrow A$ - обратим.

Ахху Докажем рав-во $A^{-1}=B$. Надо как-то записать решение уравн. $Ax=y \Leftrightarrow x=A^{-1}y$
подействуем оп-ром B: $B(Ax)=By=(BA)x=x$ т.е. $x=By$
$\Rightarrow A^{-1}=B$

6.6 Теор Неймана

Теор (Нейман) Пусть H - гильб. пр-во, $A: H\to H$ - лин. оп-р опред во всем пр-ве H, и $\|A\|<1$. Тогда оп-р $I-A$ обратим, $(I-A)^{-1}$ опред во всем пр-ве H, ограничен и $(I-A)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A^n$, где $A^0=I$, $A^1=A$, $A^{n+1}=A\cdot A^n$

Замеч: Эта теор утв, что в ф-лу для геом прогр $\frac{1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$, $|q|<1$ можно подставл не только числа но и оп-ры

Д-во: Фикс N и рассм $(I-A)\sum\limits_{n=0}^{N}A^n = \sum\limits_{n=0}^{N}A^n - \sum\limits_{n=0}^{N}A^{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{N}A^n - \sum\limits_{n=1}^{N+1}A^n =$
$=I-A^{N+1}\xrightarrow[N\to\infty]{} I$

т.к. $\|A^{N+1}\| = \|A\cdot A^N\| \le \|A\|\cdot\|A^N\| \le \ldots \le \|A\|^{N+1}\xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ т.к. $\|A\|<1$

$\Rightarrow A^{N+1}\xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

$(I-A)\sum_{n=0}^{N} A^{n} \xrightarrow[N\to\infty]{} (I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^{n}$ – ряд сход, т.к. сход числ. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^{n}$, $\|A\|<1$

Аналогично доказыв, что $\sum_{n=0}^{\infty} A^{n}(I-A)=I$

По св-ву (4) обратн. оп-ров $I-A$ – обратим и $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} A^{n}$

Тогда $\Leftarrow$ опр. в в сам. пр-ве и огр.