$(I-A)\sum_{n=0}^{N} A^n \xrightarrow[N\to\infty]{} (I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ — ряд сход, т.к. сход числ. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n$, $\|A\|<1$

Аналогично доказыв, что $\sum_{n=0}^{\infty} A^n(I-A)=I$

По св-ву (4) обратн. оп-ров $I-A$ — обратим и $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} A^n$

определ. во всем
Тогда $\Leftarrow$ пр-ве и огр.

4.04

6.7 Спектр оператора

Замеч: Из лин. алг. → собств. значение м-цы (конечномерного оп-ра)

Замеч: в этом пункте считаем, что гильбертово пр-во H над полем $\mathbb{C}$

Будем решать уравнение $Ax-\lambda x=y$, где $A: H\to H$ — лин. огр. оп-р, $x, y\in H$ (искомые, знаем)

Эта задача эквивалентна: $(A-\lambda I)x=y$

Значит св-ва решения уравн. $Ax-\lambda x=y$ существенно зависят от св-в оп-ра $(A-\lambda I)^{-1}$

Выделяют следующие возможности:

1) Оп-р $A-\lambda I$ не обратим

2) $A-\lambda I$ обратим и $\mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}=H$

3) —"—, но $\mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}\neq H$ и $\mathrm{cl}\,\mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}=H$

4) —"— и $\mathrm{cl}\,\mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}\neq H$ (т.е. обл. опред. оп-ра $(A-\lambda I)^{-1}$ не явл. плотным в H подпр-вом

② Тогда говорят, что λ явл. регулярным значением оп-ра A

Обознач. $\lambda\in\rho(A)$ — резольвентное мн-во оп-ра A (или резольвента).

Обознач $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$ — резольвентный оп-р (или резольвента)

Этот оп-р решает наше уравнение: $x=R_\lambda y$.

В случае (2) $\mathrm{dom}\, R_\lambda = H$

Теор. (Банаха об обратном оп-ре) без д-ва :)

Пусть H, H_1 — гильб. пр-ва, $B: H\to H_1$ — лин. огранич. обратимый оп-р, т. что $\mathrm{im}\, B = \mathrm{dom}\, B^{-1} = H_1$. Тогда B^{-1} ограничен.

Значит в случае (2) R_λ — ограничен.

Это означает, что уравн. $(A-\lambda I)x=y$ хорошо решается:

если $y_n \in H$, $y_n \to y_0 \in H$ и $\forall n\ \exists x_n \in H$: $(A-\lambda I)x_n = y_n$

Тогда $\exists x_0 \in H$: $x_n \to x_0$ и $(A-\lambda I)x_0 = y_0$. Докажем это св-во.

Достаточно убедиться, что посл-ть $x_1, x_2, .., x_n, ..$ - фундаментальна. $\Rightarrow$

$\exists \lim x_n$, тогда перейдем потом к $\lim$ и все док.

$\|x_n - x_m\| = \|(A-\lambda I)^{-1} y_n - (A-\lambda I)^{-1} y_m\| = \|(A-\lambda I)^{-1}(y_n - y_m)\| \leq$

$\leq \underbrace{\|(A-\lambda I)^{-1}\|}_{<\infty \text{ т.к. оп-р ограничен}} \cdot \|y_n - y_m\|$

Т.к. $y_1, y_2, .. y_n, ..$ сход-ся $\Rightarrow$ она фундаментальна $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$: $\forall m, n \geq n_0$ $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$. Но для этих же n, m $\|x_n - x_m\| \leq \|(A-\lambda I)^{-1}\| \cdot \varepsilon$

т.к. $\forall \varepsilon \Rightarrow x_1, x_2, .. x_n, ..$ - фундаментальна - чтд.

<u>Опр:</u> <u>Спектром</u> оп-ра A назыв все компл числа, кот. не лежат в резольвентном мн-ве, т.е. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

<u>Случай (1)</u>: оп-р $A - \lambda I$ - не обратим $\Rightarrow \exists x \neq 0$: $(A-\lambda I)x = 0$ или $Ax = \lambda x$. Тогда x назыв. собств в-ром оп-ра A, отвеч. собств. значению λ оп-ра A. <u>Точечный спектр</u> оп-ра A по опр. состоит из всех собств. знач. оп-ра A. Обознач. $\sigma_p(A)$.

<u>(3)</u>: $(A-\lambda I)^{-1}$ определен не во всем пр-ве H, а на плотном подпр-ве. Говорят, что соотв. λ принадлежат <u>непрерывному спектру</u> оп-ра A. Обознач. $\sigma_c(A)$

<u>(4)</u>: $\lambda \in \sigma_r(A)$ - остаточный спектр A.

<u>Св-ва спектра:</u>

<u>1)</u> $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ - очевидно

~~2)~~ $\sigma_p(A) \cap \sigma_c(A) = \sigma_p(A) \cap \sigma_r(A) = \sigma_c(A) \cap \sigma_r(A) = \emptyset$

2) Спектр содержится в замкнутом круге с центром в нуле, радиуса $\|A\|$, т.е. $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \sigma(A)\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$

<u>Д-во:</u> достаточно д-ть, что если $|\lambda| > \|A\|$, то $\lambda \in \rho(A)$

т.е. нужно д-ть, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}$: $|\lambda| > \|A\|$ $(A-\lambda I)$ обратим здесь $|\lambda| > \|A\| \geq 0 \Rightarrow$ делим

$(A-\lambda I)^{-1} = \left[-\lambda(I-\frac{1}{\lambda}A)\right]^{-1} = \left[(-\lambda I)(I-\frac{1}{\lambda}A)\right]^{-1} = (I-\frac{1}{\lambda}A)^{-1}(-\lambda I)^{-1}$

очевидно обратим

обратим по теор. Неймана: Если $\|B\| < 1$, то $(I-B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$. Здесь $B = \frac{1}{\lambda}A$

$\|B\| = \frac{1}{|\lambda|}\|A\| < 1$ - рассм. такие λ $\Rightarrow (I-\frac{1}{\lambda}A)$ - $\exists$ и опре во всем пр-ве, $-\lambda I$

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ - ч.т.д.

3) Спектр оп-ра явл. замкнутым мн-вом

Д-во: достаточно д-ть, что $\rho(A)$ явл. открытым, т.е. дост. д-ть, что если $\lambda_0 \in \rho(A)$, то $\exists\, \varepsilon > 0: \forall \lambda \in \mathbb{C}$ $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ имеем $\lambda \in \rho(A)$

т.е. вместе с $\forall$ точкой содерж. ее окр-ть - круг малого радиуса.

$(A-\lambda I)^{-1} = (A-\lambda_0 I - (\lambda-\lambda_0)I)^{-1} = \left\{(A-\lambda_0 I)\left[I-(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\right]\right\}^{-1}$

$= \left[I-(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\right]^{-1}(A-\lambda_0 I)^{-1}$

т.к.: $(A-\lambda_0 I)$ - обратим, т.к. $\lambda_0 \in \rho(A)$

$I-(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}$ - обратим по теор. Неймана:

здесь $\|B\| = \|(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\|$

Значит если $\varepsilon = \frac{1}{\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\|}$ и $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, то $\|B\| = |\lambda-\lambda_0| \cdot \|(A-\lambda I)^{-1}\| < 1$

$\Rightarrow (A-\lambda I)^{-1}$ определен во всем $H \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$

т.к. оба оп-ра из произведения опред. во всем пр-ве.

6.8 Линейные функционалы

Опр: лин. оп-р: $H \to \mathbb{C}$ или $H \to \mathbb{R}$ назыв. лин. функционалом

Пример: H - гильб. пр-во, $x_0 \in H$. Определим $f: H \to \mathbb{C}$ ф-лой:

$f(x) = (x, x_0)$. Очевидно, f - лин. функционал.

Замеч: т.к. функционал явл. оп-ром, то мы знаем понятия непр-ть функционала, огранич-ть функционала, норма функционала.

Опр: $\operatorname{Ker} f = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$ - ядро функционала f

Св-ва ядра ф-ла:

1) $\operatorname{Ker} f$ - лин. подпр-во H

Д-во: Пусть $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker} f$, тогда $\forall \alpha, \beta$ - числа

$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in \operatorname{Ker} f$ - ч.т.д.

2) Если f - непр ф-ал, то $\ker f$ - замкнуто.

Д-во: Пусть $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots \in \ker f$ и пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$

Дост. д-ть, что $x_0 \in \ker f$.

Т.к. f - непрер, то $\overset{=0}{f(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$. Очевидно $f(x_0)=0 \Rightarrow x_0 \in \ker f$

3) Пусть f - непр. ф-л и $f \neq 0$. Тогда $\operatorname{codim} \ker f = 1$, т.е. коразмерность ядра ф-ла $f = 1$, т.е. размерность ортогон. дополнения к ядру $f = 1$. (т.е. $\dim(\ker f)^\perp = 1$)

Объяснение из лин. алг.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задается ф-лой $f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$; x_1, x_2 - коорд. точки на $\mathbb{R}^2$.

$\ker f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}$ - прямая.

$(\ker f)^\perp$ - прямая, перпендик. $\ker f$; $\dim(\ker f)^\perp = 1$

Д-во: т.к. f - непр, то $\ker f$ - замкнутое подпр-во в H. $\Rightarrow$

Знаем, что $H = (\ker f) \oplus (\ker f)^\perp$

Нужно д-ть, что $\dim(\ker f)^\perp = 1$

Т.к. $f \neq 0$, то $\ker f \neq H$ и $\dim(\ker f)^\perp \neq 0$

Значит $\exists x_0 \in (\ker f)^\perp$ и $x_0 \neq 0$. Выберем $\forall x_1 \in (\ker f)^\perp$ и убедимся, что $\exists \alpha$ - число: $x_1 = \alpha x_0$. Это будет означать, что $\dim(\ker f)^\perp = 1$. Положим $\alpha = \frac{f(x_1)}{f(x_0)}$. Тогда $x_1 - \alpha x_0 \in (\ker f)^\perp$

$f(x_1 - \alpha x_0) = f(x_1) - \frac{f(x_1)}{f(x_0)} f(x_0) = 0 \Rightarrow x_1 - \alpha x_0 \in \ker f$

$\Rightarrow$ ~~$x_1 - \alpha x_0$~~ т.к. лежит и в $\ker f$ и в $(\ker f)^\perp$

$\Rightarrow x_1 - \alpha x_0 = 0$

11.04 4) Если $\ker f$ - замкнуто, то f - непрерывен.

Д-во: Если ~~[illegible]~~ $\ker f = H$, то $f = 0$ и f - непрерывен.

Если $\ker f \neq H$ и $\ker f$ - замкнуто, то $H = \underset{\neq H}{(\ker f)} \oplus (\ker f)^\perp$

Значит $(\ker f)^\perp \neq \{0\}$ ~~и по св-ву (3) $\dim(\ker f)^\perp = 1$~~

~~$\Rightarrow$~~ Фиксируем в-р $w \in (\ker f)^\perp$ и $w \neq 0$. Тогда $\forall x \in (\ker f)^\perp$

положим $\alpha = \frac{f(x)}{f(w)}$ ($f(w) \neq 0$, т.к. $w \neq 0$)

Тогда $x - \alpha w \in (\ker f)^\perp$ и $x - \alpha w \in \ker f$, т.к.

$f(x-\alpha w)=f(x)-\alpha f(w)=0 \Rightarrow x-\alpha w=0$ т.е. $x=\alpha w$

т.е. всякий в-р $x\in(\ker f)^\perp$ пропорционален в-ру w $\Rightarrow \dim(\ker f)^\perp=1$

Пусть $x_1,\ldots,x_n,\ldots\in H$, причем $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Убедимся, что $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$,

тогда f – непр в т. 0, но он линеен $\Rightarrow$ будет непр в $\forall$ точке.

$\forall n$ разложим $x_n=\underset{\in\ker f}{y_n}+\underset{\in(\ker f)^\perp}{z_n}$ т.к. $H=(\ker f)\oplus(\ker f)^\perp$

$x_n=y_n+\alpha_n w$, т.к. $z_n=\alpha_n w$ т.к. $y_n\in(\ker f)$

$\Rightarrow f(x_n)=f(y_n+\alpha_n w)=\overset{0}{f(y_n)}+\alpha_n f(w)=\alpha_n f(w)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ т.к. f – функц.

т.к. $\alpha_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ т.к. $0\xleftarrow[n\to\infty]{}\|x_n\|^2=\|y_n+\alpha_n w\|^2 = \|y_n\|^2+|\alpha_n|^2\cdot\|w\|^2 \geq |\alpha_n|^2\|w\|^2$

Теор. Пифагора т.к. $y_n\perp\alpha_n w$

6.3 Сопряженное пр-во. Теор Фриджиса Рисса.

Опр: Совокупность всех лин. непр ф-лов, опред. на гильб-вом пр-ве H назыв-ся пр-вом, сопряженным к H и обознач. H^*.

Теор (Ф. Рисса)(об общем виде лин. непр. ф-ла))

Пусть H – гильб. пр-во, тогда имеют место 2 утв:

1) $\forall f\in H^*$ $\exists!\, x_0\in H$ т, что $\forall x\in H$ $f(x)=(x,x_0)$, причем $\|f\|=\|x_0\|$

2) $\forall x_0\in H$ ф-ла $f(x)=(x,x_0)$, где $x\in H$ задает лин. непр. ф-л на H, причем $\|f\|=\|x_0\|$

Д-во: 2) лин-ть ф-ла $f(x)=(x,x_0)$ – очевидно.

$|f(x)|=|(x,x_0)|\overset{\text{к-Б}}{\leq}\|x\|\cdot\|x_0\| \Rightarrow \|f\|=\sup\limits_{x\neq 0}\overset{\leq\|x_0\|}{\frac{|f(x)|}{\|x\|}}\leq\|x_0\|$

С др. стороны $\|f\|=\sup\limits_{x\neq0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}\geq\frac{f(x_0)}{\|x_0\|}=\frac{|(x_0,x_0)|}{\|x_0\|}=\|x_0\|$

Значит $\|f\|=\|x_0\|$

Это было доказано, если $x_0\neq0$.

Если $x_0=0$, то $f(x)=(x,x_0)=0$ $\forall x\in H$ и $\|f\|=0=\|x_0\|$.

1) Д-во. Если $f=0$, то $x_0=0$. Тогда $\forall x\in H$: $f(x)=(x,0)=0$

Если f – непрер. и $f\neq0$, то $\ker f$ – замкнутое подпр-во в H, причем $\ker f\neq H$. Значит $H=(\ker f)+(\ker f)^\perp$

Посв-ву (3) $\dim(\ker f)^\perp=1$

Следовательно $\forall x \in H$ $\exists x_1 \in \ker f$ и $x_2 \in (\ker f)^\perp$: $x = x_1 + x_2 = x_1 + \alpha x_3$
где $x_3 \in (\ker f)^\perp$ и $\|x_3\| = 1$

Тогда $f(x) = f(x_1 + \alpha x_3) = \overset{0}{f(x_1)} + \alpha f(x_3) = \alpha f(x_3) =$ (преобраз.)

$= f(x_3)\underbrace{(x_1, x_3)}_{0, \text{ вообще-то}} + \alpha f(x_3)\underbrace{(x_3, x_3)}_{=1} = (x_1, \overline{f(x_3)}\, x_3) + (\alpha x_3, \overline{f(x_3)}\, x_3)$

$= (x_1 + \alpha x_3, \overline{f(x_3)} x_3) = (x, x_0)$, где $x_0 := \overline{f(x_3)}\, x_3$

Убедимся, что x_0 единств.:

Допустим, что есть $\tilde{x}_0 \neq x_0$ и $\forall x \in H$ $f(x) = (x, x_0)$ и $f(x) = (x, \tilde{x}_0)$

Тогда $\forall x \in H$ $(x, x_0 - \tilde{x}_0) = 0$ Подставим сюда $x = x_0 - \tilde{x}_0$

Получим $\|x_0 - \tilde{x}_0\|^2 = 0 \Rightarrow x_0 - \tilde{x}_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \tilde{x}_0$ противореч.

$\|f\| = \|x_0\|$ — доказали в пункте (2) $\Rightarrow$ все.

6.10 Бра- и кет- векторы

Замеч.: В этом пункте будем считать, что скал. произв. линейно по второму аргументу, а по первому — сопряженно.

Скал. произведение (x, y) будем записывать $\langle x | y \rangle$

Более того, разделим скал. произвед. на 2 отдельных символа

$\langle x |$ и $| y \rangle$ — кет-вектор   **bracket**

бра-вектор

Пример 1: Пусть $x_1 .. x_n$ — ОНБ в пр-ве H. Построим по нему набор кет-в-ров $|x_1\rangle \dots |x_n\rangle$. Тогда

$\sum\limits_{j=1}^n |x_j\rangle\langle x_j| = I$ — тождественный оп-р — правило сокращения

Д-во: $x_1, .., x_n$ — ОНБ $\Rightarrow \forall x \in H$ $x = \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j x_j$, где $\lambda_j = (x, x_j)$

$|x_1\rangle, \dots |x_n\rangle$ — ОНБ в $H \Rightarrow \forall |x\rangle \in H$

в-р тот же, только обознач. другое $|x\rangle = \sum\limits_{j=1}^n |x_j\rangle \lambda_j$

умножим это рав-во скалярно на $\langle x_k|$

$\langle x_k | x \rangle = \langle x_k | \sum\limits_{j=1}^n |x_j\rangle \lambda_j \rangle = \sum\limits_{j=1}^n \langle x_k | x_j \rangle \lambda_j = \lambda_k$

$|x\rangle = \sum\limits_{j=1}^n |x_j\rangle\langle x_j | x\rangle = \underbrace{\left\{\sum\limits_{j=1}^n |x_j\rangle\langle x_j|\right\}}_{\mathbb{J}} |x\rangle \Rightarrow \mathbb{J} = \sum\limits_{j=1}^n |x_j\rangle\langle x_j|$

Пример 2: Пусть $x_1,..,x_n$ — ОНБ в H; ~~дан~~ $A: H \to H$ — огранич. лин. оп-р и пусть $\forall j = 1,..,n$ $Ax_j = \lambda_j x_j$.

резольвента

Тогда $\forall \lambda \neq \lambda_j$ $(j=1..n)$ $(A-\lambda I)^{-1} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda}$

(Это оп-р, решающий уравнение $Ax - \lambda x = y$

Д-во: $|x_1\rangle,..,|x_n\rangle$.. ОНБ в H. Тогда $\forall |x\rangle \in H$ $\exists \alpha_1..\alpha_n$ т. что $|x\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j\rangle\alpha_j$, т.е. в-р $|x\rangle$ разложен по базису.

Значит $Ax - \lambda x = y \iff A(\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j x_j) - \lambda\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j x_j = y \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda_j x_j - \lambda\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j x_j = y \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n}(\lambda_j - \lambda)\alpha_j x_j = y$

То же самое вычисление:

$|x\rangle A - |x\rangle\lambda = |y\rangle \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n}|x_j\rangle\alpha_j A - \sum\limits_{j=1}^{n}|x_j\rangle\alpha_j\lambda = y$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n}|x_j\rangle\lambda_j\alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{n}|x_j\rangle\alpha_j\lambda = y \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n}|x_j\rangle(\lambda_j - \lambda)\alpha_j = |y\rangle$

Умножим скалярно на $\langle x_k|$

$\underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n}\langle x_k|x_j\rangle(\lambda_j-\lambda)\alpha_j}_{(\lambda_k - \lambda)\alpha_k} = \langle x_k|y\rangle$

$\Rightarrow \alpha_k = \frac{\langle x_k|y\rangle}{\lambda_k - \lambda} \Rightarrow |x\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n}|x_j\rangle\frac{\langle x_j|y\rangle}{\lambda_j - \lambda} =$

$= \underbrace{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{|x_j\rangle\langle x_j|}{\lambda_j - \lambda}\right)}_{=(A-\lambda I)^{-1}}|y\rangle$

6.11 Оп-р, сопряженный к ограниченному: определение и простейшие св-ва.

Опр: Пусть H, H_1 — гильб. пр-ва, $A: H \to H_1$ — огранич. лин. оп-р. фикс. $y \in H_1$, рассмотрим $f(x) = (Ax, y)$ $\forall x \in H$

Эта ф-ла задает лин. непр. ф-л в пр-ве H.

$\|f\| = \sup\limits_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq 0}\frac{|(Ax,y)|}{\|x\|} \overset{КБ}{\leq} \sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|\|y\|}{\|x\|} = \|A\|\cdot\|y\| < \infty \Rightarrow f$ — непр.

18.04

По теор. Рисса $\exists!$ $x_0 \in H$: $\forall x \in H$ $f(x) = (x, x_0)$. Значит каждому $y \in H_1$ сопоставим единств. $x_0 \in H$. Это правило назовем оп-ром, сопрят. к оп-ру A и обознач. его A^*. Тогда $x_0 = A^*y$ и $(Ax, y) = (x, A^*y)$

Короткое опр.: Если $A: H \to H_1$ – огранич. оп-р, то оп-р $A^*: H_1 \to H$ назыв. сопряж. к A, если $\forall x \in H$ и $\forall y \in H_1$ $(Ax, y) = (x, A^* y)$

Пример 1 (из линейки): Пусть H_1 – конечномерное пр-во, $x_1 \dots x_n$ – его ОНБ, $y_1, \dots, y_m$ – ОНБ в H_1.

Тогда $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ и $y = \sum_{p=1}^{m} \mu_p y_p$

$$Ax_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k \;; \quad A^* y_p = \sum_{q=1}^{n} a^*_{qp} x_q$$

м-ца оп-ра A м-ца оп-ра A^*

Задача – выразить a^*_{qp} через a_{kj}

$$(Ax, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k Ax_k, y\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k a_{jk} y_j, \sum_{p=1}^{m} \mu_p y_p\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{jk} \overline{\mu_j}$$

$$(x, A^* y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \sum_{p=1}^{m} \mu_p \sum_{q=1}^{n} a^*_{qp} x_q\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(\overline{\sum_{p=1}^{m} \mu_p a^*_{kp}}\right) = \{p=j\}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\mu_j}\, \overline{a^*_{kj}}$$

$\forall x, y$, т.е. $\forall \lambda_k, \mu_k$ $\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{jk} \overline{\mu_j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\mu_j}\, \overline{a^*_{kj}}$

$\Rightarrow a_{jk} = \overline{a^*_{kj}} \Rightarrow a^*_{kj} = \overline{a_{jk}}$

Допустим, что $\exists\, k_0, j_0: a_{j_0 k_0} \neq \overline{a^*_{k_0 j_0}}$

Возьмем $\lambda_k = \begin{cases} 0 \text{ если } k \neq k_0 \\ 1 \text{ если } k = k_0 \end{cases}$ $\mu_k = \begin{cases} 0 \text{ если } j \neq j_0 \\ 1 \text{ если } j = j_0 \end{cases}$

Пример 2. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Ax)(t) = t x(t)$. ~~Найти A^*~~.

Убедимся, что $A^* = A$, т.е. убед., что $\forall x, y \in L_2[0,1]$ выполн. рав-во $(Ax, y) = (x, Ay)$. **В самом деле:** $(Ax, y) = \int_0^1 (Ax)(t)\overline{y(t)}\,dt =$
$= \int_0^1 t x(t) \overline{y(t)}\,dt = \int_0^1 x(t) \overline{t y(t)}\,dt = \int_0^1 x(t) \overline{(Ay)(t)}\,dt = (x, Ay)$

Мини-лемма: Пусть H – гильб-во пр-во, $x, y \in H$ таковы, что $\forall z \in H$ $(z, x) = (z, y)$. Тогда $x = y$.

Д-во: Используя лин-ть скал. произв. $\Rightarrow$

$(z, x) = (z, y) \Leftrightarrow (z, x - y) = 0 \quad \forall z \in H$

Подставим сюда $z = x - y$, получим $\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

Св-ва сопряженного оп-ра:

1) Оп-р A^* линеен и $\|A^*\| \le \|A\|$

Д-во: надо д-ть, что $\forall y_1, y_2 \in H_1$, $\forall \alpha, \beta$ - числа $A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2$

Фикс. $\forall x \in H$ $(x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) = (Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar\alpha (Ax, y_1) + \bar\beta (Ax, y_2) =$
$= \bar\alpha (x, A^* y_1) + \bar\beta (x, A^* y_2) = (x, \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2)$ $\forall x \Rightarrow$ по лемме
$\Rightarrow A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^* y_1 + \beta A^* y_2$, т.е. A^* линеен.

Теперь докажем, что $\|A^*\| \le \|A\|$. Рассмотрим:
$(x, A^* y) = (Ax, y) \overset{\text{К.Б.}}{\le} \|Ax\| \|y\| \le \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ подставим сюда $x = A^* y$
Тогда $\|A^* y\|^2 \le \|A\| \cdot \|A^* y\| \cdot \|y\|$
$\|A^* y\| \le \|A\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|A^*\| = \sup\limits_{y \ne 0} \frac{\|A^* y\|}{\|y\|} \le \|A\|$ - чтд.

2) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar\alpha A^* + \bar\beta B^*$

Д-во: Надо д-ть, что $\forall y \in H_1$ $(\alpha A + \beta B)^* y = \bar\alpha A^* y + \bar\beta B^* y$
Фикс $x \in H$ и $y \in H_1$. Тогда $(x, (\alpha A + \beta B)^* y) = ((\alpha A + \beta B)x, y) =$
$= (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha (Ax, y) + \beta (Bx, y) = \alpha (x, A^* y) + \beta (x, B^* y) =$
$= (x, \bar\alpha A^* y + \bar\beta B^* y) = (x, (\bar\alpha A^* + \bar\beta B^*) y)$
$\Rightarrow$ по лемме - чтд.

3) $(A^*)^* = A$

Д-во: Если $A: H \to H_1$, то $A^*: H_1 \to H$, $(A^*)^*: H \to H_1$
Выберем произв. $x \in H$, $y \in H_1$. Тогда ~~$(x, (A^*)^* y)$~~ $(y, (A^*)^* x) =$
$= (A^* y, x) = \cancel{(y, Ax)} = \overline{(x, A^* y)} = \overline{(Ax, y)} = (y, Ax)$
по лемме $(A^*)^* x = Ax$ $\forall x \in H \Rightarrow (A^*)^* = A$

4) $\|A^*\| = \|A\|$

Д-во: $\|A\| \overset{(3)}{=} \|(A^*)^*\| \overset{(1)}{\le} \|A^*\| \overset{(1)}{\le} \|A\| \Rightarrow \|A^*\| = \|A\|$

5) $I^* = I$

Д-во: $\forall x, y \in H$ $(x, I^* y) = (Ix, y) = (x, y)$ $\Rightarrow$ по лемме $I^* y = \overset{Iy}{\overset{\parallel}{y}} \Rightarrow I^* = I$

Замеч: Оп-ры являются обобщением понятия числа:
$\forall \alpha \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \alpha I$ - оп-р. При этом операция вычисления сопряж. оп-ра соотв. нахождению комплексно сопряж. числа: $(\alpha I)^* = \bar\alpha I^* = \bar\alpha I$

Поэтому в физич. литературе операцию сопряжения компл. чисел часто обознач не чертой, а *. При этом наше св-во (2) выглядит так: $(\alpha A+\beta B)^* = \alpha^* A^* + \beta^* B^*$

6.12 Применение сопряж. оп-ра при вычислении спектра.

Теор: Пусть $A: H\to H$ - лин. огранич. оп-р и $\lambda\in\mathbb{C}$ не явл. его собств. знач. Тогда $\lambda\in\sigma_r(A) \Leftrightarrow \bar\lambda\in\sigma_p(A^*)$

Д-во: $\Rightarrow$ Пусть $\lambda\in\sigma_r(A)$. Значит $A-\lambda J$ обратим и $\underbrace{cl\,dom(A-\lambda J)^{-1}}_{=S}\neq H$.

Т.к. S - замкн. подпр-во, то $H=S\oplus S^\perp$. Т.к. $H\neq S$, то $S^\perp\neq\{0\}$

Фикс. $y\neq 0$, $y\in S^\perp$. Тогда $\forall x\in H$ получим

$$(x,(A-\lambda J)^* y) = (\underbrace{(A-\lambda J)x}_{\in im(A-\lambda J)=dom(A-\lambda J)^{-1}\subset S}, \overset{\in S^\perp}{y}) = 0 = (x,0)$$

По мини-лемме $(A-\lambda J)^* y = 0$

$\Leftrightarrow (A^*-\bar\lambda J)y=0 \Leftrightarrow A^* y = \bar\lambda y \Leftrightarrow \bar\lambda\in\sigma_p(A^*)$

$\Leftarrow$ Пусть $\bar\lambda\in\sigma_p(A^*)$ и $\lambda\notin\sigma_p(A)$. Значит $\exists y\neq 0: A^*y=\bar\lambda y$

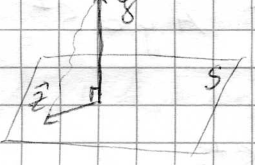
$\Rightarrow (A-\lambda J)^* y = 0$. Значит $\forall x\in H \quad (x,(A-\lambda J)^* y)=0=$

$= (\underbrace{(A-\lambda J)x}_{\in im(A-\lambda J)}, y) \Rightarrow y\perp im(A-\lambda J)$. Обозначим $S=\{y\}^\perp=$

$=\{z\in H \mid (z,y)\}=0$.

Т.к. $\lambda\notin\sigma_p(A)$, то $(A-\lambda J)$ обратим. Из предыдущ. $\Rightarrow$

$dom(A-\lambda J)^{-1}\subset S$. Убедимся, что $cl\,S\neq H$



$\forall z\in S \quad \|y-z\|^2 = \|y\|^2+\|z\|^2 \geq \|y\|^2$

$\Rightarrow S$ - не плотно в $H \Rightarrow dom(A-\lambda J)^{-1}$ не плотно в H

$\Rightarrow \lambda\in\sigma_r(A)$

25.04

6.13 Ограниченные самосопряж. оп-ры.

Теор. о точечном спектре, норме и квадр-ном подпр-ве.

Опр: Оп-р $A: H\to H$ назыв-ся самосопряж, если $A^*=A$

Теор. о точечном спектре самосопряж. оп-ра:

Если $\lambda\in\sigma_p(A)$, то $\lambda\in\mathbb{R}$ и если x,y - собств в-ра оп-ра A, отвечающие собств. знач. λ и μ, причем $\lambda \neq \mu$, то $x \perp y$

<u>Д-во:</u> Пусть $\lambda \in \sigma_p(A)$ и пусть $x \neq 0$ удовл. $Ax = \lambda x$ (т.е. x - собств. в-р)

Причем $\|x\| = 1$. Тогда $\lambda = \lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, \underset{=A^*}{Ax}) =$

$= (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x,x) = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Пусть теперь $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$

$$0 = (Ax, y) - (x, Ay) = \lambda(x,y) - \mu(x,y)$$

$$0 = (\lambda - \mu)(x,y) \quad \lambda - \mu \neq 0 \Rightarrow (x,y) = 0 \Rightarrow x \perp y$$

<u>Теор. (О норме самосопряж. оп-ра):</u> Если $A: H \to H$ - самосопряж., то $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax,x)|}{\|x\|^2}$ (без д-ва)

<u>Опр:</u> Пусть H - гильб. пр-во, S - подпр-во в H. Назыв. Оп-р $A: H \to H$ Подпр-во S инвар-но относ. оп-ра A (или явл. <u>инвар. подпр-вом</u> оп-ра A), если $\forall x \in S$ в-р $Ax \in S$

<u>Пример:</u> $S = \{\alpha x \in H \mid \alpha$ - число, x - фикс. собств. в-р оп-ра $A\}$

<u>Теор (Об инвар-ном подпр-ве самосопряж. оп-ра):</u>

Если $A: H \to H$ - самосопряж. оп-р и S - его инвар. подпр-во, то $S^\perp$ - тоже инвар. подпр-во оп-ра A.

<u>Д-во:</u> Дано: S - инвар. подпр-во $\Rightarrow \forall x \in S \quad Ax \in S \Rightarrow$

$\forall x \in S, \forall y \in S^\perp \quad (Ax, y) = 0$

Надо д-ть: $S^\perp$ - инвар. подпр-во, т.е. $\forall y \in S^\perp \quad Ay \in S^\perp$, т.е.

$\forall x \in S, \forall y \in S^\perp \quad (x, Ay) = 0 = (Ay, x)$

$0 = (Ax, y) = (x, A^* y) = (x, Ay) \Rightarrow (x, Ay) = 0 \Rightarrow S^\perp$ - инвар. подпр-во

<u>6.14 Компактные оп-ры</u>

<u>Опр:</u> Оп-р $A: H \to H$, назыв-ся <u>компактным</u>, если $\exists$ пос-ть оп-ров $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ такая, что $\forall n$ A_n - огранич. лин. оп-р и $\underline{\dim \operatorname{im} A_n} < +\infty$ и $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$

оп-р A_n имеет конечномерный образ

Св-ва компактных оп-ров:

1) Если A, B - компактн. оп-ры, то $\forall \alpha, \beta$ - числа $\alpha A+\beta B$ - комп. оп-р

Д-во: A комп. $\Rightarrow \exists A_n: A_n$ - огр, $\dim \operatorname{im} A_n < +\infty$ и $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

B - комп $\Rightarrow \exists B_n: B_n$ - огр, $\dim \operatorname{im} B_n < \infty$ и $B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} B$

Убед, что $\alpha A_n + \beta B_n$ - огр, $\dim \operatorname{im} (\alpha A_n + \beta B_n) < \infty$ и

$(\alpha A_n + \beta B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha A + B\beta \Rightarrow (\alpha A_n + \beta B_n)$ - комп

$\|A_n \alpha + \beta B_n\| \le |\alpha| \|A_n\| + |\beta| \|B_n\| < \infty \Rightarrow \alpha A_n + \beta B_n$ - огр.

$\dim \operatorname{im} (\alpha A_n + \beta B_n) \le \dim \operatorname{im} A_n + \dim \operatorname{im} B_n < \infty$

[т.к. $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$]

$\|(\alpha A_n + \beta B_n) - (\alpha A + \beta B)\| = \|\alpha(A_n - A) + \beta(B_n - B)\| =$

$= |\alpha| \|A_n - A\| + |\beta| \|B_n - B\| \to 0 \Rightarrow \alpha A_n + \beta B_n \to \alpha A + \beta B$

т.о. комп оп-р образуют лин. подпр-во в пр-ве оп-ров

2) A - комп $\Rightarrow A$ - огранич.

Д-во: A - комп $\Rightarrow \exists A_n: A_n$ - огр, $\dim \operatorname{im} A_n < \infty$ и $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0: \forall n \ge n_0\ \|A - A_n\| < \varepsilon$

Выберем $\varepsilon = 1$. Для него найдется n_0. Тогда

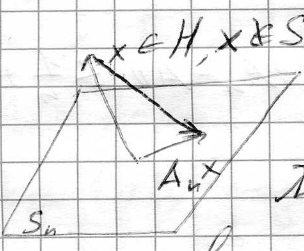
$\|A\| = \|A - A_{n_0} + A_{n_0}\| \le \|A - A_{n_0}\| + \|A_{n_0}\| \le 1 + \|A_{n_0}\| < \infty$

3) Если $\dim H = \infty$, то I - тождеств. оп-р не компактен.

Д-во: от противного. Допустим, что I - компактен, тогда

$\exists A_n: A_n$ - огранич, $\dim \underbrace{\operatorname{im} A_n}_{:= S_n} < +\infty$ и $A_n \to I$

$x \in H, x \notin S_n, x \perp S_n$



$\|A_n - I\| = \sup\limits_{y \ne 0} \dfrac{\|(A_n - I)y\|}{\|y\|} \overset{y=x}{\ge} \dfrac{\|(A_n - I)x\|}{\|x\|} \ge \dfrac{\|x\|}{\|x\|} =$

~~Пусть $z \in S_n$ - в-р наилучш. приближ. элементами в-ров подпр-ва S_n. $\|x - z\| \le \|x - u\|$ $\forall u \in S_n$~~

$\ge \cancel{\dfrac{\|x - z\|}{\|x\|}} \Rightarrow \|A_n - I\| \ge 1$, т.е. $\|A_n - I\| \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ - противоречие

4) Если $A: H \to H_1$ – компакт; $B: H_1 \to H_2$ – огр; $C: H_3 \to H$ – огр, то оп-ры BA и AC – компактны

Д-во: A – комп $\Rightarrow \exists A_n$ – огр, $\dim \operatorname{im} A_n < \infty$ и $A_n \to A$

Убедимся, что BA_n облад. св-вами: BA_n – огр, $\dim BA_n < \infty$ и $BA_n \to BA \Rightarrow BA$ – комп.

$\|BA_n\| \le \|B\| \cdot \|A_n\| < \infty \Rightarrow BA_n$ – огр.

$\dim \operatorname{im} BA_n \le \dim \operatorname{im} A_n < \infty$

$\|BA - BA_n\| = \|B(A - A_n)\| \le \underbrace{\|B\|}_{const} \cdot \underbrace{\|A - A_n\|}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ – чтд.

5) Если оп-р $A: H \to H$ – компактен и обратим, $\dim H = \infty$, тогда A^{-1} не м/б ограниченным.

Д-во: от противного: допустим A^{-1} – огр. Тогда по (4)

$\underset{\text{комп}}{A} \cdot \underset{\text{огр}}{A^{-1}} = \underset{\text{комп}}{J}$, но J – не комп $\Rightarrow A^{-1}$ – не огр. (св-во 3)

Другая формулировка (5): $(A - \lambda J)^{-1}$ – опред не во всем пр-ве при $\lambda = 0$. (5) $\Leftrightarrow 0 \in \sigma(A)$

6) Если $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ причем $\forall n$ A_n – комп и $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

Тогда A – компактен, т.е. пр-во комп оп-ров замкнуто

Д-во: Дано: A_n – комп $\Rightarrow \exists A_n^1, A_n^2, \dots A_n^k, \dots : \forall k$ A_n^k – огр, $\dim \operatorname{im} A_n^k < \infty$ и $A_n^k \xrightarrow[k\to\infty]{} A_n$. $\forall n$ выберем $k(n)$: $\forall k \ge k(n)$ выполн нер-во $\|A_n^k - A_n\| < \frac{1}{n}$. Рассмотрим посл-ть $A_1^{k(1)}, A_2^{k(2)}, \dots, A_n^{k(n)}, \dots$ очевидно $A_n^{k(n)}$ – огр и $\dim \operatorname{im} A_n^{k(n)} < \infty$

Убедимся, что $A_n^{k(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} A$

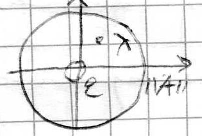
$\|A_n^{k(n)} - A\| \le \|A_n^{k(n)} + A_n - A_n - A\| \le \|A_n^{k(n)} - A_n\| + \|A_n - A\| \le \frac{1}{n} + \|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{}$

Значит оп-р A – компактен

Теор (о дискр-ти точечн. спектра комп. оп-ра) (без д-ва):

Пусть $A: H \to H$ – комп, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ лишь конечное число лин. независ. собств. в-ров оп-ра A, отвечающих собств знач $\lambda: |\lambda| \ge \varepsilon$

вне круга рад ε - конечное кол-во λ



Следств.:

1) Собств. знач. $\lambda \neq 0$ отвечает лишь конечн. число лин. независ. собств. в-ров компактн. оп-ра A. Это число назыв-ся геометрич. кратностью собств. знач. $\lambda \neq 0$.

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ лишь конечное число собств знач λ комп оп-ра A, удовл. нер-ву $|\lambda| \geq \varepsilon$

3) Собств. знач. комп. оп-ра можно перенумеровать ~~все~~ с учетом кратностей в порядке невозрастания модулей

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots > 0$

26.04

6.15 Компактные самосопряж. оп-ры

Теор (о непустоте точечного спектра комп. самосопр. оп-ра):

Пусть H - гильб. пр-во, $A: H \to H$ - комп. самосопр. оп-р и $A \neq 0$

Тогда $\exists \lambda \neq 0$ - собств. знач. оп-ра A.

Идея д-ва: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$ $\Rightarrow$ $\exists$ посл-ть в-ров $x_1, \ldots, x_n, \ldots$: $\|x_n\| = 1$ и x_n - сход-ся. Обознач. $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Можно показать, что x_0: $Ax_0 = \lambda x_0$, $|\lambda| = \|A\| \neq 0$

Теор. Гильберта-Шмидта:

Пусть H - гильб. пр-во, $\dim H > 0$, A - компактный самосопр. оп-р. Тогда в H $\exists$ ОНБ, состоящий из собств. в-ров оп-ра A

Идея д-ва: Если $A = 0$, то $\forall$ базис ОНБ в H удовл. заключ. теор. Если $A \neq 0$, тогда по предыдущ. теор. $\exists$ собств. знач. оп-ра A $\lambda \neq 0$ и x_0 - соотв. собств. в-р. Рассмотрим $S = \{x \in H : x \perp x_0\}$ - это замкнутое подпр-во. Т.к. $L = \{\alpha x_0 \mid \alpha$ - числа$\}$ - инвар. подпр-во оп-ра A, то по теор. об инвар. подпр-ве $S = L^{\perp}$ - тоже инвар. подпр-во оп-ра A. И дальше по кругу, так же, но уже не в H, а в S.

До базиса доберемся.

Замеч. Теор. Гильберта-Шмидта известна из линейки: всякая симметричн. м-ца приводится к диагон. виду ортогон. преобразованием

Теор (вариационный принцип Куранта)

Если $A: H \to H$ – компактный самосопряж. оп-р, тогда перенумер. λ_i:

$0 < \ldots \le \lambda_n \le \ldots \le \lambda_3 \le \lambda_2 \le \lambda_1$ $\lambda_{-1} \le \lambda_{-2} \le \ldots \le \lambda_{-n} < 0 \ldots \le \lambda_n \le \ldots \le \lambda_3 \le \lambda_2 \le \lambda_1$

– собств числа оп-ра A. Тогда $\lambda_n = \inf\limits_{H_{n-1}} \sup\limits_{\substack{x \ne 0 \\ x \perp H_{n-1}}} \frac{|(Ax,x)|}{\|x\|^2}$

где H_{n-1} – $\forall$ подпр-во в H разм-ти $n-1$

$\lambda_{-n} = \sup\limits_{H_{n-1}} \inf\limits_{x \ne 0} \frac{|(Ax,x)|}{\|x\|^2}$ (без д-ва)

6.16 Возмущение собств. чисел самосопр. оп-ра.

Теор: Пусть $A: H \to H$ – самосопр. и пусть $Ax_0 = \lambda_0 x_0$, т.е. пусть x_0 – собств в-р оп-ра A, отвеч. собств. знач. λ_0. Пусть B – нек. ~~огранич~~. лин. оп-р. Обознач $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + o(\varepsilon)$ – собств. знач. оп-ра $A + \varepsilon B$. Тогда $\lambda_1 = \frac{(Bx_0, x_0)}{(x_0, x_0)}$

Д-во: Пусть $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + o(\varepsilon)$ – собств в-р оп-ра $A + \varepsilon B$, отвеч. собств. знач. $\lambda(\varepsilon)$ т.е. $(A + \varepsilon B)x(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)x(\varepsilon)$

$(A + \varepsilon B)(x_0 + \varepsilon x_1 + o(\varepsilon)) = (\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + o(\varepsilon))(x_0 + \varepsilon x_1 + o(\varepsilon))$

$\underbrace{\cancel{Ax_0}}_{\text{по усл } = \lambda_0 x_0} + \varepsilon(Ax_1 + Bx_0) + o(\varepsilon) = \cancel{\lambda_0 x_0} + \varepsilon(\lambda_1 x_0 + \lambda_0 x_1) + o(\varepsilon)$

$Ax_1 + Bx_0 = \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_0$

Разложим x_1 на в-р $x_1^\perp$ – $\perp$ к x_0 и x_1'' – $\parallel x_0$ т.е. $x_1 = x_1^\perp + x_1'' = x_1$

$Ax_1^\perp + \cancel{\alpha Ax_0} + Bx_0 = \lambda_0 x_1^\perp + \cancel{\lambda_0 \alpha x_0} + \lambda_1 x_0$ $| \cdot x_0$ – скал-но

$\underbrace{(Ax_1^\perp, x_0)}_{\to 0 \text{ т.к}} + (Bx_0, x_0) = \lambda_0 \underbrace{(x_1^\perp, x_0)}_{\to 0} + \lambda_1(x_0, x_0)$

$(Ax_1^\perp, x_0) = (x_1^\perp, A^* x_0) = (x_1^\perp, Ax_0) = (x_1^\perp, \lambda_0 x_0) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{(Bx_0, x_0)}{(x_0, x_0)}$ – ч.т.д.

§7 Интегральные уравнения

7.1 Интегр. уравнения Фредгольма и Вольтерра.

Примеры задач, к ним приводящих.

Опр: Интегр. уравн — то, которое содержит искомую ф-цию под знаком $\int$-ла.

Замеч: Это плохое опр., так же плохо говорить, что дифур — это явл. уравн, содерж. произв от искомой ф-ции.

$y'(y(x)) = f(x)$ — про такой „дифур" ничего не знаем, ужасное уравн.

Интегр. уравн.

	I рода	II рода
Фредгольма	$\int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds + f(t) = 0$	$\int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds + f(t) = x(t)$
Вольтерра	$\int\limits_a^t K(t,s)x(s)\,ds + f(t) = 0$	$\int\limits_a^t K(t,s)x(s)\,ds + f(t) = x(t)$

$x(t)$ — искомая ф-ция, $K(t,s)$ — ядро, $f(t)$ — свободная ф-ция.

Замеч: уравн. Вольтерра явл. частн. случаем уравн. Фредгольма: $\int\limits_a^t K(t,s)x(s)\,ds = \int\limits_a^b \tilde{K}(t,s)x(s)\,ds$

где $\tilde{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s) & a \le s \le t \\ 0 & t \le s \le b \end{cases}$

Пример 1: Из дифуров $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$

$\Leftrightarrow$ $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$ дальше метод последов. прибл...?

Пример 2: $x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + p_{n-1}(t)x'(t) + p_n(t)x(t) = f(t)$

$x(a) = 0, x'(a) = 0 = x''(a) = \ldots = x^{(n-1)} = 0$

Сделаем замену переменных: $x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^t y(s)(t-s)^{n-1}\,ds$

Из МА: $\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,s)\,ds = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,ds + \beta'(t) f(t,\beta(t)) - \alpha'(t) f(t,\alpha(t))$

$x'(t) = \frac{n-1}{(n-1)!}\int\limits_a^t y(s)(t-s)^{n-2}\,ds + \underbrace{y(t)(t-t)^{n-1}}_{0} - 0 = \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_a^t y(s)(t-s)^{n-2}\,ds$

...

$x^{(k)}(t) = \frac{1}{(n-k-1)!}\int\limits_a^t y(s)(t-s)^{n-k-1}\,ds$

$x^{(n-1)}(t) = \int\limits_a^t y(s)\,ds$; $x^{(n)}(t) = y(t) \Rightarrow$ ф-ла замены обоснована.

подставл. в уравн.:

$y(t) + \int\limits_a^t K(t,s)\,y(s)\,ds = f(t)$ — интегр. уравн. Вольтерра II рода,

где $K(t,s) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(t-s)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \cdot p_{n-k}(t)$

7.2 Интегр. оп-р Гильберта-Шмидта.

Опр.: Пусть $K: [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ и $\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds$

т.е. пусть $K \in L_2([a,b]\times[a,b])$, K-ядро

Определим опр $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ ф-лой:

$(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds$ — оп-р Гильб-Шмидта, ф-ция K — его ядро. , чувствка!

Замеч.: Уравн. Фредгольма II рода запис с помощью оп-ра A в виде $Ax + f = x$

Теор (о комп-ти оп-ра Гильб-Шмидта): оп-р Гильб-Шмидта A линеен, ограничен, $\|A\| \le \sqrt{\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds}$ более того, A-компактен

7.2 Интегр. оп-р Гильберта-Шмидта (еще раз) 16.05

Опр.: пусть дана ф-ция $K: [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$ такая, что $\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds < \infty$. Тогда интегр. оп-ром Г-Ш с ядром K называ-ся оп-р $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ заданный ф-лой

$(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds$

Замеч.: уравнение Фредгольма II рода $x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds$ м/б записано в виде $x = Ax + f$

Теор (о комп-ти оп-ра Гильб-Шмидта):

Оп-р Г-Ш явл. линейным, компактным и $\|A\| \le \sqrt{\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,ds} = \|K(t,s)\|_{L_2([a,b]\times[a,b])}$

Идея д-ва: лин-ть A очевидна.

$|(Ax)(t)|^2 = \left|\int\limits_a^b \underset{\text{фикс}}{K(t,s)}\,x(s)\,ds\right|^2 \overset{\text{К.Б.}}{\le} \|x\|^2 \cdot \int\limits_a^b K(t,s)\,ds \Rightarrow$

скал. произв. парам-р

$$\|Ax\|^2=\int_a^b |(Ax)(t)|^2 dt \le \|x\|^2 \int_a^b\int_a^b |k(t,s)|^2 dt\,ds$$

$$\Rightarrow \|A\| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|k\|_{L_2([a,b]\times[a,b])}$$

I шаг (упр) Если $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – ОНБ в $L_2[a,b]$, то $\{x_n(t)\overline{x_m(s)}\}_{n,m=1}^{\infty}$ – ОНБ в $L_2([a,b]\times[a,b])$ (скал. произв + полнота)

II шаг разложим $k(s,t)$ по базису:

$k(t,s)=\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}x_m(t)\overline{x_n(s)}$. Рассм. ф-цию

$K_N(t,s):=\sum_{m,n=1}^{N} a_{mn}x_m(t)\overline{x_n(s)}$; Оп-р $(A_N x)(t)=\int_a^b K_N(t,s)x(s)ds$

III шаг (упр): д-ть:

1) $\forall N$ A_N – ограничен. (т.к. оп-р Г-Ш) | 3) $A_N \xrightarrow[N\to\infty]{} A$ рассм $\|A_N-A\|\le\|K-K_N\|$

2) $\forall_N$ $\dim \operatorname{im} A_N = N$ $\quad K_N \xrightarrow[N\to\infty]{} K \Rightarrow \to 0$

подст K_N в ∫-л, $x_m(t)$ – не зав. от ∫-а $\Rightarrow$ разложение const $\cdot x_m(t)$, $m=1\div N$

IV шаг: Из св-в 1-3 и опр. комп. оп-ра $\Rightarrow$ A – компактен

Теор (об оп-ре, сопряж. к оп-ру Г-Ш):

Пусть A – оп-р Г-Ш с ядром K ~~~~. Тогда A^* – тоже оп-р Г-Ш.

Если его ядро обознач. через K^*, то $K^*(t,s)=\overline{K(s,t)}$.

Д-во: Рассм оп-р $(By)(t)=\int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)ds$ – оп-р Г-Ш,

Убед, что $(Ax,y)=(x,By)$ $\forall x,y\in L_2[a,b]$

Отсюда будет следовать, что $A^*=B$ и $\overline{K(s,t)}=K^*(t,s)$

Вспом. деле: $(x,By)=\int_a^b x(t)\overline{(By)(t)}dt = \int_a^b x(t)\left(\int_a^b \overline{\overline{k(s,t)}\,y(s)}\,ds\right)dt =$

$=\int_a^b\int_a^b x(t)k(s,t)\overline{y(s)}dt\,ds = \int_a^b \overline{y(s)}\left(\int_a^b x(t)k(s,t)dt\right)ds$ = переобозна $_{s\leftrightarrow t}$

$=\int_a^b \overline{y(t)}\left(\int_a^b x(s)k(t,s)ds\right)dt=(Ax,y)$

7.3 Решение уравн. с вырожд. ядром.

Опр: Ядро вида $K(t,s)=\sum_{j=1}^{n} P_j(t)Q_j(s)$ назыв. вырожденным

Замеч: Без огранич. общн-ти можно считать, что посл-ть $P_1(t)\dots P_n(t)$ лин. независима (подставл., перегруппир.). Более того, дополнительно можно считать, что $Q_1\dots Q_n$ - лин. независ. (если лин. завис - подст. $Q_k=\sum a_i Q_i$, перегруппир., потом м/б опять завис. P, но уже $n-1$ слаг. => все с начала)

Пусть $x(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds+f(t)$ - уравн. Фредгольма с вырожд. ядром. Подставим ядро:

$$x(t)=\sum_{j=1}^{n} P_j(t)\underbrace{\int_a^b Q_j(s)x(s)ds}_{=q_j=const\ (\text{неизвестна})}+f(t) \Rightarrow x(t)=\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t)+f(t)$$

=> знаем реш. с точн. до неопред. коэф-тов q_j

подст. $x(t)$ в уравн.:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t)+f(t)=\sum_{j=1}^{n} P_j(t)\Big[\sum_{m=1}^{n} q_m\underbrace{\int_a^b P_m(s)Q_m(s)ds}_{a_{jm}=const\ \text{известна}}+\underbrace{\int_a^b Q_j(s)f(s)ds}_{b_j=const,\ \text{тоже известна}}\Big]+f(t)$$

разложение слева и справа по посл-ти $P_1..P_n$ - лин. независ., тогда $q_j=\sum_{m=1}^{n} a_{jm}q_m+b_j$ - приравняли коэф-ты

7.4 Альтернатива Фредгольма

$x=Ax+f$ (неоднор) (Н); $x=Ax$ (однор) (О), $y=A^*y$ (сопряж. однор) (СО)

Теор. (Альтернатива Фредгольма). Пусть A - комп. оп-р, тогда для неоднор. уравн. имеет место только одна из след. двух возможностей:

1) сопряж. однор. уравн. (СО) имеет единств. решение, при этом (О) тоже имеет ед. реш. $=0$, а (Н) имеет ед. реш. $\forall f$

2) (СО) имеет m лин. независ. реш. $y_1,\dots,y_m$; при этом (О) имеет такое же кол-во лин. независ. реш. $x_1\dots x_m$, а (Н) имеет реш. если и только если $f\perp y_j$ $\forall j=1,\dots,m$, y - реш (СО) и общ. реш (Н) имеет вид $x=x_0+c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_mx_m$, где x_0 - $\forall$ реш (Н), а $c_1,\dots,c_m$ - произв. пост.

Д-во (для случая, когда A – оп-р Г-Ш с вырожд. ядром)

Из п. 7.3 => (н) <=> $q_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} q_i + b_j$, где $a_{ij} = \int_a^b Q_j(s) P_i(s)\,ds$,

$b_j = \int_a^b Q_j(s) f(s)\,ds$, $x(t) = \sum_{j=1}^n q_j P_j(t) + f(t)$

(о) <=> $q_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} q_i$, где $a_{ji} = \int_a^b Q_j(s) P_i(s)\,ds$

$x(t) = \sum_{j=1}^n q_j P_j(t)$

(со) <=> $K(t,s) = \sum_{j=1}^n P_j(t) Q_j(s)$, $K^*(t,s) = \overline{K(s,t)} = \sum_{j=1}^n \overline{Q_j(t)}\,\overline{P_j(s)}$

$y(t) = \sum_{j=1}^n p_j \overline{Q_j(t)}$

↑ неопр. коэф-ты (аналог. q_j)

$p_j = \sum_{i=1}^n a^*_{ji} p_i$, где $a^*_{ji} = \int_a^b \overline{P_j(s)}\,\overline{Q_i(s)}\,ds = \overline{a_{ij}}$

Допустим, что (со) имеет единств. решение <=> $p_j = \sum_{i=1}^n \overline{a_{ij}} p_i$

имеет единств. реш. <=> $\det(\delta_{ij} - \overline{a_{ij}}) \ne 0$ <=> $\det(\delta_{ij} - a_{ji}) \ne 0$ <=>

<=> $q_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} q_i$ имеет единств. реш. <=> (о) имеет единств. реш. <=>

<=> (н) имеет ед. реш. $\forall f$

Допустим, что (со) имеет m лин. независ. решений $y_1 \dots y_m$ <=>

<=> $p_j = \sum_{i=1}^n \overline{a_{ij}} p_i$ имеет m лин. независ. реш. $(p_1^1, \dots, p_n^1), \dots, (p_1^m, \dots, p_n^m)$

причем $y_k = \sum_{j=1}^n p_j^k Q_j(t)$ <=> $\mathrm{rang}(\delta_{ij} - \overline{a_{ij}}) = n - m$ <=>

<=> $\mathrm{rang}(\delta_{ij} - a_{ji}) = n - m$ <=> $q_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} q_i$ имеет m лин.

независ. реш. Из линейки известно, что $q_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} q_i + b_j$

имеет реш <=> $(b_1 \dots b_n) \perp \forall (p_1^k, \dots, p_n^k)$ $\forall k = 1 \dots n$ (?. Не знаю такое)

Что это значит в терминах f и y_i: <=> $(f, y_k) = 0$

$(f, y_k) = \left(f, \sum_{j=1}^n p_j^k \overline{Q_j(t)}\right) = \sum_{j=1}^n \int_a^b f(t)\, \overline{p_j^k}\, Q_j(t)\,dt = \sum_{j=1}^n \overline{p_j^k}\, b_j = 0$

т.к. $(b_1 \dots b_n) \perp (p_1^k \dots p_n^k)$

ч.т.д.

23.0.

Уравнение $x - Ax = f$ имеет решение $\Leftrightarrow (f, y) = 0$ $\forall$ решения y уравнения $A^* y = y$ (или $(I-A)^* y = 0$)

$x - Ax = f \Leftrightarrow f \in im(I-A)$

$(I-A)^* y = 0 \Leftrightarrow y \in ker(I-A)^*$

$(f, y) = 0 \quad \forall y \Leftrightarrow f \in (ker(I-A)^*)^\perp$

Нужно д-ть, что $Im(I-A) = (ker(I-A)^*)^\perp$; $A: H \to H$, $\dim H < \infty$

$im(I-A) \subset (ker(I-A)^*)^\perp$ — докажем это:

$f \in im(I-A) \Rightarrow \exists x \in H: f = (I-A)x$. Значит $\forall y \in ker(I-A)^*$ имеем $(f, y) = ((I-A)x, y) = (x, (I-A)^* y) = (x, 0) = 0 \Rightarrow f \perp \forall y \Rightarrow$ $\Rightarrow f \in (ker(I-A)^*)^\perp$

Теперь д-ть, что $im(I-A) \supset (ker(I-A)^*)^\perp$

Воспользуемся св-вом: $L_1 \subset L_2$, то $L_1^\perp \supset L_2^\perp$ и $(L_1^\perp)^\perp = L_1$

Достаточно д-ть, что $(im(I-A))^\perp \subset ker(I-A)^*$. Это и докажем.

Предположим, что $f \in (im(I-A))^\perp \Rightarrow \forall x \in H$ $(I-A)x \in im(I-A)$

имеем $\underset{\substack{\parallel \\ (0,x)}}{0} = (f, (I-A)x) = ((I-A)^* f, x)$

$\forall x \Rightarrow$ по мини-лемме $(I-A)^* f = 0$

т.е. $f \in ker(I-A)^*$

7.5 Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений.

$x(t) = \mu \int_a^b K(t,S) x(S) dS + f(t) \Rightarrow x = \mu A x + f \Rightarrow (I - \mu A) x = f$

[Напомним: теор. Неймана: Если $\|B\| < 1$, то $I - B$ обратим и $(I-B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$, где $B^0 = I$, $B^{n+1} = B \cdot B^n$]

Из теор. Неймана $\Rightarrow$ если $\|\mu A\| < 1$, (т.е. $|\mu| \cdot \|A\| < 1$ или $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$)

то $x = (I - \mu A)^{-1} f = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n A^n f$ — ряд Неймана.

обозначим $x_0 = f$, $x_{n+1} = \mu A x_n$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ — это метод последов. приближ.

Если обозначить K_n — ядро оп-ра A^n, то $(A^n f)(t) = \int_a^b K_n(t,S) f(S) dS$

и ряд Неймана можно переписать след. образом:

$$x(t)=f(t)+\int_a^b \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\mu^n K_n(t,s)}_{=K(t,s,\mu)\text{ — резольвентное ядро}} f(s)\,ds = f(t)+\int_a^b K(t,s,\mu)f(s)\,ds$$

Теор (о повторном ядре оп-ра Г-Ш). Если A — оп-р Г-Ш, то $\forall n\geq 1$ A^n — оп-р Г-Ш и $K_n(t,s)$ наход-ся по ф-ле

$K_n(t,s)=\int_a^b K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau$

Д-во: $\int_a^b K_n(t,s)x(s)\,ds = (A^n x)(t) = (A(A^{n-1}x))(t) =$

$=\int_a^b K(t,\tau)(A^{n-1}(x))(\tau)\,d\tau = \int_a^b K(t,\tau)\left[\int_a^b K_{n-1}(\tau,s)x(s)\,ds\right]d\tau =$

порядок меняем, т.к. все в L_2 $\Rightarrow$ можно обосновать.

$=\int_a^b\left[\int_a^b K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau\right]x(s)\,ds$ это скал. произв $\Rightarrow$ единств-сть $\Rightarrow$

$K_n(t,s)=\int_a^b K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau$ — ч.т.д.

7.6 Теор. Гильберта-Шмидта для интегр. уравнений.

Разложение решения интегр. уравн по собств. ф-циям ядра.

[Напомним: Теор. Гильб.-Шмидта: Если $B: H\to H$ - компактный самосопряж. оп-р, то в H $\exists$ ОНБ $x_1, x_2, x_3, \ldots$, состоящий из собств. в-ров оп-ра B, т.е. $\forall n$ $Ax_n=\lambda_n x_n$]

В этом пункте пусть A - интегр. оп-р Г-Ш с симметричным ядром т.е. $K(t,s)=\overline{K(s,t)}$

Мы знаем, что такой оп-р компактен и самосопряжен.

Опр: Ненулевое решение интегр. уравнения $x=\mu Ax$ назыв-ся собств. ф-цией интегр. уравнения $x=\mu Ax$ (или собств. ф-цией ядра K). При этом число μ назыв. собств. значением интегр. уравнения $x=\mu Ax$ или собств. значением ядра.

Замеч: 1) Везде $\mu\neq 0$

2) μ - собств. знач. ядра $\Leftrightarrow$ $\lambda=\frac{1}{\mu}$ - собств. знач. оп-ра A

$(x=\mu Ax \Leftrightarrow Ax=\frac{1}{\mu}x=\lambda x)$

3) Мы знаем, что собств. знач. компактного самосопряж. оп-ра вещественны, могут быть перенумерованы $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\ldots$ с учетом кратности

и собств. в-ры, отвечающие разным собств. знач. ортогональны.
Значит все собств. знач. симметрич. ядра вещественны; могут быть перенумерованы с учетом кратности в порядке неубывания модуля
$0 < |\mu_1| \leq |\mu_2| \leq |\mu_3| \leq \ldots$, и собств. ф-ции, отвеч. различным собств. знач. ядра ортогональны друг другу.
Упр: Лин. комбинация собств. в-ров, отвеч. одному собств. знач. явл-ся собств. в-ром, отвеч. этому же самому собств. значению.
Поэтому без огранич. общн-ти можно считать, что все собств. в-ры, отвеч. $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n \ldots$ ортогональны друг другу и имеют единичн. длину.
Опр: Говорят, что ф-ция $f \in L_2$ представима через ядро $K(t,s)$ если $\exists x \in L_2(a,b)$: $f(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$ (т.е. если $f \in \operatorname{im} A$)
Теор (Г-Ш для интегр. уравнений с симметричн. ядром)
Пусть $x_1, x_2, \ldots$ – max, больше не добавить ортонормир. посл-ть собств. ф-ций интегр. уравн. $x = \mu A x$ с симметричн. ядром; и пусть f представима через ядро K оп-ра A. Тогда $f(t) = \sum_n f_n x_n(t)$, где $f_n = (f, x_n)$ – числа
Другими словами $x_1, \ldots x_n, \ldots$ – базис в $\operatorname{im} A$
Д-во: Пусть $y_1, \ldots y_n, \ldots$ – ОНБ из собств. в-ров оп-ра A в пр-ве $L_2[a,b]$, т.е. $Ay_n = \lambda_n y_n$. Этот базис $\exists$ по теор. Г-Ш.
Обозначим $L = \operatorname{im} A$. Выбросим из посл-ти $y_1, \ldots y_n, \ldots$ все в-ры, у которых $\lambda_n = 0$. Оставшиеся в-ры переобозначим в виде $x_1, \ldots x_n, \ldots$
Убедимся, что $x_1, \ldots x_n, \ldots$ образует базис в L. Можно:
Убедимся, что эта система полная, т.е. если $z \in L$ и $\forall n\ (z, x_n) = 0$, то $z = 0$
$(z, y_n) =$ 1) либо этот y_n выбросили при переходе к $x_1, x_2, \ldots$, т.е. $\lambda_n = 0$,
т.е. $(z, y_n) = (Au, y_n) = (u, Ay_n) = (u, \overset{=0}{\lambda_n} y_n) = 0$ (т.к. $z \in \operatorname{im} A$)
2) либо этот y_n не был выброшен при переходе к $x_1, x_2, \ldots$,
т.е. $y_n = x_k \Rightarrow (z, x_k) = 0$ по выбору z
$\Rightarrow$ т.к. $y_1, y_2, \ldots$ – базис, то $z = 0 \Rightarrow x_1, \ldots x_n, \ldots$ – базис.

Разложение решения по собств. ф-циям ядра: $x = \mu A x + f$,

$x - f = \mu A x = \sum_n a_n x_n$. Подставим в уравнение представимо через ядро.

$$\sum_n a_n x_n = \mu A\left(f + \sum_n a_n x_n\right) = \mu A f + \mu \sum_n a_n \underbrace{A x_n}_{=\frac{1}{\mu_n} x_n}$$

Т.к. x_n - собств. ф-ция ядра, то $x_n = \mu_n A x_n$

$A f = \sum_n b_n x_n$, где $b_n = (A f, x_n) = (f, A x_n) = \left(f, \frac{1}{\mu_n} x_n\right)$

$$\sum_n \left(a_n - \frac{\mu}{\mu_n}(f, x_n) - \frac{\mu}{\mu_n} a_n\right) x_n = 0$$

Т.к. $x_1, \dots, x_n$ - базис, то $\forall n \; a_n \frac{\mu_n - \mu}{\mu_n} = \frac{\mu}{\mu_n}(f, x_n)$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\mu}{\mu_n - \mu}(f, x_n) \Rightarrow x(t) = f(t) + \sum_n \frac{\mu}{\mu_n - \mu} \underbrace{(f, x_n)}_{=\int_a^b f(s)\overline{x_n(s)}\,ds} x_n(t)$$

- разложение решения по собств. ф-циям ядра.

7.7 Разложение повторного ядра по собств. ф-циям ядра. Билинейная ф-ла.

Теор (билин. ф-ла) Пусть K - симметричное ядро. Тогда $\forall n \geq 1$ в $L_2((a,b)\times(a,b))$ справедлива ф-ла $K_n(t,s) = \sum_j \lambda_j^n x_j(t)\overline{x_j(s)}$, где λ_j - собств. знач. оп-ра A, соотв. ядру K, $x_1, \dots, x_n, \dots$ - собств. в-ры оп-ра A.

Д-во: Знаем, что $x_1 \dots x_n$ образуют базис в $L_2(a,b)$

Упр: $\{x_k(t)\overline{x_j(s)}\}_{k,j=1,2,\dots}$ - ОНБ в $L_2((a,b)\times(a,b))$

Ядро $K \in L_2((a,b)\times(a,b)) \Rightarrow K_n(t,s) = \sum_{k,j} \left(K_n(t,s), x_k(t)\overline{x_j(s)}\right) \cdot x_k(t)\overline{x_j(s)} \overset{\triangle}{=}$

$$\left(K_n(t,s), x_k(t)\overline{x_j(s)}\right) = \int_a^b\int_a^b K_n(t,s) \overline{x_k(t)\overline{x_j(s)}}\,dt\,ds =$$

$$= \int_a^b\left[\int_a^b K(t,s) x_k(t)\,dt\right] \overline{x_j(s)}\,ds = \int_a^b \Big[\underbrace{\int_a^b K_n(t,s) x_j(s)\,ds}_{A^n x_j = A^{n-1}(A x_j) = \lambda_j A^{n-1} x_j = \dots = \lambda_j^n x_j}\Big] \overline{x_k(t)}\,dt \overset{\circ}{=}$$

(плохо)

$$\overset{\circ}{=} \lambda_j^n (x_j, x_k) = \lambda_j^n \delta_{jk}$$

$$\overset{\triangle}{=} \sum_j \lambda_j^n x_j(t)\overline{x_j(s)} \text{ - чтд.}$$

Замеч: Σ достаточно вести по тем j, для которых $\lambda_j \neq 0$

Тогда $K_n(t,s) = \sum_j \frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{\mu_j^n}$

Теор (Мерсера) Если ядро K - симметрично, непрерывно и все его собств. значения (кроме м/б конечного числа) имеют один знак, то собств. ф-ции ядра x_j будут непрерывны, ряд $\sum_j \frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{\mu_j}$ будет сход-ся равномерно на $[a, b]$ и будет иметь место рав-во: $K(t, s) = \sum_j \frac{x_j(t)\overline{x_j(s)}}{\mu_j}$ (без д-ва)