Список вопросов к экзамену по “Основам функционального анализа”

Лектор – В.А. Александров

Физический факультет НГУ, летняя сессия 2011 года

Конспект лекций этого семестра выложен на сайте кафедры
http://www.phys.nsu.ru/ok03/funcan_gl.html

§4. Геометрия пространств со скалярным произведением (продолжение)

4.7. Вектор наилучшего приближения. Неравенство Бесселя. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Теорема об эквивалентности понятий “ортогональная проекция на подпространство” и “вектор наилучшего приближения”. Ортогональное дополнение к подпространству. Теорема о разложении пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
4.8. Полнота ортонормированной системы. Равенство Парсеваля. Замкнутая система. Гильбертов базис. Теорема о существовании гильбертова базиса (без доказательства).
4.9. Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм гильбертовых пространств. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
4.10. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тригонометрическая система функций как пример полной ортогональной системы.

§5. Ортогональные многочлены

5.1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов. Общие свойства ортогональных многочленов (в том числе – трёхчленная рекуррентная формула).
5.2. Свойства нулей ортогональных многочленов (из них без доказательства – только перемежаемость нулей).
5.3. Классические ортогональные многочлены (указать вес и промежуток ортогональности). Способы стандартизации. Производящая функция. Уравнение Пирсона. Свойства классических ортогональных многочленов(без доказательства).
5.4. Многочлены Лежандра: производящая функция и рекуррентные соотношения.
5.5. Многочлены Лежандра: дифференциальное уравнение, соотношения ортогональности.
5.6. Многочлены Лежандра: формула Родрига и теорема о разложении функций в ряды по многочленам Лежандра (обе формулы без доказательства).
5.7. Мультипольное разложение кулонова потенциала.
5.8. Применение многочленов Лежандра при решении дифференциальных уравнений в частных производных. Вывести формулу для решения уравнения Лапласа в шаре при заданных симметричных граничных условиях.
5.9. Поле точечного заряда, помещённого внутри полой проводящей сферы.

§6. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

6.1. Линейные операторы: определение, примеры (единичный, нулевой, конечномерный, проектирования, интегральный). Операции над линейными операторами (сложение и умножение). Общие свойства линейных операторов..
6.2. Непрерывные и ограниченные операторы: определение и теорема о взаимосвязи этих понятий.
6.3. Норма оператора: определение и теорема о свойствах нормы оператора. Пример оценивания нормы конечномерного оператора.

6.4. Сходимость операторов: определение и свойства предела последовательности операторов. Теорема о полноте пространства операторов. Операторный ряд: определение и простейшие свойства.
6.5. Обратимый оператор. Обратный оператор. Свойства обратного оператора.
6.6. Теорема Неймана.
6.7. Определение спектра оператора и его резольвенты. Простейшие свойства спектра.
6.8. Линейные функционалы: определение и пример. Ядро функционала: определение и свойства.
6.9. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса.
6.10. Бра-векторы и кет-векторы: определение и примеры (правило сокращения и разложение резольвенты).
6.11. Оператор, сопряжённый ограниченному: определение, примеры и простейшие свойства.
6.12. Применение сопряжённого оператора при нахождении спектра.
6.13. Ограниченные самосопряжённые операторы: теоремы о точечном спектре, норме (без доказательства) и инвариантном подпространстве.
6.14. Компактные операторы: определения и простейшие свойства. Теорема о дискретности точечного спектра компактного оператора (без доказательства) и её следствия.
6.15. Компактные самосопряжённые операторы: теорема о точечном спектре (без доказательства) и теорема Гильберта – Шмидта (без доказательства), вариационный принцип Куранта (без доказательства).
6.16. Приближённый способ отыскания собственных значений возмущённого оператора.

§7. Интегральные уравнения

7.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих.
7.2. Интегральный оператор Гильберта – Шмидта: определение и теоремы об оценке номры, компактности (без доказательства) и сопряжённом к нему операторе.
7.3. Решение уравнений с вырожденным ядром.
7.4. Альтернатива Фредгольма.
7.5. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Теорема о повторном ядре оператора Гильберта – Шмидта. Резольвентвое ядро.
7.6. Интегральные уравнения с симметричными ядрами.
7.7. Функции, представимые через ядро (определение). Теорема Гильберта – Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.
7.8. Разложение повторного ядра интегрального оператора по его собственным функциям (билинейная формула). Теорема Мерсера (без доказательства).

Вопросы составил В.А. Александров

8 июня 2011 года