

Вопросы к экзамену по линейной алгебре в весеннем семестре 2012 – 2013 уч.г.

для студентов I курса ФФ НГУ

1. Абстрактное векторное пространство—определение, примеры.
2. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Определение, примеры. Теоремы о линейно зависимых системах векторов.
3. Эквивалентные системы векторов. Размерность и базис векторного пространства. Теорема о дополнении линейно независимой системы векторов до базиса.
4. Координаты вектора. Переход к другому базису. Матрица перехода. Координаты вектора в другом базисе.
5. Изоморфизм векторных пространств одинаковой размерности.
6. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерностей Грассмана.
7. Прямая сумма подпространств. Критерии прямой суммы. Дополнительное подпространство.
8. Линейные отображения. Определение, примеры, свойства. Теорема о существовании линейного отображения, переводящего один базис в другой.
9. Матрица линейного отображения. Определение, примеры. Теорема о взаимно—однозначном соответствии между линейными отображениями и матрицами.
10. Координаты образа вектора при линейном отображении.
11. Матрица линейного отображения в разных базисах.
12. Ядро и образ линейного отображения, их свойства. Теорема о размерности ядра и образа.
13. Произведение линейных отображений.
14. Линейное пространство операторов.
15. Линейные формы. Двойственное пространство. Изменение коэффициентов линейной формы при смене базиса.
16. Собственные значения и собственные векторы, собственное подпространство. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям.
17. Характеристический многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кэли (без доказательства).
18. Инвариантные подпространства, примеры инвариантных подпространств. Клеточно—диагональный вид матрицы линейного оператора.
19. Диагонализуемость линейного оператора. Примеры недиагонализуемых операторов. Алгебраическая и геометрическая кратность собственных значений. Критерий диагонализуемости линейного оператора.
20. Корневые векторы, корневые подпространства. Теорема о расщеплении линейного оператора (без доказательства).
21. Жорданова клетка. Собственные и присоединенные вектора.
22. Теорема о жордановой форме (без доказательства)
23. Функции от матриц. Матричная экспонента.
24. Евклидово пространство , определение скалярного произведения. Примеры евклидовых пространств.
25. Неравенство Коши—Буняковского и неравенство треугольника.
26. Ортогональные векторы, определение. Теорема Пифагора. Длины векторов и углы в евклидовом пространстве.
27. Процесс ортогонализации Грама—Шмидта.
28. Теорема о существовании ортогонального базиса в евклидовом пространстве.
29. Матрица Грама—определение, свойства. Выражение скалярного произведения через матрицу Грама.

30. Связь матриц Грама разных базисов. Определитель матрицы Грама.
31. Изометрический изоморфизм евклидовых пространств одной размерности.
32. Ортогональное дополнение к подпространству. Теорема о разложении пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
33. Расстояние от вектора до подпространства. Нахождение ортогональной проекции вектора на подпространство.
34. Сопряженный оператор—определение, примеры, свойства. Теорема о существовании сопряженного оператора. Свойства операции сопряжения.
35. Ядра и образы операторов A и A^* .
36. Альтернатива Фредгольма.
37. Унитарные операторы, изометричные операторы. Критерии унитарности.
38. Лемма о собственных значениях унитарного оператора. Лемма об инвариантности ортогонального дополнения.
39. Теорема о каноническом виде матрицы унитарного оператора.
40. Матрицы ортогонального оператора размерностей 2 и 3.
41. Теорема о каноническом виде матрицы ортогонального оператора.
42. Геометрическая формулировка теоремы о каноническом виде матрицы ортогонального оператора. Теорема Эйлера.
43. Самосопряженный оператор—определение, примеры. Критерий самосопряженности.
44. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора.
45. Приведение квадратичных форм к главным осям.
46. Приведение пары форм к диагональному виду.
47. Положительные операторы. Критерии положительности.
48. Корень из оператора.
49. Сингулярная пара базисов и сингулярное разложение.
50. Полярное разложение.
51. Индексные обозначения. Объекты. Операции над объектами. Симметричные и антисимметричные объекты.
52. Символы Кронекера и Леви—Чивиты.
53. Тензоры в линейном пространстве. Примеры—вектор и линейный функционал.
54. Тензоры в линейном пространстве. Примеры—линейное отображение и билинейная форма.

Список литературы:

- [1] Александров В. А. Тензоры для физика—первокурсника.
- [2] Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре.
- [3] Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.
- [4] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра.
- [5] Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия.
- [6] Ульянов А. П. Конспект лекций по алгебре и геометрии. Части II и III.
- [7] Долгунцева И. А., Ульянов А. П. Практикум по аналитической геометрии и линейной алгебре.

Лектор — Кудрявцева Наталья Анатольевна.
31 мая 2013 г.