Векторные пространства

Абстрактные векторные пространства

10.02.12

① Примеры вект. пр-в: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$
№1 пр-во строк и столбцов
и т.д.

Опр| Непустое мн-во V назыв **линейным (векторным) пр-вом**, если выполняются след. св-ва:

I. $\forall x, y \in V$ однозначно определен эл-т $x \overset{Z}{+} y \in V$ — сумма
$+'' : (V, V) \to V$, причем, говорят, что V - явл. абелевой группой по сложению, т.е.

1) $x + y = y + x$ коммутативность
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ ассоциативность
3) $\exists\, \bar{0} \in V$: $x + 0 = 0 + x = x$ $\forall x \in V$ нулевой эл-т
4) $\exists (-x) \in V$: $(-x) + x = x + (-x) = 0$ $\forall x \in V$ противоположный эл-т.

II. $\forall\, \alpha$-скаляр и $\forall x \in V$ определен эл-т $\alpha \overset{Z}{\cdot} x \in V$ — произведение

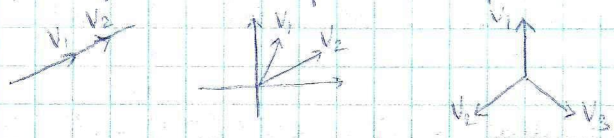
1) $\exists 1$: $1 \cdot x = x$ $\forall x \in V$ унитарность
2) $(\alpha\beta) x = \alpha(\beta x)$ ассоциативность
3) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$
4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ дистрибутивность

Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то V назыв **веществ векторным пр-вом**
Если $\alpha \in \mathbb{C}$, то V назыв **комплексным лин пр-вом**

* Можно рассм лин. пр-ва над полем $\mathbb{R}$.

② Примеры лин пр-в №2

1. Геометрические пр-ва в-ров на прям, пл-ти и в пр-ве



2. Пр-во вещ. матриц $\mathbb{R}^{m \times n}$

3. Арифметическое (координатное) пр-во $\mathbb{R}^n = \{a = (a_1, \dots a_n), a_i \in \mathbb{R}\}$

4. Пр-во многочленов степени $\leq n$

Лин зависимость. Размерность. Базис

Опр| В-ры $v_1 \dots v_k$ пр-ва V назыв **л/з**, если н-рая их нетривиальная лин комбинация $= 0$.

т.е $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \neq 0$ одновр : $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$

В противном случае, сист. назыв. **л/н**

т.е $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \iff \alpha_1, \dots, \alpha_k = 0$

③ Примеры л/н систем:

1. 2 некомлин. в-ра
3 некомлин. в-ра | л/н

2. $1, t, t^2, \dots, t^n$ - л/н $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n = 0 \Leftrightarrow \alpha_0, \dots, \alpha_n = 0$

T1| 1. В-ры $v_1, \dots, v_n$, $n \geq 2$ л/з $\Leftrightarrow$ один из них явл. лин. комбинацией других в-ров (остальных)

2. Если система в-ров л/н, то всякая её подсистема - л/н

Док-во: упр (было в прошлом семестре) ■

T2| Если в пр-ве V каждый из в-ров л/н системы $e_1 \dots e_s$ явл линейной комбинацией в-ров системы $f_1 \dots f_t$, то $s \leq t$.

Док-во:

По условию имеем:
$$e_1 = \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \dots + \alpha_{t1} f_t$$
$$e_2 = \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \dots + \alpha_{t2} f_t$$
$$\vdots$$
$$e_s = \alpha_{1s} f_1 + \alpha_{2s} f_2 + \dots + \alpha_{ts} f_s$$

пусть $s > t$. Составим лин. комбинацию в-ров e с коэф-тами x_j

подставим и перегрупп.
$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_s e_s = (\alpha_{12} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1s} x_s) f_1 + \dots + (\alpha_{t1} x_1 + \alpha_{t2} x_2 + \dots + \alpha_{ts} x_s) f_t.$$
Рассм систему с s неизвестными

$$\begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1s} x_s = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{t1} x_1 + \alpha_{t2} x_2 + \dots + \alpha_{ts} x_s = 0 \end{cases}$$

$s > t \Rightarrow$ система имеет ненулевое решение $(\beta_1, \dots, \beta_s)$, т.е

$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_s e_s = 0$, но не все β одновр $= 0 \Rightarrow$ X $\Rightarrow s \leq t$ ■

л/н!

Следств| Любые 2 эквивал. сист. в-ров содержат одинаковое число в-ров.

Опр| 2 сист назыв **эквивалентными**, когда каждый в-р одной сист. явл лин. комбинацией в-ров другой сист.

Опр| **Ранг** - число в-ров, содержащихся в любой max л/н подсистеме данной системы в-ров, ~~max~~
(max, т.е нельзя расширить до л/н подсистемы из большего числа в-ров)

Опр| Лин пр-во V, в к-ром $\exists$ n л/н в-ров, но нет л/н систем с большим кол-вом в-ров (большего ранга) назыв **n-мерным**
$\dim V = n$.

Опр| Пусть V - n-мерное лин. пр-во, тогда любая сист. из n л/н в-ров $e_1, \dots, e_n$ назыв **базисом** V

(П) 1. $\mathbb{R}^n$ $e_1(1, 0, \dots, 0)$
$e_2(0, 1, \dots, 0)$
$\vdots$
$e_n(0, \dots, 1)$

2. $1, t, t^2, \dots, t^n$ - возм. базис в пр-ве многочл.

I) Пусть V – лин пр-во над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ с базисом $e_1 \dots e_n$, тогда:

1. Каждый в-р $\in V$ можно представить единственным образом как лин. комбинацию в-ров базиса $e_1, \dots e_n$.

2. Всякую л/н сист из s в-ров ($s \le n$) $f_1 \dots f_s$ можно дополнить до базиса

Док-во:

1. К сист. $e_1 \dots e_n$ присоединим в-р v. $\Rightarrow$ получим л/з сист. ($\dim V = n$)
$\Rightarrow \alpha_0 v + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$, причем $\alpha_0 \ne 0 \Rightarrow v = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} e_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} e_n$

Если бы в-р v имел 2 разложения: $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$
$v = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$, то
$v - v = 0 = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0$, т.к. $e_1 \dots e_n$ – л/н, то

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \dots \\ \alpha_n = \beta_n \end{cases}$$

■

2. Рассм. сист в-ров $f_1 \dots f_s, e_1 \dots e_n$. Выбросим из этой сист все в-ры, которые выраж лин. образом ч/з предыдущие. $f_1 \dots f_s$ все останутся, т.к. они л/н. Получим сист. $f_1 \dots f_s e_{i_1} \dots e_{i_k}$. Если $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_k e_{i_k} = 0$ $\beta_k = 0$, иначе e_{i_k} выраж ч/з предыдущие $\beta_{k-1} = 0$ и т.д. $\Rightarrow$ все $\beta = 0$ и все $\alpha = 0$ ($f_1 \dots f_s$ – л/н), т.е. эта сист л/н.

Кроме того, она max, т.к. все в-ры выраж ч/з $e_1, \dots, e_n$, тем более они выраж ч/з $f_1, \dots, f_s, e_1, \dots e_n \Rightarrow$ они выраж ч/з $e_{i_1} \dots e_{i_k}$

■

Матрица перехода. Координаты в-ра. Переход к друг. базису

С помощью базиса в-ры можно задавать в виде совокупн. чисел и операции над в-рами сводить к операциям над числами.

<u>Опр</u>) Пусть $v \in V$, $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, где $e_1 \dots e_n$ – базис V, тогда скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – <u>координаты</u> в-ра v в базисе $e_1 \dots e_n$

$$v_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)^T$$

Если $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$
$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, то $(x+y) = (x_1 + y_1) e_1 + \dots + (x_n + y_n) e_n$
$\alpha x = (\alpha x_1) e_1 + \dots + (\alpha x_n) e_n$

<u>Но</u>! Имеется ∞ много других базисов, в к-рых координатами того же в-ра будут другие числа

Пусть V – n-мерное лин. пр-во и $(e_1 \dots e_n)$ и $(e_1' \dots e_n')$ – 2 его базиса
(е – с.) (е' – н.)
в-ры одного базиса выраж ч/з в-ры другого.

$e_1' = t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + \dots + t_{n1} e_n$

$e_n' = t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \dots + t_{nn} e_n$

Коэф-ты этих разлож образ матрицу перехода от е к е'
$T = [t_{ij}]$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$ по столбцам: в j-том столбце стоят коорд e_j' по базису e

$e' = eT$ - ковариантный закон. преобр.

$\boxed{[e_1', e_2', \dots, e_n'] = T \cdot [e_1, e_2, \dots, e_n]}$ - в матричном виде

Утв 1) Матрица перехода невырождена ($\det T \neq 0$)

Док-во:

Пусть $\det T = 0 \Rightarrow$ один из столбцов T лин выраж ч/з остальные $\Rightarrow$ один из в-ров выраж ч/з остальные $\Rightarrow X \Rightarrow \blacksquare$

Утв 2) Если T - матрица перехода от e к e', то T^{-1} - матрица перехода от e' к e: $e = e'T^{-1}$

Док-во:

$e' = e \cdot T$, $e' \cdot T^{-1} = e \cdot T \cdot T^{-1}$, $e' \cdot T^{-1} = e$ $\blacksquare$

13.02.12.

I) Коорд. в-ра x в базисах e и e' связаны м/у собой соотношением:

$\boxed{x_e = T x_{e'}}$, где T - матрица перехода от e к e'

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}}$$ - контравариантный закон. преобр.

Док-во:

$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \Leftrightarrow x = \underline{e x_e}$, где $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $e = (e_1 \dots e_n)$

$x = x_1'e_1' + x_2'e_2' + \dots + x_n'e_n' \Leftrightarrow x = e'x_{e'}$

$\underline{x} = e'x_{e'} = (eT)x_{e'} = \underline{e(Tx_{e'})}$ в силу ! разлож. по базису

$x_e = T x_{e'}$ $\blacksquare$

Изоморфизм векторных пространств

над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

Опр) Лин. пр-ва V и W наз изоморфными (одинаково устроенными), если $\exists$ биективное отображ. $f: V \to W$ / $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

Изоморфизм сохр. л/з в-ров $\Rightarrow$ Размерность пр-ва - inv изоморфизма

Если $(e_1 \dots e_n)$ - базис V, то $(f(e_1) \dots f(e_n))$ - базис W.

I] Все вект. пр-ва одинаковой размерности n изоморфны

Док-во:

Пусть $e_1 \dots e_n$ – базис V, тогда коорд. $x_1 \dots x_n$ произвольного в-ра x однозначно определены $\Rightarrow x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow$ можно однозначно построить отображ:

$f: V \to R^n$, $f: x \to (x_1 \dots x_n)^T$. В-ру x сопостави. в-р из арифм пр-ва R^n с той же разм.

$f: V \to R^n$

1) однозначность: „+" $\Rightarrow$ f – биекция

2) Линейность: если $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, то $x+y = (x_1+y_1)e_1 + \dots + (x_n+y_n)e_n$

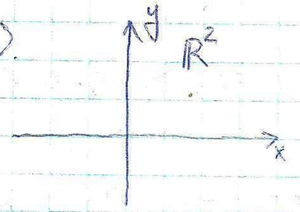
„+" $\quad \lambda x = (\lambda x_1) e_1 + \dots$, $\lambda x = (\lambda x_1 \dots \lambda x_n) \Rightarrow$

$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) = \alpha(x_1 \dots x_n) + \beta(y_1 \dots y_n) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ ■

Пересечение и сумма подпространств.

Опр| Подмн-во L лин пр-ва V назыв. лин. подпр-вом V, если оно само явл лин пр-вом относит. тех же самых операций: „+" и умнож. на скаляр.

①.



отрезок – подмн-во, но не подпр-во („–" умнож на скаляр)

прямая – подпр-во

Пусть $L_1, L_2, \dots L_k$ – лин подпр-ва пр-ва V

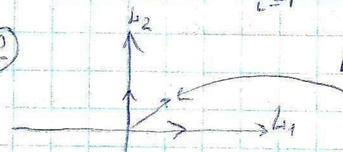
Опр| Пересечением подпр-в $L_1, \dots, L_k$ назыв. мн-во $L_1 \cap \dots \cap L_k = \{x \in V \mid x \in L_i, i = 1 \dots k\}$. Оно всегда $\neq \varnothing$ (0 $\in$ любому подпр-ву)

! лин пр-во всегда проходит ч/з 0, т.к. $\exists$ 0 – св-во умнож на скаляр.

Опр| Суммой лин. подпр-в $L_1 \dots L_k$ назыв мн-во всевозможных в-ров x, представимых в виде $x = x_1 + \dots + x_k \mid x_i \in L_i$

$$L_1 + \dots + L_k = \sum_{i=1}^{n} L_i = \{x = x_1 + \dots + x_k \mid x_i \in L_i, i = 1 \dots k\}$$

②



Просто теоретико множ. объедин не дало бы пр-во

$(L_1 + L_2) \notin L_1 + L_2$ в-р

① объедин. подпр-в. не обязат. явл подпр-вом

II] Σ и $\cap$ подпр-в явл. лин. подпр-вами.

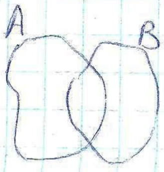
Док-во:

(∩). Пусть $x, y \in \bigcap_{i=1}^{k} L_i \overset{?}{\Rightarrow} \alpha x + \beta y \in \bigcap_{i=1}^{k} L_i$. $x, y \in \cap L_i \Rightarrow \forall i \; x, y \in L_i$, а L_i – подпр-во $\Rightarrow \alpha x + \beta y \in \cap L_i$ ■

(Σ) Пусть $x, y \in \sum_{i=1}^{n} L_i \Rightarrow \overset{\text{в-ра}}{x = x_1 + \dots + x_n}$, $x_i \in L_i$; $y = y_1 + \dots + y_n$, $y_i \in L_i$ $\Big| \Rightarrow \alpha x + \beta y = \overset{\in L_1}{(\alpha x_1 + \beta y_1)} + \dots + \overset{\in L_n}{(\alpha x_n + \beta y_n)} = z_1 + \dots z_n$, $z_i \in L_i$ ■

Сумма подпр-в = min лин подпр-во, содержащее все L_i

③ Если мы возьмем фигуры A и B, то справедлива след ф-ла



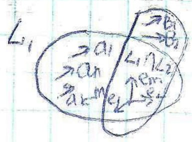
$$\mathrm{Vol}(A\cup B)=\mathrm{Vol}\,A+\mathrm{Vol}\,B-\mathrm{Vol}(A\cap B)$$

Т| Ф-ла размерности Грассмана

Для любых 2-х лин подпр-в L_1 и L_2 $\dim(L_1+L_2)=\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1\cap L_2)$

Док-во.

Пусть $\dim L_1=k$, $\dim L_2=l$, $\dim(L_1\cap L_2)=m$



1) В $L_1\cap L_2$ выберем базис $e_1,e_2,\dots e_m$ и дополним его до базиса пр-ва L_1: $(e_1\dots e_m, a_{k+1}\dots a_{k-m})$ и до базиса пр-ва L_2: $(e_1\dots e_m, b_1\dots b_{l-m})$

2) Покажем, что система в-ров $e_1\dots e_m, a_1\dots a_{k-m}, b_1\dots b_{l-m}$ обр базис L_1+L_2:

1. Проверим л/н. Пусть $\gamma_1e_1+\dots+\gamma_me_m+\alpha_1a_1+\dots+\alpha_{k-m}a_m+\beta_1b_1+\dots+\beta_{l-m}b_{l-m}=0$ (*), тогда перепишем:

$\underbrace{-\beta_1b_1-\dots-\beta_{l-m}b_{l-m}}_{\in L_2}=\underbrace{\gamma_1e_1+\dots+\gamma_me_m+\alpha_1a_1+\dots+\alpha_{k-m}a_{k-m}}_{\in L_1}$ => этот в-р $\in$ $L_1\cap L_2$ => он раскладыв. по базису $\cap$: $-\beta_1b_1-\dots-\beta_{l-m}b_{l-m}=\delta_1e_1+\dots+\delta_me_m$ => $e_1\delta_1+\dots+\delta_me_m+\beta_1b_1+\dots+b_{l-m}\beta_{l-m}=0$

но $e_1\dots e_m, b_1\dots b_{l-m}$ – базис L_2 => коэф-ты $\beta_i=0$ (по опр базиса)

Вернемся к (*) $\beta_i=0$ и $\gamma_i=0$ и $\alpha_i=0$ (по опр базиса, т.к $\gamma_1e_1+\dots+\gamma_me_m+\alpha_1a_1+\dots+\alpha_{k-m}a_{k-m}=0$ – базис L_1 => л/н => γ_i и $\alpha_i=0$) ■

2. Проверим, что $\langle e_1\dots e_m, a_1\dots a_{k-m}, b_1\dots b_{l-m}\rangle=L_1+L_2$ – очевидно ■

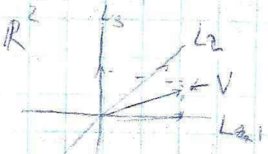
3) $\dim(L_1+L_2)=m+(k-m)+(l-m)=k+l-m=\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1\cap L_2)$

Опр| Пусть L – подпр-во V. $\operatorname{codim} L=\dim V-\dim L$ – коразмер-ть ■
Подпр-во коразмерности 1 наз. гиперплоскостью

Прямая сумма подпространств

В сумме подпр-в $V=L_1+L_2+\dots+L_m$ любой в-р $v=v_1+\dots v_m$ не обязат однозначно

④ R^2



$V=e_1+e_2=e_1+e_3$

разлож V ¬ !

Опр| Если каждый в-р $v\in V$! образом раскладыв в Σ в-ров $v=v_1+\dots+v_m$, $v_i\in L_i$, то сумма назыв прямой. Обознач: $V=L_1\oplus L_2\oplus\dots\oplus L_m$

Т| Сумма явл прямой $\Leftrightarrow$ нулевой в-р имеет единств. разлож.

Док-во.

1) (=>) очевидно. любой => нулевой
2) (<=) Пусть нулевой в-р имеет разлож $0=0+\dots+0$ и пусть $V=V_1+\dots+V_m$ и

$V = W_1 + \ldots + W_m$. Тогда $0 = (V_1 - W_1) = (V_1 - W_1) + (V_2 - W_2) + \ldots + (V_m - W_m) \Rightarrow \nexists$ ■

T2 **Критерий прямой суммы**

1. Сумма явл прямой $\Leftrightarrow$ каждое подпр-во $L_i \cap (L_1 + \ldots + L_{i-1} + L_{i+1} + \ldots + L_m) = 0$

2. Сумма явл. прямой $\Leftrightarrow \dim V = \sum_{i=1}^{m} \dim L$

Док-во: без док-ва.

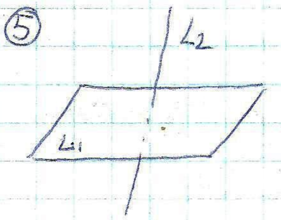
T3

$V = L_1 \oplus L_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ 1. $L_1 \cap L_2 = \{0\}$
2. $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$.

Дополнительное подпр-во

Пусть L_1 – лин. подпр-во V. Подпр-во L_2 назыв. дополнит. к L_1, если $L_1 \oplus L_2 = V$. Дополнит. подпр-во не находится однозначно.

⑤



$L_1 + L_2 = \mathbb{R}^3$

T4 $\forall$ подпр-ва L_1 $\exists$ доп. подпр-во

Док-во:

Пусть $e_1 \ldots e_k$ – базис L_1. Дополним его до базиса V $e_1 \ldots e_k, e_{k+1} \ldots e_n$. Тогда $L_2 = \langle e_{k+1} \ldots e_n \rangle$ ■

Замеч! Если $L_1 \neq \{0\}$, то доп. подпр-во определено неоднозначно.

Линейные операторы 17.02.12.

Линейные отображения

Опр! Пусть V и W – векторные пр-ва, $\dim V = n$, $\dim W = m$ над одним и тем же полем скаляров P ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Отображение $f: V \to W$ назыв. линейным, если оно обладает св-вом линейности:

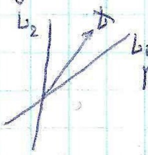
$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases} \quad \text{линейность}$$

Если пространство $W = V$, т. е $f: V \to V$, то f назыв. лин. оператором

①. Пусть M_n – пр-во многочл. степени $\leq n$. $D: M_n \to M_n$: $Dp(t) = p'(t)$ оператор дифференцирования.

②. Рассм. пр-во всех многочл. $Sp(t) = \int_0^t p(x)dx$ – оператор интегрирован

③ Пусть $W = L_1 \oplus L_2$. Определим оператор $P: V \to V$



$x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ $p(x) = x_1$ – оператор проектирования пр-ва V на L_1, $\parallel L_2$

④ $R: V \to V$ $Rx = x_1 - x_2$ – оператор отражения пр-ва V относит L_1, $\parallel L_2$

⑤ $O: V \to V$

$Ox = 0$ - нулевой оператор.

⑥ $I: V \to V$ $Ix = x$ тождественный оператор

Св-ва лин. отображения

1) Всякое лин. отображ переводит „$\vec{0}$" в „$\vec{0}$"

$f(\vec{0}_v) = f(0 \cdot \vec{x}) \overset{\text{лин}}{=} 0 \, f(\vec{x}) = \vec{0}$ ■

2) Лин. отображ. сохр. лин. комбинации
$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_k f(x_k)$
док-во: по индукции по k.

3) Лин. отображ. сохр. лин. зависимости. Т.е переводит л/з сист. векторов в л/з.
док-во: по опр. 1 лин. комб $=0$ $f(0)=0 \Rightarrow 2$ лин. комб $=0$ ■

4) Из св-ва 2) $\Rightarrow$ Для задания лин. отображ. достаточно задать его только на базисных в-рах $(e_1 \ldots e_n)$. На ост. в-рах оно распр. по линейности.
$x = \sum x_i e_i$ $f(x) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n)$ ■

Т1

Пусть $e_1, e_2 \ldots e_n$ – базис пр-ва V, а $g_1, g_2 \ldots g_n$ – произвольные векторы $\in W$, тогда $\exists !$ лин. отображ., к-рое переводит в-ры $e_1 \ldots e_n$ в в-ры $g_1 \ldots g_n$ пр-ва W

Док-во: $(i = 1 \ldots n)$

$\exists$
Для $\forall$ в-ра $x = \sum x_i e_i$ положим $f(x) = \sum x_i g_i$ f – лин. отображ., т.к коорд. линейны

$!$. Если f_1 – другое отображ., то $f_1(x) = f_1(\sum x_i e_i) = \sum x_i f_1(e_i) = \sum x_i g_i = f(x)$

■

Следств 1

Лин. отображ. равны $\Leftrightarrow$ они совпадают на базисных в-рах. На ост. в-ра распр. по линейности.

Матрица линейного отображения

Пусть $e = (e_1 \ldots e_n)$ и $f = (f_1 \ldots f_m)$ – базисы пр-в V и W. Лин. отображ. φ однозначно определяется заданием его действием на базисе $\varphi(e_1) \ldots \varphi(e_n)$

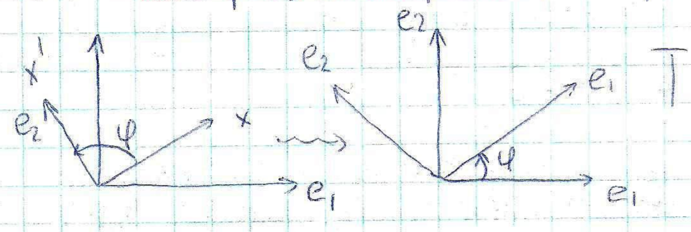
-в-ры W. Разложим их по базису f.

$$\varphi(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \ldots + a_{m1} f_m$$
$$\varphi(e_2) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \ldots + a_{m2} f_m$$
$$\ldots$$
$$\varphi(e_m) = a_{1m} f_1 + a_{2m} f_2 + \ldots + a_{mn} f_m$$

Матрица $[\varphi]_{e,f} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ назыв. матрицей отображ. φ в паре базисов e и f

Разлож. в-ра по базису ! $\Rightarrow$ матрица определяется однозначно.

⑦. Матрица поворота на $\angle\varphi$ на пл-ти



$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A$$

T|

Пусть $\dim V = n$ $\dim W = m$, тогда $\exists$ взаимно однозначн. соответствие м/у лин отображениями $V \to W$ и матрицами $P^{m\times n}$ ($P^{m\times n} = \mathbb{R}^{m\times n}$ или $\mathbb{C}^{m\times n}$)

Док-во:

Построим это соответствие. Зафиксируем базисы пр-во $\overset{V}{e_1 \ldots e_n}$ и $\overset{W}{f_1 \ldots f_m}$ и поставим в соотв. каждому лин. отображ. $V \to W$ его матрицу в паре этих базисов (V, W) $[\varphi]_{e,f}$. Она определена однозначно в силу ! разлож по базису, + это биекция, т.к
1. „на" - т.к $\forall$ матрица явл. матрицей лин. отображ, переводящей в-ры e_i в f_i, а этого дост. для задания отображ.
2. „инъекция", т.к разные операторы не совпадают на базисных в-рах, то они имеют разные матрицы. ∎

T|

Матрица перехода есть матрица лин. отображ, переводящего старую сист. координат в новую, вычисл. в старом базисе. (как с точки зрения лин. отображ. можно истолковать матрицу перехода)

Док-во:

Пусть в пр-ве V заданы 2 сист. координат $e = e_1 \ldots e_n$ и $e' = e_1' \ldots e_n'$ по Т $\exists$ однознач. лин. отображ φ переводящее старый базис e в новый e'. Поймем, как устроена $[\varphi]_{ee'}$. Надо все в-ры $e_i' = \varphi(e_i)$ выразить ч/з $e_1 \ldots e_n$, а это и есть матрица перехода. ∎

Координаты в-ра и его образа. Матрица лин. отображ в различных базисах

Пусть $\varphi: V \to W$ – лин. отображ. e и f – базисы V и W, $A = [\varphi]_{ef}$.

I)

Если $y = \varphi(x)$, то $\boxed{y_f = [\varphi]_{ef} X_e}$

Док-во:

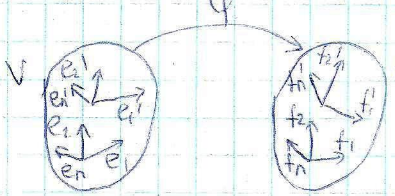
Пусть $x = \sum_1^n x_j e_j$, $y = \sum_1^m y_j e_j$, $[\varphi]_{ef} = A = [a_{ij}]$, тогда $y = \varphi(x) = \varphi(\sum_1^n x_j e_j) \overset{\text{по лин } \varphi}{=}$

$= \sum x_j \varphi(e_j) \overset{*}{=} \sum_1^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) f_i$ $\Rightarrow$ ■ (из ! разлож. в-ра по базису)

$* \ \varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \ldots + a_{mj} f_m \ *$

Пусть e и e' – базисы в пр-ве V (с матр. перех T), f и f' – базисы в пр-ве W (с матр. перех S).

$e' = eT$ $\qquad$ $f' = fS$



~~Если~~ одному и тому же лин отображ $\varphi: V \to W$ соотв. матрицы $A = [\varphi]_{ef}$ и $A' = [\varphi]_{e'f'}$

II) Матрицы A и A' связаны соотнош. $\boxed{A' = S^{-1} A T}$

Док-во:

1. Пусть $x \in V$, $y = \varphi(x) \in W$. $\begin{cases} y_f = A X_e \text{ (по предыд I)} \\ y_{f'} = A' X_{e'} \end{cases}$

2. С другой стороны, $y_f = S y_{f'}$

3. $y_f = A X_e = A T X_{e'}$; $\quad \| \quad S y_{f'} = S A' X_{e'}$ $\Rightarrow A' = S^{-1} A T$ ■

Следств1)

Если $\varphi: V \to V$ – лин оператор, e и e' – два базиса, то $\boxed{A' = T^{-1} A T}$

Следств2)

Матрицы лин отображ. в разных парах базисах эквивалентны, т.е одна получена из другой путем конечного набора элем. преобр.

Следств3)

Ранг матрицы лин отображ – inv (не зависит от выбора базиса)

(8). $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Новый базис V	T	Нов базис W	S	$S^{-1}AT$
$v_1' = v_1$, $v_2' = 2v_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$w_1 = w_1$, $w_2' = w_2$	E	$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
$v_1' = v_1$, $v_2' = v_1 + v_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$w_1' = w_1$, $w_2' = w_2$	E	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

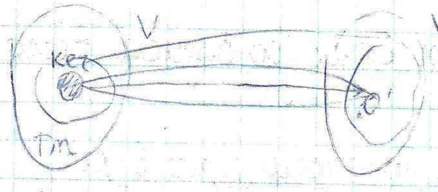
$V_1'=V_1$, $V_2'=V_2$	E	$W_1'=W_1$, $W_2'=2W_2$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}$
$V_1'=V_1$, $V_2'=V_2$	E	$W_1'=W_1$, $W_2'=W_1+W_2$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}$

Ядро и образ лин. отображения

Пусть A – лин отображ. $A: V \to W$.

Опр| Ядро, $\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid Av = 0\}$

Опр| Образ, $\operatorname{Im} A = \{w \in W \mid \exists v \in V : Av = w\}$



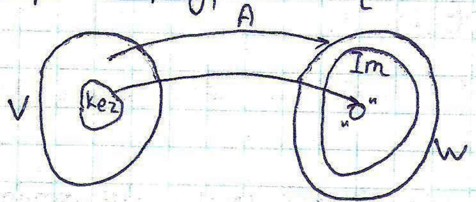
Ядро и образ линейного отображения.

03.03.12.

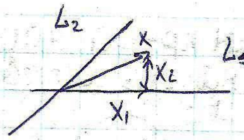
Пусть $A: V \to W$ – лин. отображ.

Опр| Ядро, $\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid Av = 0\}$ – т.е решения однородной слу

Опр| Образ, $\operatorname{Im} f = \{w \in W \mid \exists v \in V : Av = w\}$



①. Для оператора проектирования P



$x = x_1 + x_2$
$Pr_{L_1} x = x_1$

$\operatorname{Ker} P = L_2$
$\operatorname{Im} P = L_1$

T| Если A – лин. отображ, то $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ – лин. подпр-ва.

Док-во:

Пусть $x, y \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow Ax = 0$ и $Ay = 0$. $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0 \Rightarrow$
$\alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow \operatorname{Ker} A$ – лин подпр-во] для $\operatorname{Ker} A$.

Если $v_1, v_2 \in V$, $Av_1 = w_1$, $Av_2 = w_2$. Тогда $A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha w_1 + \beta w_2 \in \operatorname{Im} A$
Если $\exists\, w_1, w_2 \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \exists\, v_1$ и $v_2 \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in \operatorname{Im} A$] для $\operatorname{Im} A$ ■

T| Если $e_1 \dots e_n$ – базис V, то $\operatorname{Im} A = \langle Ae_1 \dots Ae_n \rangle$

Док-во:

Если $y \in \operatorname{Im} A$, то $y = Ax$ для н-рого в-ра $x \in V$, т.е $y = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) \overset{\text{по лин-сти}}{=}$
$= \sum_{j=1}^{n} x_j Ae_j \in \langle Ae_1 \dots Ae_n \rangle$.

С другой стороны, $y \in \langle Ae_1 \dots Ae_n \rangle$, то $y = \sum_{j=1}^{n} x_j A e_j = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = Ax$, $x = \sum x_j e_j$, т.е $y \in \operatorname{Im} A$ ■

<u>Опр</u> Размерность подпр-ва $\operatorname{Im} A$ назыв. <u>рангом</u> лин. отображения

В силу предыдущей Т, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\langle Ae_1 \dots Ae_n \rangle$, а он не зависит от с.к.

<u>Опр</u> Размерность подпр-ва $\ker A$ назыв. <u>дефектом</u> лин. отображения

Т <u>Размерность $\ker A$ и $\operatorname{Im} A$</u>.

Пусть $A: V \to W$ - лин. отображ. $\boxed{\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{Im} A) = \dim V}$

Док-во:

Пусть $e_1 \dots e_k$ - базис ядра $\ker A$, дополним этот базис до базиса всего простр-ва V $(e_1 \dots e_k, e_{k+1} \dots e_n)$ $(n = \dim V)$, тогда:

$\operatorname{Im} A = \langle \underset{\text{перешли в 0}}{Ae_1 \dots Ae_k}, Ae_{k+1} \dots Ae_n \rangle = \langle Ae_{k+1} \dots Ae_n \rangle$. Покажем, что в-ры $Ae_{k+1} \dots Ae_n$ - л/н.

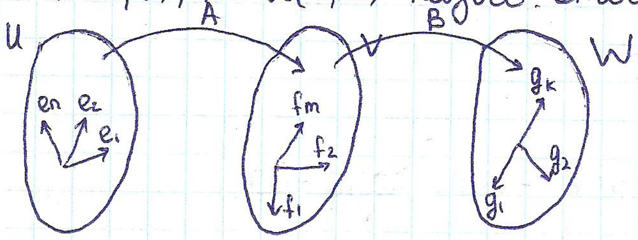
Пусть $\alpha_{k+1} Ae_{k+1} + \dots + \alpha_n Ae_n = 0 \Rightarrow A(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = 0 \Rightarrow$ этот в-р $\in \ker A$ $\Rightarrow$ он выражается ч/з базис ядра $\Rightarrow$ X (одна часть базиса не может выражаться ч/з другую, они л/н) ■

<u>Замеч</u> Из Т $\not\Rightarrow$ $V = \ker A + \operatorname{Im} A$

②. Оператор D - дифференцирование многочленов.
$\ker A = \text{const} = \langle 1 \rangle \in \langle 1, x, \dots, x^{n-1} \rangle = \operatorname{Im} D$.

<u>Произведение лин. отображений</u>

<u>Опр</u> Пусть U, V, W - лин. пр-ва над P ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). <u>Произведением</u> лин. отображ. $A \in \mathcal{L}(U,V)$, $B \in \mathcal{L}(V,W)$ назыв. отображ. $C: U \to W$: $Cx = B(Ax)$, $\forall x \in U$



Композиция

Т При умнож. лин. отображ. их матрицы умножаются.

Док-ва:

$A: \underset{U}{e_j \in} \to \underset{V}{Ae_j \in} = \sum_{s=1}^{m} a_{sj} f_s$ — разложили по базису f пр-ва V

$B: \underset{V}{f_s \in} \to \underset{W}{Bf_s \in} = \sum_{i=1}^{k} b_{is} g_i$ — разложили по базису g пр-ва W

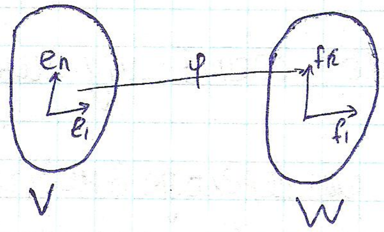
по опр матрицы отображ. $\Rightarrow (BA)e_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ij} g_i$

С другой стороны,

$BAe_j = B(Ae_j) = B\left(\sum_{s=1}^{m} a_{sj} f_s\right) \overset{\text{по лин } B}{=} \sum_{s=1}^{m} a_{sj} Bf_s = \sum_{s=1}^{m} a_{sj} \sum_{i=1}^{k} b_{is} g_i = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left(\sum_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}\right)}_{c_{ij}} g_i \Rightarrow$

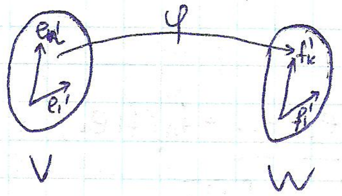
$\Rightarrow c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj}$

③. Пусть $\varphi A: V \to W$ - лин. отображ. e, e' - базисы V
f, f' - базисы W



$[\varphi]_{ef} = A$

$[\varphi]_{e'f'} = A'$



$$\begin{tikzcd} X_{e'} \arrow[r, "A'"] \arrow[d, "T"'] & y_{f'} \\ X_e \arrow[r, "A"] & y_f \arrow[u, "S^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$X_e = T X_{e'}$
$y_f = S y_{f'}$

$\Downarrow$

$\{A' = T A S^{-1}\}$

$$\boxed{A' = S^{-1} A T}$$

Линейное пространство операторов преобразований

$\mathcal{L}(V, W)$ - мн-во лин. отображ из V в W.

Опр| Суммой лин. отображ A и B назыв. отображ C: $Cx = Ax + Bx$, $\forall x \in V$
Обознач: $C = A + B$.

Опр| Произведением лин отображ A на скаляр α назыв отображ $C: V \to W$: $Cx = \alpha A x$. Обознач: $C = \alpha A$

T| Для лин. отображ $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\forall \alpha \in P$ $A + B \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\alpha A \in \mathcal{L}(V, W)$

Док-во: очевидно (упр).

T| Мн-во $\mathcal{L}(V, W)$ - лин пр-во над P относит. введенных операций.

Док-во: проверить аксиомы лин. пр-ва. (упр).

T| Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то пр-во $\mathcal{L}(V, W)$ изоморфно пр-ву матриц $P^{m \times n}$

Док-во:

лин отображ сопост. матрицу

- Зафиксируем базисы e и f пр-в V и W. $\varphi: \mathcal{L}(V, W) \to P^{m \times n}$. $\varphi(A) = A_{ef}$.
Это соответствие взаимно однозначно.

- $(A+B)_{fe} = A_{fe} + B_{fe}$
$(\alpha A)_{fe} = \alpha A_{fe}$
$\Rightarrow$ ∎

Двойственные пространства

Опр| Линейное отображ $f: V \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) назыв. лин. формой (функционалом) в пр-ве V.

Пусть $e_1 \dots e_n$ - базис V. Тогда, если $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, то $f_1(x) = x f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$
$= x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ (*), f_i - скаляр

Опр| Представление (*) назыв. общим видом лин. формы в базисе $e_1 \ldots e_n$. Числа $f_1 \ldots f_n$ назыв. коэф-тами лин. формы

Если задан базис, то имеется взаимно однозначное соотв. м/у лин. формами и наборами из n чисел.

Посмотрим, как меняются коэф-ты лин. формы при переходе в новый базис:

$e_1' \ldots e_n'$ - новый базис V . $[e_1' \ldots e_n'] = [e_1 \ldots e_n]T$

$f_j' = f(e_j') = f(t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \ldots + t_{nj}e_n) \overset{\text{лин.}}{=} t_{1j}f(e_1) + t_{2j}f(e_2) + \ldots + t_{nj}f(e_n) =$

$= t_{1j}f_1 + t_{2j}f_2 + \ldots + t_{nj}f_n$. $\boxed{[f_1', f_2' \ldots f_n'] = [f_1 \ldots f_n]T}$

Базисные в-ры и коэф-ты лин. формы при замене базиса меняются по одним и тем же ф-лам. (согласованно, ковариантно)

Пусть f и g - лин формы.

Опр| $\boxed{(\alpha f + \beta g)(x) \overset{\text{def}}{=} \alpha f(x) + \beta g(x)}$

тоже лин. форма
Образ. лин. пр-во

Опр| Лин. пр-во всех лин форм на V назыв. сопряженным к пр-ву V. Обознач: V^*

Замеч| $\dim V^* = \dim V$

Замеч| При одновременном рассм. пр-в V и V^* эл-ты V^* назыв. ковариантными в-рами, а эл-ты V - контравариантными в-рами

Т| Пусть $e_1 \ldots e_n$ - базис V. Рассм. лин ф-ции $e^1 \ldots e^n$, для к-рых $e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если } i = j \\ 1, \text{если } i \neq j \end{cases}$, Тогда $e^1 \ldots e^n$ - базис V^*. назыв. двойственным (дуальным, взаимным, биортогональным) к базису V

Док-во: без док-ва.

Собственные значения (СЗ) и собственные в-ры (СВ)

Диагонализация матрицы линейного оператора. Инвариантные подпр-ва

$A: V \to V$ - лин. оператор

Опр| Подпр-во U инвариантно (inv) относит лин. оператора A, если $AU \in U$, $AU = \{Ax \mid x \in U\}$

④. Примеры inv подпр-в.

1. Ker A и Im A. $\quad Au = 0 \Rightarrow A(Au) = 0$ - ker.
$\quad y = Ax \Rightarrow A(Ay)$ - Im.

2. Оператор дифф. в пр-ве многочл. степени M_n

$M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ – inv подпр-ва.

Если $\exists$ inv подпр-во, то матрицу лин. оператора можно упростить (построить базис, в к-ром лин. оператор имеет более простую форму) 09.03.12.

Т| Пусть $A: V \to V$ – лин. оператор; $U \neq 0$ – inv подпр-во, тогда $\exists$ базис, в к-ром матрица A имеет квазидиогональную форму.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$$

Док-во:

Пусть $e_1 \ldots e_n$ – базис U. Дополним его до базиса всего пр-ва V
$V = \langle e_1 \ldots e_m, e_{m+1} \ldots e_n \rangle$ – лин. оболочка.

Т.к $Ae_i \in U$, $1 \le i \le m$. $Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{m1}e_m + \ldots + 0e_{m+1} + \ldots + 0e_n$

$\vdots$

$Ae_m = a_{1m}e_1 + \ldots + a_{mm}e_m + \ldots + 0 \cdot e_n$.

$Ae_{m+1} = a_{1\,m+1}e_1 + \ldots + a_{n\,m}e_n$

Оператор A имеет вид $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$. A_1 $m \times n$ матрица
A_2 $(n-m) \times (n-m)$ матрица ■

A_1 – матрица оператора A, огр на подпр-ве U, обознач $A_1|U$

Замеч|

Верно и обратное: если матрица A имеет квазидиагональную форму, то подпр-во $U = \langle e_1 \ldots e_m \rangle$ inv отн. A

Если бы $A_0 = 0$, то ~~~~ подпр-во $W = \langle e_{m+1} \ldots e_n \rangle$ – тоже inv. Тогда:

$$\boxed{A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} A_1 = A|U \\ A_2 = A|W \end{array}}$$

$\Rightarrow A = A_U \oplus A_W$ – прямая Σ операторов. Матрица тогда имеет клеточно-диагональный вид

Т| Пр-во V явл прямой Σ $V = U \oplus W$ подпр-в, inv относит A $\Leftrightarrow$ матрица оператора A в каком-либо базисе имеет клеточно-диагональный вид. Эту Т по индукции можно распростр. на случай n слагаемых.

?| как найти эти inv подпр-ва, чтобы „расщепить" матрицу A?
Собств. в-ры – одномерные inv подпр-ва.

Собственные в-ры и собственные значения

V – лин пр-во; $A: V \to V$ лин. оператор.

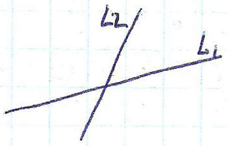
Опр| Ненулевой в-р x называется собственным в-ром (с.в) оператора A, если $\exists \rho$: $Ax = \rho x$. На в-р x натянуто одном. inv подпр-во.
Число ρ называется собственным значением (с. з) оператора A.
Мн-во всех с.з. называется спектром A. Обознач: $\sigma(A)$

$x \quad \rho x$

① M_n – пр-во многочл. степени n. D-оператор дифф.

Любая const – с. в. с с. з $=0$. $\left((const)'=0\right)$.
M_0 – с. в. с. з $\lambda=0$

② Оператор проектирования на L_1 парал. L_2.



$\forall x \in L_1$ – с. в. с с. з $\lambda=1$ | $P_x=X$
$x\neq 0$

$\forall x \in L_2$ – с. в с с. з $\lambda=0$ | $P_x=0$
$x\neq 0$.

Замеч! Пусть x, y – с. в. оператора A, отвеч. с. з λ, т.е $Ax=\lambda x$, $Ay=\lambda y$, Тогда лин. комб. $\alpha x+\beta y$ – тоже с. в A, отвеч. с. з λ.

Док-во.

$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay=\alpha\lambda x+\beta\lambda y=\lambda(\alpha x+\beta y)$ – подпр-во. ■

Опр! $V^{\lambda}=\{v\in V \mid Av=\lambda v\}+\{\vec{0}\}$ – подпр-во, сост. из „0" и всех с. в, отвеч. с. з. λ

V^{λ} – собственное подпр-во оператора A с с. з λ. $\dim V^{\lambda}$ = геом. кратность λ (число л/н. в-ров)

T! с. в. $x_1 \dots x_k$, отвеч. различным с. з $\lambda_1 \dots \lambda_k$ л/н.

Док-во:

Индукция по k:

$k=1$ – верно, т. к $x_1\neq 0$. $(\alpha x_1=0 \Leftrightarrow \alpha=0)$

$k-1\to k$. Пусть $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_kx_k=0$. Применим к этому рав-ву A:
$A(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_kx_k)$
$A(\alpha_1x_1)+\dots+A(\alpha_kx_k)=0$, по лин.
$\alpha_1Ax_1+\dots+\alpha_kAx_k=0$, т. к x_i – собств $\Rightarrow$ $(\cdot\lambda_k)$ | „–"
$\alpha_1\lambda_1x_1+\dots+\alpha_k\lambda_kx_k=0$,
$\alpha_1(\lambda_k-\lambda_1)x_1+\alpha_2(\lambda_k-\lambda_2)x_2+\dots+\alpha_{k-1}(\lambda_k-\lambda_{k-1})x_{k-1}=0$ по предполож инд л/н
Все коэф-ты $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{k-1}=0 \Rightarrow \alpha_kx_k=0 \Rightarrow \alpha_k=0$. ■

Следств! лин. оператор в n-мерном пр-ве имеет $\leq n$ с. з.

Характеристический многочлен.

* x – с. в, если $Ax=\lambda x$, т.е $(A-\lambda E)x=0$, $x\neq 0$ ~ $\ker(A-\lambda E)\neq 0 \Rightarrow \exists$ ненул. решение $\Rightarrow$

$\det(A-\lambda E)=0$

Опр! Характеристическим многочленом матрицы A $\chi_A(\lambda)$ назыв.
$\det(A-\lambda E)$ $\quad \boxed{\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)}$

Пусть φ – лин. оператор; A и B – матрицы φ в разных базисах e и e',
$B=T^{-1}AT$ (A и B – подобные матрицы)

T! Характ. многочлены подобных матриц совпадают.

Док-во:

$$\chi_B(\rho) = \det(B-\rho E) = \det(T^{-1}AT - \rho \underbrace{T^{-1}T}_{E} E) = \det(T^{-1}(A-\rho E)T) =$$

$$= \det(T^{-1}) \cdot \det(A-\rho E) \cdot \det(T) = \det(A-\rho E) = \chi_A(\rho) \blacksquare$$

Следств. Все матрицы одного и того же оператора имеют одинаковые характ. многочлены. Можно говорить о характ. многочлене оператора (т.к. он не зависит от базиса)

$$\chi_A(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = a_0 + a_1(-\rho) + a_2(-\rho)^2 + \dots + a_n(-\rho)^{n-1} + (-\rho)^n$$

$a_0 = \chi_A(0) = \det A$

$a_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \operatorname{tr} A$ – след A

$a_{n-k} = \sum$ гл. миноров порядка k

③ $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = 7(4-9) = -35 = a_0$

$a_2 = 7+1+4 = 12$

$a_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 7 - 5 + 28 = 30$

$\chi_A(\rho) = -35 + 12\rho^2 - 30\rho - \rho^3 = -\rho^3 - 30\rho + 12\rho^2 - 35$ – характ. многочл.

Опр. Кратность ρ как корня характ. многочл. назыв. алгебраической кратностью

④ $\chi_A(\rho) = (\rho-1)^2(\rho-2)^3$ $\quad \rho_{1,2} = 1 \quad \rho_{3,4,5} = 2$

dim пр-ва матриц $n \times n = n^2$.

$A, A^2, A^3, \dots, A^N$, если $N > n^2$ => сист л/з.

Т| Гамильтона-Кэли (без док-ва).

$\boxed{\chi_A(A) = 0}$ Матрица явл. корнем своего характ. многочл.

⑤ $\chi_A(A) = -A^3 + 12A^2 - 30A - 35E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Диагонализация матрицы

$A: V \to V;\ \dim V = n$

Опр. Лин. оператор назыв. диагонализируемым, если $\exists$ базис $\{e_i\}$, относ-но к-рого матрица оператора принимает диагональный вид (это произойдет в базисе из с.в, а коэф-тами будут с.з)

$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n \end{pmatrix}$ Имеем: $\left. \begin{array}{l} Ae_1 = \rho_1 e_1 \\ Ae_2 = \rho_2 e_2 \\ \vdots \\ Ae_n = \rho_n e_n \end{array} \right|$ ρ – с.з, $e_1 \dots e_n$ – с.в

?| Всякую ли матрицу можно диагонализировать?

⑥ $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ - не ~~диаг~~. диаг. ни в каком базисе.

$A^2=0$. Если бы $\exists$ такой базис, то $\exists$ бы T: $T^{-1}AT=\underset{\text{диаг. матр.}}{D}$, $D^2=T^{-1}ATT^{-1}AT=$
$=T^{-1}\underset{0}{A^2}T \Rightarrow D^2=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow$ X. ■

Это произошло т.к. $\exists$ 2 λ но $\exists$ только 1 с.в.

$A: V\to V$ $\quad \chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\dots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$; $\lambda_i\neq\lambda_j$

<u>алгебраическая кратность</u>: $\boxed{\text{alg mult}_A(\lambda_i)=n_i}$

<u>геометрическая кратность</u>: $\underset{\text{пр-во с.в, отвеч. с.з } \lambda_i}{V^{\lambda_i}=\{x \mid Ax=\lambda_i x\}}$ $\boxed{\text{geo mult}_A(\lambda_i)=\dim V^{\lambda_i}}$

⑦ $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. $\chi_A(\lambda)=\lambda^2$ $\quad$ alg mult$_A(\lambda)=2$
$Ax=0x \Rightarrow x_2=0$. $V=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ geo mult$_A(0)=1$ $\Bigg\} \Rightarrow$ матрица не диагонализируется

<u>Утв</u> geo mult с.з. $\lambda \le$ alg mult с.з. λ

Док-во:

geo mult $(\lambda_1)=\dim V^{\lambda_1}=m$. $Ax=\lambda_1 x$. Пр-во V^{λ_1} - inv относит. A. ($A\overset{\text{св}}{x}=\lambda_1 x \Rightarrow$
$\Rightarrow A(Ax)=A(\lambda_1 x)=\lambda_1 \underset{\text{св}}{Ax} \Rightarrow V^{\lambda_1}$ inv относит A)

Рассм $A_1=A/V^{\lambda_1}$. $\det(A_1-\lambda E)=(\lambda-\lambda_1)^m$, действительно, пусть $e_1\dots e_m$ - базис V^{λ_1}. $A_1/e=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_1\end{pmatrix}$

$A=\left(\begin{array}{c|c}\lambda_1 \ddots \lambda_1 & B\\ \hline 0 & C\end{array}\right)$. $\chi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^m \underset{}{\overset{(\lambda-\lambda_1)^k\dots}{\chi_C(\lambda)}}$. ■

16.03.12.

II Пусть V - в-р над пр-вом P. $A: V\to V$ - лин. оператор. A диагонализируем $\Leftrightarrow$

1) $\forall \lambda_i$ - корни $\chi_A(t)\in P$

2) geo mult каждого λ_i = alg mult (собств. в-ров должно хватать).

Док-во:

(1,2 $\Rightarrow$ диаг.): $\chi_A(t)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\dots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$ $\quad$ В-ры из разных V^{λ_i} л.н. $\Rightarrow$ (*)
$\dim V^{\lambda_i}=k_i$, $k_1+k_2+\dots+k_m=n$ $\quad$ $V^{\lambda_i}\cap(V^{\lambda_1}+\dots+V^{\lambda_{i-1}}+V^{\lambda_{i+1}}+\dots+V^{\lambda_m})=0$

$\Rightarrow$ сумма $V^{\lambda_1}+\dots+V^{\lambda_m}$ - прямая, а $\sum\dim V_i=n \Rightarrow V^{\lambda_1}+\dots+V^{\lambda_m}=V$.

Выберем в каждом собств. подпр-ве V^{λ_i} базис из с.в и объединим их, получим базис V из n л.н. с.в.

В этом базисе $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\lambda_2&\\0&&\ddots\ \lambda_m\end{pmatrix}$!

(диаг => 1,2). Пусть A диагонализируется. Пусть $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ - его различн с.з, а $k_i = \dim V^{\lambda_i}$ - разм пр-ва с.в. Выполнено рав-во (*) => A-диагон, т.е

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_m & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Базис $V = \bigcup_{i=1}^{m}$ базис $V^{\lambda_i} \Rightarrow V = V^{\lambda_1} + \ldots + V^{\lambda_m}$,

$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$ ■

Следствие

Если все λ_i различны => матрица диагонализируема. Если в n-мерном лин. пр-ве A имеет n различных с.з, то A - диагонализируется.

Если матрица не диагон, то приводим её к жардановой форме.

Жарданова форма матрицы (без док-ва)

Корневые подпространства.

T| О расщеплении лин. оператора

Опр| Пусть λ - с.з. оператора A. Вектор $x \in V$ назыв. корневым вектором оператора A, отвечающего с.з λ, если $(A - \lambda E)^k x = 0$ при н-ром $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Опр| Высотой корневого в-ра назыв min k, при к-ром $(A - \lambda E)^k x = 0$.

Св-ва корневых в-ров.

1) Корневые в-ры высоты 1 - собств. в-ры. Т.е $(A - \lambda E)x = 0 \Rightarrow Ax = \lambda x$

2) Если x - корневой в-р высоты k, то $(A - \lambda E)x$ - корневой в-р высоты k-1

3) Если x - корневой в-р высоты k, то вектора $x, (A - \lambda E)x, \ldots, (A - \lambda E)^{k-1}x$ - л/н. => высота корневого в-ра ≤ dim V.

Док-во:

(3) Пусть $\alpha_1 x + \alpha_2 (A - \lambda E)x + \ldots + \alpha_k (A - \lambda E)^{k-1} x = 0$, примен. к нему оператор $(A - \lambda E)^{k-1}$:

$\alpha_1 \underbrace{(A - \lambda E)^{k-1} x}_{\neq 0} + \alpha_2 \underbrace{(A - \lambda E)^k}_{0} x + \ldots + 0 = 0$, $\Rightarrow \alpha_1 = 0$, примен. к нему оператор $(A - \lambda E)^{k-2}$:

.... $\Rightarrow \alpha_i = 0$ => л/н. ■

Корневые в-ры высоты k назыв. присоединенными в-рами (k-1) порядка, т.е $(A - \lambda E)^k x = 0$ $\quad v = (A - \lambda E)^{k-1} x$ - с.в.

Опр| Мн-во всех корневых в-ров оператора A отвеч. с.з λ назыв. корневым подпр-вом. Обознач: $W(\lambda_i) = \{x \in V \mid (A - \lambda E)^k x = 0$ для нек. $k\}$.

T| О расщеплении лин. оператора.

Пусть A - лин. оператор, $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ - его хар. многочл. Пр-во V разлаг. в прямую Σ корневых подпр-в: $V = W(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus W(\lambda_p)$ $\forall W(\lambda_i)$ - инвариантно относит A и имеет $\dim W(\lambda_i) = m_i$.

Следств! Для любого лин. оператора в комплексном лин пр-ве $\exists$ базис, в к-ром его матрица имеет квазидиагональную форму. Число диагональных клеток = числу различн. с-з, размеры этих клеток = alg mult с.з., т.е $\exists T$:

$$\boxed{T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}}$$

Если выбирать базис спец. образом, то получим Жорданову форму матрицы

Жорданова форма

Опр! Матрица $J_k(\rho) = \begin{pmatrix} \rho & 1 & & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \\ 0 & & \rho & 1 \\ 0 & 0 & & 1 \\ & & & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 1 & & \\ & \rho & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \rho \end{pmatrix}$ назыв. Жордановой клеткой порядка k, соотв. с.з ρ

$\boxed{\chi_{J_k(\rho)}t = (t-\rho)^k}$ с.з ρ имеет alg mult k.

Найдем geo mult

с.в $(J_k(\rho) - \rho E) \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{rk = k-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = 0$ — 1 с.в. $(rk = k-1)$

Размерность собств. подпр-ва $V(\rho) = 1$ => geo mult = 1 => не приводится к диаг. виду жорд. клетка, т.к geo mult $\neq$ alg mult.

Рассм посл-ть в-ров $e_1 \ldots e_k$:

$$\left.\begin{array}{l} Ae_1 = \rho e_1 \\ Ae_2 = \rho e_2 + e_1 \\ Ae_3 = \rho e_3 + e_2 \\ \vdots \\ Ae_k = \rho e_k + e_{k-1} \end{array}\right\}$$

В этом базисе $e_1 \ldots e_k$ оператор A имеет вид жордановой клетки $J_k(\rho)$.

Надо найти этот базис.

Эквивалентные соотношения:

$$\begin{cases} (A-\rho E)e_1 = 0 \\ (A-\rho E)e_2 = e_1 \Rightarrow (A-\rho E)^2 e_2 = 0 \\ (A-\rho E)e_3 = e_2 \Rightarrow (A-\rho E)^3 e_3 = 0 \\ \vdots \\ (A-\rho E)e_k = e_{k-1} \Rightarrow (A-\rho E)^k e_k = 0 \end{cases}$$

т.е $\begin{cases} e_1 - \text{с.в} \\ e_2 - \text{присоедин к } e_1\text{, высоты } 1 \\ e_3 - \text{присоед, высота } 3-1=2 \\ \vdots \\ e_k - \text{присоед, высоты } k-1 \end{cases}$

$e_1 \ldots e_k$ – л.н.

Опр! Жорданов блок, отвеч. с.з ρ – блочно-диагональная матрица, каждый блок к-рой – жорданова клетка. Обозначается: $A(\rho)$:

$$A(\rho) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i_1}(\rho)} & & \\ & \boxed{J_{i_2}(\rho)} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{J_{i_s}(\rho)} \end{pmatrix}$$

$i_1 + i_2 + \ldots + i_s = $ alg mult ρ
$s = $ geo mult ρ

① $\chi_A(\rho) = (\rho-2)^3$

$\rho_{1,2,3} = 2$ – с.з alg mult 2 = 3

$rk(A-2E) = 2$.

1) Пусть geo mult = 1 (отним ρ по диаг и прив к ст. виду, geo mult = кол-во „0" строк)

$A(2) - \begin{pmatrix} 2&1&0 \\ 0&2&1 \\ 0&0&2 \end{pmatrix}$

2) $\lambda = 2$ - с.з. geo mult $= 3$.

$A(2) = \begin{pmatrix} \boxed{2} & & 0 \\ & \boxed{2} & \\ 0 & & \boxed{2} \end{pmatrix}$

3) $\lambda = 2$ - с.з geo mult $= 2$ $(rk(A - 2E) = 1)$

$A(2) = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

В случае матрицы 3×3 жорд. форма опр. по рангу матрицы.

Т| О жордановой форме

Пусть A - лин. оператор в $\mathbb{C}$ (пр-ве) V, $\dim V = n$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$ $\lambda_i = \lambda_j$, при $i \neq j$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$, Тогда в пр-ве V $\exists$ базис, состоящ. из собств. и присоедин в-ров, в к-ром матрица A имеет форму:

$$J = \begin{pmatrix} A(\lambda_1) & & & \\ & A(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

жорданова нормальная форма (жнф)

где $A(\lambda_i)$ - жорданов блок, соотв с з. λ_i

жнф опр. однозначно, с точностью до порядка клеток.

$$\boxed{J = T^{-1} A T}$$

Опр| Базис, в к-ром матрица имеет жф. назыв ж. базисом. Он определяется не однозначно.

Функции от матриц. Матричная экспонента

Пусть $f(t)$ - многочлен. $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$. Опред. многочлен от матрицы:

$$f(A) = a_0 \cdot E + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n \qquad A^2 - ?$$

$$J = T^{-1} A T \Rightarrow A = T J T^{-1}. \quad A^2 = T J \underbrace{T^{-1} T}_{E} J T^{-1} = T J^2 T^{-1} \Rightarrow \boxed{A^n = T J^n T^{-1}}$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ - сход ряд. Опред. e^A.

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots \quad \text{- матричная экспонента.}$$

Вычисление ф-ций

Пусть $J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$ и f - (многочл, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x), тогда

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \ldots & \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ldots & \frac{1}{(n-2)!} f^{(n-2)}(\lambda) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

распад на блоки

Если $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_n \end{pmatrix}$, то

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & & & \\ & f(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(A_n) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(A) = T f(J) T^{-1}}$$

23.03.12.

Евклидовы пространства

В лин. пр-вах нет понятий, связанных с измерением: длина, $\angle$, и т. д. Эти понятия связаны со скал. произведением.

Евклидовы пространства
Нер-во Коши-Буняковского, нер-во треугольника.

Пусть V — лин. (векторное) пр-во над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$.

Опр) Вещ. лин. пр-во назыв евклидовым, если в нём определена операция скалярное произведения: паре векторов $x, y \in V$, ставится в соотв. вещ. число и выполн. след св-ва:

1) Билинейность: $((\alpha x_1 + \beta x_2), y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y)$
$(x, (\alpha y_1 + \beta y_2)) = \alpha(x, y_1) + \beta(x, y_2)$.

2) Симметричность: $(x, y) = (y, x)$.

3) Положит. определенность: $(x, x) \geq 0$, если $x = 0$, то $(x, x) = 0$.

Скал. произвед- билин, положит опр, симметр. квадратичная форма.

① $\mathbb{R}$

1. Арифметическое евкл. пр-во $\mathbb{R}^n$:

$\mathbb{R}^n$ $\quad x = (x_1 \ldots x_n)$, $y = (y_1 \ldots y_n)$ $\quad (x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$

2. $C[0,1]$ — непр. ф. на $[0,1]$. $\quad (f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$.

Опр) Комплексное (унитарное) эрмитово евклидово пр-во — это комплексное лин пр-во V с эрмитовым положит. опред, полуторалинейным скал. произв паре $x, y \in V \to (x, y) \in \mathbb{C}$ со след. св-вами:

1) Полуторалинейность (линейность по 1 и полулинейность по 2 аргументу):
$((\alpha x_1 + \beta x_2), y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y)$
$(x, (\alpha y_1 + \beta y_2)) = \bar{\alpha}(x, y_1) + \bar{\beta}(x, y_2)$, $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — компл. сопряж.

2) Эрмитова симметричность: $(x, y) = \overline{(y, x)}$

3). Положит. определённость. $(x, x) \geq 0$, Если $x = 0$, то $(x, x) = 0$

Скал. произв - полуторалин, эрмитово-симм, положит. опр. квадр. форма

② $\mathbb{C}$

1. Арифм. компл. евкл. пр-во $\mathbb{C}^n$:

$z = (z_1 \ldots z_n)$, $w = (w_1 \ldots w_n)$ $\quad (z, w) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \ldots + z_n \bar{w}_n$

? зачем сопряжение? $z = (3, 4, 5i)$, $(z, z) = 9 + 16 + 25i^2 = 0$, но $z \neq 0 \Rightarrow$ плохо !

2. $(f, g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)}\, dt \qquad C[0,1]$

Опр) Длиной (нормой) вектора назыв. $|x| = \sqrt{(x,x)}$

Лемма) Нер-во Коши-Буняковского (К-Б).

$\forall x,y \in V \quad |(x,y)| \le |x|\,|y| \qquad |(x,y)| = |x|\cdot|y| \Leftrightarrow x,y$ - л/з, т.е $x \uparrow\downarrow y$ коллинеарны.

Док-во:

1) Над $\mathbb{R}$.

Если $x=0$, то $|(0,y)| = |0|\cdot|y|$, $\quad y = 0\cdot x$ - л/з. (#)
Если $x \ne 0$, то $t \in \mathbb{R}$. Расм длину в-ра $|tx+y|^2 = ((tx+y),(tx+y)) = t^2|x|^2 + 2t(x,y) + |y|^2 \ge 0 \Rightarrow D \le 0 \Rightarrow (x,y)^2 - |x|^2\cdot|y|^2 \le 0 \Rightarrow |(x,y)| \le |x|\,|y|$

$D=0 \Leftrightarrow$ # имеет вещ. корень $t_0 \Rightarrow |t_0x+y|^2 = 0 \Rightarrow y = t_0x$ - л/з.

2) Над $\mathbb{C}$.

Пусть V - компл. евклидово пр-во. Аналог, $\forall t \in \mathbb{R}$

$|tx+y|^2 = t^2|x|^2 + 2t\,Re(x,y) + |y|^2 \ge 0$
Если $x=0$, то нер-во выполн.
Если $x \ne 0$, то $\quad [Re(x,y)]^2 \le |x|^2|y|^2$

Если $(x,y) = |(x,y)|e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, то $Re(x e^{-i\varphi}, y) = |(x,y)| \Rightarrow (Re(x_1,y))^2 \le |x_1|^2\cdot|y|^2$

$x_1 := e^{-i\varphi}x$, т.е $|(x,y)| \le |e^{-i\varphi}x|^2|y|^2 \Rightarrow |(x,y)| \le |x|\cdot|y|$

Равенство достигается, когда для н-рого t_0 $|t_0e^{-i\varphi}x + y|^2 = 0 \Rightarrow y = -t_0e^{-i\varphi}x$ - л/з ∎

Следств) Нер-во треугольника

$\forall x,y \in V, \quad |x \pm y| \le |x| + |y|$

Док-во

$|x\pm y|^2 = |x|^2 \pm 2Re(x,y) + |y|^2 \overset{К-Б}{\le} |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2$ ∎

Опр) Нормой в лин. пр-ве V назыв. функционал, к-рый в-ру сопост. ч-ло, удовл. след усл:

1) Положит. опр. $\|x\| \ge 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \|\cdot\|: V \to [0,+\infty)$

2) Нер-во Δ: $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\| \quad \forall\alpha$. Положит. однор. формы

Следств)

Длина в-ра $|x|$ задаёт норму на V.

Док-во:

Осталось проверить св-во 3): $|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\bar\alpha(x,x)} = |\alpha|\,|x|$ ∎

Можем ввести метрику: $\rho(x,y) = |x-y|$ на V

③.

1) К-Б: $(x, y)=\sum_1^n x_i y_i$ - станд. скал. произв.

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$$\left|\int_a^b f(t) g(t)\, dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, dt}$$ - для ф-ций.

2) Нер-во Δ:

$$\sqrt{\sum_1^n |x_i \pm y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_1^n |x_i|^2} + \sqrt{\sum_1^n |y_i|^2}.$$

$$\sqrt{\int_a^b |f(t) \pm g(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt}$$ - для ф-ций

Ортогональные векторы. Процесс ортогонализации.

Опр| В-ры $x, y \in V$ назыв. ортогональными, если $(x, y)=0$. Обознач: $x \perp y$.

Т| Пифагора

Если в-ры $x_1 \dots x_k$ попарно ортогональны, то $\left|\sum_1^k x_i\right|^2=\sum_{i=1}^k |x_i|^2$

Док-во:

По индукции:

$k=2$: $|x_1+x_2|^2=|x_1|^2+2\overset{0}{(x_1, x_2)}+|x_2|^2=|x_1|^2+|x_2|^2$ - истина.

$k \to k+1$: $|x_1+\dots+x_k+x_{k+1}|=|x_1+\dots+x_k|^2+2\overset{0}{(x_1+\dots+x_k, x_{k+1})}+|x_{k+1}|^2=|x_1+\dots+x_k|^2+|x_{k+1}|^2$

$\overset{\text{по предп. инд.}}{=} |x_1|^2+|x_2|^2+|x_{k+1}|^2$ ■

Пусть V - вещ. евкл. пр-во и $x, y \in V$, тогда по нер-ву К-Б. $-1 \leq \frac{(x, y)}{|x||y|} \leq 1$

$\Rightarrow \exists! \angle \varphi \in [0, \pi]$, для к-рого $\frac{(x, y)}{|x||y|}=\cos\varphi$

Опр| φ назыв углом м/у векторами x и y, если

Пусть V - компл. эрм. пр-во и $x, y \in V$, тогда по нер-ву К-Б: $0 \leq \frac{|(x, y)|}{|x| \cdot |y|} \leq 1$

$\Rightarrow \exists!\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, для к-рого $\frac{|(x, y)|}{|x||y|}=\cos\varphi$.

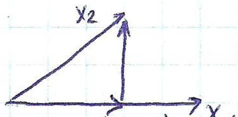
Опр| . φ назыв. углом м/у векторами x и y, если

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта (Г-Ш)

Он закл. в следующем:

Пусть $x_1 \dots x_m$ - л/н векторы. Построим сист. в-ров $y_1 \dots y_m$ - попарно $\perp$, а $\langle x_1 \dots x_m \rangle=\langle y_1 \dots y_m \rangle$.

$y_1 := x_1$
$y_2 := x_2+\alpha y_1$ | $(y_1, y_2)=0 \Rightarrow (x_2+\alpha y_1, y_1)=0 \Rightarrow \alpha=\frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} \Rightarrow y_2=x_2-\frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1$,



$Pr_{x_1} x_2 = \frac{(x_2, x_1)}{(x_1, x_1)} x_1$

Дальше по индукции.

Пусть $y_1 \dots y_{k-1}$ построены. Ищем y_k в виде

$y_k = x_k + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}$, α_i найдём из усл $(y_k, y_1) = 0 \dots$

$\dots (y_k, y_{k-1}) = 0$, $\begin{cases} (x_k, y_1) + \alpha_1 (y_1, y_1) = 0 \\ \vdots \\ (x_k, y_{k-1}) + \alpha_{k-1} (y_{k-1}, y_{k-1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{(x_k, y_1)}{(y_1, y_1)} \dots \alpha_{k-1} = \frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}, y_{k-1})} \Rightarrow$

$$\boxed{y_k = x_k - \frac{(x_k, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \dots - \frac{(x_k, y_{k-1})}{(y_{k-1}, y_{k-1})} y_{k-1} = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i}$$

В-р $y_k \neq 0$, действ, заменим $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \vdots \\ y_{k-1} = c_m x_1 + \dots + c_p x_{k-1} \end{cases} \Rightarrow$ $y_k = x_k + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{k-1} x_{k-1} \neq 0$, т.к $x_1 \dots x_2$ л/н.

Т| В n-мерном евкл. пр-ве $\exists$ базис из n попарно-$\perp$ в-ров (ортогональный базис). Любой набор ненулевых попарно ортогональных векторов можно дополнить до ортогонального базиса.

Док-во:

1) В $\forall$ n-мерном евкл. пр-ве $\exists$ базис из n л/н. в-ров. $x_1 \dots x_n$, применив алгоритм Г-Ш, получим $\perp$ базис.

2) Заметим, что $\forall$ набор попарно $\perp$ в-ров л/н. Действ, если в-ры $x_1 \dots x_k$ и $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0$. $\cdot x_1$ (скал). Получим: $\alpha_1 (x_1, x_1) + \dots + \alpha_k \underbrace{(x_1, x_k)}_{0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$.

$\forall \alpha_i = 0 \Rightarrow$ л/н.

Дополним эту сист $x_1 \dots x_k$ до базиса, потом ортогонализуем. ∎

Опр| Базис, сост. из попарно-$\perp$ в-ров назыв. ортогональным базисом

Опр| Ортогональный базис назыв. ортонормированным, если все в-ры имеют ед. длину

Следств| В каждом евкл. пр-ве $\exists$ ОНБ.

Док-во:

В каждом евкл. пр-ве $\exists$ ортогональный базис. Нормируем его:

$e_1 = \frac{y_1}{|y_1|} \dots e_n = \frac{y_n}{|y_n|}$, получим ОНБ. ∎

Матрица Грама

Опр| Пусть $e_1 \dots e_n$ - произв. набор в-ров $\in V$. Матрица $G = [g_{ij}]$, $g_{ij} = (e_i, e_j)$ назыв матрицей Грама сист. в-ров $e_1 \dots e_n$.

Если $e_1 \dots e_n$ - базис V, то G назыв. матриц. скал. произв. в базисе e.

$$G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \dots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

30.03.12.

Свойства матрицы Грамма

V - вещ. Евкл. пр-во.

Матрица G • симметрична, $G^T = G$, $g_{ij} = g_{ji}$
• положит. опр. $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i x_j > 0$, если $x = (x_1 \dots x_n) \neq 0$. Действ,

$\sum_{i,j=1}^n (e_i, e_j) x_i x_j = (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) > 0$ ∎.

V - компл. Евкл. пр-во.

Матрица G • эрмитово симметрична, $G^T = \overline{G}$ или $g_{ij} = \overline{g_{ji}}$
• положит. опр. $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} z_i \overline{z_j} > 0$, если $z = (z_1 \dots z_n) \neq 0$.

Связь матрицы Грамма и скал. произведения

Если $e_1 \dots e_n$ - базис V и $\begin{cases} x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \end{cases}$ то $(x, y) = (x_1 e_1 \dots x_n e_n, y_1 e_1 \dots y_n e_n)$

$\overset{\text{в } R}{\underset{\text{билин}}{=}} \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j = X^T G Y$

$$\boxed{(x, y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

На i-том месте: $(g_{i1} \dots g_{in}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\sum g_{ij} y_j}_{a_i}$

$x^T \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum x_i a_i$

Если V - компл. Евкл. пр-во, то

$$\boxed{(x, y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i \overline{y_j} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}}$$

Т.е задание базиса $e_1 \dots e_n$ и матрицы G полностью опред. скал. произв.
Если базис e - ОНБ, то G = E и скал. произв. принимает вид:

$$\boxed{(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i}$$

Связь матриц Грама в разных базисах

Пусть $e_1 \dots e_n$ и $e_1' \dots e_n'$ - старый и новый базисы и C - матрица перехода:

$[e_1' \dots e_n'] = [e_1 \dots e_n] C$, т.е $e_i' = \sum_{j=1}^n c_{ji} e_j$ в индексной форме. Тогда

$g_{ij}' = (e_i', e_j') = \left(\sum_{k=1}^n c_{ki} e_k, \sum_{m=1}^n c_{mj} e_j\right) \overset{R}{\underset{\text{лин.}}{=}} \sum_{k,m=1}^n c_{ki} c_{mj} g_{km}$. Это $\Leftrightarrow$ матричному соотношению: $\boxed{G' = C^T G C}$ (Док-во: упр)

В компл. Евкл пр-ве:

$\boxed{G' = C^T G \overline{C}}$ (Док-во: упр)

Предлож. | Определитель матрицы Грама любой сист в-ров ≥ 0. Притом, $=0 \iff$ в-ры л/з.

Док-во:

Возьмём $f_1 \ldots f_n$ – ОНБ, $G_f = E$. Пусть $e_1 \ldots e_n$ – произв в-ры, C – матрица перехода от f к e, тогда $G_e = C^T G_f C = C^T E C \Rightarrow \det G_e = \det(C^T C) = (\det C)^2 \geq 0$
– если в-ры $e_1 \ldots e_n$ л/н, то они образ. базис $\Rightarrow \det C > 0$
– если в-ры $e_1 \ldots e_n$ л/з. Пусть $e_k = \sum \lambda_i e_i$, Тогда $(e_k, e_j) = \sum \lambda_i (e_i, e_j)$ и k-ая строка матрицы Грама явл. лин. комбин. остальных строк $\Rightarrow$ $\det G_e = 0$.

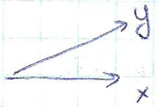
Геометрический смысл матрицы Грама.

Рассм n-мерные фигуры.

– Единичн. куб. $= \{ t_1 e_1 + \ldots + t_n e_n \,/\, 0 \leq t_i \leq 1,\ e_1 \ldots e_n \text{ – ОНБ} \}$

– Параллелипипед $= \{ t_1 e_1 + \ldots + t_n e_n \,/\, 0 \leq t_i \leq 1 \}$

① $n=2$.



$$G = \begin{pmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{pmatrix}. \quad \det G = |x|^2 |y|^2 - |x|^2 |y|^2 \cos^2\varphi =$$
$$= |x|^2 |y|^2 \sin^2\varphi \Rightarrow$$

$\det G$ = квадрату площади пар-ма, постр. на в-рах x и y.

$n=3$

$$G = \begin{pmatrix} (x,x) & (x,y) & (x,z) \\ (y,x) & (y,y) & (y,z) \\ (z,x) & (z,y) & (z,z) \end{pmatrix}$$ Можно показать, что $\det G$ = квадрату V параллелипипеда, постр. на в-рах x, y, z

и.т.д.

Аналогично, можно показать, что $\det$ Грама k векторов $x, y, \ldots, \varphi$ равен квадрату V k-мерного параллелепипеда, постр. на в-рах $x, y \ldots \varphi$.

Пусть $e_1 \ldots e_n$ – ОНБ и $f: e_1 \ldots e_n \to x, y, \ldots \varphi$ – лин. отображ. Пусть C – матрица лин. отображ f, она же будет и матр. перехода:

$$[x, y, \ldots, \varphi] = [e_1, \ldots, e_n]\, C.$$

Матрица Грама $= C^T C \Rightarrow \det G = (\det C)^2$. f явл. лин. отображ. ед. куба на параллелипипед, а искажение V при лин. отображ $= |\det C|$.
$V_{куба} = 1 \Rightarrow V_{пар} = |\det C|$.

Изометрический изоморфизм Евклидовых пространств одной размерности

Опр| Два Евклидовых пр-ва V и V' назыв. изоморфными, если м/у их эл-тами можно установить взаимнооднозначное соотв $\varphi: x \to x'$, кот. явл. изоморфизмом лин. пр-в, т.е $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
$\varphi(\lambda y) = \lambda \varphi(y) \quad \forall x, y \in V$,
и, кроме того, сохр. скал. произвед., т.е. $(\varphi(x), \varphi(y))' = (x, y)$

Отображ. φ наз. изометрическим изоморфизмом. (сохр. метрику)

Т| Любые 2 Евклидовых пр-ва ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) одной размерности изоморфны

Док-во:

Покажем, что вещ. Евклидово пр-во размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$, а компл. – $\mathbb{C}^n$. Пусть V – n-мерное евкл. пр-во. Выберем в нём произв. ОНБ $e_1 \dots e_n$

$\varphi: x \in V \to \varphi(x)$ след. образом: $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $x_i = (x_i, e_i)$, $\varphi(x) = (x_1 \dots x_n)$

Все св-ва выполняются

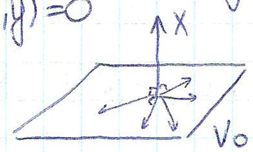
Ортогональное дополнение к подпространству
Ортогональное разложение

Опр|

$V_0 \subset V$ – подпр-во лин пр-ва V, если $\forall x, y \in V_0$ $x + y \in V_0$, $\alpha x \in V_0$ $\forall \alpha$

Опр|

В-р x ортогонален подпр-ву V_0, если он ортогонален $\forall$ в-ру из V_0: $\forall y \in V_0$ $(x, y) = 0$



Обознач: $V_0^\perp = \{x \in V \mid x \perp V_0\}$

Достаточно проверить $\perp$ базисным в-рам.

Лемма|

В-р $x \perp$ k-мерному подпр-ву $V_0 \iff x \perp$ базису V_0

Док-во:

($\Rightarrow$). Пусть $e_1 \dots e_k$ – произв базис V_0. $x \perp V_0 \Rightarrow x \perp e_i$, $1 \le i \le k$ (из опр $\Rightarrow$)

($\Leftarrow$). Пусть $e_1 \dots e_k$ – произв. базис. $x \perp e_i \Rightarrow (x, e_i) = 0$, $i = 1 \dots k$. Произв. в-р $\in V_0$ расклад. по базису:

$y = y_1 e_1 + \dots + y_k e_k \Rightarrow (x, y) = y_1 (x, e_1) + \dots + y_n (x, e_n) = 0 \Rightarrow x \perp y$ ∎

Т| О разлож. пр-ва в сумму.

Пусть V – Евкл. пр-во, V_0 – подпр-во, тогда выполн. след. условия:

1. $V_0^\perp$ – подпр-во V
2. $V = V_0 \oplus V_0^\perp$
3. $(V_0^\perp)^\perp = V_0$

Док-во:

1. Если $x, y \in V_0^\perp$, то $\forall z \in V_0$ $(x, z) = (y, z) = 0 \Rightarrow \forall z \in V_0$ $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) = 0$, т.е $x + y \in V_0^\perp$

$\forall \alpha \ (\alpha x, z) = \alpha(x,z) = 0$, т.е $\alpha x \in V_0^\perp \Rightarrow V_0^\perp$ - подпр-во

2. Пусть $e_1 \dots e_m$ - ортогональный базис V_0. Дополним его до $\overset{\text{ортог.}}{}$ базиса V: $e_1 \dots e_m, e_{m+1} \dots e_n$

$\forall j \geq m+1$. В-р e_j ортогонален $\forall$ в-рам из $V_0 \overset{\text{лемма}}{\Rightarrow} e_j \in V_0^\perp \Rightarrow \dim V_0^\perp \geq n-m$

Заметим, что $V_0 \cap V_0^\perp = \{0\}$. Действ. если в-р $x \in V_0 \cap V_0^\perp$, то $x \in V_0 \Rightarrow$ $x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$, $x \in V_0^\perp \Rightarrow x \perp e_k$, $k = 1 \dots m \Rightarrow (x, e_k) = 0 = \sum (x_1 e_1 + \dots + x_m e_m, e_k) =$ $= x_k (e_k, e_k) = x_k |e_k|^2 = 0 \Rightarrow \forall k = 1 \dots m \quad x_k = 0 \Rightarrow x = 0$.

Поэтому $V_0 + V_0^\perp = V_0 \oplus V_0^\perp = V_0 \oplus V_0^\perp \Rightarrow \dim (V_0 \oplus V_0^\perp) = \dim V_0 + \dim V_0^\perp = n + \dim V_0^\perp$ $\geq m + (n-m) \geq n$. Но $V_0 \oplus V_0^\perp \subset V$, а $\dim V = n \Rightarrow \dim V_0^\perp = n-m$, $V_0 \oplus V_0^\perp = V$

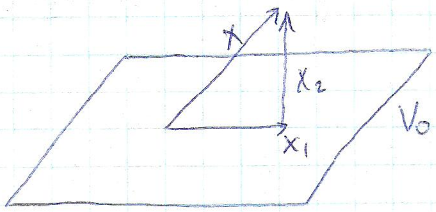
В-ры $e_{m+1}, \dots, e_n$ - л/н и лежат в $V_0^\perp \Rightarrow e_{m+1}, \dots, e_n$ - базис $V_0^\perp$

3. $e_1 \dots e_m$ - ортог. базис V_0. $e_1, \dots, e_m, \underbrace{e_{m+1} \dots e_n}_{\text{базис } V_0^\perp}$ - базис. В-р $x \in (V_0^\perp)^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow x \perp e_{m+1} \dots e_n \Rightarrow x \in V_0$. Т.е $(V_0^\perp)^\perp \subset V_0$

$V = V_0^\perp \oplus (V_0^\perp)^\perp \Rightarrow \dim (V_0^\perp)^\perp = \dim V - \dim V_0^\perp = n - (n-m) = m = \dim V_0$ $\Bigg| \Rightarrow (V_0^\perp)^\perp = V_0$

Таким образом, $\forall x \in V$! образом разлагается в Σ 2-х в-ров: $x = x_1 + x_2$: $x_1 \in V_0$, $x_2 \in V_0^\perp$



x_1 назыв. <u>ортогональной проекцией в-ра x на подпр-во V_0</u>

x_2 назыв. <u>ортогональной проекцией в-ра x на ортог. дополн. $V_0^\perp$</u>

По Т. Пифагора: $\forall y \in V_0$ рассм $|x-y|^2 = |x_1 + x_2 - y|^2 = |\underset{V_0}{x_1 - y}|^2 + |\underset{V_0^\perp}{x_2}|^2 \geq$

06.04.12.

$\geq |x_2|^2$ (=, если $x_1 = y$). Причем, равенство достиг, когда в-р y совп с в-ром $x_1 \Rightarrow x_1$ - ближайший в-р из V_0 к x.

<u>Предлож</u> Расст. от x до V_0 равно длине ортог. проекции x на $V_0^\perp$.

Нахождение ортог. проекции x на V_0

- Пусть $e_1 \dots e_m$ - базис V_0, $x_1 \in V_0 \Rightarrow x_1 = c_1 e_1 + \dots + c_m e_m$. $x_2 \perp V_0 \Rightarrow$ $(x - x_1, e_k) = 0 \quad \forall k = 1 \dots m$, т.е $(x_1, e_k) = (x, e_k)$, $k = 1 \dots m$. Получаем сист. ур-ний: m штук:
$c_1 (e_1, e_k) + c_2 (e_2, e_k) + \dots + c_m (e_m, e_k) = (x, e_k) \quad k = 1 \dots m$. Она имеет реш, если определитель этой системы (опред. матрицы Грама), а $\det G \neq 0$, т.к $e_1 \dots e_m$ - базис $\Rightarrow \exists!$ решение $c_1 \dots c_m$
- Если базис $e_1 \dots e_m$ - ОНБ, то $c_k = (x, e_k)$ - <u>коэф-ты Фурье</u>.
- Тогда проекция выглядит след. образом: $\boxed{x_1 = \sum_{i=1}^{m} (x, e_i) e_i \text{, а } x - x_1 \in V_0^\perp}$

Расстояние м/у вект. и подпр-вом

$d(x, V_0) = \left| x - \sum_{i=1}^{m} (x, e_i) e_i \right|$. Т.к. $x = x_1 + x_2$, то $|x|^2 = (x_1 + x_2, x_1 + x_2) = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq |x_1|^2$

$\Rightarrow |x_1|^2 \underset{\text{Т. Пиф}}{=} \sum_{i=1}^{m} (x, e_i)^2 \le |x|^2 \Rightarrow$

$\boxed{\sum_{i=1}^{m} (x, e_i)^2 \le |x|^2}$ – нер-во Бесселя

Лин. Операторы в Евклидовых пространствах. Сопряженные операторы

Пусть V – Евкл. пр-во ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и $\mathcal{A}: V \to V$ – лин. оператор.

Опр| Отображение $A^*: V \to V$ назыв. сопряжённым к A, если $\forall x, y \in V$ $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$.

① $\mathcal{A}x = x \times a$, $a \in \mathbb{R}^3$. $\forall y \in \mathbb{R}^3$ Рассм $(\mathcal{A}x, y) = (x \times a, y) = (x, a, y) = (a, y, x) = (a \times y, x) = (x, a \times y) = (x, -y \times a) = (x, \mathcal{A}^* y)$, т.е $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

② Рассм. пр-во ф-ций $C_0^{\infty}[0, 1]$ (∞ – гладкие; $C(0) = C(1) = 0$)

$\boxed{(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt}$ – скал. произв в пр-ве ф-ций

Рассм. оператор $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$. Найдем $\mathcal{A}^*$

$(\mathcal{A}f, g) = (f', g) = \int_0^1 f'(t) g(t)\, dt = \underbrace{fg\Big|_0^1}_{0} - \int_0^1 f g'\, dt = (f, -g') \Rightarrow \mathcal{A} = -\mathcal{A}^* \Rightarrow \mathcal{A}^* = -\frac{d}{dt}$

$f(0) = f(1) = 0$
$g(0) = g(1) = 0$.

Лемма| Сопряж. оператор линеен.

Док-во: Пусть $y_1, y_2 \in V$. Рассм. $(Ax, y_1 + y_2) \overset{\text{по опр. сопр}}{=} (x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2))$. С другой стороны, $(Ax, y_1 + y_2) = (Ax, y_1) + (Ax, y_2) = (x, A^* y_1) + (x, A^* y_2) = (x, \mathcal{A}^* y_1 + \mathcal{A}^* y_2)$
$(x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2)) = (x, \mathcal{A}^* y_1 + \mathcal{A}^* y_2)$ $\forall x \in V \Rightarrow \mathcal{A}^*(y_1 + y_2) = \mathcal{A}^*(y_1) + \mathcal{A}^* y_2$ ∎
Аналог, $\mathcal{A}^* \lambda y = \lambda \mathcal{A}^* y$

Т| Для любого лин. оператора $\mathcal{A}: V \to V$ $\exists!$ сопряж оператор $\mathcal{A}^*$

Док-во:

$\exists$ Пусть $e_1 \dots e_n$ – ОНБ V, тогда, $(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{A}x)^T y = x^T \mathcal{A}^T y$, $(x, \mathcal{A}^* y) = x^T \mathcal{A}^* y$ $\Rightarrow$ Определим $\mathcal{A}^*$, как лин. оператор с матрицей A^T ($\mathbb{R}$), а в $\mathbb{C}$ $\boxed{\mathcal{A}^* = \overline{\mathcal{A}^T}}$

$(x, \mathcal{A}^* y) = x^T \overline{\mathcal{A}^* y}$
$(\mathcal{A}x, y) = x^T A^T \overline{y}$ $\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}^* = \overline{\mathcal{A}^T}}$

① Если $(\mathcal{A}x, y) = (x, By) = (x, Cy)$, тогда: $\forall x, y$ $(x, By - Cy) = 0$. Положим $x := By - Cy \Rightarrow By = Cy$ $\forall y \Rightarrow B = C$. ∎

Замеч| В произв. базисе, $\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{A}^* = G^{-1} A^T G & (\mathbb{R}) \\ \mathcal{A}^* = \overline{G^{-1} A^T G} & (\mathbb{C}) \end{array}}$

Действ, $\left.\begin{array}{l} (\mathcal{A}x, y) = (Ax)^T G \overline{y} = x^T \mathcal{A}^T \overline{G y} \\ (x, \mathcal{A}^* y) = x^T G \overline{A^* y} = x^T G \overline{A^* y} \end{array}\right\} \Rightarrow A^* = G^{-1} A^T G$ ∎

Свойства операции сопряжение

1. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
2. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$
3. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
4. $(\lambda\mathcal{A})^* = \bar{\lambda}\mathcal{A}^*$
5. $E^* = E$.

Док-во:

1. $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) \Rightarrow (\mathcal{A}^*y, x) = (y, \mathcal{A}x)$. поменяем x и y местами $x \leftrightarrow y$: $\underset{(x, (\mathcal{A}^*)^*y)}{\underset{\parallel}{(\mathcal{A}^*x, y)}} = (x, \mathcal{A}^*y) \Rightarrow (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

Остальное – упр.

Утв| $\operatorname{rk}\mathcal{A} = \operatorname{rk}\mathcal{A}^*$

Действ. $A^* = (\overline{A^T})$ – в ОНБ, а эти преобр. не меняют ранг матрицы $\Rightarrow$ rk лин. операторов не изменяются. ∎

Ядра и образы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$

T| Для лин. оператора $\mathcal{A}: V \to V$ $\boxed{\begin{matrix}\ker\mathcal{A} = (\operatorname{im}\mathcal{A}^*)^\perp \\ \ker\mathcal{A}^* = (\operatorname{im}\mathcal{A})^\perp\end{matrix}}$ (1) (2) | Im = im

Док-во:

(2)⇐(1). Пусть $x \in \ker\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}x = 0$
Пусть $y \in \operatorname{im}\mathcal{A} \Rightarrow y = \mathcal{A}^*y_1$. Рассм (x, y):

$(x, y) = (x, \mathcal{A}^*y_1) = (\overset{0}{\mathcal{A}x}, y_1) = 0 \Rightarrow x \perp y \Rightarrow \ker\mathcal{A} \perp \operatorname{im}\mathcal{A}^* \Rightarrow \ker\mathcal{A} \subset (\operatorname{im}\mathcal{A}^*)^\perp$, а из сообрaж. размерности $\Rightarrow \ker\mathcal{A} = (\operatorname{im}\mathcal{A}^*)^\perp$:

Посчитаем $\dim\ker\mathcal{A}$: $\dim\ker\mathcal{A} = \dim V - \underbrace{\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}}_{\operatorname{rk}\mathcal{A}} = \dim V - \underbrace{\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}^*}_{\operatorname{rk}\mathcal{A}^*} =$
$= \dim(\operatorname{im}\mathcal{A}^*)^\perp$ (т.к. $V = \operatorname{im}\mathcal{A}^* \oplus (\operatorname{im}\mathcal{A}^*)^\perp$)

Значит, $\ker\mathcal{A} = (\operatorname{im}\mathcal{A}^*)^\perp$ ∎

Следств|

$V = \ker\mathcal{A} \oplus \operatorname{im}\mathcal{A}^* = \ker\mathcal{A}^* \oplus \operatorname{im}\mathcal{A}$.

Рассм сист. лин. ур-ний: $\mathcal{A}X = B$ (неодн)
$\mathcal{A}^*X = 0$ (сопряж, однор)

T| Альтернатива Фредгольма

1) Либо ур-ние $\mathcal{A}X = B$ имеет реш. при любой правой части, либо сопряжённое однородное имеет ненулевое решение.
2) Уравнение $AX = B$ разрешимо ⇔ его правая часть ⊥ всем решениям сопряж ур-ния: $B \perp \ker\mathcal{A}^*$.
Смысл: на основ. решений сопряж однор. сист (решить зачастую проще) можно сделать вывод о разрешимости неодн. сист.

Док-во:

$\Rightarrow$ Пусть[1] ур-ние $\mathcal{A}X=B$ имеет решение $\forall B$, т.е $B\in im\,\mathcal{A}$, т.е $im\,\mathcal{A}=V$.
$\Rightarrow \ker \mathcal{A}^*=0$, т.к $V=\ker\mathcal{A}^*\oplus im\,\mathcal{A}$

$\Leftarrow$ Пусть ур-ние $\mathcal{A}^*X=0$ имеет ненул. решение $X_0 \Rightarrow X_0\in\ker\mathcal{A}^* \Rightarrow X_0\notin im\,\mathcal{A}$, т.к $\ker\mathcal{A}^*\oplus im\,\mathcal{A}=V \Rightarrow$ для $B=X_0$ ур-ние $AX=B$ неразрешимо.

2) Пусть для н-рого B ур-ние $AX=B$ имеет решения, т.е $B\in im\,\mathcal{A}$
$\Rightarrow B\perp\ker\mathcal{A}^*$ ■

② вырожд $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{A}X=B$. т.к $|\mathcal{A}|=0$, то решение $\exists\ \neg\forall B$.

$\mathcal{A}^*=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ По альтерн. Фредгольма: $\mathcal{A}^*X=0$

$\ker\mathcal{A}^*=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \Big/ \underset{x_2=-x_1}{x_1+x_2=0}\right\}$, тогда $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ $B\perp\ker\mathcal{A}^*\Rightarrow b_1x_1-b_2x_1=0\Rightarrow$
$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix}$ — с такой правой частью $\mathcal{A}X=B$ разрешимо.

Унитарные ($\mathbb{C}$) (ортогональные ($\mathbb{R}$)) операторы. Определение и свойства

Опр| Лин. оператор U в компл. (вещ.) Евкл. пр-ве назыв. унитарным (ортогональным), если $UU^*=U^*U=E$

Замеч| $U^{-1}=U^*$. $|\det U|=1$

13.04.12.

Опр| Лин. оператор назыв. изометрическим, если он сохраняет скал. произв. (метрику), т.е $(Ux,Uy)=(x,y)\ \forall x,y\in V$.

Лемма| Критерий унитарности

След. усл. $\Leftrightarrow$:

1) Оператор U изометричен.
2) Оператор U сохраняет длины, т.е $|Ux|=|x|$
3) Оператор U унитарен.
4) Оператор U переводит ОНБ в ОНБ.

Док-во:
$(1\Rightarrow2)$: $|Ux|^2=(Ux,Ux)=(x,x)=|x|^2$.
$(2\Rightarrow1)$:
$\mathbb{R}: (x,y)=\frac{1}{2}\left(|x+y|^2-|x|^2-|y|^2\right)$
$\mathbb{C}: (x,y)=\frac{1}{4}\left(|x+y|^2-|x-y|^2+i|x+iy|^2-i|x-iy|^2\right)$
] проверяется „в лоб" длины сохр $\Rightarrow$ скал. произв. сохр.

$(1\Rightarrow3)$: в ОНБ $(x,y)=x^T\bar{y}$. Рассм $(Ux,Uy)\overset{\text{ОНБ}}{=}(Ux)^T(\overline{Uy})=x^TU^T\bar{U}\bar{y}\overset{1)}{=}x^T\bar{y}\Rightarrow$
$U^T\bar{U}=E\Rightarrow U^{-1}=\bar{U}^T=U^*$

$(3\Rightarrow1)$: Аналогично. $U^TU=U\bar{U}^T=E\Rightarrow(Ux,Uy)=x^TU^T\bar{U}\bar{y}=x^T\bar{y}=(x,y)$

$(1\Rightarrow4)$ Если $e_1\ldots e_n$ — ОНБ, то $(Ue_i,Ue_j)=(e_i,e_j)=\delta_{ij}\Rightarrow Ue_1\ldots Ue_n$ — тоже ОНБ

(4⇒1) Если $e_1 \dots e_n$ – ОНБ, то $Ue_1 \dots Ue_n$ – тоже ОНБ, то $(Ux, Uy) =$

$$= (U(x_1e_1 + \dots + x_ne_n), U(y_1e_1 + \dots + y_ne_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \bar{y}_j \underbrace{(Ue_i, Ue_j)}_{\delta_{ij}} = \sum x_i \bar{y}_j = (x, y) \quad ■$$

Замеч!

Изометрич. преобраз. сохраняет ∠.

Канонический вид изометрий

Лемма 1!

Собственные значения (с.з) унитарного ($\mathbb{C}$) (ортогонального ($\mathbb{R}$)) оператора по модулю $=1$ (логично, ведь он не искажает пр-во) (± 1)

Собственные в-ры (с.в), отвечающие разным с.з ⊥ (ортогональны)

Док-во:

Пусть U – унитарн. ($\mathbb{C}$) (ортогон. ($\mathbb{R}$)) оператор, x – с.в для с.з λ, тогда рассм скал произв $(Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \bar{\lambda} (x, x)$; с другой стороны, $(Ux, Ux) = (U^*Ux, x) = (x, x) \Rightarrow \lambda \bar{\lambda} = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$

Если $Ux = \underset{с.з.}{\lambda}\underset{с.в.}{x}$, $Uy = \underset{с.з.}{\mu}\underset{с.в.}{y}$, $\lambda \neq \mu$, $x \neq 0, y \neq 0$, то $(x, y) \overset{(Ux,Uy)}{=} (\lambda x, \mu y) = \lambda \bar{\mu} (x, y)$. Но $\lambda \bar{\mu} \neq 1$.

$|\lambda| = |\mu| = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\varphi}$, $\mu = e^{i\psi} \Rightarrow e^{i\varphi} \cdot e^{-i\psi} = 1 \Leftrightarrow \varphi = \psi \Rightarrow \mu = \lambda \Rightarrow$ ✗, поэтому $(x, y) = 0$ ■

Лемма 2!

Пусть $V_0 \subset V$ – inv подпр-во унитарного ($\mathbb{C}$) (ортог. ($\mathbb{R}$)) оператора $U: V \to V$, тогда ортогон. дополнение $V_0^{\perp}$ – inv относит U

Док-во:

$V_0^{\perp} = \{ v \in V \mid (x, v) = 0 \ \ \forall x \in V_0 \}$. Рассм. оператор U только на подпр-ве V_0 $U_1 = U|_{V_0}$ (сужение на V_0). Он также изометричен, потому что он сохр длины на $V \Rightarrow$ на V_0 он тем более сохр. длины.

Т.к $\det U_1 - |1| \neq 0$, то произвольный в-р $\in V_0$ можно записать в виде $x = Ux_1$. Имеем: $(x, Uv) = (Ux_1, Uv) = (x_1, v) = 0$, т.е $Uv \in V_0^{\perp}$ вместе с $v \in V_0^{\perp}$. Это и означ, что $V_0^{\perp}$ – inv относит. U ■

Т! О каноническом виде унитарного оператора (его матрицы)

Каждый унитарный оператор диагонализируем. ∃ ОНБ: матрица оператора имеет диагональный вид $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $|\lambda_i| = 1 \Rightarrow$ они лежат на ед. окр-ти $\Rightarrow$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & & \\ & e^{i\varphi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}$$

Матричная формулировка Т!

Любая унитарная матрица унитарно подобна диагональной, в к-рой все диагональные эл-ты по $|\,| = 1$.

$\boxed{U = V^{-1}DV}$, V – унитарная матрица.

Док-во:

$\in$ В компл. пр-ве всегда $\exists$ с.з λ. Пусть λ_1 - с.з. U, e_1 - с.в. $|e_1|=1$ (сразу нормализовали его).

$\in$ Рассм. подпр-во $V_1 = \langle e_1 \rangle^{\perp}$ - имеет размерность $n-1$. Оно inv относит U (по лемме 2). Дальше по индукции (по размерности)

Канонический вид матрицы ортог. оператора. Теорема Эйлера.

В ОНБ $OO^T = O^T O = E \Rightarrow (\det O)^2 = 1$.

Опр1 Ортогон. преобр. назыв. собственным, если $\det O = 1$
несобственным, если $\det O = -1$.

1

а) Рассм. одномерный случай. ($\dim V = 1$)
$\forall x \; Ox = \lambda x$, $\lambda = \pm 1$ (т.к оператор. ортогон.)

б) Рассм. двумерный случай ($\dim V = 2$)

Пусть e_1, e_2 - ОНБ V, тогда $O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - матрица ортогон. преобр в базисе e_1, e_2 $\quad \det O = \pm 1$.

• $ad - bc = 1$. Тогда $O^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. С друг. стороны $O^{-1} = O^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, т.е $O = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$

т.к $\det O = 1$, то $a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \exists \varphi: \begin{cases} a = \cos\varphi \\ c = \sin\varphi \end{cases}$ - Всякое ортог. собственное преобраз. с $\det = 1$ - это поворот на $\angle\varphi$: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

• $ad - bc = -1$. Рассм. характ. уравнение $\det(O - \lambda E) = \lambda^2 - (a+d)\lambda - 1 = 0$. $D > 0 \Rightarrow$ $\exists$ вещ. корни $\lambda_{1,2}$. Т.к O-ортогон, то $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Значит, матрица имеет диаг. вид.
(Пусть x_1, x_2 - с.в, $x_1 \perp x_2$. Действит, пусть $Ox_1 = x_1$, $Ox_2 = -x_2$, тогда $(x_1, x_2) = (Ox_1, Ox_2) = -(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$.)

Положим: $e_1 = \frac{x_1}{|x_1|}$. $e_2 = \frac{x_2}{|x_2|}$ $\leftarrow |e_1| = |e_2| = 1$. Тогда в базисе e_1, e_2 матрица O имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Это зеркальное отражение относит. одной из коорд. осей.

Т| О каноническом виде матрицы ортогонального оператора.

Для любого ортог. оператора в Евкл. пр-ве $\exists$ ОНБ, в к-ром матрица оператора имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ +\sin\varphi_1 & \cos\varphi_2 \end{matrix}} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_k & \sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Док-во:
1) Надо свести всё к одномерному или двумерному случаю (а для них доказано выше).

2) Лемма1 У любого лин. оператора A в $\mathbb{R}$ $\exists$ одномерн. или двумерн. inv подпр-во

Док-во:
Если у A есть вещ. с.з λ_0, то x_0 - с.в, отвечающий λ_0, то $V_0 = \{\alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$ - од-

номерное inv подпр-во.

Если вещ. с.з. нет, то есть с.з $\rho_0 = \alpha + i\beta,\ \beta \neq 0$
$\bar\rho_0 = \alpha - i\beta,\ \beta \neq 0$ — тоже корень характ. многоч.

Пусть с.в $e = x + iy = (x_1 + y_1 i,\ x_2 + iy_2, \dots, x_n + iy_n)$ $\quad x = (x_1 \dots x_n)\quad y = (y_1 \dots y_n)$. Тогда
$A(x+iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$. или: $\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \beta x + \alpha y \end{cases}$ т.е имеем двумерное inv подпр-во, порожденное векторами x и y. Матрица опер. A в базисе x, y имеет вид: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Пусть g — с.в, отвечающий $\bar\rho_0$: $Ag = \bar\rho_0 g$, $g = \bar e$ (проверить)

Тогда, $x = \dfrac{e+g}{2}$ $\quad y = \dfrac{e-g}{2i}$. В-ры x и y — л.н, т.к e и g — л.н. (с.в. отвечают разным ρ) ■

3) Замеч.)
Если A — ортогон. оператор, то в-ры e и g ортогональны (отвеч. разным с.з). Поэтому. $(x+iy,\ x-iy) = |x|^2 - |y|^2 + 2i(x,y) = 0$ $(= (e,g) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ (x,y) = 0. \end{cases}$

4) Пусть $\dim V \geq 3$. Т.к U — лин. оператор в $\mathbb{R}$, то по лемме) у него $\exists$ одномерное или двумерное inv подпр-во. (по лемме!) V_0. $V = \underset{inv}{V_0} \oplus \underset{inv}{V_0^\perp}$ (обозначим за V_1) — разложим V_0 в прямую Σ V_0 и $V_0^\perp$

Выберем в V_0 ОНБ. Имеем: $\dim V_0 = 1$ $\qquad \dim V_0 = 2$

Индуцированный лин. оператор $U_1 = U|_{V_1}$ - ортогонален

$U = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ $\qquad U = \left(\begin{array}{cc|ccc} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & \dots & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$

Применим к пр-ву V_1 те же рассуждение (индукция):
$V_1 = V_2 \oplus V_2^\perp$ и.т.д. ■

За конечное число шагов приходим к разложению V в прям Σ одномерных и двумерных inv подпр-в. Объединяем их ОНБ в ОНБ всего пр-ва.

Опр) Простым вращением (п.в) назыв. матрица: $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cos\varphi & -\sin\varphi & & \\ & & & \sin\varphi & \cos\varphi & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ — поворот в двумерной пл-ти.

Простым отражением (п.о) назыв матрица: $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ меняет напр. всех в-ров прямой на противоп. и не меняет остальные.

Геом. формулировка T) о каноничн. виде матрицы.

Всякое ортогон. преобр. может быть представлено в виде суперпозиции конечного числа п.в и п.о

20.04.12.

Следств.) (Теорема Эйлера)
В трехмерном Евклидовом пр-ве любое ортог. преобр., не меняющее ориентации (т.е $\det = +1$), явл. вращением относит. н-рой оси.

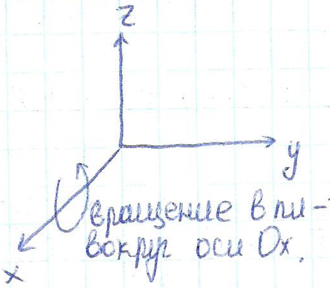
Док-во:

$\mathbb{R}^3$ => степень характ. многочл. = 3 => обязат. есть вещ. корень (т.к. комплексные корни идут парами). Если он один, то он = 1. (Потому что $\det f = +1$). Если вещ. корней > 1, то ∃ варианты: (1, 1, 1) или (1, −1, −1). В любом случае, с.з 1 есть всегда.

Соотв. собств. подпр-во, натянутое на соотв. с.в − есть ось вращения, а в ортогональной к нему пл-ти происходит вращ. на $\angle \varphi$. ■

① Вращение вокруг оси Ox.

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$ − матрица преобр.



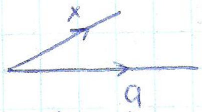
вращение в пл-ти yz вокруг оси Ox.

Самосопряжённые операторы

Можно провести след. аналогию с числами: Если $z = \bar{z}$, то z − вещ.

Опр! Линейный оператор $A: V \to V$ назыв. самосопряжённым, если $A = A^*$.
$\forall x, y \in V \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$

②



Проектирование на ось вдоль в-ра a.

$P_x = Pr_a x = \frac{(x,a)}{(a,a)} a$. Найдем P_x^*:

$$(Px, y) = \Big(\underbrace{\frac{(x,a)}{(a,a)}}_{const} a, y\Big) = \frac{(x,a)}{(a,a)}(a,y) = \frac{(x,a)}{(a,a)}(y,a) = \frac{(x,a)}{(a,a)}(a,y) = \Big(a, \frac{(y,a)}{(a,a)} y\Big) = (x, P_y).$$

т.е. $P^* = P$ => P − самосопряженный оператор.

T!
Оператор самосопряжён <=> в ОНБ его матрица симметрична (эрмитово симметрична): $\begin{cases} A^T = A & \text{− в вещ.} \\ \bar{A}^T = A & \text{− в компл.} \end{cases}$ пр-ве.

Док-во:
в ОНБ $A^* = A^T$ $(A^* = \bar{A}^T)$, $A = A^*$ => $A = A^T$ $(A = \bar{A}^T)$. ■

T! О каноническом виде самосопряжённого оператора.

В подходящем ОНБ матрица самосопряжённого оператора имеет диагональный вид с вещ. числами на главной диагонали.

Док-во:

Лемма 1!
Собственные значения самосопряжённого оператора вещественны. С.в, отвечающие разным с.з. ⊥

Док-во: (в $\mathbb{C}$) оператор в компл. пр-ве:
1) Если $Ax = \lambda x$, то $\left.\begin{matrix} (\mathcal{A}x, x) = \lambda(x,x) \\ (x, \mathcal{A}x) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x,x) \end{matrix}\right|$ => $\lambda = \bar{\lambda}$ => λ − вещ.

(в $\mathbb{R}$) оператор в вещ. пр-ве.
От противного.
Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ - компл. с.з. Раньше мы строили двумерное inv подпр-во ($x + iy$ - с.в).

$$\begin{cases} \mathcal{A}x = \alpha x + \beta y \\ \mathcal{A}y = \beta x + \alpha y \end{cases} \quad \left(\mathcal{A}(x+iy) = (\alpha + i\beta)(x+iy) \right) \Rightarrow \begin{matrix} (\mathcal{A}x, y) = \alpha(x,y) - \beta(y,y) \\ \parallel \ \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \\ (x, \mathcal{A}y) = \beta(x,x) + \alpha(y,y) \end{matrix} \Bigg| \overset{+}{=} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \beta |x|^2 + \beta |y|^2 = 0$, с.в $\neq 0$, у него x и y не могут одновр $= 0$. $\Rightarrow$ X $\Rightarrow$ λ - вещ.

2) Если $\mathcal{A}x = \lambda x$, $\mathcal{A}y = \mu y$, $\lambda \neq \mu$ - вещ. Рассм. скал. произведение $\lambda(x,y)$:

$\lambda(x,y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) = \mu(x,y)$. $\lambda \neq \mu \Rightarrow (x,y) = 0 \Rightarrow x \perp y$ ■

Лемма 2)
Пусть $\mathcal{A}$ - самосопряжённый оператор, V_0 - inv подпр-во, тогда $V_0^\perp$ (ортогон.дополнение) также inv подпр-во

Док-во:

Если $x \in V_0$, $y \in V_0^\perp$ то $\mathcal{A}x \in V_0$ (V_0 - inv подпр-во) и $(\underset{V_0}{\mathcal{A}x}, \underset{V_0^\perp}{y}) = 0$, но $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ $\Rightarrow (x, \mathcal{A}y) = 0$, т.е $\mathcal{A}y \perp \forall x$ (вектор $\mathcal{A}y$ ортогонален любому вектору из V_0), т.е $\mathcal{A}y \in V_0^\perp$. Итак, $y \in V_0^\perp$ и $\mathcal{A}y \in V_0^\perp \Rightarrow V_0^\perp$ - inv относит. $\mathcal{A}$ ■

Теперь докажем теорему:

По лемме 1) у лин. оператора A $\exists$ λ - вещ. (с.з) и e_1 - с.в. Нормируем его: $|e| = 1$
Подпр-во $V_0 = \langle e_1 \rangle$ - подпр-во, натянутое на в-р e_1
$V_1 = \langle e_1 \rangle^\perp$

V_0 и V_1 - inv относит. A. $V = V_0 \oplus V_1 \Rightarrow$ матрица A примет вид:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & & * \end{array} \right)$$

Рассм. $A/_{V_1}$. Найдем с.з λ_2 - вещ, с.в e_2: $|e_2| = 1$.
и т.д.

В итоге мы найдем n попарно-ортог. в-ров $e_1 \dots e_n$, $|e_i| = 1 \Rightarrow$ это ОНБ. Тогда матрица A в базисе $e_1 \dots e_n$ примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ ■

Приведение квадратичной формы к главным осям. Приведение пары форм к диагональному виду.

Опр)
$q(x)$ - вещ. квадр. форма, если она имеет след. вид:

$$\boxed{q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j}$$

$A = A^T$ - симметр. матрица (матрица кв. формы).
$\boxed{q(x) = (\mathcal{A}x, x)}$

В матр. форме: $\boxed{q(x) = x^T A x}$

③ $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_3$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ матр. квадр. формы

$q(x) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Квадр. форма в матр. виде.

Преобразование кв. форм.

Пусть e' - новый базис, C - матрица перехода, т.е $\boxed{e' = eC}$. $[e_1' \dots e_n'] = [e_1 \dots e_n]C$.
Тогда $\boxed{x = Cx'}$ $\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

$q(x) = x^T A x = (Cx')^T A (Cx') = x'^T C^T A C x'$, т.е $A' = C^T A C$.

$\boxed{q(x) = x'^T A' x'}$ - закон преобр. квадр. формы

④. $q(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 8x_1x_2 - 6x_2x_3$. и $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$)

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $A' = C^T A C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $q(y) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$.

Т] О приведении квадратичной формы к главным осям

Любая вещ. квадр. форма ортогональным преобразованием $x = Qy$ может быть приведена к виду $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$. (Отличие от Т] Лагранжа - приведение к каноническому виду не произвольным невырожденным, а ортогональным преобразованием)

λ_i опр. однозначно с точностью до порядка.

Док-во:
квадр. форме однозначно сопоставл. матрица квадр. формы. Она симметрична. По Т] о канонич. виде $\exists$ ОНБ, в к-ром матрица имеет диагональный вид: $D = Q^{-1}AQ = Q^T A Q$.

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ Сделаем замену перем: $x = Qy$, тогда: $q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$.

■

Приведение пары форм к каноническому виду.

⑤. Рассм 2 формы: $q(x) = x_1^2 - x_2^2$, $\tau(x) = x_1 x_2$ | Их нельзя одновр. привести к канонич. виду. (упр)

Т] Пусть $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ - две квадр формы, причём, $Q_1(x)$ положит. определена. (т.е $Q_1(x) > 0$ $\forall x \neq 0$). Тогда $\exists$ базис, в к-ром обе формы приводятся к каноническому виду. $Q_1(y) = y_1^2 + \dots + y_n^2$.
$Q_2(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

Док-во:

Пусть $\mathcal{A}$ – матрица кв. формы Q_1. Определим скал. произвед. $(x,y)_1 = (\mathcal{A}x, y)$. Это возможно, т.к все аксиомы скал. произв. выполняются.

Рассм пр-во V со скал. произв. $(x,y)_1$. Оно станет Евклидовым. Тогда найдется ОНБ (в смысле нового скал произв) $e_1 \dots e_n$, в к-ром $Q_2(x)$ принимает канонический вид

Форма $Q_1(x) = (x,x)_1 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. ■

⑥. К задаче о паре форм.

$L(q,\dot q) = T - U$ – ф-ция Лагранжа, где $\begin{cases} T = \frac{1}{2}(A\dot q, \dot q) \text{ – положит. опр форма} \\ U = \frac{1}{2}(Bq, q) \end{cases}$

кин. потенц. кв. форма

$q \in \mathbb{R}^n$ $\dot q \in \mathbb{R}^n$

Можно привести их к главным осям (каноническ. виду) одновременно.

Замена: $Q = Cq$ $Q = (Q_1 \dots Q_n)$. В новых коорд $\begin{cases} T = \frac{1}{2}\sum_1^n \dot Q_i^2 \\ U = \frac{1}{2}\sum_1^n \lambda_i Q_i^2 \end{cases}$

Сист. ур-ний Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial q}$ распадается на n независим. ур-ний $\ddot Q_i = -\lambda_i Q_i$

27.04.12.

Положительные операторы. Корень из оператора.

Лемма) Линейный оператор в унитарном пр-ве эрмитов $\Leftrightarrow$

$(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in V$

$(x,y) = \overline{(y,x)}$

Док-во.

„$\Rightarrow$" Если $\mathcal{A}$-эрмитов, то $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^* x) = (x, \mathcal{A}x)$, т.е $(\mathcal{A}x, x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)} \Rightarrow$ $(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$

„$\Leftarrow$" Пусть $(\mathcal{A}x,x) \in \mathbb{R}$, тогда $(\mathcal{A}x, x) = \overline{(x, \mathcal{A}x)} = (x, \mathcal{A}x)$. и $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^* x)$ $\Big| \Rightarrow (x, (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)x) = 0$, $\forall x \in V$

Упр) Если в унитарном пр-ве $(Bx, x) = 0$ $\forall x \in V$, то $B = 0$.

$(B(y+z), y+z) = 0$, т.е $(By, y) + (Bz, y) + (By, z) + (Bz, z) = 0 \Rightarrow (Bz, y) + (By, z) = 0$
$(B(iy+z), iy+z) = 0$, т.е $(By, y) + (-i(Bz, y)) + i(By, z) + (Bz, z) = 0 \Rightarrow -i(Bz,y) + i(By,z) = 0$

Посмотрим на эти 2 рав-ва методом пристального взгляда:

$\left.\begin{aligned} (Bz,y) + (By,z) = 0 \\ -i(Bz,y) + i(By,z) = 0 \end{aligned}\right\} (-i)$ „+" $\Big| \Rightarrow (By, z) = 0$ $\forall y,z \in V$, т.е $B = 0$.

У нас в лемме $(x, (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)x) = 0$ $\forall x \in V \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. ■

Эта лемма позволяет говорить о знаке числа $(\mathcal{A}x, x)$ для самосопряж. оператора.

Опр Самосопряж. оператор назыв. положительно (неотрицательно) определенным, если $(Ax,x)>0$ $\forall x\neq 0$ ($(Ax,x)\geq 0$ $\forall x\neq 0$)
Обознач: $A>0$, ($A\geq 0$)

Т Самосопряж. оператор положит. определён (неотриц. определён, $A<0$, $A\leq 0$) $\Leftrightarrow$ $\lambda>0$ ($\lambda\geq 0$, $\lambda<0$, $\lambda\leq 0$) $\forall\lambda$

Док-во:

$\lambda>0$, $A>0$ „$\Rightarrow$" Если $A>0$, то $(Ax,x)>0$ $\forall x\in V$. В частности, это верно и для с. в x. $(Ax,x)=(\lambda x,x)=\lambda|x|^2>0 \Rightarrow \lambda>0$.

„$\Leftarrow$" Восп. Т. о канонич. виде самосопр. оператора:
Если A самосопряж. оператор, то $\exists$ ОНБ из с. в $e_1\ldots e_n$, причем $\lambda_i>0$. Тогда

$$x=\sum_{i=1}^n x_ie_i,\quad (Ax,x)=\left(\sum_{i=1}^n x_i\lambda_ie_i,\ \sum_{i=1}^n x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^n \lambda_i|x|^2>0.\ (\lambda_i>0)\ ■$$

Следств.

Если $A>0$ ($A<0$), то оператор обратим, т.к $\det A=\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n\neq 0$, тогда есть обратный.

Т Корень из оператора

Пусть оператор $A\geq 0$ ($A>0$). $\exists!$ оператор $B\geq 0$ ($B>0$): $B^2=A$. ($B=\sqrt{A}$ положит. квадр. корень из A)

Док-во:

„$\exists$". Построим этот оператор B. Пусть $e_1\ldots e_n$ - ОНБ из с. в A, $Ae_i=\lambda_ie_i$, $\lambda_i\geq 0$ ($\lambda_i>0$), тогда матрица A в базисе e будет диагон:

$A_e=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ Задаем B на базисных в-рах e. Положим $Be_i=\sqrt{\lambda_i}e_i$. Тогда в базисе e матрица B будет диаг:

$B_e=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$ $B\geq 0$ ($B>0$), самосопряж, $B^2e_i=\lambda e_i=Ae_i$, совпал на базисн. в-рах $\Rightarrow$ по лин, совпадет и на остальных в-рах.

„!" Пусть $\exists C$: $C^2=A$, тогда $\exists$ ОНБ $f_1\ldots f_n$ из с. в C. Если $Cf_i=\mu_if_i$ (с. з.), то $Af_i=\mu_i^2f_i \Rightarrow \mu_1^2\ldots\mu_n^2$ - с. з оператора A, с. з опред. однозначно $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mu_i=\sqrt{\lambda_i}$ с точностью до перенумерации.

f_i тогда - с. в оператора $A \Rightarrow$ они совп с $e_i \Rightarrow C=B$ ■

Замеч Извлекать можно корень любой целой степени.

$B=\sqrt[m]{A}$, $B^m=A$.

Сингулярное и полярное разложение

Сингулярная пара базисов и сингулярное разложение

Пусть V и U - два унитарных (вещ.) евклидовых пр-ва, $\dim V=n$, $\dim U=m$

I] $\forall$ лин. оператора $\mathcal{A}: V \to V$ ранга r $\exists$ положит. числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$, ортонормированные базисы $V = (v_1 \ldots v_n)$ пр-ва V и $U = (u_1 \ldots u_m)$ пр-ва U, т. что

$$Av_k = \begin{cases} \sigma_k u_k, & k = 1 \ldots r \\ 0, & k = r+1 \ldots n \end{cases} \qquad A^* u_k = \begin{cases} \sigma_k v_k, & k = 1 \ldots r \\ 0, & k = r+1 \ldots m \end{cases}$$

Матричная формулировка

$\forall$ матрицы $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $(\mathbb{R}^{m\times n})$ ранга r $\exists$ положит. числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$, 2 унитарные (ортогональные) матрицы $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ $(\mathbb{R}^{m\times m})$ и $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(\mathbb{R}^{n\times n})$, т. что $A = U\Sigma V^*$ $(A = U\Sigma V^T)$, где Σ - диаг. $m\times n$ матрица $\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, тогда

$$\boxed{\mathcal{A} = \underset{m\times m}{U} \underset{m\times n}{\begin{pmatrix} D_{rr} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{n\times n}{V^*}}$$

D_{rr} - диагон. $r\times r$ матрица

①. $$A = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 1{,}72 \\ 2{,}28 & 0{,}96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Док-во:

1. Рассм операторы $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$

$*\begin{bmatrix} \mathcal{A}: \underset{x}{V} \to \underset{y}{U} \\ \mathcal{A}^*: U \to V \end{bmatrix}$ $(\underset{\in U}{\mathcal{A}x}, \underset{\in U}{y}) = (\underset{\in V}{x}, \underset{\in V}{\mathcal{A}^* y})$ - разные скал. произв, но как числа, $=$.

а) Заметим, что $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V,V)$: $\mathcal{A}^*\mathcal{A}: V \to V$
$\mathcal{A}\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(U,U)$: $\mathcal{A}\mathcal{A}^*: U \to U$.

б) $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ - самосопряж. т.к $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$
$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^{**}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$

в) $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* \geq 0$, т. к $(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}^{**}x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \geq 0$
$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*x, x) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) \geq 0$.

2. Для оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ $\exists$ ОНБ из с.в $v_1 \ldots v_n$, причём с.з ≥ 0. Пусть $rk\, \mathcal{A}^*\mathcal{A} = t$ и в-ры $v_1 \ldots v_n$ пронумерованы так, что первые t с.з $\sigma_1^2 \ldots \sigma_t^2 \neq 0$, причём $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \ldots \geq \sigma_t^2$; а остальные с.з $= 0$, $\sigma_{t+1}^2, \ldots, \sigma_n^2 = 0$

$$\begin{cases} \mathcal{A}^*\mathcal{A}v_k = \sigma_k^2 v_k & k \leq t \\ \mathcal{A}^*\mathcal{A}v_k = 0, & k > t \end{cases}$$

3. Рассм. сист. в-ров $Av_1 \ldots Av_n$. Заметим, что а) $\mathcal{A}v_k \in U$
б) $(\mathcal{A}v_k, \mathcal{A}v_j) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}v_k, v_j) = \sigma_k^2 (v_k, v_j) = \begin{cases} \sigma_k^2, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$

Т.е $\mathcal{A}v_1 \ldots \mathcal{A}v_t$ - ненулевые, попарно $\perp$ в-ры из U
$\mathcal{A}v_k = 0$, $k > t$

Таким образом, $\mathcal{A}v_1 \ldots \mathcal{A}v_t$ образуют базис в $\operatorname{im}\mathcal{A} \Rightarrow t = r$.

Пусть $\sigma_k = \sqrt{\sigma_k^2}$, тогда $\begin{cases} \sigma_k > 0, & k = 1 \ldots r \\ \|\mathcal{A}v_k\| = \sigma_k \end{cases}$ Обозначим $u_k = \frac{1}{\sigma_k}\mathcal{A}v_k$ (нормировка)

Имеем: $\begin{cases} AV_k = \sigma_k U_k, & k \le r \\ AV_k = 0, & k > r \end{cases}$

В-ры $U_1 \dots U_r$ образуют ОН сист, но их не хватает, дополним до ОНБ U: $U_1 \dots U_r, U_{r+1} \dots U_m$

$$AA^* U_k = AA^*\left(\frac{1}{\sigma_k} AV_k\right) = \frac{1}{\sigma_k} A(\underbrace{A^*AV_k}_{\sigma_k^2 V_k}) = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k} AV_k = \sigma_k^2 U_k$$

4. Таким образом, построены ОНБ $U = (U_1 \dots U_m)$, $V = (V_1 \dots V_n)$. Матрица A в этих базисах имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad A^* = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times m}. \ \blacksquare$$

Опр! Числа $\sigma_1 \dots \sigma_r$ назыв сингулярными значениями оператора A.
В-ры $V_1 \dots V_n$ назыв. правыми сингулярными в-рами.
В-ры $U_1 \dots U_n$ назыв. левыми сингулярными в-рами

Следств. 1! $\boxed{r = rk\,A = rk\,A^* = rk\,A^*A = rk\,AA^*}$

Следств 2! ненулевые с.з операторов A^*A и AA^* совпадают.

Следств 3! $im\,A = \langle V_1 \dots V_r \rangle$ $\quad im\,A^* = \langle U_1 \dots U_r \rangle$
$Ker\,A = \langle V_{r+1} \dots V_n \rangle$ $\quad Ker\,A^* = \langle U_{r+1} \dots U_r \rangle$

Полярное разложение

Аналогия: $z = re^{i\varphi}$

I! Произвольный лин. оператор можно представить в виде: $A = PU$ ($A = U_1P_1$) произведения неотрицат. оператора P и унитарного (ортогонального) оператора U. При этом P опред. однозначно, а если A - обратим, то и U опред. однозначно.

04.05.12.

Док-во: ①:
Докажем на основе сингулярного разложения. Пусть $e = (e_1 \dots e_n)$ и $f = (f_1 \dots f_n)$ - сингулярная пара базисов для A. Положим $U: Ue_k = f_k$, $P: Pf_k = \sigma_k f_k$ | опред. на базисных в-рах $\Rightarrow$ полностью определены.

Тогда U - унитарный (ортогон), т.к переводит ОНБ в ОНБ, $P \ge 0$ (т.к $\sigma_k \ge 0$). При этом, $A = PU$, т.к $Ae_k = \sigma_k f_k$ и $(PU)e_k = P(f_k) = \sigma_k f_k$, они совпадают на базисных в-рах $\Rightarrow$ $A = PU$.

$$A = \tilde{U}\Sigma V^* = \underbrace{(\tilde{U}\Sigma\tilde{U}^*)}_{P}\underbrace{\tilde{U}V}_{U}$$ - получим полярное разложение из сингулярного

①: Пусть $A = PU$ - полярное разлож. Тогда $A^* = U^*P^* = U^*P$. Если мы расси

$AA^* = P\underbrace{UU^*}_{E}P = P^2$, то $P = \sqrt{AA^*}$, который $\exists$ и определён однозначно

Если A обратим, то A^*A тоже обратим, поэтому $\sigma_k \neq 0 \Rightarrow P$-обратим $\Rightarrow U$ опред. однозначно. $U = P^{-1}A$

Тензоры (см. методичку Александрова на сайте кафедры)

Индексные обозначения. Объекты.

① Можно говорить о 3-х независимых перем. x, y, z, а можно обозначить их одной буквой и различать по индексу: x_1, x_2, x_3 или x^1, x^2, x^3. Более компактно можно записать x_r, $r = 1,2,3$ или x^r, $r = 1,2,3$. (← не путать с возведением в степень)

Опр) Объекты первого порядка – объекты, зависящие только от 1 индекса.

x_1, x_2, x_3; x^1, x^2, x^3 } компоненты объекта. Индексы могут быть верхними и нижними.

Опр) Объекты второго порядка – объекты, зависящие от 2-х индексов. Объекты 2 порядка могут быть 2-х типов: x_{rs}, x^{rs}, x^s_r. Каждый объект 2 порядка имеет n^2 ($r=1..n$; $s=1..n$)

Опр) Объект ранга (m,n) – объект, зависящий от m верхних и n нижних индексов.

Опр) Объект нулевого порядка – объект ранга $(0,0)$, без индексов.

Примем 2 соглашения:

1) Повторяющийся индекс обознач. суммирование от 1 до n. Правило суммирования Эйнштейна

② $a_r x^r = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_r x^r$.

2) Свободные индексы принимают знач. от 1 до n.

Операции над объектами:

- Сумма объектов (только одного ранга) $z^r_{st} = x^r_{st} + y^r_{st}$
- Произведение объектов $z^{rmn}_{st} = x^r_{st} \cdot y^{mn}$
- Свертка. $x^{rp}_{pst} = x^{r1}_{1st} + x^{r2}_{2st} + x^{r3}_{3st} + \ldots$
  свертка объекта x^{rp}_{kst} по индексам k и p

Опр) Объект назыв. симметричным относит. 2-х ~~нижних~~ верхних индексов, если он не изменяется при перемене мест этих индексов.

③ x_{rs} – симметр., если $x_{rs} = x_{sr}$

Опр) Объект назыв. абсолютно симметричным, если он не изменяется при перемене мест любых 2-х нижних (верхних) индексов.

④. x_{rst} – абс. симметр., если $x_{rst} = x_{rts} = x_{tsr} = x_{srt} = x_{str} = x_{trs}$

Опр| Объект назыв. антисимметричным, если при перемене мест нижних (верхних) индексов он изменяет знак.

⑤ X-антисиммет, если $X_{st} = -X_{ts}$

Опр| Объект назыв абсолютно антисимметричным, если его компоненты меняют знак при перемене любых 2-х нижних (верхних) индексов.

⑥ X-абс. антисиммет, если $X_{rst} = -X_{rts} = X_{str} = -X_{srt} = X_{trs} = -X_{tsr}$

Символы Кронокера и Леви-Чивиты.

Определим 3 объекта: $\underbrace{\delta_{rs}, \delta^{rs} \text{ и } \delta^r_s}$ $= \begin{cases} 1, \text{ если } r = s \\ 0, \text{ если } r \neq s \end{cases}$

символы Кронокера, явл симметричными объектами

Рассм, еще e_{rst} и e^{rst}. $e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} +1, \text{ если } i,j,k \text{ - чет. перест. чисел } 1,2,3. \\ -1, \text{ если } i,j,k \text{ - нечет. перест. } 1,2,3. \\ 0, \text{ если хотя бы 2 из } i,j,k \;= . \end{cases}$

e^{rst} и e_{rst} - символы Леви-Чивиты, явл абс. антисиммет. объектом.

Определители

$\det X^r_s = \det \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 \end{pmatrix}$ Определитель - это Σ произведений $X^r_1 X^s_2 X^t_3$ эл-тов матрицы по одному из каждой строки и каждого столбца
знак ⊕, если rst - чет. перест.
⊖, если rst - нечет. перест.

$\det X^r_s = \varepsilon_{ijk} X^i_1 X^j_2 X^k_3$ ($\sim$ по строкам $\varepsilon^{ijk} X^1_i X^2_j X^3_k$.) (1)

Т| При перемене мест любых 2-х столбцов, определит. меняет знак.

Док-во: из (1) => (упр). (см. методичку Александрова)

Упр| Рассм. объект $\varepsilon_{ijk} X^i_r X^j_s X^k_t = a_{rst}$ - явл абс антисиммет.

Тензоры в линейном пр-ве.

Законы физики выражаются ур-ниями, к-рые записываются в разных с.к, но сами законы не зависят от с.к (а их записи, получается, привязаны к с.к), => нужно научиться выделять св-ва, к-рые не зависят от с.к. Такого вопроса не возникало раньше, т.к мы использовали ортогональные с.к. Для решения этой проблемы служит аппарат тензорного анализа.

Пусть V - лин. пр-во размерности n, $e_1 \dots e_n$ - базис V.
Геом. объекты: в-ры, лин. преобраз (операторы), билин. формы. Мы фиксируем базис, ставя в соотв. геом. объекту н-рые числа (координаты). Пусть $e_{1'} \dots e_{n'}$ - другая ск, тогда новая с.к связана со старой с.к ч/з матрицу перехода:

$$[e_{1'} \dots e_{n'}] = [e_1 \dots e_n]\, C \quad (1)$$

С - матрица перехода $C = (c^i_j)$ i - строка, j - столбец

Тогда ф-лу (1) можно записать в индексных обознач. следующим образом:

$$\boxed{e_i' = C_i^j e_j} \quad (1')$$

$$\boxed{e_i = B_i^j e_j'}$$, где $B = (b_{ij})$ - обратная матрица.

(7) $BC = CB = E$. В индексной форме: $C_\alpha^i B_j^\alpha = \delta_j^i$, $B_\alpha^i C_j^\alpha = \delta_j^i$

Рассм объект-вектор (контравариантный вектор)

$$X = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = \sum_{i=1}^{n} {}'x^i e_i' \qquad X = x^i e_i = {}'x^j e_j'$$

$X = {}'x^j e_j'$ — x в новом базисе $= {}'x^j C_j^i e_i$ (выразили e_j' по ф-ле 1') $\Big| \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^i = C_j^i\, {}'x^j \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} {}'x_1 \\ \vdots \\ {}'x_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\vec{X_e} = C \vec{X_{e'}} \qquad \boxed{{}'x^j = B_i^j x^i} \quad (2')$$

Опр Любой объект a^i, компоненты к-рого преобразуются по ф-ле (2'), (2) назыв. контравариантным тензором ранга 1. В-р - пример такого тензора. Или контравариантным в-ром

$[e_1' \ldots e_n'] = [e_1 \ldots e_n]$ (1) Ковариантный з-н преобраз. 11.05.12.

$e_i' = C_i^j e_j$. По повт. индексам идет Σ.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \cancel{B}C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \qquad (2) \text{ Контравариантный зн преобраз.}$$

$${}'x^j = B_i^j x^i$$

(1). Линейная форма (линейный функционал)

$f: V \to R$, $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Найдем, как преобр. коорд. лин. формы при смене базиса:

Пусть $f(e_i) = f_i$. $f(x) = f(x^i e_i) \overset{\text{лин}}{=} f_i x^i = f_i C_j^i x^j = {}'f_j\, {}'x^j \Rightarrow {}'f_j = C_j^i f_i$, Это закон преобр. δ (1).

Компоненты лин. функционала преобразуются, как базисные в-ры:

$$\boxed{[{}'f_1 \ldots {}'f_n] = [f_1 \ldots f_n]\, C}$$

Опр Любой объект, компоненты к-рого преобраз. по закону (1) назыв. ковариантным тензором ранга 1 или ковариантный в-ром.

(2). Линейный оператор

$A = (a_j^i)$, $Ae_j = a_j^i e_i$. Компоненты a_j^i опред. путем разлож. базисных в-ров.

$Ae_i' = \underbrace{A(C_i^j e_j)}_{\text{подставили (1)}} \overset{\text{лин.}}{=} C_i^j A(e_j) = C_i^j a_j^m e_m$, исп m, а не i, т. к i и i - разные

$\ominus \underbrace{C_i^j a_j^m}_{a_{ik}'} b_m^k e_k'$, т.е. в матричных обознач: $A' = C^{-1}AC$

③ Билинейная форма

$Q' = C^T Q C$, где Q - матрица билин. формы - з-н преобраз. билин. форм.

$q'_{km} = C_k^i C_m^j q_{ij}$ - з-н преобраз. билин. формы в индексной форме

Опр| В n-мерном лин. пр-ве задан тензор T типа $\binom{p}{q}$, если выполняются след. усл: 1) для каждого базиса $e_1 \dots e_n$ задан упоряд. набор n^{p+q} чисел $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ $(1 \le i_1 \le n,\ 1 \le i_p \le n)$, $(1 \le j_1 \le n,\ 1 \le j_q \le n)$.

2) При переходе от базиса e к базису e' эти числа преобр. по ф-ле:

$$\boxed{{}' T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sum C_{j_1}^{\alpha_1} C_{j_2}^{\alpha_2} \dots C_{j_q}^{\alpha_q} B^{i_1} B_{\beta_1}^{i_2} \dots B_{\beta_p}^{i_p} T_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_p}}$$

Нижние индексы преобр. с помощью матрицы C и назыв. ковариантными
Верхние индексы преобр. с помощью обр. матрицы B и назыв. контравариантн.

А сам закон преобр. назыв. тензорным законом типа $\binom{p}{q}$

Можно переписать с помощью мультииндексов: $T_\beta^\alpha = C_\beta^\gamma B_\delta^\alpha T_\gamma^\delta$, где

$\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_p)$ $\quad C_\beta^\gamma = C_{\beta_1}^{\gamma_1} \dots C_{\beta_q}^{\gamma_q}$
$\beta = (\beta_1 \dots \beta_q)$ $\quad B_\delta^\alpha = B_{\delta_1}^{\alpha_1} \dots B_{\delta_p}^{\alpha_p}$] мультииндексы.

Опр| Число p назыв. контравариантной валентностью, q - ковариантной вал.

Замеч| Если все компоненты тензора $=0$ в н-рой С.К, то они $=0$ и в других С.К.

④. 1. Скаляр. Тензор типа $\binom{0}{0}$. Не имеет индексов. При переходе к новому базису не измен.

2. В-р. Тензор типа $\binom{1}{0}$.

3. Лин. функционал. Тензор типа $\binom{0}{1}$. Ковектор.

4. Лин. оператор. Тензор типа $\binom{1}{1}$

5. Билин. форма. Тензор типа $\binom{0}{2}$

6. Символ Кронокера δ_j^i. Тензор типа $\binom{1}{1}$

Посчитаем комп. символа Кронокера в новой С.К: ${}'\delta_l^k = C_l^j b_i^k \delta_j^i = C_l^i b_i^k = \delta_l^k$ $(B_{ki} C_{il})$

Алгебраические операции над тензорами

Все операции над тензорами опр, так же, как и операции над объектами

1. Лин. операция тензоров:

$T = (T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$ $S = (S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$ тензоры типа $\binom{p}{q}$, $\quad U = \alpha T + \beta S$

$$U^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \alpha T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_k} + \beta S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$$

2. <u>Перестановка индексов.</u>

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(p) \end{pmatrix}$ - перестановка, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q \\ \tau(1) & \dots & \tau(q) \end{pmatrix}$. $S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(p)}}_{j_{\tau(1)}\dots j_{\tau(q)}}$

3. <u>Умножение тензоров</u>

$T = (T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})$, $S = (S^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q})$ $\quad U^{i_1\dots i_p i_{p+1}\dots i_{p+k}}_{j_1\dots j_q j_{q+1}\dots j_{q+m}} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} S^{i_{p+1}\dots i_{p+k}}_{j_{q+1}\dots j_{q+m}}$

U - тензор $\binom{p+k}{q+m}$. Обознач: $U = T \otimes S$

④. $S = S^i_j$, $t = t^k_{\ell m}$ $\quad U = S \otimes t : U^{ik}_{j\ell m} = S^i_j t^k_{\ell m}$

$V = S \otimes t : V^{ki}_{\ell m j} = t^k_{\ell m} S^i_j$

4. <u>Свертка</u>

$$S^{i_1\dots \hat{i}_k \dots i_p}_{j_1\dots \hat{j}_m \dots j_q} = T^{i_1\dots i_{k-1}\,1\,i_k\dots i_p}_{j_1\dots j_{m-1}\,1\,j_m\dots j_q} + T^{i_1\dots i_{k-1}\,2\dots}_{\dots 2\dots} + \dots T^{i_1\dots i_{k-1}\,n\dots i_p}_{j_1\dots j_{m-1}\,n\dots j_q}$$

⑤. $f = f_i$, $x = x^j$, $z = f \otimes x$, $z^j_i = f_i x^j$, $w = z^i_i = f_i x^i$

5. <u>Обратный тензорный признак.</u>

Пусть в каждой с.к задано соотн. $x(r,s,t)\, y^{st} = z^r$, где $x(r,s,t)$ - некоторый набор чисел, занум. индексами; y^{st} - <u>произвольный</u> тензор типа $\binom{2}{0}$, а z^r - тензор типа $\binom{1}{0}$, тогда $x(r,s,t)$ - тензор типа $\binom{1}{2}$, т.е можно записать его в виде x^r_{st}

Док-во:

Запишем наше соотнош. в новой с.к: $'x(r,s,t)\,'y^{st} = {'z^r}$. Восп. тем, что y и z - тензоры: $'z^r = b^r_m z^m$, m - просто индекс суммирования. Тогда $'x(r,s,t)\,'y^{st} = b^r_m z^m = b^r_m x(m,n,p)\, y^{np}$, или $= b^r_m x(m,n,p) c^n_s c^p_t\, 'y^{st}$,

$(\,'x(r,s,t) - b^r_m x(m,n,p) c^n_s c^p_t\,)\,'y^{st} = 0$. y^{st} - произвольный тензор =>

=> $'x(r,s,t) = b^r_m x(m,n,p) c^n_s c^p_t$, - компоненты x пересчит. по этому закону (тензорному)

=> x - тензор. ■

? Почему раньше в мат. анализе мы не различали верхн. и нижн. инд.?

<u>Тензоры в Евклидовом пространстве.</u>
<u>Метрический тензор.</u>

В Евкл. пр-ве ∃ скал. произвед. Пусть $e_1 \dots e_n$ - базис V. Положим $g_{ij} = (e_i, e_j)$. g_{ij} - билин. форма, т.е тензор ранга (типа) $\binom{0}{2}$. При переходе к другому базису, <u>$'g_{km} = c^i_k c^j_m g_{ij}$</u>

<u>Опр</u> Тензор g называв. ковариантным метрическим тензором или <u>метрикой</u>

Если $x = x^i e_i$, $y = y^j e_j$, т.е $(x,y) = g_{ij} x^i y^j$

Св-ва метрического тензора.

- Симметричность. $g_{ij}=g_{ji}$
- Положит. определенность. кв. формы $g_{ij}x^ix^j$

] ковариантный метрический тензор

Утв

det $g_{ij}\neq 0 \Longleftrightarrow$ Билин. форма не вырождена. $\Rightarrow$ Возможен переход к обратн. матрице g^{ij} – контравариантный метрический тензор.

Имеем: $g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j$, $g^{jk}g_{ki}=\delta_i^j$

Утв

g^{ij} – тензор типа $\binom{2}{0}$. Это контравар. метрич. тензор.

Док-во: или (упр) или см. ниже.

Опускание и поднимание индекса.

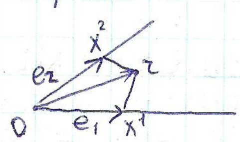
С помощью метрич. тензора можно любому контравар. в-ру x^r сопоставить ковариантн. в-р. x_r по ф-ле:

$$\boxed{x_r = g_{rs}x^s}$$ – опускание индекса

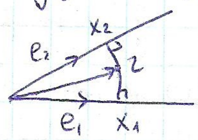
и наоборот, : $$\boxed{x^r = g^{rs}x_s}$$ – поднятие индекса

Это можно сделать и для произв. тензора

⑥. Пи-ть, $n=2$. $g(x,y)=(x,y)$. В-р $x=x^ie_i=x^1e_1+\ldots+x^2e_2$



Опуская индексы, получаем: $x_i=g_{ij}x^j=(e_i,e_j)x^j=(e_i,x e_j)=(e_i,x)$ – скал. проекция x на e_i



ковариантн. компонента x

Верхние индексы – косоугольное проектирование
Нижние индексы – ортогональное проектирование, раньше мы этого не замечали.

* То, что раньше пропустили:

Для произв. в-ра: $T^{i_2\ldots i_p}_{i_1 j_1\ldots j_q} = g_{i_1k}T^{k i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ (опускание i_1)

$T^{j_1 i_1\ldots i_p}_{j_2\ldots j_q} =$ (поднятие j_1)

Утв g^{ij} – тензор $\binom{2}{0}$, т.е $'g^{st}=b^s_i b^t_j g^{ij}$ (*)

Док-во: дост. показать, что матрица $'g^{st}$ из (*) явл. обратной к матрице $'g_{st}=c^i_j c^j_t g_{ij}$

Имеем: $'g^{sm}\,'g_{mt}=(b^s_i b^m_j g^{ij})(c^k_m c^l_t g_{kl}) = g^{ij}g^{kl}b^s_i c^l_t \overbrace{(b^m_j c^k_m)}^{b\cdot C,\ \delta^k_j} = \overbrace{g^{ij}g_{jl}}^{\delta^i_l} b^s_i c^l_t = \delta^i_l b^s_i c^l_t = \underbrace{b^s_i c^i_t}_{b\cdot C} = \delta^s_t$