УДК 517.1
ББК 22.16
Д998

Дятлов Г. В.

Основы математического анализа для студентов-физиков. Лекции. 1. Предел и непрерывность функций одной переменной / Г. В. Дятлов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2014. — 80 с.

ISBN 978–5–86134–147–9

Первый раздел курса лекций, прочитанных автором студентам физического факультета Новосибирского государственного университета в 2014/15 учебном году. Включает в себя знакомство с элементами логики, функциями, пределом последовательности и функции и непрерывностью.

Для студентов специальностей с углубленным изучением математического анализа.

УДК 517.1
ББК 22.16
Д998

Д$\frac{1602070000\text{–}02}{\text{Я}82(03)\text{–}14}$ Без объявл.

ISBN 978–5–86134–147–9

Предисловие

Курс математического анализа для студентов-физиков имеет свои особенности, связанные с той ролью, которую он играет в иерархии изучаемых предметов. Во-первых, для нужд физических курсов требуется изучение соответствующих понятий и результатов и развитая техника обращения с ними. Во-вторых, будущие физики должны ориентироваться в логике рассуждений, понимать грань между доказанным и предполагаемым, знать рамки, в пределах которых то или иное понятие действенно, и т. п. В-третьих, есть жесткие временны́е рамки лекционного курса (4 академических часа в неделю в течение одного года). Основная цель данного курса — учесть указанные особенности и обеспечить студентов целостным изложением основ математического анализа, ориентированным на подготовку физиков-исследователей, формирующим логику рассуждений, обеспечивающим основными средствами большинство физических курсов и укладывающимся в заданные лекционные рамки.

Предлагаемые пособия представляют собой подробную запись лекций, прочитанных автором студентам первого курса физического факультета Новосибирского государственного университета в 2014/15 учебном году. В силу указанных выше особенностей некоторые важные с точки зрения математика утверждения остались за рамками курса, далеко не все утверждения сопровождаются доказательствами. Приведены по крайней мере доказательства утверждений, представляющие интерес с точки зрения формирования логической культуры.

Первое пособие включает материал, подготавливающий студентов к изучению основ дифференциального и интегрального исчислений функций одной вещественной переменной и содержащий базовую информацию о структуре математического текста (о высказываниях, утверждениях), числах и функциях, пределе функции и ее непрерывности.

Материал пособия соответствует первым десяти лекциям.

Г. Дятлов *Новосибирск, Академгородок, октябрь 2014 г.*

§ 1. Общематематические понятия

1.1. Математический язык и логическая символика.

Высказывания. Основным объектом, с которым мы будем работать, — это высказывание. *Высказывание* — это повествовательное выражение, о котором можно судить, истинно оно или ложно. Тот факт, что можно говорить об истинности высказывания, еще не означает, что легко установить, истинно оно или ложно.

Способы построения высказываний. Из одних высказываний можно строить другие. Основные способы построения новых высказываний из имеющихся хорошо известны — мы постоянно пользуемся ими, общаясь между собой — это:
(1) логическое «и»,
(2) логическое «или»,
(3) условное предложение или импликация.
(4) отрицание.

А именно, если P, Q — два высказывания, то определены высказывания

(a) «P и Q», обозначаемое через $P\&Q$ или $P \wedge Q$ и называемое *конъюнкцией высказываний P и Q*;
(b) «P или Q», обозначаемое через $P \vee Q$ и называемое *дизъюнкцией* P и Q;
(c) «из P следует Q», обозначаемое через $P \to Q$ и называемое *импликацией* или *следованием*.
(d) Для высказывания P определено высказывание «не P», обозначаемое через $\neg P$ и называемое *отрицанием* P.

При построении новых высказываний основной вопрос — как истинность полученного высказывания зависит от истинности входящих в него частей. Проще всего изобразить эту зависимость при помощи так называемой таблицы истинности.

Единственное место в таблице истинности, которое иногда вызывает затруднение — это тот факт, что импликация верна, если посылка P ложна, независимо от истинности заключения Q.

Запись высказываний при помощи языка общения. Язык общения гораздо богаче математического языка символов (хотя при этом менее строг) и предоставляет разные способы записи одного и того же факта (высказывания). Особенно это разнообразие проявляется

Таблица истинности

Способ	Запись	Означает	Таблица истинности
Отрицание (логическое «не»)	$\neg P$	Неверно P	$\begin{array}{cc} \neg & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{array}$
Конъюнкция (логическое «и»)	$P\&Q$	Верны оба и P, и Q	$\begin{array}{ccc} \& & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$
Дизъюнкция (логическое «или»)	$P \vee Q$	Верно хотя бы одно: P или Q	$\begin{array}{ccc} \vee & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$
Импликация (следование)	$P \to Q$	Если верно P, то верно и Q	$\begin{array}{ccc} \to & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$
Равносильность	$P \leftrightarrow Q$	P верно одновременно с Q	$\begin{array}{ccc} \leftrightarrow & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$

в случае импликации. Обсудим некоторые способы записи импликации $P \to Q$:
(1) пусть P, тогда верно Q;
(2) если P, то Q;
(3) из P следует Q.
Это понятные и нейтральные формы записи. Мы постараемся пользоваться именно такими формами.

Однако есть и другие способы записи $P \to Q$:
(4) для того чтобы выполнялось P, необходимо выполнение Q;
(5) Q — необходимое условие для выполнения P;
(6) P выполнено только тогда, когда выполнено Q;
(7) P выполнено только в том случае, если выполнено Q;
(8) P выполнено, только если выполнено Q.
Это уже более тонкие формы, несущие в себе некоторую окраску. Например, формы (4) и (5) подчеркивают, что при выполнении P с

неизбежностью (с необходимостью) выполняется и Q, или что P не может выполняться без Q. Такие формы встречаются в формулировках теорем в случае, когда P — интересующий нас факт, а Q — (относительно) легко проверяемое условие. Такая теорема означает, что нечего пытаться доказать P, если Q не верно (ср. *Доказательство от противного* ниже).

Если записать ту же импликацию в другом порядке: $Q \leftarrow P$, то можно описать ее словами так:

(9) Q следует из P.
(10) Для выполнения Q достаточно выполнения P.
(11) P — достаточное условие для выполнения Q.
(12) Q выполнено, когда выполнено P.
(13) Q выполнено в том случае, если выполнено P.

И здесь (9) нейтральная, а (10)–(13) — окрашенные формы. Они применяются в случае, когда Q — интересующий нас факт, а P — легко проверяемое условие, и подчеркивают, что если мы хотим установить Q, нам достаточно доказать, что выполняется P.

Обратное высказывание. Для высказывания вида $P \to Q$ высказывание $P \leftarrow Q$, получающееся из исходного заменой стрелки на противоположную, называют *обратным высказыванием.* Важным моментом, который нужно помнить об обратном высказывании, является то, что его истинность никак не связана с истинностью исходного утверждения, т. е. когда $P \to Q$ истинно, $P \leftarrow Q$ может быть истинным, а может ложным. Все зависит от конкретных P и Q. Также не нужно путать обратное утверждение $P \leftarrow Q$ с отрицанием $\neg(P \to Q)$.

Высказывания с переменными. *Переменная* — это буква или символ, вместо которого можно подставлять различные конкретные объекты (значения) из определенного класса. *Высказыванием с переменными* будем называть повествовательное предложение, в которое входит одна или несколько переменных и которое при подстановке конкретных значений переменных превращается в высказывание с вполне определенной истинностью. Естественно, истинность будет зависеть от конкретных значений переменных. Приведем примеры высказываний с переменными:

(1) x делится нацело на три,
(2) $x < y$,
(3) функция f непрерывна.

Кванторы. Выбор конкретного значения — это один из способов сделать из высказывания с переменной полноценное высказывание. Другой способ — это связать переменную квантором общности или квантором существования. Опишем этот процесс подробнее.

Предположим, что $P(x)$ — высказывание с переменной. Тогда высказывание вида

$$\text{для всех } x \text{ из множества } A \text{ верно } P(x)$$

называют *высказыванием общности* и символически записывают так:

$$\forall x \in A \quad P(x).$$

Обозначение для квантора общности представляет собой перевернутое «A» и идет от английского All.

Высказывание вида

$$\text{найдется } x \text{ из множества } A \text{ такой, что верно } P(x),$$

называют *высказыванием существования* и символически записывают так:

$$\exists x \in A \quad P(x).$$

Символ для квантора существования — это перевернутое «E», происходящее от английского Exists.

Значки $\forall$ и $\exists$ заменяют слова «для всех» и «найдется» и называются *кванторами* (*все*)*общности* и *существования*, иногда после кванторной группы существования ставится черта | или двоеточие, заменяющие слова «такой, что» и т. п. Наравне со словами «для всех» употребляют сочетания «для любого», «для каждого» и т. п., а вместо «найдется» говорят «существует», «можно подобрать» и т. п. Части высказывания $\forall x \in A$ и $\exists x \in A$ называют *кванторными приставками*.

Заметим, что при таком способе построения высказываний множество A, из которого берется x, всегда конкретно определено, однако иногда не указывается, если это множество ясно из контекста. Легко убедиться, что связывание переменной разными кванторами, вообще говоря, приводит к разным результатам. Например, высказывание

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x > 0$$

истинно, а

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 0$$

уже ложно.

Все переменные в высказывании должны быть связаны!

Порядок кванторов. Имея предложение с двумя или более переменными, мы можем превратить его в высказывание, связав каждую переменную своим квантором. Если переменные связаны одинаковыми кванторами, то кванторные приставки могут идти в произвольном порядке, истинность высказывания от этого не зависит. Так, следующие высказывания эквивалентны:

$$\forall x \in A \; \forall y \in B \quad P(x,y),$$
$$\forall y \in B \; \forall x \in A \quad P(x,y).$$

Если же кванторы разные, порядок важен. Так, высказывания

$$\forall x \in A \; \exists y \in B \quad P(x,y)$$

и

$$\exists y \in B \; \forall x \in A \quad P(x,y)$$

различны и никак между собой не связаны. Также нельзя менять кванторы местами. Например, высказывания

$$\forall x \in A \; \exists y \in B \quad P(x,y)$$

и

$$\exists x \in A \; \forall y \in B \quad P(x,y)$$

различны и, как и выше, между собой не связаны.

Запись предложений с кванторами средствами языка. Говоря о разнообразии выражения высказываний с кванторами средствами языка, мы имеем в виду в первую очередь не замену одних слов им равнозначными, например, вместо слов «для всех» можно говорить «для любого» или же вычурное «каково бы ни было», а «найдется» заменять словом «существует». Существенное разнообразие записи высказываний с кванторами связано с положением кванторных приставок и даже употреблением по умолчанию, а также с использованием особых словосочетаний, которые заменяют кванторные приставки и даже их комбинации (последнее подробно обсуждается ниже в пункте *Макросы.*)

Рассмотрим особенности записи высказываний с квантором общности на примере следующих эквивалентных высказываний:
(1) $\forall x \in A \quad f(x) \geqslant 0$;

(2) $f(x) \geqslant 0$, $x \in A$;
(3) $f(x) \geqslant 0$.

Аналогично высказывания с квантором $\exists$ также допускают различную запись:
(4) $\exists (a,b) \subset \mathbb{R}\ \forall x \in (a,b) \quad f(x) \geqslant 0$;
(5) $\exists (a,b) \subset \mathbb{R} \quad f(x)$ на (a,b);
(6) $f(x) \geqslant 0$ на некотором интервале (a,b).

В (2) кванторная приставка уходит в конец, и происходит это по той причине, что мы преимущественно интересуемся высказыванием, понимая или подразумевая, как в нем связана переменная, а в (3) пропадает вовсе — подразумевается, что она легко восстанавливается из контекста. В (5) кванторная приставка $\forall x \in (a,b)$ отправляется в конец, превращаясь в лаконичное «на (a,b)». После этого и первая приставка $\exists (a,b) \subset \mathbb{R}$ убегает в конец, занимая свое место между «на» и (a,b) в виде слова «некотором». Данные примеры показывают основную тенденцию, имеющую место при записи сложных высказываний с кванторами, — кванторные приставки иногда уходят в конец и принимают изящные лаконичные формы. Математики стремятся украсить и разнообразить свою речь. Действительно, записи типа (3) и (6) по сравнению с формальными развернутыми формами (1) и (4) легче читаются, однако чаще остаются непонятыми.

Иногда переход кванторной приставки в конец приводит к неоднозначной трактовке. Например, как понимать предложение

Для всех $x \in A$ верно $P(x,y)$ для некоторого $y \in B$?

Как

$$\forall x \in A\ \exists y \in B \quad P(x,y)$$

или

$$\exists y \in B\ \forall x \in A \quad P(x,y)?$$

Ясно, что ситуации, приводящие к неоднозначности, недопустимы.

Работая с высказываниями, будем придерживаться следующих принципов.

(1) Если важна структура высказывания, например, при выводе одного высказывания с кванторами из другого, будем использовать развернутую форму типа (1), (4) (см. также *Дано–надо*).
(2) Все переменные должны либо иметь конкретные значения, либо быть связаны кванторами. Однако кванторы общности, стоящие

в начале, можно опускать: если переменная явно никак не связана, то подразумевается, что она связана квантором $\forall$, как в случае (3). (Квантор $\exists$ опускается в исключительных ситуациях, например, «в окрестности точки» означает «в некоторой окрестности точки».) Вообще опусканием кванторов следует пользоваться с осторожностью.

Макросы. В программировании макросами называют короткие команды, которые заменяют большие часто повторяющиеся части текста. В математике также встречаются макросы. Под *макросом* будем понимать некоторое компактное словосочетание, которое разворачивается в какое-то детальное высказывание. Приведем несколько примеров.

$$P(n) \text{ выполняется } \textsf{начиная с некоторого номера}$$

означает

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 \quad P(n);$$

$$P(x) \text{ выполняется } \textsf{для достаточно больших } x$$

означает

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \; \forall x \geqslant x_0 \quad P(x);$$

$$f(x) \; \textsf{локально} \text{ ограничена}$$

означает

$$\forall [a,b] \subset \operatorname{dom} f \; \exists C > 0 \; \forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant C;$$

$$f(x) \; \textsf{локально} \text{ обратима}$$

означает

для любого $x \in \operatorname{dom} f$ существует интервал (a,b), содержащий x, такой, что сужение $f(x)$ на (a,b) обратимо.

В некотором смысле многие понятия в анализе, такие как предел и производная, — это макросы.

Отрицание. Отрицание P — это высказывание «неверно, что P». Отрицания занимают особое место в связи с методом доказательства от противного (см. ниже). Посмотрим, как можно переписать отрицание составного высказывания в зависимости от способа его построения.

Неверно, что P и Q, означает, что неверно хотя бы одно из высказываний P, Q, т. е. неверно P или неверно Q:

$$\neg(P \& Q) = \neg P \vee \neg Q.$$

Неверно, что P или Q, означает, что неверно и P и Q:

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \& \neg Q.$$

Неверно, что неверно P, означает, что P верно, так что отрицание отрицания высказывания дает само высказывание.

Случай *импликации* вызывает особые затруднения! Переписать отрицание импликации проще всего глядя на соответствующую таблицу истинности. *Неверно, что $P \to Q$* означает, что P и Q приняли те единственные значения при которых импликация ложна, т. е. P истинно, а Q ложно:

$$\neg(P \to Q) = P \& (\neg Q).$$

Можно прийти к этому результату, сформировав высказывание, равносильное импликации, с использованием дизъюнкции и отрицания. Когда высказывание «если P, то Q» считается истинным? Заметим, что в случае, когда P не выполнено, нам безразлична справедливость Q, но если P верно, то Q должно быть также верным. Это можно сказать так: или P не верно, или Q верно, т. е. получается, что импликация равносильна дизъюнкции $\neg P \vee Q$, так что ее отрицание формируется как отрицание дизъюнкции.

Неверно, что для всех $x \in A$ имеет место $P(x)$, означает, что найдется такое $x \in A$, для которого $P(x)$ неверно:

$$\neg(\forall x \in A \quad P(x)) \equiv \exists x \in A \quad \neg P(x).$$

Неверно, что найдется $x \in A$ такой, что имеет место $P(x)$, означает, что $P(x)$ неверно для всех $x \in A$:

$$\neg(\exists x \in A \quad P(x)) \equiv \forall x \in A \quad \neg P(x).$$

Можно сказать, что $\neg$, перепрыгивая через квантор, меняет его на противоположный.

В качестве примера напишем отрицание некоторого высказывания, часто встречающегося в дальнейшем. Рассмотрим высказывание

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon,$$

в котором знатоки легко усмотрят определение предела функции в точке, и возьмем механически его отрицание. На первом шаге перепрыгиваем через левый квантор, меняя его на противоположный и ставя отрицание позади него, затем, беря отрицание всей оставшейся части, перепрыгиваем через следующий квантор, также меняя его на противоположный и продвигая отрицание дальше. Наконец, так же поступаем с третьим квантором, а в завершение берем отрицание импликации. В итоге получаем следующее:

$$\begin{aligned}\neg(\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon \\ \equiv \exists\varepsilon > 0\,\forall\delta > 0\,\exists x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-a| < \delta \ \text{ и } |f(x) - l| \geqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Можно заметить, что в приведенном примере остались неописанными и несвязанными три объекта, обозначенные буквами a, l и f. Разумеется, их содержание должно быть ясно из контекста, в котором данное высказывание рассматривается. Здесь f — некоторая функция, a и l — некоторые числа. Подробнее об этом речь пойдет немного позже.

Теорема и доказательство. Математика состоит из высказываний, истинность которых декларируется, и такие высказывания называют *аксиомами*, и высказываний, доказываемых на основе аксиом и уже доказанных высказываний с помощью логических рассуждений. Доказываемые высказывания называют *утверждениями*, и в зависимости от дополнительных обстоятельств используют другие слова для обозначения утверждений. Например, утверждение, носящее вспомогательный для данного контекста характер, называют леммой, а утверждение, в данном контексте фундаментальное, важное — теоремой, и т. д.

В простейшем случае можно считать, что теорема — это утверждение вида $A \to B$, которое остается, если из длинной цепочки

$$\underbrace{A}_{\text{Тема}} \to \underbrace{A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n}_{\text{Доказательство}} \to \underbrace{B}_{\text{Рема}}$$

вполне понятных переходов выбросить среднюю часть, которая называется *доказательством*. Утверждение A в формулировке теоремы называется в шутку *темой*, а B — *ремой*. При формулировке теоремы важно понимать, где тема, а где — рема, и никогда не путать их. Напомним, что истинность обратного утверждения, которое получается, если поменять местами тему и рему, никак не связана с истинностью исходного утверждения $A \to B$. Подчеркнем, что изображенная схема построения утверждения и доказательства соответствует простейшим случаям, обычно в доказательстве используются известные факты, лежащие за пределами данного утверждения, так что нередко схема получения из условия требуемого результата сложнее.

Некоторые теоремы имеют названия, подчеркивающие тот или иной характер теоремы. Теорему вида $A \to B$, где A — интересующий нас факт, а выполнение B легко проверяется, называют *теоремой о необходимом условии* (выполнения A) или просто необходимым условием, или *свойством*. Если же теорема имеет вид $A \leftarrow B$, где A — интересующий нас факт, а B легко проверяется, то ее называют *теоремой о достаточном условии* или просто достаточным условием, или *признаком*. Теорему вида $A \leftrightarrow B$ называют *критерием* (см., например, критерий Коши или критерий точной верхней границы). Понятно, что критерий можно иначе назвать *теоремой о необходимом и достаточном условии*.

Доказать теорему — значит восстановить часть цепочки

$$\to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to ,$$

которую опускают и заменяют стрелкой $\to$ при формулировке теоремы. Если наша теорема — критерий, т. е. имеет вид $A \leftrightarrow B$, то восстанавливать нужно две цепочки

$$A \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to B,$$
$$B \to B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_m \to A$$

или сразу строить цепочку

$$A \leftrightarrow A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n \leftrightarrow B.$$

В первом случае доказательство разбивается на две части, именуемые *необходимостью* и *достаточностью*.

Общего правила, по которому строятся переходы $A_i \to A_{i+1}$, нет, в их построении и состоит искусство математика. В следующих двух пунктах мы обсудим моменты, связанные с построением таких переходов, которые неизменно вызывают трудности у начинающих.

Дано-надо. Доказывая переход $A_i \to A_{i+1}$, нужно четко осознавать, в чем состоят утверждения A_i и A_{i+1}, особенно если это утверждения с кванторами. Дело в том, что значения кванторной приставки меняются в зависимости от того, стоит она в A_i или A_{i+1}. Приставка $\forall x \in X$ в A_i означает, что мы можем удобным для нас образом выбрать x и для этого x будет выполняться оставшаяся часть утверждения A_i. Если же $\forall x \in X$ стоит в A_{i+1}, то это означает, что нам будут задавать различные значения x и для каждого из них мы должны обеспечить выполнение части A_{i+1}, стоящей после этой кванторной приставки. Как это сделать, подробно разбирается в доказательствах первых же теорем. Квантор $\exists$ должен вызывать следующие ассоциации. Если $\exists y \in Y$ стоит в A_i, то существование y с нужным свойством гарантировано и мы можем использовать его в наших дальнейших выкладках. Появление же $\exists y \in Y$ в A_{i+1} означает, что нам достаточно предъявить хотя бы один y, для которого выполняется оставшаяся часть A_{i+1}.

В сложных случаях, когда кванторов много, мы постараемся подробно расписывать содержания A_i и A_{i+1} предваряя первое словом **дано**, а второе — словом **надо** (обратите внимание, что эти слова состоят из одних и тех же букв!).

Метод доказательства от противного. Легко проверить, что утверждения

$$A_i \to A_{i+1} \quad \text{и} \quad \neg A_{i+1} \to \neg A_i$$

равносильны, т. е. их таблицы истинности совпадают. При этом доказательство второго утверждения может оказаться проще, чем доказательство первого. В этом случае переход $A_i \to A_{i+1}$ в доказательстве

$$\to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots \to A_n \to$$

можно мысленно взять в скобки и заменить его переходом $\neg A_{i+1} \to \neg A_i$:

$$\to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_i \left\{ \neg A_{i+1} \to \neg A_i \right\} A_{i+1} \to \cdots \to A_n \to .$$

В этом состоит метод доказательства от противного. Иногда такая замена происходит на самом верхнем уровне, т. е. вместо $A \to B$ сразу доказывают $\neg B \to \neg A$, а иногда этим приемом пользуются лишь для части цепочки. В этом случае важно понимать, какая именно часть цепочки доказывается методом от противного, т. е. где стоят скобки { и }. Мы будем выделять эти места, используя следующую конструкцию. Докажем $A_i \to A_{i+1}$ методом от противного. Предположим, что A_{i+1} неверно. Далее идет цепочка рассуждений $\neg A_{i+1} \to \neg A_i$. В итоге, дойдя до $\neg A_i$, будем говорить: противоречие. (Противоречие с тем, что, на самом деле, A_i верно, как следует из предшествующей части цепочки $\to A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_i$.) Используется также краткая конструкция: Если A_{i+1} неверно, то ... имеет место $\neg A_i$, что невозможно. Мы будем использовать разные конструкции, когда способ доказательства от противного встречается внутри самого перехода $\neg A_{i+1} \to \neg A_i$.

Определения. Когда та или иная ситуация, объект или свойство встречаются часто, математики дают им имена или вводят новые понятия. Так возникают предел, производная, интеграл и т. д. С другой стороны, любое понятие в математике (в отличие от некоторых других наук) имеет четко определенное содержание, т. е. может быть более подробно расписано через другие, уже определенные понятия и не допускает произвольного (интуитивного) толкования. Это означает, что, формулируя и доказывая теоремы, мы должны понимать смысл всех слов. Проблема заключается в том, что часто новые понятия называются словами обыденного языка, имеющими общепринятые интуитивно понятные значения. Это вызывает иллюзию понимания математического текста. Встречая такое слово, начинающий иногда не задумывается над тем, что в математике это слово имеет строго определенное значение. Так, например, происходит со словами предел, монотонность, граница, максимум, последовательность. Напротив, слова инфимум, интеграл, резольвента, не встречающиеся в обыденном языке, невольно заставляют задуматься о своем значении. Итак, подчеркнем еще раз, что в математике мы должны знать точное математическое значение всех произносимых слов, а не довольствоваться интуитивным пониманием.

В заключение заметим, что слово если, часто используемое в определениях, в данном контексте имеет смысл двусторонней импликации или равносильности.

1.2. Множества.

Имея намерение определять все понятия, мы на этот раз его нарушим (причем дважды). Первый раз исключение будет сделано для понятия множества, которое будет для нас синонимом слов совокупность, набор, система. Опыт показывает, что в рамках курса математического анализа такой интуитивный подход (именуемый наивной теорией множеств) не подводит. Более того, строгое определение понятия множества на этом этапе не приводит к более полному пониманию предмета.

При работе с множествами всегда подразумевается, что состав любого множества вполне определен, т. е. для любого объекта x и любого множества M либо $x \in M$, либо $x \notin M$, и в случае $x \in M$ говорят, что x *принадлежит* M или что x — *элемент множества* M. Иногда бывает сложно сказать, какой именно из указанных двух случаев реализуется, однако из них один и только один имеет место. Множества считаются равными если они имеют один состав, иначе говоря, $A = B$ означает, что если $x \in A$, то $x \in B$, и если $x \in B$, то $x \in A$.

Множество можно задать просто перечислением его элементов. Другой способ — выделить в уже имеющемся множестве M множество элементов, обладающих некоторым свойством $P(x)$:

$$A = \{x \in M \mid \text{ верно } P(x)\}.$$

Часто множество M понятно из контекста, в этом случае можно просто писать $A = \{x \mid \text{верно } P(x)\}$.

Еще один способ построения множеств — взятие прямого произведения. Имея два элемента a и b (вообще говоря, разных множеств), можно назвать a первым, а b — вторым и образовать новый объект (a, b), называемый *упорядоченной парой.* При этом упорядоченные пары (a, b) и (c, d) равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$, так что, вообще говоря, $(a, b) \neq (b, a)$ (в то время как $\{a, b\} = \{b, a\}$).

Пусть A и B — два множества, их *прямым произведением* называют множество

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Если множества A и B в прямом произведении равны то их прямое произведение $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in A\}$ называют *квадратом* A. Аналогично определяют упорядоченные наборы (n-ки)

$(a_1, \dots, a_n)$, прямые произведения n множеств, а также n-ю степень множества. Например,

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid z \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$$

— трехмерное координатное пространство.

Напомним, что для пары множеств A, B определены их объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и разность $A \setminus B$. Напомним также, что важно не путать знаки принадлежности $\in$ и включения $\subset$. Первый ставится между элементом и множеством, а второй — между двумя множествами.

1.3. Отображения.

В математике значительную роль играют зависимости между величинами или объектами, отражающие зависимости между явлениями или объектами окружающего нас мира. Зависимости, рассматриваемые в математике, могут быть описаны разными способами, более того, одна и та же зависимость может быть описана разными средствами. Величины, находящиеся во взаимозависимости, могут выступать как равноправные, а может быть и так, что одна из величин считается выбираемой произвольно, а другая находится согласно определенному правилу в зависимости от выбора первой.

Среди всех зависимостей выделяют зависимости, обладающие свойством однозначности, и для них вводят отдельный термин — отображение.

Определение отображения. Пусть даны множества X и Y (произвольной природы). *Отображением*, определенным (заданным) на множестве X и действующим в множество Y, называют правило, согласно которому каждому элементу x множества X сопоставляется какой-то один, вполне определенный, элемент y множества Y.

Таким образом, термин «отображение» резервируется за однозначными зависимостями.

Тот факт, что каждому $x \in X$ сопоставляется один элемент из Y, вовсе не означает, что всем элементам из X сопоставляется один и тот же элемент. Это означает, что одному x не может быть сопоставлено более одного y. При этом разным элементам может сопоставляться один и тот же элемент, а могут и разные.

Если множества X, Y числовые, т. е. состоят из вещественных чисел, то в таком случае отображение множества X в множество Y называют *функцией*.

Далее мы будем чаще всего обращаться именно к функциям, т. е. считать X, Y содержащимися в $\mathbb{R}$, поэтому при развитии терминологии будем говорить о функциях, хотя термины, определения которых не используют особенностей числового множества типа арифметических операций, сравнения и т. п., годны и для отображений. Мы будем также называть функциями отображения, действие которых распространяется на несколько числовых величин (так называемые функции нескольких переменных).

Договоримся о терминах и обозначениях. Правило, задающее функцию, часто обозначают буквами $f, g, h, \varphi, \ldots$. Если f — функция, то множество X, на элементы которого распространяется действие правила (функции) f, называют *областью определения функции* f и обозначают через $\mathrm{dom}(f)$. Число, получаемое в результате действия функции f на элемент $x \in X$, называют *значением функции* f *на элементе* x и обозначают символом $f(x)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, где x берутся из области определения $\mathrm{dom}(f)$, называют *множеством значений функции* f и обозначают через $\mathrm{im}(f)$. Тот факт, что y — значение функции f на элементе x, выражают равенством $y = f(x)$. Это же обстоятельство иногда удобно записывать с использованием стрелки с хвостиком, а именно в виде $f : x \mapsto f(x)$, символизирующем тот факт, что элемент x правилом f переводится в $f(x)$.

Функция может быть задана описанием, задающим правило сопоставления, либо формулой, либо перечислением всех ее значений. Можно говорить и о графическом задании функции, если оно позволяет определенно установить правило сопоставления, характеризующее функцию. Вместе с указанием правила сопоставления желательно указывать и два других атрибута, сопровождающие функцию, а именно ее область определения и множество значений. Если область определения при задании функции не указана, то считается, что функция рассматривается на ее естественной области определения, т. е. на множестве всех тех чисел, для которых выполнимы предусмотренные формулой действия. Множество значений обычно не указывается по той причине, что оно однозначно характеризуется заданием самой функции и области ее определения.

В качестве примеров функций можно указать привычные задаваемые формулами функции, такие как $y = x^n$, $y = \dfrac{k}{x}$, $y = a^x$, или задаваемые посредством описания правила сопоставления $y = \sin x$,

$y = \cos x$ и т. п. Поскольку вместе с правилами здесь не указаны области определения, они считаются естественными.

Если мы, например, рассматриваем функцию $f(x) = \sin x$ на множестве $D(f) = [-\pi/2, \pi/2]$, то это значит, что правило $\sin x$ применяется только к элементам x из указанного множества.

Если $A \subset \operatorname{dom} f$, то множество

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \ y = f(x)\}$$

называют *образом множества A под действием f*. Для $B \subset Y$ определен *полный прообраз*

$$f^{-1}(B) = \{x \in \operatorname{dom} f \mid f(x) \in B\}$$

множества B под действием f. *Графиком* $f : X \to Y$ называют подмножество $G(f)$ прямого произведения $X \times Y$, определенное следующим образом:

$$G(f) = \{(x, y) \mid x \in \operatorname{dom} f, \ y = f(x)\}.$$

Композицией двух отображений $f : X \to Y$ и $g : \operatorname{dom} g \to Z$, где $\operatorname{dom} g \subset Y$, называют отображение $g \circ f$, определенное на

$$\operatorname{dom} g \circ f = \{x \in X \mid f(x) \in \operatorname{dom} g\}$$

и действующее по правилу

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Заметим, что $\operatorname{dom} g \circ f$ всегда является подмножеством $\operatorname{dom} f$, при этом иногда может совпадать с ним, а иногда нет. Последнее, например, будет в случае $f(x) = x^2 - x$, $g(y) = \sqrt{y}$.

Отображение $f : X \to Y$ называют *взаимно однозначным* или *обратимым*, если разным $x_1, x_2 \in X$ соответствуют разные образы $f(x_1)$, $f(x_2)$, т. е.

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2).$$

Если f взаимно однозначно, то возникает новое отображение

$$f^{-1} : \operatorname{im} f \to X,$$

действующее следующим образом: элементу $y \in \operatorname{im} f$ сопоставляется такой элемент $x \in \operatorname{dom} f$, что $y = f(x)$, и называемое *обратным к f*.

Заметим, что

$$f(f^{-1}(y)) = y,\ y \in \operatorname{im} f, \quad f^{-1}f(x)) = x,\ x \in \operatorname{dom} f,$$

и для множеств $A \subset \operatorname{dom} f$, $B \subset \operatorname{im} f$

$$f(f^{-1}(B)) = B, \quad f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

§ **2. Вещественные числа**

2.1. О понятии вещественного числа.

Второе исключение из правила все определять строго сделаем для понятия вещественного числа. В школе было знакомство со следующими множествами чисел:

- $\mathbb{N}$ — натуральные числа: $1, 2, \ldots$, т. е. числа, которые возникают при счете;
- $\mathbb{Z}$ — целые числа: 0, ± 1, $\pm 2, \ldots$;
- $\mathbb{Q}$ — рациональные числа, представляющие собой дроби $\dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, а $n \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{R}$ — вещественные (или действительные) числа, строгое построение которых вместе со всеми операциями требует некоторого труда и обычно в школе не делается; тем не менее опыт, полученный в школе, позволяет легко оперировать с вещественными числами, его мы и будем использовать в качестве фундамента.

Основные способы строгого введения множества $\mathbb{R}$ следующие:

Аксиоматический способ. Постулируется, что $\mathbb{R}$ — это множество, на котором введены операции сложения и умножения, обладающие определенными естественными свойствами, называемыми аксиомами поля вещественных чисел: ассоциативность, дистрибутивность, и т. п. Кроме того, предполагается, что задано сравнение чисел, связанное с операциями, и обеспечена полнота $\mathbb{R}$, позволяющая сопоставлять $\mathbb{R}$ с его геометрическим образом — числовой прямой.

Сечения Дедекинда. Каждое вещественное число определяется как два класса рациональных чисел таких, что любое число из первого класса меньше любого числа из второго класса.

Десятичные дроби. Здесь вещественное число — это (бесконечная) десятичная дробь

$$\overline{a_0, a_1 a_2 \ldots},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, а a_1, a_2, $\ldots$ — цифры от 0 до 9 и черта означает, что запись рассматривается как единое выражение. При этом *рациональным* числам соответствуют конечные или бесконечные периодические десятичные дроби. Остальные числа, представляемые бесконечными непериодическими десятичными дробями, называют *иррациональными.*

Будем считать, что в нашем распоряжении есть конструкция вещественных чисел в виде (бесконечных) десятичных дробей. При этом у нас никогда не будет необходимости складывать или умножать какие-либо конкретные десятичные дроби.

2.2. Полнота $\mathbb{R}$.

Геометрическим образом множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ является числовая прямая, т. е. прямая, на которой отмечены точки 0 и 1. После этого каждому вещественному числу сопоставляется точка на числовой прямой. Важно, что эти точки заполняют числовую прямую полностью, без пробелов. Это свойство $\mathbb{R}$ называется *полнотой.*

Полнота $\mathbb{R}$, вообще говоря, неочевидное свойство. Например, $\mathbb{Q}$ представляет огромный запас чисел и при этом неполно. Достаточно нарисовать квадрат со стороной 1 и отложить от точки 0 отрезок, равный диагонали (его длина равна $\sqrt{2}$). Полученная точка, как известно, не соответствует ни одному рациональному числу.

Полнота $\mathbb{R}$ — важное свойство, когда речь заходит о пределе и производной. Многие базовые теоремы математического анализа используют это свойство. Для того чтобы использовать полноту, мы должны дать этому понятию строгое определение. Это будет сделано немного позже. Дело в том, что полнота имеет несколько эквивалентных выражений:

1) теорема Дедекинда,
2) принцип вложенных отрезков,
3) существование точной границы,
4) критерий Коши.

Мы начнем с теоремы Дедекинда. Ее можно вывести из конструкции вещественных чисел как бесконечных десятичных дробей, но мы этого делать не будем. Из нее выведем принцип вложенных отрезков и теорему о существовании точной верхней границы, а из принципа вложенных отрезков получим критерий Коши. На самом деле они все эквивалентны, т. е., имея одно из этих утверждений, можно получить любое другое. С практической точки зрения наиболее полезны принцип вложенных отрезков, существование точной верхней границы и критерий Коши. Из этих утверждений наиболее пригоден для обобщения критерий Коши. То условие, которое будет в критерии Коши, можно записать для произвольного метрического пространства, и мы это сделаем в будущем.

Теорема 1 (Дедекинда о полноте $\mathbb{R}$). *Пусть A и B — два непустых множества в $\mathbb{R}$ таких, что*

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \quad a \leqslant b,$$

т. е. любой элемент A не больше любого элемента B.

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R} \ \forall a \in A \ \forall b \in B \quad a \leqslant c \leqslant b,$$

т. е. найдется хотя бы одно число, разделяющее A и B.

Доказательство этого утверждения ввиду его объемности опустим.

При аксиоматическом подходе это утверждение обычно берется в качестве аксиомы.

Теорема 2 (принцип вложенных отрезков). *Пусть $[a_n, b_n]$ — последовательность непустых отрезков в $\mathbb{R}$ такая, что*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad c \in [a_n, b_n].$$

Иными словами, любая последовательность непустых вложенных отрезков в $\mathbb{R}$ имеет общую точку.

Доказательство. Пусть $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — множество всех левых, а $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — множество всех правых концов. Заметим, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \ldots$. Множества A и B удовлетворяют условиям теоремы 1, т. е. $a_l \leqslant b_n$ для любых $l, n \in \mathbb{N}$. Действительно, если $l < n$, то $a_l \leqslant a_n \leqslant b_n$, а если $l > n$, то $a_l \leqslant b_l \leqslant b_n$. Стало быть, любой элемент из A не меньше любого элемента из B. По теореме 1

$$\exists c \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant c \leqslant b_n.$$

Теорема доказана.

Замечание. Отрезки в теореме 2 нельзя заменить произвольными промежутками, например интервалами (a_n, b_n). Повторив построения, мы получим $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, в то время как нужно более сильное неравенство $a_n < c < b_n$, которое может не выполняться. Например, последовательность интервалов $(0, 1/n)$ не обладает общей для всех них точкой.

2.3. Точные границы.

Определение верхней и нижней границ. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Число $u \in \mathbb{R}$ называют *верхней границей множества* A, если

$$\forall x \in A \quad x \leqslant u.$$

Число $l \in \mathbb{R}$ называют *нижней границей множества* A, если

$$\forall x \in A \quad l \leqslant x.$$

Определение ограниченного множества. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называют *ограниченным сверху*, если

$$\exists u \in \mathbb{R}\ \forall x \in A \quad x \leqslant u,$$

т. е. A имеет хотя бы одну верхнюю границу.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называют *ограниченным снизу*, если

$$\exists l \in \mathbb{R}\ \forall x \in A \quad l \leqslant x,$$

т. е. A имеет хотя бы одну нижнюю границу.

Наконец, множество называют *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Замечания. 1. Верхних (как и нижних) границ может быть много. Например, для множества $[0, 1]$ любое число $u \geqslant 1$ является его верхней границей.

2. Верхней или нижней границы может не быть. Например, $[0, \infty)$ имеет нижнюю границу, а верхней не имеет.

3. Граница может принадлежать самому множеству, а может и не принадлежать. Например, число 1 — верхняя граница для $[0, 1]$, принадлежащая этому промежутку, а для множества $(0, 1)$ найти верхнюю границу в самом множестве $(0, 1)$ не удастся.

Определение наибольшего и наименьшего элементов. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Число $a \in A$ называют *наибольшим элементом множества* A, если

$$\forall x \in A \quad x \leqslant a.$$

Число $a \in A$ называют *наименьшим элементом множества* A, если

$$\forall x \in A \quad a \leqslant x.$$

Далее будем говорить в основном о верхних границах и наибольших элементах, понимая, что все сказанное можно повторить с соответствующими изменениями для нижних границ и наименьших элементов.

Между понятиями верхней границы и наибольшего элемента при всей схожести есть существенное отличие. Дело в том, что наибольший элемент обязан принадлежать самому множеству, а верхняя граница — нет. Поэтому верхних границ может быть много, а наибольший элемент, если вообще существует, всегда один. Кроме того, множество, даже ограниченное сверху, может не иметь наибольшего элемента. Например, таков интервал $(0, 1)$.

Следующее утверждение — еще одно проявление полноты $\mathbb{R}$.

Теорема 3 (о существовании наименьшей верхней границы). *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ непусто и ограничено сверху. Тогда среди всех верхних границ множества A существует наименьшая.*

Доказательство. Пусть B — множество всех верхних границ A, т. е.

$$B = \{u \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A \quad x \leqslant u\}.$$

Легко увидеть, что A и B удовлетворяют условиям теоремы 1. Действительно,

$$\forall x \in A \; \forall u \in B \quad x \leqslant u.$$

Кроме того, множества A и B непусты: A по предположению, а B потому, что A ограничено сверху, т. е. имеет хотя бы одну верхнюю границу. По теореме 1 найдется $c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\forall x \in A \; \forall u \in B \quad x \leqslant c \leqslant u.$$

Левое неравенство означает, что c — верхняя граница, а правое неравенство означает, что c, будучи элементом B, — наименьший элемент B.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается существование наибольшей нижней границы непустого ограниченного снизу числового множества.

Определение точных границ. Наименьшую верхнюю границу множества A, существование которой доказано в теореме 3, называют *точной верхней границей* A, *верхней гранью* A или *супремумом* A и обозначают символом $\sup A$.

Наибольшую нижнюю границу множества A называют *точной нижней границей* A, *нижней гранью* A или *инфимумом* A и обозначают символом $\inf A$.

Для рассмотрения случаев неограниченного и пустого множества нам потребуется понятие расширенной числовой прямой.

Определение. *Расширенной числовой прямой* $\overline{\mathbb{R}}$ называют множество

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

получающееся добавлением к $\mathbb{R}$ двух формальных элементов $-\infty$ и $+\infty$. При этом считается по определению, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Теорема 4 (о точных границах в $\overline{\mathbb{R}}$). *Любое множество* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ *имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы* (*в* $\overline{\mathbb{R}}$).

Доказательство. Докажем существование точной верхней границы. Если множество непусто и ограничено сверху, то нужно сослаться на теорему 3.

Пусть A непусто, но не ограничено сверху, т. е. не имеет ни одной верхней границы в $\mathbb{R}$. Тогда множество его верхних границ состоит из единственного элемента $+\infty$. Этот элемент и будет точной верхней границей.

Пусть теперь $A = \varnothing$. Тогда любой элемент из $\overline{\mathbb{R}}$ является его верхней границей. Наименьший элемент в $\overline{\mathbb{R}}$ — это $-\infty$. Таким образом, как это ни парадоксально, $\sup \varnothing = -\infty$. Кстати, аналогично доказывается, что $\inf \varnothing = +\infty$.

Теорема доказана.

На практике часто используется следующий критерий.

Теорема 5 (критерий точной верхней границы). *Пусть* $A \subset \mathbb{R}$ *непусто и ограничено сверху,* $a \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$a = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} a \text{ — верхняя граница } A, \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \quad a - \varepsilon < x. \end{cases}$$

Для точной нижней границы верно аналогичное утверждение.

Содержание сформулированной теоремы можно перефразировать так. Число a является точной верхней границей в том и только в том случае, если оно верхняя граница и любое смещение его влево нарушает его свойство быть верхней границей.

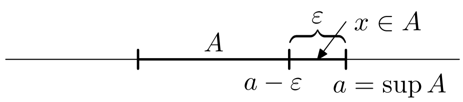

Рис. 2.1.

Доказательство. Необходимость. Пусть $a = \sup A$. Точная верхняя граница по определению является верхней границей, так что первый пункт выполняется автоматически. Докажем второй пункт методом от противного. Предположим, что утверждение второго пункта неверно, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in A \quad a - \varepsilon \geqslant x.$$

Но это означает, что число $a - \varepsilon$ — верхняя граница, причем она заведомо меньше чем a, а это противоречит тому, что a — наименьшая верхняя граница.

Достаточность. Предположим, что для некоторого числа a выполнены оба условия, и докажем, что $a = \sup A$. В силу первого условия a — верхняя граница. Докажем методом от противного, что a — наименьшая из верхних границ. Предположим, что это неверно. Тогда существует верхняя граница a' такая, что $a' < a$. Взяв $\varepsilon = a - a'$, а тогда $a' = a - \varepsilon$, по второму пункту найдем $x \in A$ такое, что $a' < x$. Но это означает, что a' не может быть верхней границей; противоречие.

Теорема доказана.

§ 3. Предел последовательности

3.1. Определение предела.

Определение. *Последовательностью* называют функцию, определенную на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Задать последовательность — значит указать правило, сопоставляющее каждому $n \in \mathbb{N}$ вещественное число $x(n)$. Исторически сложилось так, что для $x(n)$ используют обозначение x_n. Элемент x_n называют *общим* или *n-м членом последовательности.* Мы будем использовать обозначение x_n и для самой последовательности, т. е. функции, и для ее общего члена.

Можно понимать последовательность как множество элементов, занумерованных в определенном порядке. Эта точка зрения объясняет обозначение x_n. Однако мы все-таки будем считать последовательность функцией.

Определение предела последовательности. Говорят, что *последовательность* x_n *сходится* (или *стремится*) *к числу* $a \in \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

При этом также говорят, что a — *предел последовательности* x_n, и пишут $x_n \to a$ или $\lim x_n = a$.

Записывая предыдущее определение, обычно произносят следующие слова, которые любой студент должен знать наизусть: «последовательность x_n стремится к числу a, если для любого (сколь угодно малого) положительного ε найдется номер n_0 (вообще говоря, зависящий от ε), начиная с которого все члены последовательности x_n лежат в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$». Можно характеризующее предел высказывание перефразировать так: «для любого ε, большего нуля, существует такое натуральное n_0, что для каждого натурального n, большего или равного n_0, отклонение x_n от a меньше чем ε».

Поймем, почему сложное высказывание с тремя кванторами действительно отражает наше интуитивное понятие предела.

Для начала заметим, что связка кванторов $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ означает, что вопрос о том, является ли число a пределом последовательности x_n, решается в ходе бесконечной цепочки экспериментов, в которой нам задаются всевозможные $\varepsilon > 0$, а мы подыскиваем подходящие номера n_0 такие, что ... При этом номер n_0, вообще говоря, зависит от ε.

Изобразим графически некоторую последовательность. Ее график выглядит как отдельные точки на координатной плоскости. Будем считать, что она к чему-то сходится, и из рисунка видно, что ее пределом будет некоторое число a.

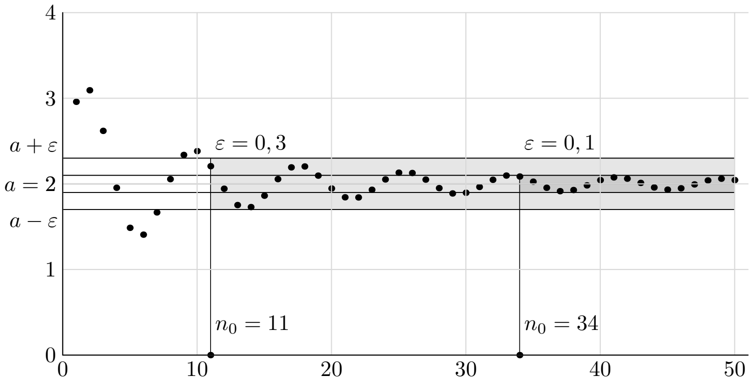

Рис. 3.1.

Проделаем несколько экспериментов (рис. 3.1). Нам дается некоторое $\varepsilon > 0$. Что означает неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$? Оно означает, что x_n удаляется от a не дальше чем на ε. Отступим от a на ε вниз и вверх и нарисуем соответствующий коридор. Наше дальнейшее действие состоит в поиске такого номера, начиная с которого все элементы последовательности укладываются в этот коридор. Для элементов с малыми номерами этого не происходит, но когда-то ситуация меняется и элементы начинают попадать в коридор. Отмечаем этот номер. Эксперимент завершился благополучно. Теперь устраиваем новый эксперимент, берем коридор поменьше, снова ищем номер, начиная с которого все члены последовательности попадают в соответствующий коридор, и находим. Если эта процедура всегда успешна, можно считать, что последовательность x_n сходится к a.

Итак, доказать, что $x_n \to a$, означает найти такой алгоритм, который по любому $\varepsilon > 0$ дает подходящее n_0. При построении такого алгоритма начинать нужно с рассмотрения неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$.

Что произойдет, если кандидат на роль предела неподходящий? Пусть нам дадут ε. Рисуем соответствующий коридор и изучаем, найдется ли такой момент, начиная с которого все члены последовательности попадут в этот коридор. Если ε оказалось довольно большим, то может статься, что такой момент есть. Но мы должны вырабатывать правило поиска номера по произвольно заданному ε, поэтому ограничиваться одним значением не будем, посмотрим для другого, меньшего. Допустим, что и в другой коридор попадут все члены последовательности начиная с некоторого. Можно ли считать, что выбранное число — предел данной последовательности? Конечно, нет. По той причине, что, сужая коридор, т. е. уменьшая ε, мы потеряем способность находить соответствующий номер.

Всегда ли есть предел у последовательности? Нет. Достаточно взять, например, последовательность $x_n = (-1)^n$. Ее члены равны либо 1, либо -1. Мы понимаем, что вообще никаких достойных кандидатов на роль предела нет. Так что *предела может не быть*.

Следующий вопрос таков: если предел вообще есть, то сколько их может быть у данной последовательности? Ответ такой: если и есть, то только один. Этот факт мы докажем после следующей теоремы.

Наконец, как доказывать, что $a = \lim x_n$? Посмотрим, что происходит при доказательство указанного равенства на примере самой простой последовательности $x_n = \dfrac{1}{n}$. Очевидно, что ее пределом будет 0. Запишем высказывание из определения предела для данного случая. Равенство $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Надо сделать «черный ящик», который по заданному $\varepsilon > 0$ выдает требуемый номер n_0, т. е. составить алгоритм поиска номера по заданному ε. Такой алгоритм может появиться после анализа того, что от нас ожидают, т. е. стоящего в конце высказывания неравенства. Надо понять, что может обеспечить это неравенство. Нам будут давать ε, а мы будем возвращать номер. Стало быть, мы должны, анализируя требуемое неравенство, задумываться нам тем, что может его обеспечить, т. е. откуда можно его получить? Надо пытаться выразить номер на основе этого неравенства, т. е. как бы решать неравенство $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Последнее большого труда не составляет: достаточно выразить n через ε: $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тем самым получили информацию о том, когда требуемое неравенство выполнено. Единственное неудобство в том, что число $\dfrac{1}{\varepsilon}$ может не оказаться натуральным, и тогда надо взять какое-либо натуральное число, большее чем $\dfrac{1}{\varepsilon}$, например, $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где квадратные скобки указывают на целую часть числа. Это число уже подойдет в качестве искомого номера n_0. Нетрудно проверить, что так выбранное число удовлетворяет требуемому условию.

Определение бесконечного предела. Говорят, что последовательность *стремится к* $+\infty$, если

$$\forall \mathrm{E} > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall \geqslant n_0 \quad x_n > \mathrm{E},$$

при этом также говорят, что x_n имеет пределом $+\infty$ и пишут $+\infty = \lim x_n$. Аналогично $x_n \to -\infty$ (или $\lim x_n = -\infty$), если

$$\forall \mathrm{E} > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad x_n < -\mathrm{E}.$$

Слово «стремится» применимо к любому пределу, как к конечному, так и бесконечному, а слово «сходится» употребляется только для конечного предела.

3.2. Предел, неравенства и алгебраические операции.

В множестве вещественных чисел есть алгебраические операции — сложение и умножение, есть сравнение чисел, это неравенства. Возможность переходить к пределу предполагает, что необходимо установить связь предела с имеющимися возможностями, т. е. с алгебраическими операциями и сравнением.

Теорема 6 (о пределе последовательности и неравенстве). *Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

(1) *если $a < b$, то*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad x_n < y_n;$$

(2) *если*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad x_n \leqslant y_n,$$

то $a \leqslant b$.

Утверждение (2) в теореме 6 называют *предельным переходом в неравенстве.*

Доказательство проведем только для случая конечных a, b, для бесконечных доказательство проводится аналогично.

Шаг 1 (первое утверждение в случае $a, b \in \mathbb{R}$).

Дано:

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_1 \quad a - \varepsilon_1 < x_n < a + \varepsilon_1 \qquad (*)$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_2 \quad b - \varepsilon_2 < y_n < b + \varepsilon_2. \qquad (\dagger)$$

Кроме того, $a < b$.

Надо:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad x_n < y_n.$$

Квантор общности в части «дано» позволяет распоряжаться значениями ε_1, ε_2 по нашему усмотрению. По этим ε обеспечиваются соответствующие номера n_1, n_2, это условиями гарантируется. Часть «надо» начинается с квантора существования, и это означает, что мы должны каким-то образом найти его так, чтобы было выполнено неравенство $x_n < y_n$. Чем можно это неравенство гарантировать? Ясно, что чем-то связанным с условием. Посмотрим, как должны быть расположены эти последовательности. Начиная с некоторого номера элементы последовательности x_n должны быть ниже членов последовательности y_n. Между числами a и b есть некоторый зазор, и если взять $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{b-a}{2}$, то при таком выборе $b - \varepsilon_2 = a + \varepsilon_1$, т. е. это число отражает расположенную ровно посередине разделительную линию. Мы воспользовались возможностью распоряжаться величинами ε_1, ε_2. Получив по этим ε_1, ε_2 соответствующие номера, замечаем, что начиная с этих номеров члены последовательности x_n лежат ниже разделительной линии, а y_n — выше. Ясно, что в качестве n_0 можно взять максимальный из n_1, n_2, т. е. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Соответствующие части неравенств $(*)$, $(\dagger)$ гарантируют, что

$$\forall n \geqslant n_0 \quad x_n < a + \varepsilon_1 = b - \varepsilon_2 < y_n,$$

а это и есть требуемое.

Шаг 2 (второе утверждение). Докажем методом от противного, используя уже доказанное утверждение (1). Нам дано утверждение P, состоящее в том, что существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $x_n \leqslant y_n$, а требуется доказать утверждение Q, состоящее в том, что $a \leqslant b$. Для доказательства методом от противного надо доказать, что из «не Q» следует «не P». Тем самым пусть дано, что $a > b$, т. е. «не Q», и докажем, что для любого n_0 можно указать такое $n \geqslant n_0$, для которого $x_n > y_n$. Действительно, по утверждению (1) существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $x_n > y_n$, но тогда, так как последнее неравенство верно для всех достаточно далеких номеров, оно будет выполнено и для некоторого сколь угодно далекого номера, т. е. для любого n_0 есть такое $n \geqslant n_0$, что $x_n > y_n$, а это и есть отрицание условия P.

Теорема доказана.

Следствие (о единственности предела). Если $x_n \to a$ и $x_n \to b$, то $a = b$.

Действительно, рассуждая от противного, предположим, что, например, $a < b$. Тогда по теореме 6(1) начиная с некоторого номера должно выполняться неравенство $x_n < x_n$, что неверно.

Теорема 7 (о зажатой последовательности). *Пусть x_n, y_n, z_n — последовательности такие, что*

(1) *$x_n \to a$ и $y_n \to a$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$,*

(2) *$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ для всех достаточно больших n.*

Тогда $z_n \to a$.

Доказательство. Докажем теорему в случае конечного предела a. Случай бесконечного предела рассматривается аналогично.

Дано. Предполагается, что справедливы следующие утверждения:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_1 \quad a - \varepsilon_1 < x_n < a + \varepsilon_1, \tag{$*$}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \; \exists n_2 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_2 \quad a - \varepsilon_2 < y_n < a + \varepsilon_2, \tag{$\dagger$}$$

$$\exists n_3 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_3 \quad x_n \leqslant z_n \leqslant y_n, \tag{$\ddagger$}$$

соответственно означающие, что $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ и зажатость последовательности z_n между последовательностями x_n и y_n начиная с некоторого номера.

Надо. Придумать алгоритм, обеспечивающий справедливость утверждения

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$$

т. е. сформировать правило выбора по заданному $\varepsilon > 0$ такого номера n_0, начиная с которого выполнено неравенство $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$. Если квантор общности находится в части «надо», это значит, что нам его будут задавать, и мы им распоряжаться не вправе. Расположение в части «надо» квантора существования означает, что мы его должны находить или как-то обеспечивать его существование, это наша задача построить соответствующий переход от ε к n_0.

Оцениваем содержание части «дано». «Для любого» в этой части означает, что мы можем этим пользоваться, придавать тому, что связано с «для любого», интересующие нас значения. Получать будем гарантию наличия соответствующих номеров.

Предполагая заданным извне значение ε, мы должны будем с ним пойти в часть «дано» и как-то выбрать ε_1, ε_2. Для того чтобы понять, как этой свободой распорядиться, надо смотреть в конец, на требуемое неравенство. В конечном итоге требуется обеспечить двойное неравенство

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon. \qquad (**)$$

Откуда можно получить здесь левое неравенство? Неравенства в выражениях $(*)$, $(\dagger)$, $(\ddagger)$ нам даны, они при определенных условиях есть. Ясно, что z_n участвует в неравенствах $(\ddagger)$, а имеющееся в левом из неравенстве $(\ddagger)$ x_n присутствует в левом из неравенств $(*)$, которое очень похоже на левую часть в $(**)$. Более того, они одинаковы, если $\varepsilon_1 = \varepsilon$. Значит, для обеспечения левого неравенства в $(**)$ возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon$. С правым неравенством дело обстоит аналогично, только надо принять во внимание правые неравенства в $(\ddagger)$ и $(\dagger)$. В результате получаем номера n_1, n_2. Как выдать искомый номер? Ясно, что надо взять максимальный из полученных номеров, т. е. положить $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$,

Теорема 8 (об ограниченности сходящейся последовательности). *Если последовательность сходится, т. е. имеет конечный предел, то она ограничена.*

Доказательство. Дано:

$$\exists a \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Надо:

$$\exists l, u \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad l \leqslant x_n \leqslant u.$$

Поскольку связка $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ опять встречается в том, что дано, мы можем выбирать ε любым нужным нам образом. Сделаем это очень просто: положим $\varepsilon = 1$. Это наш выбор, могли взять и какое-то другое число. Тогда все члены начиная с n_0 будут лежать в интервале $(a-1, a+1)$, т. е. начиная с n_0 выполнены неравенства $a - 1 < x_n < a+1$. Можно ли объявить элементы $a-1$ и $a+1$ соответственно нижней и верхней границами последовательности x_n? Вряд ли, ибо кроме них останутся члены $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$. Поскольку их конечное число, можно выбрать среди них максимальный и минимальный. В итоге искомые числа l, u выбираются так:

$$u = \max\{a+1, x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}, \quad l = \min\{a-1, x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}.$$

Теорема доказана.

Определение. Последовательность, сходящуюся к нулю, называют *бесконечно малой*.

Теорема 9 (о бесконечно малых). *Пусть x_n и y_n — две последовательности.*

(1) *Если x_n и y_n бесконечно малые, то $x_n \pm y_n$ тоже бесконечно малая.*

(2) *Если x_n бесконечно малая, а y_n ограниченная, то $x_n y_n$ бесконечно малая.*

Доказательство. Шаг 1 (сумма).
Дано:

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_1 \quad |x_n| < \varepsilon_1, \tag{$*$}$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_2 \quad |y_n| < \varepsilon_2. \tag{$\dagger$}$$

Надо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad |x_n \pm y_n| < \varepsilon.$$

Для доказательства нужно осуществить следующую цепочку действий:

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2 \xrightarrow{(*), (\dagger)} n_1, n_2 \longrightarrow n_0.$$

Глядя на неравенства в $(*)$ и $(\dagger)$ и вспоминая неравенство треугольника

$$|x_n \pm y_n| \leqslant |x_n| + |y_n|,$$

понимаем, что ε_1 и ε_2 в сумме должны давать ε. Поскольку можем выбирать ε_1 и ε_2 сами, сделаем это самым простым и естественным образом: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Получив по ним n_1, n_2, положим, как и раньше, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Начиная с номера n_0 выполнены оба неравенства $(*)$, $(\dagger)$, а это гарантирует то, что n_0 требуемое.

Шаг 2 (произведение).

Дано:

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_1 \quad |x_n| < \varepsilon_1, \tag{$*$}$$
$$\exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n| < C. \tag{$\dagger$}$$

Надо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad |x_n y_n| < \varepsilon,$$

Для доказательства нужно осуществить следующую цепочку действий:

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1 \xrightarrow{(*)} n_1 \longrightarrow n_0.$$

Глядя на неравенства в $(*)$ и $(\dagger)$ и записывая тривиальную оценку

$$|x_n y_n| \leqslant |x_n| C,$$

понимаем, что ε_1 нужно выбрать так: $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{C}$. Получив n_1 и положив $n_0 = n_1$, имеем

$$\forall n \geqslant n_0 \quad |x_n y_n| \leqslant |x_n| C < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon,$$

что и требовалось.

Теорема доказана.

Теорема 10 (о пределе последовательности и алгебраических операциях). *Если $x_n \to a$ и $y_n \to b$, причем пределы a и b конечны, то*

(1) $x_n \pm y_n \to a \pm b$;

(2) $x_n y_n \to ab$;

(3) $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ (*при дополнительном условии, что все y_n и b не равны нулю*).

Доказательство. Воспользуемся следующим фактом, который непосредственно вытекает из определения предела:

$$x_n \to a \iff x_n - a \to 0, \quad \text{т. е. } x_n - a \text{ — бесконечно малая.}$$

Шаг 1 (сумма). По условию и сформулированному замечанию имеем

$$x_n - a \to 0, \quad y_n - b \to 0,$$

и из теоремы 9 вытекает, что

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = (x_n - a) \pm (y_n - b) \to 0,$$

стало быть, утверждение о сумме доказано.

Шаг 2 (произведение). Заметим, что по теореме 8 последовательность x_n, будучи сходящейся, ограничена. Привлекая снова предыдущую теорему и прибавляя к разности $x_n y_n - ab$ нуль в виде вычитания некоторого выражения и его же добавления (нередко используемый прием), запишем

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = \underbrace{x_n}_{\text{огр.}} \underbrace{(y_n - b)}_{\to 0} + \underbrace{(x_n - a)}_{\to 0} \underbrace{b}_{\text{огр.}} \to 0.$$

Шаг 3 (отношение). В случае отношения результат получается по аналогии с предыдущим шагом из цепочки

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - a y_n}{y_n b} = \frac{x_n b - x_n y_n + x_n y_n - a y_n}{y_n b}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{y_n b}}_{\text{огр.}} \underbrace{\Bigl(\underbrace{x_n}_{\to 0} \underbrace{(b - y_n)}_{\text{огр.}} + \underbrace{(x_n - a)}_{\to 0} \underbrace{y_n}_{\text{огр.}}\Bigr)}_{\to 0} \to 0.$$

Осталось только понять, почему последовательность $\dfrac{1}{y_n b}$ ограничена. Имеем $y_n \to b \neq 0$ или, подробнее,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

Выбрав $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$, получим $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \frac{b}{2} < y_n, \quad \text{если } b > 0,$$
$$\forall n \geqslant n_0 \quad y_n < \frac{b}{2}, \quad \text{если } b < 0,$$

т. е. в любом случае

$$\forall n \geqslant n_0 \quad 0 < \frac{1}{y_n b} < \frac{2}{b^2}.$$

Таким образом, все члены начиная с номера n_0 ограничены числом $2/b^2$. Среди оставшихся $n_0 - 1$ первых членов можно найти максимум. В итоге

$$\left|\frac{1}{y_n b}\right| \leqslant \max\left\{\frac{2}{b^2}, \frac{1}{|y_1 b|}, \dots, \frac{1}{|y_{n_0-1} b|}\right\},$$

стало быть, последовательность $\dfrac{1}{y_n b}$ ограничена.

Теорема доказана.

3.3. Подпоследовательности и частичные пределы.

Определение. Пусть x_n — последовательность, а n_k — строго возрастающая последовательность номеров, т. е.

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots.$$

Последовательность $x_{n_k} = x(n(k))$ как функцию от k называют *подпоследовательностью* последовательности x_n.

Если подпоследовательность x_{n_k} стремится к какому-либо пределу (конечному или бесконечному), то его называют *частичным пределом* последовательности x_n.

Формирование подпоследовательности можно представлять себе так: подпоследовательность получается вычеркиванием некоторых членов последовательности x_n (с последующим «сжатием»). Важно, что порядок следования членов при этом не меняется.

Интересно ответить на такой вопрос. Представим себе, что встали на место какого-то члена последовательности и начинаем вычеркивать какие-то из следующих за ним членов. Спрашивается, можно ли вычеркнуть все следующие за данным члены или нет? Ответ: нет! Дело в том, что последовательность характеризуются не только тем, какое значение она принимает на номере n, но и тем, на каком номере это значение принимается. В подпоследовательности должно остаться множество элементов с бесконечным набором номеров, чтобы их можно было перенумеровать в возрастающем порядке с использованием всех натуральных чисел.

Вместе с тем можно вычеркнуть какое-то конечное или бесконечное множество членов — важно чтобы осталось бесконечно много членов последовательности. Например, если из последовательности x_n удалить все члены с четными номерами и оставить только с нечетными, то получится подпоследовательность x_{2k-1}, если оставить все члены с номерами, кратными 3, то получится подпоследовательность x_{3k} и т. п.

Вспоминая, что последовательность — это функция $n \mapsto x(n)$, определенная на $\mathbb{N}$, можно сказать, что подпоследовательность — это композиция $k \mapsto x(n(k))$ исходной последовательности $x(n)$ и строго возрастающей функции $k \mapsto n(k)$ из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Достаточно ясно, что в последовательности, не имеющей предела, у какой-то подпоследовательности предел может быть. Интересно, насколько общим фактом является наличие имеющей предел подпоследовательности у данной последовательности? Утвердительный ответ на этот вопрос будет дан ниже, хотя это может показаться не совсем очевидным. Например, неочевидно, что из последовательности $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$, можно выделить сходящуюся, хотя это на самом деле так.

Сначала ответим на другой вопрос: если последовательность сама имеет предел, что можно сказать о ее подпоследовательностях с точки зрения их предельных свойств? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 11 (о пределе подпоследовательности). *Если последовательность x_n имеет предел, то любая ее подпоследовательность x_{n_k} стремится к тому же самому пределу.*

Доказательство. Шаг 1 ($n_k \geqslant k$). Сначала, пользуясь принципом математической индукции, докажем, что $n_k \geqslant k$. Действительно, при $k = 1$ очевидно $n_1 \geqslant 1$. Если уже доказано, что $n_k \geqslant k$, то $n_{k+1} > n_k \geqslant k$, а значит, $n_{k+1} \geqslant k + 1$.

Шаг 2 (случай конечного предела). Дано:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon_1. \tag{$*$}$$

Надо:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \geqslant k_0 \quad |x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Выбор k_0 по ε осуществляется следующим тривиальным образом:

$$\varepsilon \longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon \xrightarrow{(*)} n_0 \longrightarrow k_0 = n_0.$$

Так выбранное k_0 удовлетворяет требуемому условию. Действительно, если $k \geqslant k_0$, то $n_k \geqslant k \geqslant k_0 = n_0$, стало быть, $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ ввиду $(*)$.

Случай бесконечного предела рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 12 (Больцано — Вейерштрасса). *Если последовательность ограничена, то в ней есть сходящаяся подпоследовательность.*

Обратим внимание на то, что в теореме 12 речь идет о сходящейся подпоследовательности, т. е. имеющей конечный предел.

Доказательство. Выведем нашу теорему из принципа вложенных отрезков. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Построим последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, а заодно и саму сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} следующим образом. Поскольку x_n ограничена, по определению существует отрезок $[a_1, b_1]$ такой, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_1 \leqslant x_n \leqslant b_1.$$

В качестве x_{n_1} возьмем x_1, т. е. $n_1 = 1$.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. Из полученных двух отрезков хотя бы один содержит бесконечное число членов последовательности x_n (напомним, что члены последовательности определяются не только величиной, но и номерами). Возьмем в качестве $[a_2, b_2]$ любой из таких отрезков, а в качестве x_{n_2} любой член последовательности, лежащий в $[a_2, b_2]$, с номером $n_2 > n_1$. Последнее обстоятельство нужно для строгого возрастания номеров у подпоследовательности.

Продолжая процесс деления пополам, получим последовательность отрезков $[a_k, b_k]$ и подпоследовательность x_{n_k} такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \quad \text{и} \quad a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k.$$

Используя определение предела, нетрудно доказать, что

$$\lim \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} = 0.$$

Применяя принцип вложенных отрезков (теорема 2), получаем точку $c \in \mathbb{R}$, общую для всех $[a_k, b_k]$, т. е. такое число c, что $c \in [a_k, b_k]$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Докажем, что $a_k \to c$ и $b_k \to c$. В самом деле, вычитая a_k из неравенства $a_k \leqslant c \leqslant b_k$, имеем

$$0 \leqslant c - a_k \leqslant b_k - a_k.$$

По теореме о пределе зажатой последовательности получаем, что $c - a_k \to 0$, т. е. $a_k \to c$. Точно так же доказывается, что $b_k \to c$. Наконец, поскольку $a_k \leqslant c \leqslant b_k$, по теореме о пределе зажатой последовательности $x_{n_k} \to c$.

Теорема доказана.

Теорема 12 позволяет утверждать, что множество частичных пределов любой последовательности непусто, т. е. из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел (конечный или бесконечный). Действительно, если она ограничена, то в ней есть сходящаяся подпоследовательность, а если не ограничена, то нетрудно доказать, что из нее можно выбрать подпоследовательность, имеющую бесконечный предел.

3.4. Теоремы существования.

Теорема существования — это утверждение, которое устанавливает существование некоторого объекта. Можно сказать, что теорема

Дедекинда, принцип вложенных отрезков, теорема о точной верхней границе — это все теоремы существования. Нас будут интересовать ситуации, в которых гарантировано существование предела последовательности. Оказывается, наиболее важные из таких ситуаций две: если последовательность монотонна или фундаментальна. Интуитивно нетрудно представить себе, что если последовательность монотонна, т. е. как бы идет все время в одну сторону, то к чему-то она должна прийти. Второе свойство, фундаментальности, состоит в том, что если члены последовательности в перспективе сколь угодно мало различаются между собой, то они концентрируются около какого-то числа, которое и будет ее пределом. Иначе говоря, если есть как бы «внутренняя сходимость» последовательности, то находится и кандидат на роль ее предела.

Определение (монотонной последовательности). Последовательность x_n называют

неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \geqslant x_n$,

невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \leqslant x_n$,

возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} > x_n$,

убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} < x_n$.

Невозрастающие и неубывающие последовательности называют *монотонными*, а возрастающие и убывающие — *строго монотонными*.

Теорема 13 (Вейерштрасса о монотонной последовательности). *Любая монотонная последовательность имеет предел. При этом если она ограничена, то предел конечен.*

Доказательство. Шаг 1 (кандидат на роль предела). Рассмотрим последовательность x_n и предположим для определенности, что она неубывающая. В качестве кандидата на роль предела стоит взять элемент $a = \sup\{x_n \; n \in \mathbb{N}\}$, который есть по теореме 4 о существовании точной верхней границы в $\overline{\mathbb{R}}$.

Шаг 2 ($x_n \to a$ в случае ограниченной последовательности). В этом случае по теореме о наименьшей верхней границе $a < +\infty$. Докажем, что $a = \lim x_n$.

Дано. Запишем формально то, что последовательность ограничена (сверху), условие теоремы 5 (критерия точной верхней границы) и свойство монотонности:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant a \quad (a \text{ — верхняя граница}), \tag{$*$}$$
$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad a - \varepsilon_1 < x_{n_1} \quad (\text{теорема 5}), \tag{$\dagger$}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \geqslant x_n \quad (\text{монотонность}). \tag{$\ddagger$}$$

Надо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Выбор n_0 по ε происходит следующим тривиальным образом:

$$\varepsilon \to \varepsilon_1 = \varepsilon \xrightarrow{(\dagger)} n_1 \to n_0 = n_1.$$

При этом в силу монотонности

$$\forall n \geqslant n_0 \quad a - \varepsilon \overset{(\dagger)}{<} x_{n_0} \overset{(\ddagger)}{\leqslant} x_n \overset{(*)}{\leqslant} a < a + \varepsilon.$$

Шаг 3 ($x_n \to a$ в случае неограниченной последовательности). В этом случае $a = +\infty$.

Дано:

$$\forall \mathrm{E}_1 > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad x_{n_1} > \mathrm{E}_1 \quad (\text{неограниченность сверху}) \tag{$*$}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \geqslant x_n \quad (\text{монотонность}) \tag{$\dagger$}$$

Надо:

$$\forall \mathrm{E} > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad x_n > E.$$

Выбор n_0 по Е происходит следующим тривиальным образом:

$$\mathrm{E} \to \mathrm{E}_1 = \mathrm{E} \xrightarrow{(*)} n_1 \to n_0 = n_1.$$

При этом в силу монотонности

$$\forall n \geqslant n_0 \quad x_n \overset{(\dagger)}{\geqslant} x_{n_0} \overset{(*)}{>} \mathrm{E}.$$

Теорема доказана.

При проверке существования предела последовательности с использованием определения предела есть одно существенное неудобство: надо заранее знать, чему этот предел мог быть равен, т. е. в определении предела есть внешний по отношению к последовательности объект — значение предела. Оказывается, есть возможность судить о сходимости последовательности, обращаясь только к ее членам. Этому посвящен следующий критерий.

Определение. Последовательность x_n называют *фундаментальной* (или *сходящейся в себе*, или *последовательностью Коши*), если она удовлетворяет *условию Коши*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geqslant n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

По логической структуре определение условия Коши походит на определение предела, существенное отличие в том, что там сравниваются члены последовательности с претендентом на предел, а здесь происходит сравнение только членов последовательности.

Важно отметить, что в условии Коши сравниваются члены последовательности с произвольными достаточно далекими номерами, а не только например соседние или номера которых отстоят один от другого на фиксированное натуральное число.

Теорема 14 (критерий Коши). *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Шаг 1 (необходимость). Пусть последовательность x_n сходится к числу a, так что

Дано:

$$\exists a \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon_1. \tag{$*$}$$

Надо:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geqslant n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Проанализируем ситуацию. Нам дадут ε, мы с ним пойдем в условие, получим номер n_1 и с его использованием сконструируем n_0. От нас потребуют выполнение неравенства $|x_n - x_m| < \varepsilon$ для всех пар далеких номеров, а располагаем мы отклонением $|x_n - a| < \varepsilon_1$. Достаточно ясно, что если в левой части требуемого неравенства внутри модуля добавить и вычесть a, а затем воспользоваться неравенством треугольника (модуль суммы не больше суммы модулей), то разность $|x_n - x_m|$ можно оценить через разности $|x_n - a|$ и $|x_m - a|$, которые по условию могут быть сделаны малыми. Поскольку в оценке участвуют два слагаемых, можно разбить ε на два фрагмента, в сумме дающие

ε, и каждый из них использовать в качестве ε_1. Проще всего взять $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$. В итоге получим следующий выбор n_0 по ε:

$$\varepsilon \to \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow{(\alpha)} n_1 \to n_0 = n_1.$$

При таком выборе в силу неравенства треугольника имеем

$$\forall n, m \geqslant n_0 \quad |x_n - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Шаг 2 (достаточность). Надо сконструировать число, которое должно быть пределом. Для этого воспользуемся теоремой 12 Больцано — Вейерштрасса о выборе сходящейся подпоследовательности. Но для возможности использования этой теоремы нужна уверенность в ограниченности последовательности. Обоснованию этого свойства фундаментальной последовательности посвящен следующий шаг.

Шаг 3 (ограниченность фундаментальной последовательности и возможность выбора сходящейся подпоследовательности).

Дано:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists n_1 \ \forall m, n \geqslant n_1 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Надо:

$$\exists C > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant C.$$

Поскольку фрагмент $\forall \varepsilon_1 > 0$ дан в условии, в качестве ε_1 можем взять что угодно. Возьмем, например, $\varepsilon_1 = 1$ и получим номер n_1. В неравенстве из условия зафиксируем одно из чисел m и n, например, пусть m фиксировано. Поскольку и здесь произвол в том, что нам дано, можем зафиксировать m по нашему усмотрению, например, возьмем $m = n_1$. Запишем неравенство $|x_n - x_{n_1}| < \varepsilon_1$ в виде

$$x_{n_1} - \varepsilon < x_n < x_{n_1} + \varepsilon_1,$$

и согласно условию это неравенство выполнено для $n \geqslant n_1$. Таким образом, для достаточно далеких номеров ограниченность получена, остается конечный набор элементов последовательности, и можно воспользоваться тем, что в конечном множестве есть наименьший и наибольший элементы. Учитывая, что неравенства записаны с использованием модуля, и положив

$$C = \max\{|x_n + \varepsilon|, |x_n - \varepsilon|, |x_1|, \ldots, |x_{n_1 - 1}|\},$$

можно утверждать, что C ограничивает всю последовательность.

По теореме 12 Больцано — Вейерштрасса в последовательности x_n существует подпоследовательность x_{n_k}, имеющая конечный предел, который обозначим буквой a.

Шаг 4 (доказательство сходимости всей последовательности).
Дано:

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists m_1\ \forall m, n \geqslant m_1 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon_1 \quad \text{(фундаментальность)},$$

$$\forall \varepsilon_2\ \exists k_2\ \forall k \geqslant k_2 \quad |x_{n_k} - a| < \varepsilon_2 \quad (\text{сходимость } x_{n_k}).$$

Надо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geqslant m_0 \quad |x_m - a| < \varepsilon.$$

Будем *строить процедуру* выбора требуемого номера. Нам дадут $\varepsilon > 0$, в нашем распоряжении есть ε_1 и ε_2 и гарантия существования соответствующих номеров, один из них от подпоследовательности, другой — от последовательности. Как поделить ε? В конечном итоге надо оценить $|x_m - a|$. Оценим эту величину, вставив внутри модуля нуль в виде добавления и вычитания некоторого члена подпоследовательности и воспользовавшись неравенством треугольника:

$$|x_m - a| \leqslant |x_m - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|.$$

Ясно, что можно взять $\varepsilon_1 = \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Договорившись насчет ε_1, ε_2, получим номера m_1 и k_2. Начнем с k_2, т. е. зафиксируем место с номером n_{k_2}. Начиная с этого номера все члены подпоследовательности отклоняются от a меньше чем на $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Далее, начиная с момента m_1 все члены взаимно отклоняются меньше чем на $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Теперь положим $n_0 = \max\{m_1, n_{k_2}\}$. Тогда для любого $m \geqslant m_0$ верно

$$|x_m - a| \leqslant |x_m - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось.

Теорема доказана.

Заметим, что некоторой информацией, предоставленной условием, мы не пользуемся. А именно дано, что по заданному $\varepsilon_2 > 0$ неравенство для подпоследовательности выполнено для всех $k \geqslant k_2$, а мы воспользовались такой возможностью только для k_2, выбирая номер и привязывая к нему все остальные члены. Это видно и в финале доказательства — в последней оценке участвует только член x_{n_k}.

Зачем нужен критерий Коши? Во-первых, это наиболее удобная для обобщения форма полноты множества $\mathbb{R}$. С этим мы встретимся несколько позже при изучении многомерных пространств. Во-вторых, для доказательства существования предела, и мы этим будем пользоваться. Наконец, он полезен для доказательства того, что конечного предела последовательности нет. Для этого запишем отрицание условия Коши:

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad |x_m - x_n| \geqslant \varepsilon.$$

Пример. Докажем, что последовательность $x_n = \sin n$ расходится.

Согласно критерию Коши достаточно доказать, что она не удовлетворяет условию Коши, т. е. надо проверить, что

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad |\sin m - \sin n| \geqslant \varepsilon.$$

Нам надо подобрать ε, и искать его будем исходя из требования обеспечить неравенство $|\sin m - \sin n| \geqslant \varepsilon$. Надо ориентироваться на сколь угодно большие номера, так как по условию номера m, n надо выбирать после заранее извне заданного номера n_0. Сделаем такое наблюдение. Любой из промежутков, на которых $\sin x \geqslant \dfrac{1}{2}$ или $\sin x \leqslant -\dfrac{1}{2}$, имеет длину $\dfrac{2\pi}{3}$, а это больше единицы. Стало быть, в каждом из таких промежутков есть натуральное число. Пусть дано $n_0 \in \mathbb{N}$. Возьмем $m, n \geqslant n_0$ так, что $\sin m \leqslant -\dfrac{1}{2}$, $\sin n \geqslant \dfrac{1}{2}$. Ясно, что тогда $|\sin m - \sin n| \geqslant 1$, так что в качестве ε можно взять 1.

§ 4. Предел функции

4.1. Определение предела функции.

Определение. (1) Точку $a \in \mathbb{R}$ называют *предельной точкой* (или *точкой сгущения*) множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in X \quad 0 < |x - a| < \varepsilon.$$

Соотношение $0 < |x-a| < \varepsilon$ можно записать так: $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}$.

(2) Точку $a \in \mathbb{R}$ называют *предельной точкой* (или *точкой сгущения*) *слева* множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in X \quad a - \varepsilon < x < a.$$

(3) Точку $a \in \mathbb{R}$ называют *предельной точкой* (или *точкой сгущения*) *справа* множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \quad a < x < a + \varepsilon.$$

(4) Бесконечно удаленную точку $+\infty$ называют *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \mathrm{E} > 0 \ \exists x \in X \quad x > \mathrm{E}.$$

(5) Бесконечно удаленную точку $-\infty$ называют *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \mathrm{E} > 0 \ \exists x \in X \quad x < -\mathrm{E}.$$

Замечания. 1. В словесном выражении тот факт, что a — предельная точка X, означает, что в X есть точки, сколь угодно близкие к a, но при этом отличные от нее самой.

2. Предельная точка может принадлежать множеству, а может и не принадлежать. Если точка принадлежит множеству, это еще не значит, что она для него предельная.

3. Словосочетание «точка сгущения» можно использовать только в случае конечной точки, в отличие от универсального «предельная точка». Используя термин «точка сгущения», мы будем подчеркивать, что речь идет исключительно о случае конечной предельной точки.

Пример. Для интервала $X = (0, 1)$ предельными будут все точки отрезка $[0, 1]$. Это же множество является множеством предельных точек для $X = [0, 1]$. Для множества $X = (0, 1) \cup \{2\}$ точка 2 не предельная, так как в некотором интервале с центром в этой точке отличных от нее точек множества X нет.

Множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел не имеет конечных предельных точек, у него единственной предельной точкой является $+\infty$.

Определение конечного предела в точке сгущения. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ — точка сгущения X. Число $l \in \mathbb{R}$ называют *пределом* $f(x)$ *в точке* a и пишут $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon.$$

При этом также говорят, что $f(x)$ *стремится к* l *при* $x \to a$ и пишут $f(x) \to l$, $x \to a$, или $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.

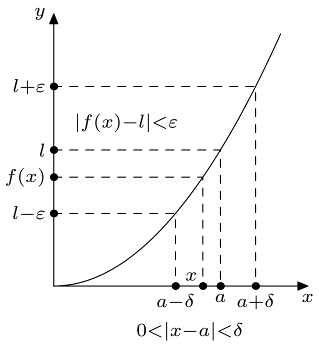

Рис. 4.1.

Поясним суть определения предела на рисунке (рис. 4.1). Изобразим график функции f, выберем точку a, предельную для области определения $\operatorname{dom} f$, отметим число l, которое, скорее всего, будет пределом, и займемся анализом высказывания, составляющего содержание определения. Оно начинается с требования «для любого $\varepsilon > 0$». Это внешнее требование, от нас не зависящее, и отнесемся к нему соответственно, сказав «пусть дано $\varepsilon > 0$». Затем смотрим, что от нас ожидается. Потребуется сравнивать значения функции $f(x)$ с числом l на предмет их вхождения в интервал $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, который естественно расположить на оси ординат. Для анализа возможности подбора δ надо изобразить горизонтальный коридор между уровней $l-\varepsilon$ и $l+\varepsilon$ и изучать, попадут ли в него все точки графика f для x, близких к a, но, возможно, отличных от a Для этого выделим часть графика f, попавшую в заданный коридор, спроектируем ее на ось абсцисс и посмотрим, охватывает ли проекция точку a настолько, чтобы в ней оказался какой-то интервал вида $(a-\delta, a+\delta)$, при этом не обращая внимания на значение функции в самой точке a. Если такое возможно при любом выборе $\varepsilon > 0$, значит, l — предел функции f в точке a.

Из рис. 4.1 видно, что для возможности успеха в выборе требуемого δ по крайней мере вблизи точки a должны располагаться точки множества X, без этого определение предела бессмысленно. Вспоминая определение предельной точки, можно сказать, что предел функции имеет смысл рассматривать только в предельных точках ее области определения.

Исключение точки a из анализа отклонения $f(x)$ от l бывает связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, функция f в точке a может не быть определена, и это произойдет, например, в тех случаях, когда рассматривается частное, в котором знаменатель в точке a обращается в нуль. Во-вторых, в точке a значение функции может не быть связано с ее значениями вблизи a, т. е. как бы отстоять далеко от $f(x)$ при x, близких к a, нас же интересует не это значение, а поведение функции вблизи a, и чтобы значение в одной точке не служило помехой для анализа функции, его предпочитают не учитывать.

Определение односторонних пределов функции. Пусть $f: X \to \mathbb{R}$, a — точка сгущения X слева. Число l называют *пределом* $f(x)$ *в точке* a *слева*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \quad a - \delta < x < a \to |f(x) - l| < \varepsilon,$$

при этом пишут $l = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, нередко этот предел обозначают через $f(a-0)$ и называют *значением функции* f *слева в точке* a.

Пусть $f: X \to \mathbb{R}$, a — точка сгущения X справа. Число l называют *пределом* $f(x)$ *в точке* a *справа* если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \quad a < x < a + \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon,$$

при этом пишут $l = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, нередко этот предел обозначают через $f(a+0)$ и называют *значением функции* f *справа в точке* a.

Нетрудно понять, что предела в точке может не быть, даже если есть оба односторонних предела, однако если односторонние пределы существуют и равны между собой, то предел в точке есть и он равен общему значению односторонних пределов.

Может оказаться и так, что односторонних пределов функции в предельной точке нет. Пример такой ситуации дает, например, функция $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ в точке $x = 0$, предельной точке области определения, или так называемая функция Дирихле, равная 1 в рациональных точках и 0 в иррациональных, у которой нет односторонних пределов в каждой (предельной) точке области определения.

Определение конечного предела на бесконечности. Рассмотрим функцию $f: X \to \mathbb{R}$, и пусть $\pm\infty$ — предельная точка множества X. Число l называют *пределом* $f(x)$ *при* $x \to \pm\infty$ и пишут $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0\ \forall x \in X \quad \pm x > \Delta \to |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Пределы на бесконечности можно рассматривать как односторонние пределы функций.

Определение бесконечного предела в точке сгущения. Пусть $f: X \to \mathbb{R}$, a — точка сгущения X. Говорят, что $f(x)$ *стремится к* $+\infty$ *или к* $-\infty$ *при* $x \to a$ или что $+\infty$ или $-\infty$ *является* *пределом* f *в точке* a и пишут $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, если

$$\forall \mathrm{E} > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \to \pm f(x) > \mathrm{E}.$$

Наконец, говорят, что $f(x)$ *стремится к* ∞ *при* $x \to a$ или что ∞ *является пределом* f *в точке* a и пишут $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если

$$\forall \mathrm{E} > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \to |f(x)| > \mathrm{E}.$$

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

Аналогично можно дать определение бесконечных пределов слева и справа в данной точке.

Заметим, что если в качестве функции взять последовательность, т. е. функцию $x_n = x(n)$, заданную на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, и применить к этой ситуации определение предела функции при $x \to +\infty$, то получим не что иное как определение предела последовательности. Кстати, то обстоятельство, что у множества $\mathbb{N}$ точка $+\infty$ является единственной предельной точкой, а значит, в других точках рассмотрение предела последовательности бессмысленно, позволяет не писать $n \to +\infty$ в обозначении предела последовательности, что мы и делаем.

Мы дали определение предела функции в разных ситуациях, различающихся местоположением точек, в которых рассматривается предел, и расположением значения предела. Все эти ситуации можно рассматривать как частные случаи одного определения предела, выраженного на языке окрестностей.

Окрестностью и *проколотой окрестностью* точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называют произвольное множество вида, указанного в следующей таблице, где $\delta > 0$ и $\Delta > 0$ — произвольные числа:

	$a \in \mathbb{R}$	$a = +\infty$	$a = -\infty$
Окрестность	$(a - \delta, a + \delta)$	$(\Delta, +\infty]$	$[-\infty, -\Delta)$
Проколотая окрестность	$(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$	$(\Delta, +\infty)$	$(-\infty, -\Delta)$

Утверждение (определение предельной точки на языке окрестностей). *Точка* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *является предельной точкой множества* $X \subset \overline{\mathbb{R}}$

тогда и только тогда, когда для любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}$ *точки* a *пересечение* $\overset{\circ}{U} \cap X$ *непусто.*

Определение предела функции на языке окрестностей. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка X. Говорят, что $f(x)$ *стремится к* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *при* $x \in a$ или что l является *пределом функции* f *в точке* a, если для любой окрестности V точки l существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}$ точки a, что $f(\overset{\circ}{U} \cap X) \subset V$.

Эквивалентность определений на языке ε–δ и языке окрестностей в каждом конкретном случае легко установить, записав определения друг под другом и сопоставив их с учетом специфики определения окрестностей в конкретных случаях.

4.2. Секвенциальный подход.

Оказывается, что вопросы, связанные с пределом функции в точке, можно сводить к рассмотрению предела последовательностей. Такую возможность предоставляет так называемый секвенциальный подход к понятию предела функции (от английского sequential — связанный с последовательностью), который ассоциируют с именем Гейне. Определение предела на языке ε–δ, приведенное выше, называют определением предела по Коши. Связь предела функции с пределом последовательности позволяет легко переносить многие результаты, полученные для последовательности, на случай функций.

Теорема 15 (об эквивалентности определений предела по Гейне и Коши). *Пусть* $f : X \to \mathbb{R}$ — *функция,* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ — *предельная точка* X*. Тогда* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *в том и только в том случае, если для любой последовательности* x_n *такой, что* $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, *имеет место равенство* $\lim f(x_n) = l$.

Образно говоря, происходит следующее. Пусть даны функция f, точка a — предельная для области определения функции f, и число l — претендент на роль предела f в точке a. Берем какую-либо последовательность x_n, стремящуюся к точке a, но в эту точку никогда не попадающую, и изучаем получающуюся последовательность значений $f(x_n)$. Если она сходится к l при произвольном выборе последовательности x_n, то l и есть предел f в точке a.

Доказательство. Докажем теорему в случае конечной предельной точки a и конечного предела l. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Необходимость. **Дано.** Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, т. е.

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon_1. \qquad (*)$$

Пусть x_n такая последовательность, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$ и $\lim x_n = a$, т. е.

$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_2 \quad 0 < |x_n - a| < \varepsilon_2. \qquad (**)$$

Надо. Доказать, что $\lim f(x_n) = l$, т. е. что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad |f(x_n) - l| < \varepsilon.$$

Процесс поиска требуемого n_0 по заданному ε таков. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon$ в $(*)$ и полученное δ_1 возьмем в качестве ε_2 в $(**)$. Согласно $(**)$ существует соответствующее n_2, его мы и возьмем в качестве искомого n_0. Действительно, при таком выборе n_0 для любого $n \geqslant n_0 = n_2$ выполнено неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon_2 = \delta_1.$$

Кроме того, $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. в итоге для любого $n \geqslant n_0$ будет

$$0 < |x_n - a| < \varepsilon_2 = \delta_1$$

и далее ввиду $(*)$

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon_1 = \varepsilon,$$

что и требовалось.

Необходимость доказана.

Достаточность. Воспользуемся методом от противного. Предположим, что $f(x)$ не стремится к l, и построим такую последовательность x_n, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, но при этом $f(x_n) \not\to l$.

Дано. Тот факт, что $f(x)$ не стремится к l при $x \to a$, означает следующее:

$$\exists \varepsilon_1 > 0\ \forall \delta_1 > 0\ \exists x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ и } |f(x) - l| \geqslant \varepsilon_1. \qquad (*)$$

Надо. Построить последовательность x_n такую, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ и $f(x_n)$ не стремится к l, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0 \quad |f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon. \qquad (**)$$

Прежде всего, исходя из неравенств в $(*)$ и $(**)$, положим $\varepsilon_1 = \varepsilon$ (ε_1 дано, а ε нужно найти). Далее строим x_n следующим образом. Глядя на первое неравенство в $(*)$ и видя цель — построить последовательность, сходящуюся к a, в качестве δ_1 выбираем $\delta_1 = 1/n$ для $n \in \mathbb{N}$ и полученный x берем в качестве x_n. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < |x_n - a| < 1/n \quad \text{и} \quad |f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon.$$

Первое неравенство означает, что $x_n \neq a$, второе вместе с теоремой о зажатой последовательности дает $x_n \to a$, а третье гарантирует, что $f(x_n)$ не может сходиться к l. Построенная последовательность x_n приводит нас к требуемому противоречию.

Теорема доказана.

Сформулируем теоремы, связывающие предел последовательности с алгебраическими операциями и неравенствами, на случай предела функции.

Теорема 6′ (о пределе функции и неравенстве). *Пусть f, g — функции, определенные на множестве X, a — предельная точка множества X и существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Если в некоторой окрестности точки a выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

Образно говоря, если одна из функции не больше другой вблизи данной точки, то и для их пределов сохранится такое же сопоставление.

Обратим внимание на то, что даже если между функциями наблюдается строгое неравенство, то между пределами можно гарантировать только нестрогое неравенство.

В теореме 6 было две части, для функций мы сформулировали только одну из них. Вторая также верна, формулируется аналогично и ее формулировка оставляется читателю.

Доказательство получается из теорем 6 и 15 и подробно проводиться не будет.

Теорема 10′ (о пределе и алгебраических операциях). *Пусть функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ имеют конечные пределы в предельной точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ множества X. Тогда*

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$,
(2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$,
(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ *при условии, что* $g(x)\neq 0$ *и* $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$.

Доказательство получается сведением к пределу последовательности и использованию соответствующих результатов.

Теорема 7$'$ (о зажатой функции). *Пусть функции* $f,g: X\to\mathbb{R}$ *имеют один и тот же предел в предельной точке* $a\in\overline{\mathbb{R}}$ *множества* X, *т. е.* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=l\in\overline{\mathbb{R}}$. *Пусть функция* $h: X\to\mathbb{R}$ *такова, что ее значения лежат между значениями функций* f *и* g, *т. е., например,* $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ *для точек хотя бы из некоторой (проколотой) окрестности точки* a. *Тогда существует* $\lim\limits_{x\to a}h(x)=l$.

Теорема 14$'$ (критерий Коши для функций). *Пусть* f *— функция, определенная на множестве* X *и действующая в* $\mathbb{R}$. *Функция* f *имеет предел в точке* a *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_1,x_2\in X$$
$$0<|x_1-a|<\delta,\ 0<|x_2-a|<\delta\to|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Теорема 16 (о пределе композиции). *Пусть* $f: X\to\mathbb{R}$, $g: Y\to\mathbb{R}$ *таковы, что* $f(X)\subset Y$, *тем самым определена композиция* $g\circ f: X\to\mathbb{R}$, *т. е. функция* $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, *и* $a\in\overline{\mathbb{R}}$ *— предельная точка множества* X. *Предположим, что выполнены условия*

(1) *существует* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\in\overline{\mathbb{R}}$,

(2) *существует* $\lim\limits_{y\to b}g(x)=l\in\overline{\mathbb{R}}$,

(3) *для любого* $x\in X$ *такого, что* $x\neq a$, *выполнено неравенство* $f(x)\neq b$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=l$.

Это утверждение не имело аналога для последовательности, так что опереться не на что и надо доказывать.

Доказательство. Рассмотрим только случай $a,b,l\in\mathbb{R}$. Остальные доказываются аналогично.

Дано. Функция f имеет предел в точке a, т. е.

$$\forall\varepsilon_1>0\ \exists\delta_1>0\ \forall x\in X\quad 0<|x-a|<\delta_1\to|f(x)-b|<\varepsilon_1, \qquad (*)$$

и функция g имеет предел в точке b, т. е.

$$\forall\varepsilon_2 > 0\ \exists\delta_2 > 0\ \forall y \in Y \quad 0 < |y - b| < \delta_2 \to |g(y) - l| < \varepsilon_2. \qquad (**)$$

Наконец, есть условие

$$\forall x \in X \quad x \neq a \to f(x) \neq b. \qquad (\dagger)$$

Надо. Обеспечить справедливость высказывания

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in X \quad 0 < |x - a| < \delta \to |g(f(x)) - l| < \varepsilon. \qquad (\ddagger)$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выбор δ по ε происходит в следующей последовательности. Сравнивая неравенства в ($\ddagger$) и ($**$), полагаем $\varepsilon_2 = \varepsilon$ и исходя из ($**$) получаем δ_2. Далее, выбирая $\varepsilon_1 = \delta_2$, ввиду ($*$) получаем δ_1. Это и есть искомое δ. Действительно, при таком выборе

$$(0 < |x - a| < \delta) \to (0 < |f(x) - b| < \varepsilon_1 = \delta_2) \to (|g(f(x)) - l| < \varepsilon).$$

Заметим, что дополнительное неравенство $0 < |f(x) - b|$ получается из ($\dagger$).

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим в качестве примера нахождение исключительно простого предела $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$. Из сопоставления графиков функций $\cos x$ и $\dfrac{\pi}{2} - x$ вблизи точки $\dfrac{\pi}{2}$ видно, что они соприкасаются. Будем считать, что известен такой предел: $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$ (о нем речь пойдет ниже, в § 1.5). Для нахождения искомого предела сделаем замену, полагая $y = \dfrac{\pi}{2} - x$, т. е. $x = \dfrac{\pi}{2} - y$. Тогда по теореме о пределе композиции

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Здесь была сделана замена переменной. По существу была взята композиция функций. Имевшуюся функцию как функцию от x мы представили в виде композиции $g(f(x))$ внешней функции $g(y) = \dfrac{\sin y}{y}$ и внутренней функции $y = f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$, было достаточно ясно, что условия теоремы выполнены, после чего оставалось воспользоваться результатом теоремы.

§ 5. Элементарные функции

К элементарным функциям будем относить:

- степенную функцию $x \mapsto x^{\alpha}$;
- показательную функцию $x \mapsto a^{x}$;
- тригонометрические функции $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$, $x \mapsto \operatorname{ctg} x$;
- обратные к ним;
- функции, получающиеся из перечисленных при помощи алгебраических операций и композиции, примененных конечное число шагов, т. е. фактически все, что можно написать формулой.

Элементарные функции и их основные свойства хорошо известны из школьного курса. В этом параграфе дадим их более или менее строго определение, докажем непрерывность и установим некоторые предельные соотношения.

5.1. Показательная функция.

Основная работа связана с определением степени a^{x} положительного числа a с произвольным вещественным показателем $x \in \mathbb{R}$. Начнем со следующего замечания.

Замечание о сложном проценте. Сложный процент возникает в тех случаях, когда исходное значение некоторой величины, например величины вклада в банке, спустя определенный промежуток времени изменяется на значение, соответствующее количеству процентов, и следующее изменение рассчитывается уже из нового значения, а не из первоначального. Например, если положить в банк 1 у. е. под $p\%$ годовых, то через год будет $\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$ у. е. Если капитализация, т. е. начисление процентов, происходит чаще, например, n раз в год, то получится значение $\left(1+\dfrac{\frac{p}{100}}{n}\right)^{n}$. Здесь учтено, что количество процентов, предусмотренное на год, в каждый из периодов становится в n раз меньше, поэтому делится на n, но начисление происходит чаще, поэтому возводится в степень n. Возникает вопрос: как зависит значение в конце года от того, насколько часто происходит капитализация, т. е. от n? При увеличении n она возрастает. А если капитализация происходит все чаще и чаще, у нас бесконечно большое значение получится? Скорее всего, нет. Обозначив для краткости $\dfrac{p}{100} = x$ и взяв для еще большей простоты $x = 1$, т. е. $p = 100$, проведем численный эксперимент, посчитав несколько членов получившейся последовательности $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, и представим себе результат на графике. Увидим возрастающую последовательность точек, явно приближающуюся к некоторому числу, равному примерно 2.7 и обозначаемому, как правило, буквой e. Это точная верхняя граница для выгоды, которую можно получить с одного рубля под 100% годовых при увеличении частоты начисления процентов.

Можно поэкспериментировать и, выбирая разные значения x, посмотреть, что будет происходить с получаемыми последовательностями. Их возрастание и ограниченность заметны, а также очевидно, что точная верхняя граница оказывается равной e^x.

Теорема 17 (о существовании предела $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$). *Для любого* $x \in \mathbb{R}$ *существует предел* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, *обозначаемый через* $\exp(x)$.

Доказательство. Эксперимент подсказывает, что для доказательства можно воспользоваться теоремой 13 Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности, для чего достаточно доказать, что она неубывающая и ограниченная сверху.

Шаг 1. (неравенство Бернулли). Для любого $x \geqslant -1$ верно неравенство
$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Воспользуемся методом математической индукции. Для $n = 1$ неравенство, очевидно, выполнено. Предположим, что оно верно для какого-то натурального n, и докажем его справедливость для $n+1$. Итак, предположим, что $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, и докажем, что $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$. Имеем
$$\begin{aligned}&(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant \\ &\qquad\qquad\text{по индукционному предположению} \\ &\geqslant (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

откуда согласно методу математической индукции заключаем о справедливости неравенства при любом натуральном n.

Шаг 2 (монотонность). Докажем, что

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

неубывающая хотя бы начиная с некоторого номера, который зависит от x.

Для фиксированного x будем рассматривать только номера $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию $n > -x$. В этом случае $1 + \dfrac{x}{n} > 0$. Рассмотрим отношение $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}$ при $n > -x$ и покажем, что оно не меньше 1:

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} - 1\right)\right)^{n+1}$$

$$= \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1}$$

(по неравенству Бернулли, замечая, что $-\frac{x}{(n+x)(n+1)} > -1$ при $n > -x$)

$$\geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n+x}\right) = 1.$$

Шаг 3 (ограниченность $u_n(x)$). Рассмотрим последовательность

$$v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)} = \frac{1}{(1 - \frac{x}{n})^n}.$$

По шагу 1

$$\forall n > x \quad u_{n+1}(-x) \geqslant u_n(-x) > 0,$$

откуда

$$\forall n > x \quad 0 < v_n(x) \leqslant v_{n+1}(x).$$

При $n > x$ и $n > -x$, т. е. $n > |x|$, обе последовательности $u_n(x)$ и $v_n(x)$ положительны и

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^2 \leqslant 1,$$

т. е.

$$u_n(x) \leqslant v_n(x) \leqslant v_{n_0(-x)}(x), \quad n \geqslant n_0(-x),$$

где $n_0(-x)$ — тот номер, начиная с которого последовательность v_n монотонна. В итоге при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$ последовательность $u_n(x)$ ограничена сверху, неубывающая при $n > -x$ и, значит, по теореме 13 имеет конечный предел.

Теорема доказана.

Для предела рассмотренной последовательности $u_n(x)$ введем обозначение

$$\exp(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Определение экспоненциальной (показательной) функции и числа e. Функцию

$$x \mapsto \exp(x),$$

определенную в силу теоремы 17 на $\mathbb{R}$, называют *экспоненциальной* или (*показательной*) *функцией* или просто *экспонентой*.

Значение $\exp(1)$ называют *числом* e:

$$e = \exp(1) = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Обратимся к изучению свойств показательной функции.

Теорема 18 (о свойствах показательной функции). *Функция* exp *обладает следующими свойствами:*

(1) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$;

(2) $\exp(x) > 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$;

(3) *функция* $\exp(x)$ *возрастающая;*

(4) *функция* $\exp(x)$ *имеет следующее поведение на концах области определения:*

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty;$$

(5) *имеет место следующее соотношение, называемое замечательным пределом:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Доказательство. Утверждение п. (1) доказывается на основе определения экспоненты и подробности опустим, п. (2) легко следует из определения. Доказательство утверждений пп. (3), (4) опустим (оставим любопытному читателю), а докажем только результат п. (5).

(5) Шаг 1 (оценки для $\exp(x)$). Докажем, что имеют место следующие оценки:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + x \leqslant \exp(x), \tag{$*$}$$

$$\forall x < 1 \quad \exp(x) \leqslant \frac{1}{1-x}. \tag{$\dagger$}$$

Естественность выписанных оценок видна из сопоставления графиков функций $\exp(x)$, $1+x$ и $\dfrac{1}{1-x}$. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$. В процессе доказательства теоремы 17 показано, что при $n > -x$ последовательность $u_n(x)$ неубывающая, т. е. $u_n(x) \leqslant u_{n+1}(x)$ и, следовательно,

$$u_n(x) \leqslant \lim u_m(x) = \exp(x).$$

Применяя неравенство Бернулли (что возможно при $n > -x$), получаем

$$1 + x \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = u_n(x) \leqslant \exp(x).$$

Для доказательства неравенства ($\dagger$) запишем неравенство ($*$) для $-x$:

$$1 - x \leqslant \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$$

и поменяем местами $1 - x$ и $\exp(x)$, заметив, что при $x < 1$ оба выражения положительны и по свойству (1) $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1$.

Шаг 2 (замечательный предел). При $x < 1$ имеем

$$1 + x \leqslant \exp(x) \leqslant \frac{1}{1-x},$$

откуда, вычитая единицу, получим

$$x \leqslant \exp(x) - 1 \leqslant \frac{x}{1-x}$$

и для $x > 0$ разделим на x:

$$1 \leqslant \frac{\exp(x) - 1}{x} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

Нетрудно понять, что для $x < 0$ будет

$$1 \geqslant \frac{\exp(x) - 1}{x} \geqslant \frac{1}{1-x}.$$

По теореме о зажатой функции существует предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}=1.$$

Замечание об обозначении $e^x=\exp(x)$. В школьном курсе математики рассматривают функцию возведения в степень. Сначала определяют степень с натуральным показателем, и это можно сделать для любого a, затем степень с целым показателем, и здесь появляется ограничение $a\neq 0$, потом переходят к степени с рациональным показателем: $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$, при этом уже ограничиваются значениями $a>0$, и, наконец, распространяют на случай произвольного вещественного показателя, используя либо непрерывность, либо монотонность. Это довольно длинный путь, и мы пошли другим путем. Остался вопрос: почему эти два разных способа построения дают одну и ту же функцию?

Совпадение функций e^x и $\exp(x)$ в рациональных точках обеспечено основным свойством, изложенным в п. (1) теоремы 18. Действительно, это очевидно для натуральных x, далее распространяется на целые и рациональные, так что для рациональных совпадение следует из алгебраических свойств. Но в то время как функция e^x получается пока определенной лишь для рациональных чисел, функция $\exp(x)$ определена всюду. Разумно считать, что они должны совпадать всюду, коли это происходит на рациональных точках, и тем самым в дальнейшем наряду с обозначением $\exp(x)$ будем использовать также обозначение e^x.

5.2. Натуральный логарифм.

Определение натурального логарифма. Функцию, обратную к экспоненциальной функции $\exp(x)$, называют *натуральным логарифмом* и обозначают символом $\ln(x)$ или $\ln x$.

Обратимость функции $\exp(x)$ гарантирует ее строгая монотонность, а именно строгое возрастание. График логарифма получается стандартным приемом получения графика обратной функции из графика исходной путем отражения относительно биссектрисы первого и третьего углов координатной плоскости.

Теорема 19 (о свойствах функции $\ln x$). *Функция $\ln x$ обладает следующими свойствами:*

(1) *логарифм определен для* $x > 0$*;*

(2) $\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad x, y > 0$*;*

(3) *функция* $\ln x$ *строго возрастающая;*

(4) *на концах своей области определения* $\ln x$ *имеет следующее поведение:*

$$\lim_{x\to+0} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty;$$

(5) *имеет место следующее соотношение, называемое замечательным пределом:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Доказательство. Результаты пп. (1)–(3) легко следуют из п. 1 теоремы 18, определения логарифма как обратной функции и свойств экспоненты. Утверждение п. (4) легко увидеть на основе графика и доказать исходя из свойств экспоненты. Остановимся на доказательстве п. (5).

(5) Шаг 1 (оценки для $\ln x$). Справедливы неравенства

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1, \quad x > 0. \tag{$*$}$$

Действительно, для $y = \ln x$, $x > 0$, имеем неравенство

$$1 + y \leqslant e^y.$$

В терминах исходной переменной x оно принимает вид

$$1 + \ln x \leqslant x,$$

т. е. получаем правое неравенство в $(*)$. Записывая его для аргумента $\dfrac{1}{x}$, $x > 0$:

$$1 + \ln\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x},$$

и пользуясь тем, что $\ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$ в силу п. 2, получаем левое из неравенств $(*)$.

Шаг 2 (замечательный предел). Подставляя $x + 1$ вместо x в оценку $(*)$, получаем

$$1 - \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x, \quad x > -1,$$

откуда

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1 \quad \text{при } x>0,$$
$$1 \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant \frac{1}{x+1} \quad \text{при } x<0.$$

Это означает, что в (выколотой) окрестности нуля функция $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ зажата между двумя функциями, каждая из которых стремится к 1 при $x \to 0$. Привлекая теорему $7'$ о зажатой функции, заключаем, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Теорема доказана.

Определение степени с произвольным основанием. Для $x>0$ определим степень с основанием x следующим образом:

$$x^y = \exp(y \ln x) = e^{y \ln x}.$$

Определение степенной функции. Для фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ определим *степенную функцию* $x \mapsto x^\alpha$ на $(0,+\infty)$ следующим образом:

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).$$

Пользуясь свойствами показательной функции, легко проверить, что в случае $\alpha \in \mathbb{Q}$ определенная нами функция x^α совпадает со степенной функцией, которая определяется в школьном курсе математики. Кроме того, используя подходящее продолжение (четное или нечетное) в некоторых случаях можно доопределить x^α на большее множество: при $\alpha = 1,2,\ldots$ — на $\mathbb{R}$, при $\alpha = -1,-2,\ldots$ — на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. При некоторых $\alpha \in \mathbb{Q}$ также можно расширить область определения x^α, например, при $\alpha = 1/3$ функция $x^{1/3}$ естественно определяется на всем $\mathbb{R}$.

Теорема 20 (замечательный предел для степенной функции). *Имеет место следующее соотношение, именуемое замечательным пределом:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu.$$

Доказательство. По определению степенной функции при $x \to 0$ имеем

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \frac{\exp(\mu \ln(1+x)) - 1}{x}$$
$$= \underbrace{\frac{\exp(\mu \ln(1+x)) - 1}{\mu \ln(1+x)}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\mu \ln(1+x)}{x}}_{\to \mu} \to \mu.$$

Первый сомножитель стремится к 1 на основании теоремы 16 о пределе композиции, поскольку $y = \mu \ln(1+x) \to 0$ при $x \to 0$ и $y \neq 0$ при $x \neq 0$, а $\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$.

Теорема доказана.

5.3. Тригонометрические функции.

Ограничимся геометрическим определением тригонометрических функций.

Определение тригонометрических функций. *Косинус* $\cos x$ и *синус* $\sin x$ вещественного числа $x \in \mathbb{R}$ определяются соответственно как абсцисса и ордината точки на единичной окружности, которая получается из точки $(1, 0)$ после того, как она проходит по окружности путь x против часовой стрелки, если $x \geqslant 0$, и путь $-x$ по часовой стрелке, если $x < 0$.

Тангенс $\operatorname{tg} x$ и *котангенс* $\operatorname{ctg} x$ определяются как отношения

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

с естественными областями определения.

Теорема 21 (замечательный предел для $\sin x$). *Имеет место следующее соотношение, называемое замечательным пределом:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Докажем следующую оценку для $\sin x$:

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ при } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}. \qquad (*)$$

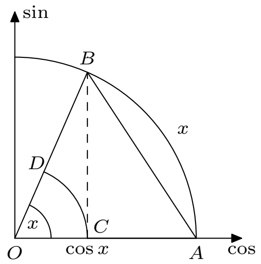

Рис. 5.1.

В силу четности входящих в $(*)$ функций достаточно сделать это при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Площадь сектора ODC (рис. 5.1) меньше площади треугольника ABO:

$$\left(\pi \cos^2 x \, \frac{x}{2\pi} < \frac{1}{2} \sin x\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\cos^2 x < \frac{\sin x}{x},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

и мы получаем левое неравенство в $(*)$. Правое неравенство получается в результате сравнения площадей треугольника ABO и сектора ABO:

$$\frac{1}{2} \sin x < \pi \frac{x}{2\pi} \longrightarrow \sin x < x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Замечательный предел получается из неравенства $(*)$ стандартным образом с использованием теоремы $7'$ о зажатой функции. При этом надо заметить, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. В принципе, это есть не что иное как выражение непрерывности косинуса в нуле, но пока у нас этого свойства нет, докажем указанный факт вручную. Для этого оценим разность $1 - \cos x$. Учитывая, что $\cos 0 = 1$, имеем

$$0 \leqslant 1 - \cos x = \cos 0 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leqslant \frac{x^2}{2} \to 0,$$

стало быть, по теореме $7'$ о зажатой функции $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Теорема доказана.

§ 6. Асимптотические сравнения

6.1. Асимптотические сравнения o-малое и O-большое.

Рассмотрим функцию $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Видно, что ее график неограниченно приближается к прямым $y = x$ и $x = 0$, когда $x \to +\infty$ и $x \to +0$ соответственно. При этом говорят, что указанные прямые являются асимптотами функции $f(x)$. Отметим особенности этого эффекта, например, при $x \to +\infty$:

1) увеличивая x, можно сделать соответствующие точки графиков сколь угодно близкими;
2) график $f(x)$ никогда не достигает прямой $y = x$;

3) функция $y = x$ проще функции $f(x)$.

Именно вторая особенность объясняет происхождение термина асимптота (от греческого $\alpha\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\tau o\varsigma$ (асимптотос), что означает непересекающийся, невстречающийся). Однако, используя слова асимптота, асимптотический, математики имеют в виду остальные две особенности, т. е. предельные свойства. Иначе говоря, выяснить асимптотическое поведение (или просто асимптотику) функции $f(x)$ при $x \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ значит представить ее в виде суммы более простой функции и чего-то малого по сравнению с этой простой при $x \to a$. В случае $f(x) = x + 1/x$ при $x \to +\infty$ роль простой функции играет x, а роль малого — второе слагаемое $1/x$. Когда же $x \to +0$, они меняются. Из этого простого наблюдения видно, как важно указывать, к чему стремится x.

Кроме ситуаций, в которых функция неограниченно растет, обращают внимание на ситуации, когда она стремится к нулю, и тогда сопоставляют скорость сходимости к нулю каких-то функций в данной точке. Ясно, что, например, функция x^2 исчезает вблизи нуля быстрее чем функция вида kx, а последняя, в свою очередь, стремится к нулю быстрее по сравнению с функцией $\sqrt{x}$. Вместе с тем все функции вида kx при различных k сходятся к нулю при $x \to 0$ со скоростями, различающимися на константу. Сопоставление скорости убывания, как и для случая бесконечно больших функций, приводит к приближению функции, имеющей пределом нуль, такой функцией, которая, во-первых, устроена проще, чем исходная, а во-вторых, играет основную роль в сходимости данной функции к нулю, т. е. вся функция представима в виде суммы более простой и некоторого остатка, стремящегося к нулю в каком-то смысле быстрее по сравнению с более простой.

Что такое простая функция понять нетрудно — у нас это будет, как правило, полином. А вот понятие «нечто малое» требует строгого определения и входит в состав понятия асимптотического сравнения.

Определение асимптотических сравнений o-малое и O-большое. Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ — две функции, определенные на множестве X, и a — предельная точка X. Говорят, что функция $f(x)$ — *o-малое от* $g(x)$ (или *по сравнению с* $g(x)$) *при* $x \to a$, и пишут $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, если $f(x)$ можно представить в виде произведения

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \quad \text{где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to a.$$

Говорят, что функция $f(x)$ есть *O-большое от* $g(x)$ (или *по сравнению с* $g(x)$) *при* $x \to a$ и пишут $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$, если $f(x)$ можно представить в виде произведения

$$f(x) = \beta(x)g(x), \quad \text{где } \beta(x) \text{ ограничена в окрестности } a,$$

т. е. существует такая окрестность U точки a, что функция $\beta(x)$ ограничена на этой окрестности.

Если в определении сравнений функция g не обращается в нуль в некоторой окрестности точки a, то можно сказать так: $f(x)$ есть o-малое (соответственно O-большое) относительно $g(x)$ при $x \to a$ означает, что

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

соответственно отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничено в некоторой окрестности точки a. Так как в большинстве ситуаций соотношение $g(x) \neq 0$ вблизи точки a выполняется, нередко асимптотические сравнения воспринимаются именно так, как условия на отношение функций, без привлечения для них дополнительных обозначений $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Для обнаружения сравнения вида $f(x) = O(g(x))$ чаще всего обращаются к изучению предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в точке a, и если он есть и конечен, то указанное сравнение есть (ввиду того, что наличие конечного предела функции влечет ее ограниченность вблизи предельной точки).

В качестве первых примеров можно отметить указанные выше функции и в новой терминологии записать: $x^2 = o(x)$, $x = o(\sqrt{x})$ при $x \to 0$, вместе с тем $x = o(x^2)$ и $\sqrt{x} = o(x)$ при $x \to +\infty$. Для функций вида kx можно отметить, что $kx = O(x)$ как при $x \to 0$, так и при $x \to \infty$.

Важно понимать, что символами типа $O(f(x))$ и $o(f(x))$, если они не используются в конкретных равенствах, обозначают не одну функцию, а *класс функций, обладающих отмеченным в символе свойством*, так что если говорят «возьмем функцию $O(f(x))$ или $o(f(x))$ при $x \to a$», то имеют в виду, что рассматривается **некоторая** функция, обладающая указанным свойством, т. е. некоторая функция $h(x)$ такая, что $h(x) = \varphi(x)f(x)$, где соответственно $\varphi(x)$ ограничена вблизи a или $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

Теорема 22 (правила работы с o-малым и O-большим). *Выражения с o-малыми и O-большими можно преобразовывать по следующим правилам, в которых равенство означает, что левую часть можно заменить правой частью (но не наоборот), или, иначе говоря, выражение в левой части обладает свойством, указанным в правой:*

1) $o(f) = O(f)$;
2) $o(f) + o(f) = o(f), \quad O(f) + O(f) = O(f)$;
3) $o(o(f)) = o(f), \quad O(O(f)) = O(f)$;
4) $O(o(f)) = o(f), \quad o(O(f)) = o(f)$;
5) $f \cdot o(g) = o(fg), \quad f \cdot O(g) = O(fg)$

при условии, что все асимптотические сравнения относятся к одной и той же точке.

Доказательство. 1. Надо доказать, что если $h(x)$ — некоторая функция, обладающая указанным слева свойством при $x \to a$, то она обладает и свойством, указанным справа. Пусть $h(x) = \alpha(x)f(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Надо доказать, что $h(x)$ обладает свойством, указанным в правой части, т. е. в наших обозначениях — что функция $\alpha(x)$ ограничена в некоторой окрестности a. Это вытекает из утверждения об ограниченности функции, имеющей конечный предел. Значит, по определению $h(x) = O(f(x))$ при $x \to a$.

2. Свойство $o(f(x)) + o(f(x))$ при $x \to a$ по определению означает, что в левой части находится некоторая функция $h(x)$, представимая в виде суммы двух функций с указанным свойством:

$$h(x) = \underbrace{\alpha_1(x)}_{\to 0} f(x) + \underbrace{\alpha_2(x)}_{\to 0} f(x) = \underbrace{(\alpha_1(x) + \alpha_2(x))}_{\to 0} f(x) = o(f(x)),\ x \to a.$$

3. Пусть $h(x) = o(o(f(x)))$ при $x \to a$. По определению $h(x) = \underbrace{\alpha_1(x)}_{\to 0} o(f(x))$, где, в свою очередь, $g(x) = o(f(x))$ такова, что $g(x) = \underbrace{\alpha_2(x)}_{\to 0} f(x)$. Тогда

$$h(x) = \underbrace{(\alpha_1(x)\alpha_2(x))}_{\to 0} f(x) = o(f), \quad x \to a.$$

Утверждения 4, 5 доказываются аналогично.

Теорема доказана.

Особенности асимптотических сравнений подчеркивает тот факт, что разность $o(f(x)) - o(f(x))$ не есть нуль. Еще раз обратим внимание на то, что $o(f(x))$ — отражение свойства, а не конкретная функция, так что, как видно из п. 2 теоремы, $o(f(x)) - o(f(x)) = o(f(x))$.

Асимптотические сравнения позволяют выразить естественные соотношения между важными элементарными функциями, а именно показательной, степенной и логарифмической, в плане их сопоставления на бесконечности.

Теорема 23 (о сравнении показательной, степенной и логарифмической функций). *Пусть $a > 1$ и $\alpha > 0$. Тогда*

1) $\dfrac{x^\alpha}{a^x} \to 0$, *т. е.* $x^\alpha = o(a^x)$ *при* $x \to +\infty$;

2) $\dfrac{a^{-x}}{x^{-\alpha}} \to 0$, *т. е.* $a^{-x} = o(x^{-\alpha})$ *при* $x \to +\infty$;

3) $\dfrac{\log_a x}{x^\alpha} \to 0$, *т. е.* $\log_a x = o(x^\alpha)$ *при* $x \to +\infty$;

4) $x^\alpha \log_a x \to 0$ *при* $x \to +0$.

Доказательство. 1. Докажем, что $\dfrac{x^\alpha}{a^x} \to 0$, $a > 1$, при $x \to +\infty$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $n > \alpha$. Тогда, обозначив $q = a^{1/n}$ и заметив, что $q > 1$, имеем

$$0 < \frac{x^\alpha}{a^x} < \frac{x^n}{a^x} = \left(\frac{x}{q^x}\right)^n, \quad q > 1.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\frac{x}{q^x} \to 0 \quad \text{при } x \to +\infty.$$

В свою очередь, согласно оценкам

$$\frac{[x]}{q^{[x]+1}} = \frac{1}{q}\frac{[x]}{q^{[x]}} \leqslant \frac{x}{q^x} \leqslant \frac{[x]+1}{q^{[x]+1}}q = \frac{[x]+1}{q^{[x]}}$$

(квадратные скобки символизируют целую часть числа), полученным в результате уменьшения числителя и увеличения знаменателя и соответственно увеличения числителя и уменьшения знаменателя, достаточно доказать, что

$$x_n = \frac{n}{q^n} \to 0.$$

Покажем, что x_n начиная с некоторого номера убывает. Действительно,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{q} \to \frac{1}{q} < 1$$

по крайней мере с некоторого номера. По теореме 6 о пределе и неравенстве существует такое n_0, что

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$

для любого $n \geqslant n_0$, т. е. последовательность x_n строго убывает начиная с n_0 и по теореме 13 Вейерштрасса имеет предел, значение которого можно найти следующим образом. Запишем очевидное равенство

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n}\,\frac{1}{q}\,x_n \tag{$*$}$$

и заметим, что $\lim x_{n+1} = \lim x_n$ ввиду того, что это предел одной и той же последовательности. Переходя к пределу в равенстве $(*)$, получаем, что $\lim x_n = 0$.

Соотношение $\dfrac{a^{-x}}{x^{-\alpha}} \to 0$, $x \to +\infty$, очевидно, эквивалентно доказанному.

3. Докажем, что $\dfrac{\log_a x}{x^\alpha} \to 0$ при $x \to +\infty$. Сделаем замену, при которой x^α перейдет в a^y, т. е. положим $x = a^{y/\alpha}$. Ясно, что при этой замене $\log_a x = y/\alpha$. Стремление $x \to +\infty$ равносильно тому, что $y \to +\infty$, и с учетом доказанного в п. 1 и теоремы о пределе композиции имеем

$$\frac{\log_a x}{x^\alpha} = \frac{y/\alpha}{a^y} \to 0, \quad y \to +\infty.$$

4. Докажем, что $x^\alpha \log_a x \to 0$ при $x \to +0$. Сделав замену $x = 1/t$, при которой $x \to +0$ соответствует $t \to +\infty$, по теореме о пределе композиции получим

$$x^\alpha \log_a x = \frac{1}{t^\alpha}\log_a \frac{1}{t} = -\frac{\log_a t}{t^\alpha} \to 0, \quad t \to +\infty,$$

ввиду п. 3.

Теорема доказана.

6.2. Главная часть функции. Эквивалентные функции.

Определение главной части. Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка X. Функцию $g(x)$ называют *главной частью* $f(x)$ при $x \to a$ и пишут $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$, если

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{при } x \to a. \tag{$\dagger$}$$

Выделение главной части позволяет в плане предельных свойств заменять функцию более простой функцией с полным осознанием того, чем мы при переходе к пределу жертвуем, а именно слагаемым со свойством $o(g(x))$. Вместе с тем важно подчеркнуть, что главная часть играет большую роль только в процессе предельного перехода, и невозможно понять, насколько функция отличается от ее главной части в какой-то фиксированной точке вблизи той, в которой происходит рассмотрение.

Полезно иметь в виду, что если $g(x) \neq 0$ для x из некоторой окрестности точки a, то определяющее главную часть равенство можно записать так:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + o(1) \quad \text{при } x \to a, \tag{$*$}$$

где $o(1)$ — просто бесконечно малая, т. е. функция, имеющая пределом нуль. Равенство $(*)$ можно записать так:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{$**$}$$

Это равенство обычно служит основой для определения асимптотической эквивалентности функций. А именно, если выполнено равенство $(**)$, то функции f и g называют *эквивалентными* при $x \to a$ и используют при этом обозначение $f(x) \sim g(x)$. Поскольку равенства $(**)$ и $(\dagger)$ равносильны, можно и равенство $(\dagger)$ взять за основу определения асимптотической эквивалентности функций, однако равенство $(**)$ имеет более симметричный вид и лучше подчеркивает равноправность эквивалентных функций, что, в свою очередь, лучше соответствует представлению об эквивалентности.

Установленные ранее предельные свойства элементарных функций, выраженные в замечательных пределах, могут быть записаны в терминах асимптотических сравнений.

Теорема 24 (о главных частях элементарных функций). *Имеют место следующие асимптотические равенства при $x \to 0$:*

$$e^x = 1 + x + o(x),$$

$$\ln(1+x) = x + o(x),$$

$$\sin x = x + o(x),$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x).$$

Доказательство. Механизм получения выписанных асимптотических равенств один и тот же для всех них, поэтому покажем, в чем он состоит, например, на первом равенстве. Известно, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{†}$$

Введем обозначение для разности функции под знаком предела и самого предела, т. е. пусть

$$\frac{e^x-1}{x}-1=\alpha(x).$$

Равенство (†) равносильно тому, что $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$. С использованием введенного обозначения имеем $e^x=1+x+\alpha(x)\cdot x$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$, а это и означает требуемое равенство.

§ 7. Непрерывные функции

7.1. Определение непрерывной функции.

Многие функции, с которыми приходится иметь дело в математике, физике, и т. д. меняются, переходя от одного своего значения к другому, плавно, а не скачкообразно. Выражаясь образно, если область определения такой функции — отрезок, то график можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Такие функции называются непрерывными и играют исключительно важную роль в анализе.

Определение непрерывности функции в точке. Функцию $f: X\to\mathbb{R}$ называют *непрерывной в точке* $a\in X$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\quad |x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Для точки $a\in X$ возможны два случая: a — точка сгущения X или a — не точка сгущения (в последнем случае говорят, что a — *изолированная точка множества* X). Если a изолированная, то по определению предельной точки

$$\exists\delta>0 \mid (a-\delta,a+\delta)\cap X=\{a\}.$$

Для этого δ посылка $|x-a|<\delta$ выполняется для одной единственной точки a, для которой, конечно, $|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$. Стало быть, в изолированной точке любая функция всегда непрерывна.

Пусть a — точка сгущения X. В этом случае можно говорить о пределе $f(x)$ в точке a и условие в определении непрерывности означает, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

т. е. предел совпадает со значением.

Если a не принадлежит X, но является точкой сгущения X, формально говорить о непрерывности нельзя. Однако можно считать, что $f(x)$ непрерывна в a, если $f(x)$ имеет конечный предел в a. Действительно, если доопределить $f(x)$ в точке a, полагая $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, то полученная функция будет непрерывной в a. Например, функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена в нуле, однако из этой функции получается непрерывная функция, если доопределить ее в нуле, полагая $f(0) = 1$.

Если функция не непрерывна в точке a, то говорят, что она *разрывна в данной точке* или, более эмоционально, что она *терпит разрыв в этой точке*. Разрыв в точке может произойти в связи с разными обстоятельствами. В зависимости от приведших к разрыву причин различают *устранимые* разрывы, когда, поменяв значение функции, можно превратить ее в непрерывную, и *неустранимые*, когда это невозможно. Для устранимости разрыва надо иметь по крайней мере оба односторонних предела, и эта ситуация выделается отдельно. А именно говорят, что функция *имеет в точке $a \in X$ разрыв первого рода*, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы. При этом пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называют соответственно *значениями функции f в точке a слева и справа* и обозначают символами $f(a-0)$ и $f(a+0)$, см. п. 4.1 (если $a = 0$, то обычно пишут короче $f(-0)$ и $f(+0)$). Если значения $f(a-0)$ и $f(a+0)$ совпадают, то говорят, что *разрыв устранимый*, в противном случае разрыв называют *неустранимым*.

Все разрывы, не относящиеся к разрывам первого рода, называют *разрывами второго рода*. Естественно, ни о какой устранимости разрыва второго рода речи идти не может, ибо в это случае нет хотя бы одного одностороннего конечного предела.

Иногда разрыв случается в отдельной точке, при этом во всех близких (или даже всех остальных) точках функция непрерывна. Может произойти и такое, что функция имеет разрывы во всех точках области определения. Например, функция «знак числа», определяемая следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

разрывна в единственной точке $x = 0$ и имеет там неустранимый разрыв первого рода. Действительно,

$$\lim_{x\to -0} \operatorname{sgn} x = -1, \quad \lim_{x\to +0} \operatorname{sgn} x = 1,$$

так что $f(-0) \neq f(+0) \neq f(0)$. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет в нуле разрыв второго рода, а во всех остальных точках непрерывна. Функция Дирихле, определяемая так:

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

разрывна при любом $x \in \mathbb{R}$. Это свойство основано на том факте, что в любом интервале числовой прямой есть как рациональное, так и иррациональное число.

Исследование и обоснование непрерывности основано на сохранении непрерывности при алгебраических операциях и композиции.

Теорема 25. (1) *Если $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a, то $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ тоже непрерывны в точке a (последнее при условии, что $g(a) \neq 0$).*

(2) *Пусть функции f и g таковы, что определена их композиция $g \circ f$. Если $f : X \to Y$ непрерывна в точке $a \in \operatorname{dom}(g \circ f)$ и $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $f(a)$, то $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. (1) Пусть a — произвольная точка множества X. Если $a \in X$ — изолированная точка, то доказывать нечего. Если же a — предельная точка X, то утверждение немедленно следует из теоремы о связи предела и алгебраических операций.

(2) Если $a \in X$ — изолированная точка, то доказывать нечего. Для произвольной предельной точки из $\operatorname{dom}(g \circ f)$ доказательство почти дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения

для предела функции, отличие лишь в том, что на этот раз допускается возможность для $f(x)$ принимать значение, равное пределу $f(a)$, которая не влияет на ход рассуждений. Теорема доказана.

Об элементарных функциях можно сказать, что все они непрерывны в каждой точке их областей определения. Доказательство этого факта основано на оценках для соответствующих функций, установленных при их рассмотрении. Докажем, к примеру, непрерывность функции e^x в точке $a \in \mathbb{R}$. Имеем

$$e^x - e^a = e^a(e^{x-a} - 1) = e^a \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} \cdot (x - a) \to 0,$$

поскольку $x - a \to 0$, $\dfrac{e^{x-a} - 1}{x - a} \to 1$ при $x - a \to 0$.

7.2. Свойства непрерывных функций.

Мы определили непрерывность функции в какой-то фиксированной точке. Если это свойство наблюдается во всех точках некоторого множества, появляется новое глобальное свойство функции — непрерывность на множестве.

Определение. Говорят, что функция *непрерывна на множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Непрерывные на множестве функции обладают рядом замечательных свойств, которые постоянно будем использовать.

Теорема 26 (Больцано — Коши о промежуточных значениях). *Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на промежутке $\langle a, b\rangle$ и*

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle,\ x_1 < x_2,$$

— два ее значения. Тогда для любого y, лежащего между y_1 и y_2, найдется такое $x \in [x_1, x_2]$, что $f(x) = y$.

Иными словами, непрерывная функция на промежутке принимает все свои промежуточные значения.

Доказательство. Пусть y расположена между y_1 и y_2. Нужно найти точку $x \in [a, b]$ такую, что $y = f(x)$. Докажем теорему методом деления отрезка пополам. Построим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, стягивающихся к одной точке, которая окажется искомой.

Пусть $[a_1, b_1] = [x_1, x_2]$ и $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ — середина отрезка $[a_1, b_1]$. Если y попадает между $f(c_1)$ и $f(b_1)$, то $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$, а если между $f(c_1)$, и $f(a_1)$, то $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$. Продолжая, получаем последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, такую, что

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

и y оказывается между значениями $f(a_n)$ и $f(b_n)$. Существует точка $x \in [a_1, b_1]$, общая для всех этих отрезков, причем такая точка одна и концы a_n, b_n отрезков стремятся к этой точке. Ввиду непрерывности f имеем $f(a_n) \to f(x)$ и $f(b_n) \to f(x)$. Кроме того, по построению для любого $n \in \mathbb{N}$ точка y лежит между $f(a_n)$, и $f(b_n)$, откуда снова по теореме о пределе зажатой последовательности получаем, что $f(x) = y$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Важно, что область определения — промежуток.

2. В доказательстве теоремы 26 заложен способ решения уравнений $f(x) = 0$.

Теорема 27 (Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях). *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Тогда существуют такие точки $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$, что для любого $x \in [a, b]$ выполнены неравенства $f(x_{\min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{\max})$, т. е. f принимает наибольшее и наименьшее значения на отрезке.*

В частности, f ограничена.

Доказательство Докажем существование наибольшего значения, с наименьшим все аналогично. Пусть $u = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ (возможно $u = +\infty$) — точная верхняя граница множества значений функции f на $[a, b]$.

Если $u < +\infty$, то по критерию точной верхней границы имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in [a, b] \quad u - \varepsilon < f(x) \leqslant u. \tag{$*$}$$

Если $u = +\infty$, то по определению неограниченного множества имеем

$$\forall \mathrm{E} > 0\ \exists x \in [a, b] \quad \mathrm{E} < f(x). \tag{$**$}$$

Построим последовательность точек из $[a, b]$ такую, что последовательность значений функции f в этих точках стремится к u. Такая последовательность приведет к требуемой точке. Если $u < +\infty$, то полагаем $\varepsilon = 1/n$ в $(*)$ и берем полученный x в качестве x_n, так что оказывается $u - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leqslant u$. Если же $u = +\infty$, то полагаем $\mathrm{E} = n$ в $(**)$ и берем полученный x в качестве x_n, так что $n < f(x_n)$.

Получили некоторую последовательность $x_n \in [a,b]$. Сама последовательность, возможно, предела не имеет, однако по теореме 12 Больцано — Вейерштрасса из x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}. Положим $x_{\max} = \lim\limits_{k} x_{n_k}$. Поскольку $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ для любого k, по теореме о пределе последовательности и неравенстве имеем $x_{\max} \in [a,b]$. В силу непрерывности $f(x)$ и теоремы о предельном переходе в неравенстве получаем

$$f(x_{n_k}) \to f(x_{\max}), \quad f(x_{n_k}) \to u = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

откуда

$$f(x_{\max}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

стало быть, $f(x_{\max})$ — наибольшее среди всех значений функции f на $[a,b]$.

В частности, поскольку функция f по условию принимает на $[a,b]$ лишь конечные значения и среди них оказалось наибольшее, множество значений непрерывной на отрезке функции ограничено. Теорема доказана.

В доказательстве существенно используется то, что функция задана на замкнутом и ограниченном промежутке.

Оглавление

Основы математического анализа для студентов-физиков. Лекции. 1. Предел и непрерывность функций одной переменной

Дятлов Глеб Владимирович

Подписано в печать 10.10.2014. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4.7. Уч.-изд. л. 4.7. Тираж 200 экз. Заказ № 216.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.