УДК 517.1
ББК 22.16
Д998

Дятлов Г. В.

Основы математического анализа для студентов-физиков. Лекции. 6. Мера и интеграл / Г. В. Дятлов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2014. — 56 с.

ISBN 978–5–86134–157–8

Пятый раздел курса лекций, прочитанных автором студентам физического факультета Новосибирского государственного университета в 2014/15 учебном году. Включает в себя элементы теории меры и интеграла Лебега.

Для студентов специальностей с углубленным изучением математического анализа.

УДК 517.1
ББК 22.16
Д998

Д $\dfrac{1602070000\text{–}02}{\text{Я}82(03)\text{–}15}$ Без объявл.

© Дятлов Г. В. 2015

ISBN 978–5–86134–157–8

§ 1. Интеграл Римана

В этой главе мы познакомимся с тем, как интегрируются функции многих переменных. Аналогично интегралу от функции одной переменной интеграл от функции многих переменных ассоциируется с объемом подграфика, массой тела при известной плотности, центром масс и т. п. В первую очередь интеграл надо определить.

В одномерной ситуации интеграл (Римана) определяется как предел интегральных сумм Римана или Дарбу. Интегральные суммы появляются как суммы площадей, соответствующих разбиениям промежутка и значениям функции в каких-то точках из промежутков разбиения (см. гл. 3, § 1). Интеграл Римана для функций нескольких переменных строится аналогично. Остановимся подробнее на определении интеграла Римана от функции двух переменных, для большего числа переменных конструкция аналогична. Более того, для функций в произвольной размерности мы построим иную, более привлекательную конструкцию интеграла.

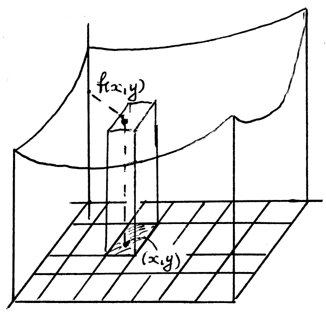

Рис. 1.1.

Пусть $f(x, y)$ — функция, заданная на прямоугольнике в $\mathbb{R}^2$. Если f неотрицательна, то интеграл ассоциируется с объемом подграфика. Изобразим график функции как нависающую над прямоугольником поверхность в $\mathbb{R}^3$ (рис. 1.1). Естественно возникает часть $\mathbb{R}^3$, ограниченная снизу координатной плоскостью xOy, по сторонам вертикальными плоскостями и сверху — графиком функции f. Объем этой фигуры и будет ассоциироваться с интегралом от функции f. Его построение, по существу, не отличается от построения интеграла от функции одной переменной. А именно разобьем данный прямоугольник на прямоугольники прямыми, параллельными координатным осям Ox, Oy, в каждом из получившихся прямоугольников возьмем по точке (x, y), найдем значение $f(x, y)$ в каждой из выбранных точек, умножим его на площадь того участка, в котором точка выбрана, получив тем самым объем соответствующего столбика (см. рис. 1.1). Затем все такие объемы просуммируем, в итоге получим интегральную сумму Римана. Беря разные разбиения так, чтобы максимум длин сторон промежутков разбиения стремился к нулю, в пределе должны получить объем подграфика функции f.

Оформим более аккуратно изложенные соображения.

1.1. Интеграл Римана от функции на двумерном промежутке.

Пусть на двумерном промежутке (прямоугольнике)

$$A = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\} \subset \mathbb{R}^2$$

задана ограниченная функция $f(x,y)$. Пусть на отрезках $[a,b]$ и $[c,d]$ заданы соответственно разбиения $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$, $c = y_1 < y_2 < \cdots < y_{m+1} = d$. Возникает разбиение P промежутка A на множества $A_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Число $\tau(P) = \max\limits_{i,j}(\Delta x_i, \Delta y_j)$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, называют *параметром разбиения* P. Объединение всех A_{ij} равно A, и разные участки разбиения либо не пересекаются, либо пересекаются по точке или отрезку. У каждого A_{ij} есть площадь (мера)

$$m(A_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

В каждом из A_{ij} выберем по точке $\xi_{ij} = (x_i, y_j)$. Получаем разбиение с выделенными точками (P, ξ). Составим сумму Римана, отвечающую такому разбиению:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}) m(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Говорят, что f *интегрируема по Риману на промежутке* A *и ее интеграл равен* I, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (P,\xi) \quad \tau(P) < \delta \to \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}) m(A_{ij}) - I \right| < \varepsilon.$$

Интеграл от f по A обозначают символом $\displaystyle\int\limits_A f(x,y)\,dxdy$.

1.2. Интеграл Римана по множеству.

В случае одной переменной интегрирование всегда осуществлялось по промежутку. В многомерной ситуации возникает потребность интегрирования не только по прямоугольникам. Например, чтобы найти объем части цилиндра, надо будет интегрировать по основанию цилиндра, которое прямоугольником не является.

Определение интеграла Римана по множеству. Пусть E — ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$, причем E (как ограниченное множество) содержится в промежутке $A = [a, b] \times [c, d]$. Функцию

$$\chi_E(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin E, \end{cases}$$

называют *характеристической функцией множества* E. Она определена на всем $\mathbb{R}^2$. Пусть $f(x, y)$ — ограниченная функция, заданная на A. *Интегралом от функции* f *по множеству* E называют число

$$\int\limits_E f(x, y)\, dxdy = \int\limits_A f(x, y)\chi_E(x, y)\, dxdy.$$

Тем самым интеграл по множеству сводится к интегралу по промежутку, но от другой функции.

Здесь возникает такая проблема. Сама функция могла быть достаточно хорошей, например настолько, что она интегрируема по промежутку. Однако умножение исходной функции на характеристическую функцию множества может привести к не столь хорошей функции, многое зависит от множества E.

Пример 1. Пусть $f(x, y) = 1$ для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, а

$$E = (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1],\ y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\},$$

где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Иначе говоря, E состоит из всех точек квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ с рациональными координатами. Оказывается, что достаточно хорошую функцию, всюду равную единице, по множеству E проинтегрировать нельзя. Действительно, возьмем какое-либо разбиение множества $[0, 1] \times [0, 1]$ на промежутки $A_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. В каждом из прямоугольников разбиения есть точки множества E и точки из его дополнения. Следовательно, для любого разбиения выбором выделенных точек $\xi_{ij} \in A_{ij}$ можно интегральную сумму Римана сделать равной как нулю, так и единице. Ясно, что в нашем случае интегральные суммы не имеют предела. Рассмотренный пример показывает, что, переходя к интегрированию по множеству, мы должны понять, по каким множествам можно интегрировать, а по каким нет.

1.3. Множества, измеримые по Жордану.

Прежде чем выяснять, какой класс множеств допустим для интегрирования, определим интеграл Римана через суммы Дарбу.

Определение интегральных сумм Дарбу. Пусть на двумерном промежутке $A = [a,b] \times [c,d]$ задана ограниченная функция $f(x,y)$, и пусть P — разбиение промежутка A на множества $A_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Суммы

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sup_{(x,y)\in A_{ij}} f(x,y) \Delta x_i \Delta y_j,$$

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \inf_{(x,y)\in A_{ij}} f(x,y) \Delta x_i \Delta y_j$$

называют соответственно *верхней* и *нижней суммами Дарбу функции f на промежутке A.*

Теорема 1 (критерий Дарбу). *Пусть f — ограниченная функция на множестве $A = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$. Функция f интегрируема по Риману на A и ее интеграл равен I тогда и только тогда, когда верхняя и нижняя суммы Дарбу имеют предел, равный I, т. е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P \quad \tau(P) < \delta \to |S(f,P) - I| < \varepsilon$$

и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P \quad \tau(P) < \delta \to |s(f,P) - I| < \varepsilon.$$

Результат теоремы достаточно естествен, и доказывать ее мы не будем.

Вернемся к множествам и поставим вопрос: пусть E — некоторое множество в промежутке $A = [a,b] \times [c,d]$, и мы хотим посчитать его площадь, т. е. проинтегрировать по этому множеству функцию, равную единице. Как выглядят суммы Дарбу для характеристической функции этого множества? Нетрудно найти, что точная верхняя граница $\sup\limits_{(x,y)\in A_{ij}} \chi_E(x,y)$ равна 1, если множество A_{ij} пересекается с E, и 0, если не пересекается:

$$\sup_{(x,y)\in A_{ij}} \chi_E(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } E \cap A_{ij} \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } E \cap A_{ij} = \varnothing. \end{cases}$$

Для точной нижней границы картина будет несколько иная, а именно

$$\inf_{(x,y)\in A_{ij}} \chi_E(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } A_{ij} \subset E, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

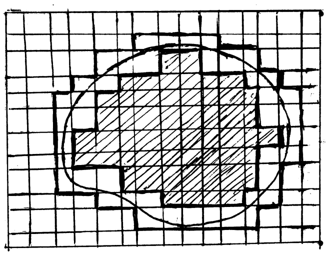

Рис. 1.2.

Запишем выражения для сумм Дарбу:

$$S(\chi_E, P) = \sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j,$$

где суммирование происходит по таким i, j, для которых $A_{ij} \cap E \neq \varnothing$. На рис. 1.2 объединение всех таких A_{ij} — это наименьшая по включению угловатая фигура, которая целиком содержит наше множество. Нижняя сумма Дарбу имеет такой же вид, как и верхняя, но суммирование производится по таким i, j, для которых $A_{ij} \subset E$ (на рис. 1.2 объединение всех таких множеств соответствует наибольшей из угловатых фигур, содержащихся в E). Получилось приближение площади множества E площадями угловатых фигур, составленных из прямоугольников, имеющих с E непустое пересечение. Если при измельчении разбиения площади внешней и внутренней угловатых фигур будут иметь общий предел, то такое множество можно считать хорошим.

Определение меры Жордана. Пусть E — множество в промежутке $A = [a, b] \times [c, d]$. *Внешней*, соответственно *внутренней*, *мерой Жордана* называют величину

$$\mu_J^*(E) = \inf_P \sum_{A_{ij} \cap E \neq \varnothing} m(A_{ij}), \quad \mu_{J*}(E) = \sup_P \sum_{A_{ij} \subset E} m(A_{ij}).$$

При определении внешней и внутренней мер Жордана происходит следующее. Берем угловатую фигуру, составленную из (двумерных) промежутков, задевающих множество E, находим ее площадь. Затем берем более мелкое разбиение, т. е. такое, у которого параметр уменьшен, делаем то же самое, и так продолжаем процесс. Совокупность сумм Дарбу для характеристических функций таких множеств при этих обстоятельствах заполнит некоторое числовое множество, и его точная нижняя граница есть верхняя мера Жордана. Образно можно представлять себе верхнюю меру как наиболее точное приближение площади фигуры снаружи. Аналогичная картина наблюдается изнутри, только там берется точная верхняя граница по всевозможным угловатым фигурам, полностью лежащим в E.

Говорят, что *множество E измеримо по Жордану*, если его внешняя и внутренняя меры совпадают, и их общее значение называют *мерой Жордана множества E*:

$$\mu_J(E) = \mu_J^*(E) = \mu_{J*}(E).$$

Не все множества измеримы по Жордану.

Пример 2 (множество, не измеримое по Жордану). Множество E из примера 1 не измеримо по Жордану, так как его внешняя мера равна 1, а внутренняя — 0.

1.4. Свойства меры Жордана и интеграла Римана.

1. Множество, ограниченное кусочно гладкой кривой (соответственно кусочно гладкими поверхностями), измеримо по Жордану, и по нему можно интегрировать.

2. Если f — непрерывная функция на двумерном промежутке $A = [a,b]\times[c,d]$, то f интегрируема по Риману по любому измеримому подмножеству $E \subset A$ (аналогичное можно утверждать и для функции трех переменных, заданной на трехмерном промежутке).

3. Интеграл линеен в том смысле, что если функции f, g интегрируемы по измеримому множеству E и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то их линейная комбинация с коэффициентами α, β также интегрируема и

$$\int\limits_E (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \int\limits_E f(x,y)\,dxdy + \beta \int\limits_E g(x,y)\,dxdy.$$

4. Если f интегрируема по промежутку $A = [a,b] \times [c,d]$, в частности, если она непрерывна, то

$$\int\limits_A f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy. \quad (1)$$

Интеграл $\int\limits_A f(x,y)\,dxdy$ называют *кратным*, в частности, для функции двух переменных — двойным, трех переменных — тройным. Каждый из интегралов в правой части формулы (1) называют *повторным.* О кратных и повторных интегралах подробнее речь пойдет ниже, в § 3.

1.5. Мотивы развития понятия интеграла.

Далее мы будем строить интеграл Лебега, и прежде чем к этому приступить, поговорим о том, для чего нужен интеграл Лебега. В принципе, интеграла Римана практически всегда достаточно. Однако есть по крайней мере два момента, которые с практических позиций недостаточно удовлетворительны с точки зрения интеграла Римана.

1. Несобственный интеграл. Интеграл Римана определяется для ограниченной функции на ограниченном множестве. Естественно, бывают случаи, в которых необходимо интегрировать либо неограниченную функцию, либо по неограниченному множеству. В таком случае приходится обращаться к несобственному интегралу, т. е. устраивать еще один предельный переход. Интеграл Лебега позволяет интегрировать неограниченные функции по неограниченному множеству.

Например, в интеграле $\int\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy$, где f — отличная от нуля непрерывная функция, подынтегральная функция не ограничена в любой окрестности нуля. Значит, в смысле Римана такой интеграл найти невозможно, и надо обращаться к несобственному интегралу. Естественно возникают вопросы: можно ли здесь сделать замену переменных, свести этот кратный интеграл к повторным? В интеграле Римана ответы на такие вопросы вызывают затруднения, в интеграле Лебега ответы на эти вопросы проще.

2. Интеграл, зависящий от параметра. Рассмотрим, к примеру, известный нам интеграл, зависящий от параметра, а именно функцию

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Подынтегральная функция является функцией двух переменных, и по одной из них мы совершаем интегрирование, а другую считаем буквенной постоянной, т. е. параметром. Сходимость этого интеграла была в свое время исследована и особых проблем не составляла. Но кроме вопроса об области существования этой функции есть вопросы о ее свойствах непрерывности и дифференцируемости. Иначе говоря, интересно, верны ли равенства

$$\Gamma(\alpha_0) \stackrel{?}{=} \lim_{\alpha\to\alpha_0}\Gamma(\alpha),$$

$$\frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \stackrel{?}{=} \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial\alpha}(x^{\alpha-1}e^{-x})\,dx.$$

Польза последнего равенства, например, в том, что для нахождения производной интеграла как функции от параметра можно внести операцию дифференцирования под интеграл, продифференцировать подынтегральную функцию и быть уверенным, что интеграл от нее является производной исходного интеграла. Проанализировать законность такой операции можно и с интегралом Римана, но здесь появляется дополнительная конструкция несобственного интеграла, вносящая свои сложности. В интеграле Лебега этих трудностей не возникает — это обеспечивается соответствующим его свойством.

Мы будем конструировать интеграл Лебега на основе понятия меры множества. Это понятие полезно само по себе, в частности, оно лежит в основе теории вероятностей.

§ 2. Мера и интеграл Лебега

2.1. Замечание о суммировании мелочи по Лебегу.

Представьте себе, что у вас есть кучка мелочи и вам хочется узнать, каково количество денег в этой кучке. Можно последовательно перебирать все монеты и складывать. Можно поступить иначе, а именно сначала рассортировать монеты по номиналу, затем посчитать количество монет в каждой из стопок, умножить эти количества на соответствующие номиналы и получить сумму денег. В этом и состоит основная идея интеграла Лебега.

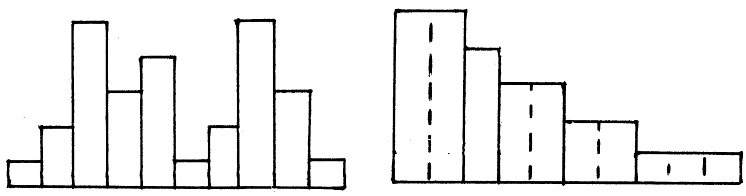

Рис. 2.1. Рис. 2.2.

Изобразим схематично имеющуюся мелочь, расположив ее какнибудь. На рис. 2.1 высота столбика диаграммы соответствует номиналу монеты, и каждый столбик означает одну монету. Можно идти слева направо от одной монеты к другой и складывать. Так поступают при формировании интегральных сумм Римана. А можно упорядочить монеты по номиналу, т. е. сначала расположить все монеты наивысшего номинала, затем следующего, и, продолжая такое расположение, исчерпать все монеты. Получится диаграмма, как на рис. 2.2. После этого количество монет каждого из номиналов умножается на их номинал и результаты складываются. Так происходит при построении интеграла Лебега.

Как это выглядит для функции? При определении интеграла Римана сначала промежуток, на котором определена функция, разбивается на отрезки, берется приближенная площадь каждого из получаемых прямоугольников, и затем эти площади складываются (см. рис. 1.1 в гл. 3). Площадь получается как площадь соответствующих столбиков. Вместо такого способа можно разбить на промежутки не область определения, а множество значений, провести через узлы разбиения горизонтальные прямые и брать длины пересечений этих линий с подграфиком функции (рис. 2.3(a)) для значений y, соответствующих узлам разбиения. Возникает функция $y \mapsto \mu(\{x \mid f(x) \geqslant y\})$, сопоставляющая каждому $y \geqslant 0$ сумму длин промежутков, на которых $f(x) \geqslant y$. После этого можно определить интеграл так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_0^{y_{\max}} \mu(\{x \mid f(x) \geqslant y\})\,dy.$$

Иначе говоря, на этот раз идут не слева направо и складывают высоты, а идут по множеству значений снизу вверх и складывают длины (меры) соответствующих множеств.

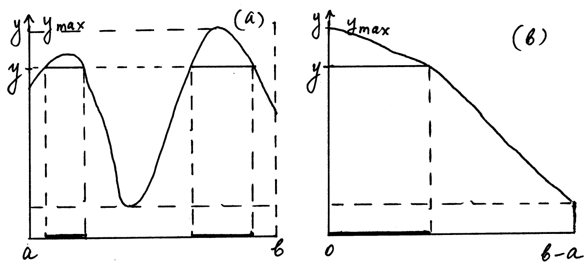

Рис. 2.3.

Множества вида $\{x \mid f(x) \geqslant y\}$ называют *множествами Лебега функции* f.

Изобразим схематично график функции $\mu(\{x \mid f(x) \geqslant y\})$ на рис. 2.3(b), расположив ось аргументов не горизонтально, а вертикально, чтобы лучше видеть, как с ростом y изменяются значения функции. Если y небольшое, то график функции f лежит выше линии $y = a$ и мера множества тех x, для которых $f(x) \geqslant y$, равна длине $b - a$ отрезка, на котором изменяется x. С ростом y начинают появляться такие участки, где $f(x) < y$, в результате чего мера соответствующих множеств становится меньше. Наконец, при $y = y_{\max}$

множество состоит на нашем графике из одной точки, и мера его равна нулю. Получилась невозрастающая функция переменной y, и эту функцию мы интегрируем. Как известно, монотонная функция интегрируема по Риману. Получается, что нам удастся проинтегрировать указанным способом любую функцию, если удастся определить, как находится мера множества $\{x \mid f(x) \geqslant y\}$. Если исходная функция f гладкая, то каждое множество указанного вида состоит из конечного или счетного набора промежутков и его длина находится как сумма ряда. Если функция произвольная, то в качестве множеств Лебега могут возникать довольно причудливые множества, поэтому надо научиться приписывать меру множествам довольно общей природы. Например, для функции Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$ множества Лебега это либо множество всех чисел отрезка $[0, 1]$, либо множество всех рациональных чисел этого отрезка, либо пустое множество. Какова «длина» множества рациональных чисел из $[0, 1]$? Как известно, по Жордану это множество неизмеримо.

Тем самым возникает потребность определить меру любого множества. Мера должна обладать простейшими естественными свойствами типа аддитивности: если множество разбить на два множества, то мера всего множества должна равняться сумме мер его частей. Однако оказывается, что определить меру произвольного множества в $\mathbb{R}^n$ разумным образом нельзя. Появляется вопрос: а для множеств какого по возможности широкого класса множеств меру определить можно? Эту задачу мы и будем обсуждать.

2.2. Конструкция меры Лебега.

Определение элементарного множества и его меры. *Элементарным множеством в* $\mathbb{R}^n$ называют конечное объединение n-мерных промежутков, т. е. множеств вида

$$\langle a^1, b^1 \rangle \times \dots \times \langle a^n, b^n \rangle = \{(x^1, \dots, x^n) \mid x^1 \in \langle a^1, b^1 \rangle, \dots, x^n \in \langle a^n, b^n \rangle\}.$$

Здесь угловые скобки могут быть заменены либо круглыми, либо квадратными, т. е. концы соответствующих промежутков могут им принадлежать, а могут и не принадлежать.

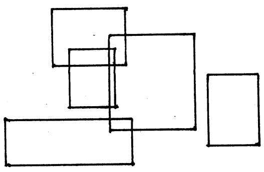

Рис. 2.4.

Пример элементарного множества в $\mathbb{R}^2$ изображен на рис. 2.4. Заметим, что прямоугольники могут налегать один на другой или располагаться отдельно от других прямоугольников.

Мера элементарного множества определяется так. Пусть B — элементарное множество. Представим B в виде конечного числа непересекающихся промежутков A_i. Для этого надо «нарезать» имеющиеся прямоугольники по прямым, на которых лежат их стороны. Получаемые промежутки не обязательно являются теми промежутками, которые данное множество породили. Тот факт, что B представлено в виде объединения попарно не пересекающихся промежутков $A_i = \langle a_i^1, b_i^1 \rangle \times \cdots \times \langle a_i^n, b_i^n \rangle$, записывается так:

$$B = \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i.$$

Такое объединение называют также *дизъюнктным объединением*. В указанной ситуации мера B определяется так:

$$m(B) = \sum_{i=1}^{N} m(A_i),$$

где

$$m(A_i) = \prod_{k=1}^{n} \left(b_i^k - a_i^k \right) = (b_i^1 - a_i^1) \cdot \ldots \cdot (b_i^n - a_i^n).$$

Мера элементарного множества определена.

Можно показать, что мера элементарного множества не зависит от способа его представления в виде дизъюнктного объединения промежутков.

Определение кольца, алгебры и σ-алгебры. Множество R подмножеств в $\mathbb{R}^n$ называют *кольцом*, если оно выдерживает объединение, пересечение и взятие разности двух множеств. Иначе говоря, должны быть выполнены свойства:

1) если $A, B \in R$, то $A \cup B \in R$;
2) если $A, B \in R$, то $A \cap B \in R$;
3) если $A, B \in R$, то $A \setminus B \in R$.

Если R выдерживает счетные объединения, т. е. если для любых $A_i \in R$, $i \in \mathbb{N}$, их объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ принадлежит R, то в таком случае R называют *σ-кольцом.*

Если в R есть множество E, содержащее все остальные множества из R, то кольцо называют *алгеброй*, а множество E — *единицей.* Если R — σ-кольцо и алгебра, то R — *σ-алгебра.*

Пример 1. Совокупность всех элементарных множеств в $\mathbb{R}^n$ является кольцом, но не алгеброй. Это не σ-кольцо: объединение счетного набора угловатых фигур может оказаться фигурой не угловатой.

Пример 2. Совокупность всех n-мерных промежутков кольцом не является, ибо объединение двух промежутков может не быть промежутком.

Пример 3. Совокупность всех элементарных множеств, содержащихся в некотором промежутке $E = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n]$, является алгеброй, которая обозначается через $R(E)$. Но σ-алгеброй оно не будет, так как элементарные множества не образуют σ-кольцо.

Определение меры. Пусть R — кольцо множеств в $\mathbb{R}^n$. Функцию $m : R \to [0, \infty)$ называют *мерой на кольце R*, если она обладает свойством (конечной) аддитивности, т. е. для любых множеств $B, B_i \in R$, $i = 1, \ldots, N$, таких, что $B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} B_i$, верно равенство

$$m(B) = \sum_{i=1}^{N} m(B_i).$$

Меру m называют *счетно аддитивной* или *σ-аддитивной*, если она обладает свойством счетной аддитивности, т. е. для любых $B, B_i \in R$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, верно равенство

$$m(B) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i).$$

Известно, что мера на совокупности элементарных множеств счетно аддитивна. Это важное свойство, однако его доказательство неэлементарно, и мы этого делать не будем. Нам надо расширить совокупность элементарных множеств насколько это возможно и распространить меру на расширенную совокупность с сохранением свойства счетной аддитивности. Хотя определить меру для всех множеств не получается, набор множеств, которым можно приписать значение меры, достаточно широк и охватывает все разумные множества. Распространение меры является результатом некоторой конструкции, для будущих физиков с практической точки зрения бесполезной, но с общекультурных позиций с этим процессом желательно ознакомиться.

Определение внешней меры Лебега. Пусть E — n-мерный промежуток. Для произвольного множества $C \subset E$ определим его *внешнюю меру* μ^*, полагая

$$\mu^*(C) = \inf_{\substack{A_i \in S, \\ C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

где S — совокупность n-мерных промежутков в E.

Тем самым происходит следующее. Берем произвольное подмножество в E, покрываем его объединением не более чем счетного набора промежутков, находим сумму мер всех промежутков из покрытия и находим точную нижнюю границу таких сумм по всем наборам покрывающих E промежутков.

Определение внешней меры для множеств только из некоторого объемлющего промежутка E обеспечивает ее конечность: она не может быть больше чем мера промежутка E.

Конструкция, аналогичная внешней мере Лебега, встречалась выше при определении внешней меры Жордана. Главное отличие в этих конструкциях в возможности рассмотрения счетных наборов промежутков в конструкции внешней меры Лебега. Оно, в частности, приводит к тому, что внешняя меры Лебега не больше внешней меры Жордана.

Свойства внешней меры Лебега.

1. Значение $\mu^*(C)$ определено и конечно для каждого множества $C \subset E$.

2. Внешняя мера мерой не является, так что словосочетание «внешняя мера» — это единый термин. В общем случае она субаддитивна, т. е. для произвольных $A, B \subset E$ имеет место неравенство

$$\mu^*(A \sqcup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

причем неравенство может оказаться строгим.

3. $\mu^*(C) \leqslant \mu_J^*(C)$.

Мы пришли к следующей ситуации. На совокупности элементарных множеств определили меру, однако сама совокупность элементарных множеств для целей построения интеграла недостаточна. Затем мы распространили эту меру на совокупность всех подмножеств данного промежутка, но в результате утратилось свойство счетной аддитивности. Следующим шагом будет выбор такой совокупности подмножеств данного промежутка, которая достаточна для построения интеграла Лебега и на которой внешняя мера счетно аддитивна.

Определение измеримого множества. Множество $C \subset E$ называют *измеримым по Лебегу*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in R(E) \quad \mu^*(B \Delta C) < \varepsilon,$$

где $B \Delta C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$ — симметрическая разность множеств B и C. Совокупность всех измеримых по Лебегу множеств в E будем обозначать символом $M(E)$.

Высказывание «для любого — существует» выражает наше желание приближать измеримое множество элементарными сколь угодно точно по внешней мере.

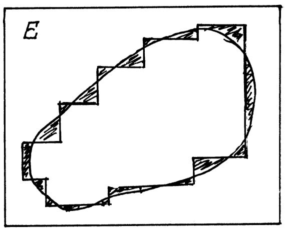

Рис. 2.5.

Образно картину можно представить следующим образом. Берем какое-то множество $C \subset E$ и элементарное множество (рис. 2.5). Рассматриваем «зазор» между этими множествами, т. е. множество, состоящее из точек, которые попали хотя бы в одно из множеств и не попали в другое, и если такой зазор можно сделать сколь угодно малым, т. е. сколь угодно точно по внешней мере приблизить данное множество элементарным, то множество C считают измеримым.

Свойства $M(E)$.

1. Совокупность $M(E)$ является σ-алгеброй.

2. $M(E)$ не совпадает с множеством всех подмножеств E, т. е. существуют неизмеримые множества. Таких множеств, с одной стороны, довольно много, а с другой, на практике они, можно сказать, никогда не встречаются. Тем самым все множества, с которыми мы встретимся, измеримы.

3. Сужение внешней меры Лебега μ^* на совокупность измеримых множеств является мерой, причем счетно аддитивной.

Свойство 3 говорит о том, что строгое неравенство в свойстве субаддитивности внешней меры может быть только при рассмотрении неизмеримых множеств. Если брать измеримые множества, то строгого неравенства не получим — всегда окажется равенство.

Определение меры Лебега в $\mathbb{R}^n$. Если C — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, то его измеримость определена выше и его мера Лебега $\mu(C)$ равна его внешней мере: $\mu(C) = \mu^*(C)$. Пусть множество C неограниченное. Разобьем все $\mathbb{R}^n$ на попарно не пересекающиеся промежутки E_i, т. е. пусть $\mathbb{R}^n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. Если все пересечения $C \cap E_i$ измеримы (каждое в своем промежутке), то множество C называют *измеримым в* $\mathbb{R}^n$ и его меру определяют как сумму мер его пересечений с E_i:

$$\mu(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C \cap E_i).$$

Ряд в правой части последнего равенства всегда имеет сумму, возможно бесконечную, так что мера Лебега есть у любого измеримого множества в $\mathbb{R}^n$. Не вполне корректно называть мерой такую сумму, если она бесконечна, и иногда о такой мере говорят как о счетно конечной. Мы, допуская вольность речи, будем говорить о мере, даже если она бесконечна.

На этом конструкция меры Лебега завершена, и теперь можно сказать, что вы как уже довольно образованные люди знаете меру, норму и предел.

Пример 4. Множество

$$A = (\mathbb{Q} \cap [0,1])^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\},$$

рассмотренное в § 1 (пример 1), как было установлено, неизмеримо по Жордану, а по Лебегу оно измеримо и мера его равна нулю. Можно это установить, находя его внешнюю меру, но это трудоемко. Пойдем другим путем. Множество рациональных чисел счетно, и множество A также счетно. Тем самым оно может быть представлено как дизъюнктное объединение одноточечных множеств: $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i = \{(x_i, y_i)\}$ — одноточечное множество. Каждое одноточечное множество измеримо, и его мера равна нулю. Следовательно, множество A измеримо как счетное объединение измеримых множеств.

Множество в $\mathbb{R}^n$, имеющее меру нуль, называют *пренебрежимым.*

1. Гладкая кривая на плоскости имеет меру нуль.

2. Гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$ — множество меры нуль в $\mathbb{R}^3$ (пока ограничимся интуитивным пониманием, что такое гладкая поверхность).

Покажем справедливость высказанных фактов на примере отрезка в $\mathbb{R}^2$. Пусть $A = [a,b] \times \{c\}$ (для простоты отрезок взят горизонтальным). Для подсчета его внешней меры надо заключать его в элементарные множества, считать их меру и взять точную нижнюю границу получаемых результатов. Заключим этот отрезок в прямоугольник

$$B_\varepsilon = [a-\varepsilon, b+\varepsilon] \times [c-\varepsilon, c+\varepsilon].$$

Ясно, что $m(B) = 2\varepsilon(b-a+2\varepsilon)$. Эту величину можно сделать сколь угодно малой, стало быть, внешняя мера отрезка нулевая.

Нетрудно понять, что и мера прямой на плоскости равна нулю.

Определение понятия «почти всюду». Пусть A — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* (*п. в.*) *на* A, если существует такое подмножество $A_0 \subset A$, что $\mu(A_0) = 0$ и свойство выполнено всюду на $A \setminus A_0$.

Ясно, что если какое-то свойство выполняется за исключением счетного множества точек, то оно выполняется почти всюду, но не наоборот: выполнение почти всюду не означает выполнение кроме счетного множества точек.

Например, функция Дирихле равна нулю почти всюду.

Конструкция интеграла Лебега. Выше мы договорились при определении интегральных сумм нарезать подграфик положительной функции не вертикальными, а горизонтальными полосами. При этом возникла потребность измерять множества Лебега данной функции. Класс измеримых множество построен, теперь надо определиться, для каких функций можно рассматривать интеграл.

Определение измеримой функции. Функцию f, заданную на измеримом множестве E и действующую в множество $\overline{\mathbb{R}}$, называют *измеримой*, если для любого $y \in \overline{\mathbb{R}}$ множество Лебега $\{x \in E \mid f(x) \geqslant y\}$ измеримо.

Свойства измеримых функций.

1. Любая непрерывная функция измерима.

2. Сумма, разность, произведение и отношение измеримых функций измеримы.

3. Предел и точная верхняя граница последовательности измеримых функций измеримы.

4. Композиция $g(f(x))$, где f измерима, а g непрерывна, является измеримой функцией.

2.3. Конструкция интеграла Лебега. Для измеримых функций можно построить интеграл. Формальная конструкция будет отличаться от той, которая была изложена при обсуждении интеграла Лебега, и это вызвано стремлением упростить построение.

Определение простой функции. *Простая* функция — это функция вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \chi_{A_i}(x),$$

где $\chi_{A_i} = \begin{cases} 1, & x \in A_i, \\ 0, & x \notin A_i, \end{cases}$ — характеристическая функция множества A_i, все A_i измеримы, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — некоторые числа, причем $\lambda_i \neq 0$, только если $\mu(A_i) < \infty$.

Простую функцию можно представлять себе как ступенчатую функцию, но ее «ступеньки» подняты не обязательно над промежутками, а могут быть над произвольными измеримыми множествами.

Простые функции хороши тем, что интеграл от них определяется легко.

Определение интеграла от простой функции. Интеграл Лебега от простой функции $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \chi_{A_i}(x)$, где A_i — попарно не пересекающиеся измеримые множества, определяется как сумма:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mu(A_i).$$

Интеграл от простой функции, очевидно, конечен.

Определение интеграла Лебега от произвольной измеримой функции. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — измеримая функция на измеримом множестве E. Если $f(x) \geqslant 0$ для $x \in E$, то полагаем

$$\int_E f\,d\mu = \sup\left\{\int_E h\,d\mu \mid h : E \to \mathbb{R} \text{ простая, } h \leqslant f\right\}.$$

Точная верхняя граница в правой части последнего равенства существует не только для измеримых, но и вообще для любых неотрицательных функций, но интеграл будет обладать очень важным свойством линейности, только если рассматриваются измеримые функции.

Пусть f — произвольная измеримая функция. Представим ее в виде разности $f = f_+ - f_-$, где

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \min\{-f(x), 0\}$$

— положительная и отрицательная части функции f. Если интегралы от положительной и отрицательной частей функции f конечны, т. е.

$$\int_E f_+\,d\mu < \infty, \quad \int_E f_-\,d\mu < \infty,$$

то говорят, что f *интегрируема по множеству* E, пишут $f \in L(E)$ и ее интеграл определяют как разность

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu < \infty.$$

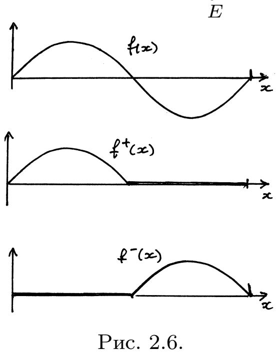

Рис. 2.6.

Заметим, что как положительная, так и отрицательная части функции суть функции неотрицательные. Положительная часть функции одной переменной графически представляет собой часть графика функции, поднимающуюся над осью абсцисс. Часть графика функции на тех участках, где она отрицательна, заменяется нулем. График отрицательной части состоит из графика функции $-f$, поднимающуюся над осью абсцисс на тех участках, где функция f отрицательна, и нуля там, где она неотрицательна (рис. 2.6).

Замечание. Для любой неотрицательной измеримой функции всегда определен интеграл $\int_E f\,d\mu$, конечный или бесконечный. Но функция интегрируема, только если интеграл конечен. Для функции произвольного знака в случае бесконечных интегралов от положительной или отрицательной частей появляется проблема сложения возможно бесконечных величин. Как известно, нельзя придать разумное значение разности $+\infty - (+\infty)$, поэтому при определении интеграла от произвольной функции не всегда возможно придать смысл разности, лежащей в основе определения интеграла. По этой причине предполагают конечность интегралов от положительной и отрицательной частей функции, тогда гарантируется разумный результат.

2.4. Связь интегралов Римана и Лебега.

Теорема 2 (об интегралах Римана и Лебега). 1. *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то она интегрируема по Лебегу и*

$$\int\limits_{[a,b]} f\,d\mu = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

2. *Если $f : [a,\omega) \to \mathbb{R}$, где ω — особая точка, интегрируема по Риману в несобственном смысле и неотрицательна, то f интегрируема по $[a,\omega)$ в смысле Лебега и соответствующие интегралы равны между собой, т. е.*

$$\int\limits_{[a,\omega)} f\,d\mu = \int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 2 позволяет смотреть на несобственные интегралы как на собственные, но в смысле Лебега. Это может оказаться полезным. Дополнительный предельный переход, присутствовавший в несобственном интеграле Римана, спрятан внутрь интеграла Лебега.

2.5. Свойства интеграла Лебега.

1. Интеграл Лебега линеен и аддитивен, т. е.

$$\int\limits_E (\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int\limits_E f\,d\mu + \beta \int\limits_E g\,d\mu,$$

$$\int\limits_{A\sqcup B} f\,d\mu = \int\limits_A f\,d\mu + \int\limits_B f\,d\mu,$$

разумеется, при естественных предположениях интегрируемости.

2. Если f измерима, то она интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда ее модуль $|f|$ интегрируем по Лебегу.

Действительно, если $f = f_+ - f_-$, то по определению интеграл от f равен разности интегралов от ее положительной и отрицательной частей. При этом для интегрируемости требуется конечность обоих участвующих в определении интегралов. С другой стороны, как нетрудно понять,

$$|f| = f_+ + f_-.$$

Следовательно,

$$\int\limits_E |f|\, d\mu = \int\limits_E f_+\, d\mu + \int\limits_E f_-\, d\mu.$$

Этим свойством интеграл Лебега отличается от несобственного интеграла Римана. А именно, существуют функции, которые интегрируемы по Риману в несобственном смысле, но не интегрируемы по Лебегу. Например, функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ интегрируема по Риману в несобственном смысле и не интегрируема по Лебегу, ибо интегралы Лебега от положительной и отрицательной частей этой функции бесконечны. Следовательно, при всех своих хороших качествах интеграл Лебега не универсален.

3. Если измеримая функция f ограничена сверху интегрируемой по Лебегу функцией, т. е. если существует такая $g \in L(E)$, что $|f(x)| \leqslant g(x)$ для п. в. $x \in E$, то $f \in L(E)$.

4. Если функция f интегрируема по E, то можно произвольно изменить ее на множестве меры нуль и при этом интеграл от измененной функции будет равен интегралу от исходной функции.

Действительно, пусть $E_0 \subset E$ имеет меру нуль. Тогда

$$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_{E \setminus E_0} f\, d\mu + \int\limits_{E_0} f\, d\mu,$$

но последний интеграл всегда равен нулю.

§ 3. Вычисление многомерных интегралов

Здесь обсудим две темы: сведение кратного интеграла к повторному и замену переменных.

3.1. Кратные и повторные интегралы.

Определение кратного и повторных интегралов. Пусть $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Если функция f достаточно хорошая, например непрерывная, то интеграл от нее можно считать двумя способами, а именно можно интегрировать ее сразу по двум переменным, т. е. находить интеграл $\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, d\mu(x,y)$. Такой интеграл называют *двойным*, аналогичный интеграл от функции трех переменных — *тройным*, для функции произвольного конечного числа переменных — *кратным*.

Есть иной способ нахождения этой же величины. Он состоит в том, что одна из переменных фиксируется, ищется интеграл по другой переменной, а затем результат интегрируется по той переменной, которая была фиксирована. Пусть для функции $f(x,y)$ фиксирована, например, переменная x. Появляется функция $y \mapsto f(x,y)$ одной переменной. Найдя сначала интеграл от нее, а затем интеграл от полученного интеграла, приходим к *повторному интегралу* $\int\limits_{[a,b]} \left(\int\limits_{[c,d]} f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x)$. Можно было расположить переменные в другом порядке, и должен получиться тот же результат.

Ответим на вопрос: при каких условиях на функцию кратный интеграл равен повторному? Вопрос существенный, ибо повторный интеграл представляет собой последовательное нахождение одномерных интегралов и его нахождение более реально, чем непосредственное нахождение кратного интеграла.

Теорема 3 (Фубини). *Пусть Ω — измеримое множество в $\mathbb{R}^{n+m}$ и f — измеримая на Ω функция. Переменные из Ω будем записывать в виде $(x,y) = (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m)$. Если функция f интегрируема по Ω, то имеет место формула*

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\Omega(x)} f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x), \tag{1}$$

где $\Omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x,y) \in \Omega\}$ — сечение множества Ω по элементу x (рис. 3.1). *Это сечение может быть пустым, поэтому внешний интеграл можно брать по всему $\mathbb{R}^n$, так как если сечение пустое, то интеграл по такому множеству равен нулю.*

Справедливость формулы (1) *дополнительно гарантируют следующие вытекающие из условий свойства.*

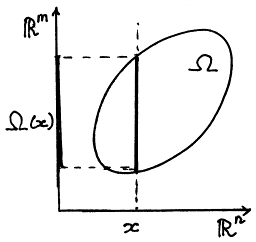

Рис. 3.1.

1. *Для п. в. $x \in \mathbb{R}^n$ множество $\Omega(x)$ измеримо.*

2. *Функция $y \mapsto f(x, y)$ измерима для п. в. $x \in \mathbb{R}$.*

3. *Функция $F(x) = \int\limits_{\Omega(x)} f(x, y)\, d\mu(y)$ измерима и интегрируема по x.*

Естественно возникает вопрос: как проверить, исходная функция интегрируема или нет? Отчасти ответ на этот вопрос дает

Теорема 4 (Тонелли). *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримая функция на измеримом множестве Ω. Если $f \geqslant 0$, то в любом случае имеет место равенство* (1). *При этом значения интегралов могут быть бесконечными.*

Теорема Тонелли дает, в частности, ответ на вопрос, интегрируема ли исходная функция. А именно, найдя повторный интеграл, последовательно находя однократные, можно гарантировать, что двойной интеграл равен полученному значению.

Пример 1. Попробуем найти интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi x)\, d\xi$. Нетрудно понять, что интеграла от функции $\cos \xi x$ нет ни в смысле Лебега, ни как несобственного интеграла Римана. Тем не менее в некотором смысле этому интегралу можно придать значение.

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, \xi) = \cos(\xi x) \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) \in C(\mathbb{R})$ — некоторая функция такая, что $\varphi(x) = 0$ вне некоторого промежутка (такую функцию называют *финитной*). Рассмотрим два повторных интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, \xi)\, dx d\xi$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, \xi)\, d\xi dx$. Начнем с интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, \xi)\, d\xi dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos \xi x\, d\xi \right) dx,$$

и ясно, что внутреннего интеграла здесь нет, следовательно, нет и повторного.

Для второго из повторных интегралов имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos \xi x \cdot \varphi(x)\, dx \right) d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, \left(d\frac{\sin \xi x}{\xi} \right) \right) d\xi$$

(появившаяся в последнем интеграле особенность, состоящая из одной точки нуль, имеет меру нуль и в смысле интеграла Лебега может быть проигнорирована)

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(x)\frac{\sin \xi x}{\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\frac{\sin \xi x}{\xi}\, dx \right) d\xi$$

(учитывая финитность функции φ)

$$= - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\frac{\sin \xi x}{\xi}\, dx d\xi = - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi x}{\xi}\, d\xi \right) dx. \tag{2}$$

Найдем отдельно интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi x}{\xi}\, d\xi$, предполагая, что $x > 0$, и заменив переменную: $\xi x = y$, $-\infty < y < \infty$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi x}{\xi}\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi x}{\xi x}\, d\xi x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \pi$$

(нахождение последнего интеграла будет изложено позже, в § 4, пример 4). В случае $x < 0$ произойдет смена пределов интегрирования и в итоге сменится знак, так что для таких x вместо π получим $-\pi$. Наконец, если $x = 0$, то интеграл равен нулю. В итоге получили, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi x}{\xi}\, d\xi = \pi \operatorname{sgn}(x).$$

Вернемся к последнему интегралу в (2):

$$- \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi x}{\xi}\, d\xi \right) dx.$$

$$= - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\pi \operatorname{sgn}(x)\, dx = - \int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)\pi\, dx + \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\pi\, dx$$

$$= - \pi\varphi(x)\big|_0^{\infty} + \pi\varphi(x)\big|_{-\infty}^{0} = 2\pi\varphi(0).$$

Оказалось, что в таком порядке интеграл считается, так что можно положить

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos \xi x \, d\xi = 2\pi\delta(x),$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака, которая здесь характеризуется тем, что для любой гладкой финитной функции φ имеет место равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x) \, dx = \varphi(0).$$

Функцию Дирака можно представлять себе так, что она всюду кроме нуля равна нулю, а в нуле принимает очень большое значение, настолько большое, что, проинтегрировав ее с любой гладкой финитной функцией, получаем значение этой функции в нуле. Несколько слов об этой функции мы еще скажем в конце примера 6 в § 4.

Этим примером хотелось подчеркнуть, что менять порядок интегрирования, не заботясь о законности этой операции, нельзя: в зависимости от порядка интегрирования можно получить разные результаты.

3.2. Замена переменных.

В случае одномерного интеграла есть формула

$$\int\limits_{c}^{d} f(y) \, dy = \int\limits_{a}^{b} f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx,$$

где φ — достаточно хорошая функция, сохраняющая порядок следования концов промежутков, т. е. $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$. Если этот порядок меняется, т. е. если $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$, то при замене переменных меняется знак интеграла. От функции φ предполагалась непрерывная дифференцируемость, т. е. принадлежность ее классу C^1, а также могла предполагаться взаимная однозначность. В многомерном случае всегда будет предполагаться, что замена осуществляется посредством взаимно однозначной функции класса C^1 с невырожденным якобианом, т. е. диффеоморфизма.

Теорема 5 (формула замены переменных (ФЗП)). *Пусть* $\Phi : U \to \Omega$ *— диффеоморфизм областей* U *и* Ω *в* $\mathbb{R}^n$. *Пусть* $Y \subset \Omega$ *— измеримое множество и* $f : Y \to \mathbb{R}$ *— измеримая функция. Тогда* f *интегрируема* *на Y в том и только в том случае, если функция $f(\Phi(x))\left|\det\dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x}\right|$ интегрируема на $\Phi^{-1}(Y)$, при этом имеет место равенство*

$$\int\limits_Y f(y)\,d\mu(y) = \int\limits_{\Phi^{-1}(Y)} f(\Phi(x))\left|\det\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}\right|\,d\mu(x). \tag{3}$$

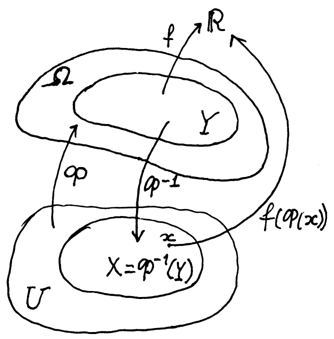

Рис. 3.2.

Теорема применяется в следующем контексте. Пусть даны область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и заданная на измеримом множестве $Y \subset \Omega$ интегрируемая функция f. Допустим, что по каким-то причинам нам потребовалось пересадить функцию на другое множество и задачу интегрирования f по множеству Y заменить задачей интегрирования по другому множеству от пересаженной на него функции. Это делается так (рис. 3.2). Устраивается диффеоморфизм Φ между областью Ω и некоторой областью $U \subset \mathbb{R}^n$. Ввиду взаимной однозначности отображения Φ существует обратное к нему, которое переводит множество Y в его прообраз $X = \Phi^{-1}(Y) \subset U$. Затем функция f переносится с множества Y на X в том смысле, что на X появляется новая функция, составленная как композиция диффеоморфизма Φ и заданной функции f, т. е. функция $f(\Phi(x))$. Однако чтобы интеграл от f по Y сохранился, пересаженную функцию надо еще умножать на величину, характеризующую изменение меры множества при отображении Φ. В итоге получается формула (3).

Требование к Φ быть диффеоморфизмом вызвано не только необходимостью нахождения модуля якобиана, но и ожиданием сохранения измеримости множеств: при диффеоморфизме свойство измеримости сохраняется.

Доказательство теоремы 5 весьма длинное, и доказывать ее мы не будем.

Разберемся с геометрическим смыслом якобиана.

Отвлечемся от формулы замены переменной и поговорим о матрицах. Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$. Рассмотрим ее столбцы как векторы, т. е. будем считать, что эта матрица составлена из векторов $a_1 = \left(a_1^1, a_1^2\right)$, $a_2 = \left(a_2^1, a_2^2\right)$. Тогда модуль ее определителя есть не что иное как площадь параллелограмма, натянутого на a_1, a_2. Определитель берется по модулю, чтобы величина площади всегда была положительной. Если модуль не ставить, то получим значение площади с учетом согласованности ориентации векторов стандартного базиса и векторов a_1, a_2.

Пусть a_1, a_2, a_3 — векторы в $\mathbb{R}^3$ и матрица A составлена из этих векторов как из столбцов. Тогда модуль ее определителя — это объем параллелепипеда, натянутого на векторы a_1, a_2, a_3.

Кстати, обращение составленного из векторов определителя в нуль означает, что в $\mathbb{R}^3$ векторы компланарны, а в $\mathbb{R}^2$ — коллинеарны.

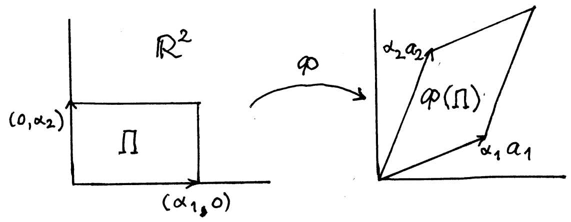

Рис. 3.3.

Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$ задает линейное отображение $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, которое действует по правилу:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим прямоугольник Π, натянутый на векторы $\alpha_1 e_1$ и $\alpha_2 e_2$ (рис. 3.3). Подействуем на этот прямоугольник отображением Φ. При отображении Φ векторы $\alpha_i e_i$ переходят в векторы $\alpha_i a_i$, $i = 1, 2$, а параллелограмм Π — в параллелограмм $\Phi(\Pi)$, натянутый на $\alpha_i a_i$ (см. рис. 3.3). Посчитаем их площади и сделаем некоторые наблюдения. Для площадей имеем

$$S(\Pi) = |\alpha_1 \alpha_2|,$$

$$S(\Phi(\Pi)) = \left| \det \begin{pmatrix} \alpha_1 a_1^1 & \alpha_2 a_2^1 \\ \alpha_1 a_1^2 & \alpha_2 a_2^2 \end{pmatrix} \right| = |\alpha_1 \alpha_2| \left| \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \right| = |\det A| S(\Pi).$$

Заметим, что для линейного отображения, определяемого матрицей A, его матрица Якоби совпадает с матрицей A: $A = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$. Следовательно, в данном случае $\left| \det \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \right|$ — это коэффициент пропорциональности между площадью образа $S(\Phi(\Pi))$ и площадью исходного прямоугольника $S(\Pi)$. Иначе говоря, модуль определителя матрицы Якоби показывает, во сколько раз деформируется исходный прямоугольник при линейном отображении.

Ясно, что в $\mathbb{R}^3$ будут получаться параллелепипеды и модуль якобиана покажет, во сколько раз изменяется объем исходного параллелепипеда.

Возьмем в ФЗП в качестве f функцию, тождественно равную единице. Пусть $X \subset U$ и $Y = \Phi(X)$. В такой ситуации ФЗП выглядит так:

$$\mu(\Phi(X)) = \int\limits_{\Phi(X)} 1\, d\mu(y) = \int\limits_X \left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \, d\mu(x).$$

Тем самым ФЗП говорит о следующем: если множество X при диффеоморфизме Φ отображается на множество Y, то площадь образа Y равна интегралу от модуля якобиана по прообразу X этого множества. В частности, в случае линейного отображения Φ

$$\mu(\Phi(X)) = \int\limits_X \left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \, d\mu(x) = \left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \int\limits_X d\mu(x) = \left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \mu(X).$$

Обратим внимание на то, что последнее равенство верно для произвольного измеримого множества, а не только для прямоугольников, как было показано выше.

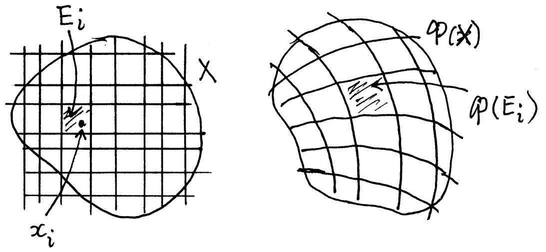

Рис. 3.4.

Если отображение нелинейно, то можно дать такую интерпретацию. Исходное множество $X \subset \mathbb{R}^2$ разобьем параллельными координатным осям прямыми на прямоугольники. Пусть в каждом из получившихся прямоугольников E_i выбрано по точке x_i (рис. 3.4).

Тогда

$$\mu(\Phi(X)) = \int\limits_{\Phi(X)} 1\, d\mu(y) = \int\limits_{X} \left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \, d\mu(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{X\cap E_i} \left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \, d\mu(x) \approx \sum_{i=1}^{N} \left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \mu(X \cap E_i).$$

Здесь поставлен знак приближенного равенства для выражения того факта, что, пользуясь непрерывностью модуля якобиана (вытекающей из предположения достаточной гладкости отображения Φ), мы берем в каждом из множеств по точке и подынтегральное выражение заменяем значением в выбранной точке. Заметим, что коэффициент, связывающий площади соответствующих фрагментов, свой для каждого из множеств разбиения.

В итоге можно сказать, что модуль якобиана — это локальный коэффициент искажения меры (площади, объема).

Элемент площади и объема в декартовых координатах. В случае $\mathbb{R}^2$ набор символов $d\mu(x,y)$, участвующий в записи интеграла, обычно обозначают через dS и называют *элементом площади.* По теореме Фубини при некоторых условиях интеграл можно свести к повторному:

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)\, dS = \int\limits_{\Omega} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Bigg(\int\limits_{\Omega(x)} f(x,y)\, d\mu(y) \Bigg)\, d\mu(x).$$

Если функция достаточно хорошая, настолько, что интеграл Лебега от нее совпадает с интегралом Римана, то вместо $d\mu(x)$, $d\mu(y)$ можно писать dx, dy. Получается повторный интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} \Bigg(\int\limits_{\Omega(x)} f(x,y)\, dy \Bigg)\, dx$.

Можно сказать, что в декартовых координатах элемент площади равен $dS = dxdy$. Геометрически это можно понимать следующим образом. Если в некоторой точке взять бесконечно малые приращения по x и по y, то возникнет бесконечно малый прямоугольник, ограниченный соответствующими координатными линиями. Его площадь есть не что иное как произведение основания на высоту.

В $\mathbb{R}^3$ выражение $d\mu(x,y,z)$ обозначают через dV и называют *элементом объема.* По теореме Фубини элемент объема в декартовых координатах выражается так: $dV = dxdydz$.

Элемент площади в полярных координатах. При вычислении интеграла бывает удобно переходить к полярным координатам. Мотивами к такому шагу могут быть либо упрощение описания области, либо зависимость функции только от выражения, участвующего в задании полярных координат. Пусть $f(x, y)$ — функция, заданная на области Ω. Выразим интеграл от нее в полярных координатах:

$$\int\limits_{\Omega} f(x, y)\, dS = \int\limits_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \left|\det \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial(r, \varphi)}\right| d\mu(r, \varphi). \qquad (4)$$

Здесь

$$\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \qquad \left|\det \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial(r, \varphi)}\right| = r.$$

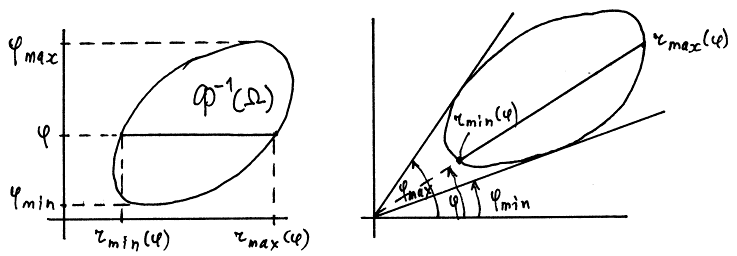

Рис. 3.5.

Предположим, что множество $\Phi^{-1}(\Omega)$ в переменных r, φ устроено следующим образом. Пусть проекция на ось углов представляет собой отрезок от $\varphi_{\min}$ до $\varphi_{\max}$ (рис. 3.5) и при каждом $\varphi \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ проекция на ось расстояний является отрезком от $r_{\min}(\varphi)$ до $r_{\max}(\varphi)$. По теореме Фубини последний интеграл в (4) можно записать так:

$$\int\limits_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \int\limits_{r_{\min}(\varphi)}^{r_{\max}(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr d\varphi.$$

Стало быть, в полярных координатах элемент площади равен $dS = r\, dr d\varphi$.

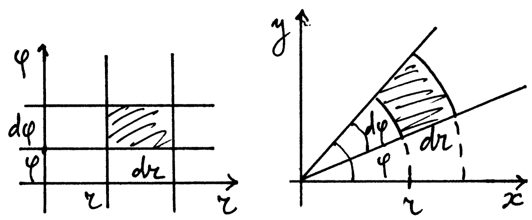

Рис. 3.6.

Поясним последнее равенство. Возьмем точку (r, φ) и рассмотрим бесконечно малые приращения угла и радиуса $d\varphi$, dr. Тогда образ полученного прямоугольника будет криволинейным четырехугольником в декартовых координатах (рис. 3.6). Если приращения малы, то можно считать, что получаемый криволинейный четырехугольник не сильно отличается от настоящего прямоугольника и площадь его приближенно равна произведению длины $r\,d\varphi$ малой дуги на приращение dr по r, т. е. $dS = r\,d\varphi dr$.

Подчеркнем, что такой прием работает только в прямоугольных системах координат, в частности, в декартовой, полярной, сферической, цилиндрической, т. е. там, где координатные линии пересекаются под прямым углом.

Элемент объема в сферической системе координат. Пусть $\Phi(R, \theta, \varphi)$ — диффеоморфизм, задающий сферические координаты. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV &= \int\limits_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(\Phi(R,\theta,\varphi)) \left|\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial(R,\theta,\varphi)}\right| d\mu(R,\theta,\varphi) \\ &= \int\limits_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(\Phi(R,\theta,\varphi)) R^2 \sin\theta\, d\mu(R,\theta,\varphi) \\ &= \int\limits_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \int\limits_{\varphi_{\min}(\theta)}^{\varphi_{\max}(\theta)} \int\limits_{R_{\min}(\theta,\varphi)}^{R_{\max}(\theta,\varphi)} f(\Phi(R,\theta,\varphi)) R^2 \sin\theta\, dR d\varphi d\theta.\end{aligned}$$

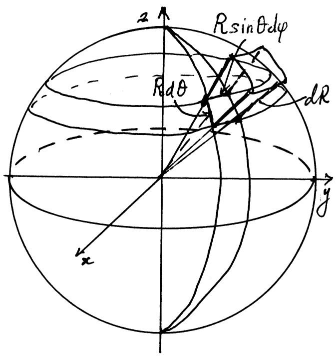

Рис. 3.7.

В сферических координатах элемент объема находится так:

$$dV = R^2 \sin\theta\, dR d\varphi d\theta.$$

Представим геометрически элемент объема, изобразив сферические координаты в рамках декартовых (рис. 3.7). Возьмем точку (x, y, z), сферические координаты которой суть (R, θ, φ). Дадим в этой точке бесконечно малые приращения dR, $d\theta$, $d\varphi$. Получится бесконечно малый криволинейный многогранник (см. рис. 3.7). При достаточно малых приращениях можно его приближенно считать параллелепипедом и объем находить как произведение линейных размеров. Эти размеры равны dR, $R\,d\theta$, $R\sin\theta\,d\varphi$. В итоге получилось, что

$$dV = dR\cdot R\,d\theta\cdot R\sin\theta\,d\varphi = R^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi.$$

Коэффициенты при dR, $d\theta$, $d\varphi$, т. е. величины 1, R и $R\sin\theta$, называют *коэффициентами Ламе*.

Подчеркнем, что все это хорошо работает только в ортогональных системах координат.

Теорема 6 (об интегрировании основных особенностей). (1) *Интеграл* $\displaystyle\int\limits_{B(0,\delta)}\frac{dV}{|x|^\alpha}$ *конечен тогда и только тогда, когда* $\alpha < n$ (*здесь* n *— размерность пространства*).

(2) *Интеграл* $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta)}\frac{dV}{|x|^\alpha}$ *конечен тогда и только тогда, когда* $\alpha > n$.

Доказательство проведем для случаев $n=2$ и $n=3$, в общем случае рассуждения аналогичны.

Шаг 1 (утверждение (1) в $\mathbb{R}^2$). Сделаем полярную замену переменных:

$$\int\limits_{B(0,\delta)}\frac{dS}{|x|^\alpha} = \int\limits_0^\delta\int\limits_0^{2\pi}\frac{r\,d\varphi dr}{r^\alpha} = 2\pi\int\limits_0^\delta\frac{dr}{r^{\alpha-1}},$$

и, как известно, последний интеграл конечен тогда и только тогда, когда $\alpha - 1 < 1$.

Шаг 2 (утверждение (2) в $\mathbb{R}^2$). Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,\delta)}\frac{dS}{|x|^\alpha} = \int\limits_\delta^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r\,d\varphi dr}{r^\alpha} = 2\pi\int\limits_\delta^{+\infty}\frac{dr}{r^{\alpha-1}},$$

и последний интеграл конечен тогда и только тогда, когда $\alpha - 1 > 1$.

Шаг 3 (утверждение (1) в $\mathbb{R}^3$). Делаем сферическую замену переменных:

$$\int\limits_{B(0,\delta)}\frac{dV}{|x|^\alpha} = \int\limits_0^\delta\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta\,d\varphi d\theta dR}{R^\alpha} = 2\pi\cdot 2\int\limits_0^\delta\frac{dR}{R^{\alpha-2}},$$

и последний интеграл конечен при $\alpha - 2 < 1$, т. е. $\alpha < 3$.

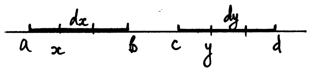

Рис. 3.8.

Пример 2. Рассмотрим два непересекающихся отрезка, расположенные на одной прямой (рис. 3.8). Представим себе, что это бесконечно тонкая заряженная нить с линейной плотностью заряда, равной 1. Надо найти силу, с которой они отталкиваются.

Будем рассуждать как физики. На одном из отрезков возьмем точку $x \in [a, b]$ и малое приращение dx в этой точке. Тогда заряд на этом отрезке равен $1 \cdot dx$. Сделаем то же на втором отрезке, получим заряд $1 \cdot dy$. Будем считать, что приращения настолько малы, что весь заряд можно считать сосредоточенным в начальной точке. Тогда согласно закону Кулона заряды на малых отрезках отталкиваются с силой $\dfrac{dxdy}{(x-y)^2}$. Для подсчета силы взаимодействия между большими кусками надо все такие взаимодействия сложить. Получится, что общая сила взаимодействия равна $\int\limits_a^b \int\limits_c^d \dfrac{dxdy}{(x-y)^2}$. Модель составлена, т. е. словесное описание превратилось в математическое выражение.

Этот интеграл можно посчитать, но сначала усложним задачу, а именно рассмотрим крайнее положение отрезков, когда конец одного из них совпадает с началом другого, т. е. рассмотрим случай $b = c$. Иначе говоря, можно представить себе, что у нас был кусок бесконечно тонкой заряженной нити, и мы его разрезали на две части. Для нахождения силы взаимодействия получившихся кусков надо найти соответствующий интеграл. Интеграл будет такой:

$$\int\limits_a^b \int\limits_b^d \frac{dxdy}{(x-y)^2} = \int\limits_a^b \frac{1}{x-y}\bigg|_{y=b}^{y=d} dx$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{1}{x-d} - \frac{1}{x-b} \right) dx = \int\limits_a^b \frac{d-b}{(x-d)(x-b)}\, dx = +\infty,$$

так как в нем одна особая точка $x = b$ и степень знаменателя равна 1, а такой интеграл расходится.

Осталось ответить на вопрос: мы взяли физически понятную картину, результат должен быть конечным, а при честном подсчете интеграла получилась бесконечность. В чем подвох?

Дело в том, что мы здесь пользовались некоторой идеализацией, предполагая нить бесконечно тонкой. Физики часто пользуются идеализацией. Иногда идеализация работает, например, если бы мы считали поле вдалеке от бесконечно тонкой нити, то было бы все нормально, но как только мы «садимся внутрь», идеализация перестает работать. Кроме того, полезно записывать физические задачи честно в виде математических моделей, смотреть на них, анализировать и думать, потому что это может показать, работает идеализация или нет.

§ 4. Интеграл, зависящий от параметра

Определение интеграла, зависящего от параметра. Рассмотрим функцию $f(x, y)$, зависящую от двух наборов переменных $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) \in X \times Y$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, а $Y \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное множество (как правило, в качестве Y рассматривается область). Предположим, что f интегрируема по x при каждом фиксированном y. Функцию

$$F(y) = \int\limits_X f(x, y)\, d\mu(x), \quad y \in Y, \tag{1}$$

будем называть *интегралом, зависящим от параметра* (ИЗОП).

Нас будет интересовать непрерывность и дифференцируемость функции F при условии, что соответствующим свойством обладает подынтегральная функция.

Теорема 7 (теорема Лебега). *Пусть выполнены условия*

(1) *для п. в.* $x \in X$

$$f(x, y_0) = \lim_{y \to y_0} f(x, y),$$

т. е. при п. в. $x \in X$ *функция* f *как функция от* y *непрерывна*;

(2) *существует функция* $g(x) \in L(X)$ *такая, что для п. в.* $x \in X$ *и для любого* $y \in Y$ *выполнено неравенство*

$$|f(x, y)| \leqslant g(x)$$

(при выполнении последнего неравенства говорят, что g *мажорирует функцию* f *или что* g *— интегрируемая мажоранта функции* f*).*

Тогда F *непрерывна в точке* x_0*, т. е.*

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_X f(x, y)\, d\mu(x) = \int\limits_X \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, d\mu(x)$$
$$= \int\limits_X f(x, y_0)\, d\mu(x) = F(y_0). \tag{2}$$

Иначе говоря, если при условии непрерывности подынтегральной функции по y существует интегрируемая мажоранта (зависящая только от x), то предел можно вносить под знак интеграла и ИЗОП непрерывен как функция от параметра.

Для интеграла Римана предельного перехода со столь простыми условиями нет, и это было одной из причин, по которым мы обратились к интегралу Лебега.

Теорема 8 (о дифференцировании ИЗОП). *Пусть Y — область в $\mathbb{R}^m$ и выполнены условия*

(1) *для п. в. $x \in X$ для каждого $y \in Y$ существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y^j}(x, y)$, $j = 1, \ldots, m$;*

(2) *существует функция $g(x) \in L(X)$ такая, что для п. в. $x \in X$ и для любого $y \in Y$ выполнено неравенство*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y^j}(x, y)\right| \leqslant g(x), \quad j = 1, \ldots, m,$$

т. е. производная имеет интегрируемую мажоранту.

Тогда существует частная производная от F по y^j в точке y и имеет место формула

$$\frac{\partial F}{\partial y^j}(y) = \frac{\partial}{\partial y^j} \int\limits_X f(x, y)\, d\mu(x) = \int\limits_X \frac{\partial f}{\partial y^j}(x, y)\, d\mu(x). \tag{3}$$

Теорема 8 говорит о том, что если подынтегральная функция имеет частную производную и у этой производной есть интегрируемая мажоранта, то операции нахождения производной и взятия интеграла можно поменять местами.

Пример 1. Докажем, что гамма-функция принадлежит классу $C^\infty(0, +\infty)$, т. е. имеет в каждой точке области ее определения производную любого порядка.

Согласно определению

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha - 1}\, dx.$$

При определении гамма-функции интеграл понимался как несобственный, основанный на интеграле Римана, но ввиду неотрицательности подынтегральной функции его можно рассматривать как интеграл Лебега.

Докажем непрерывность гамма-функции в каждой точке $\alpha_0 > 0$. Согласно теореме 7 требуется проверить два условия: непрерывность подынтегральной функции по α в данной точке и наличие интегрируемой мажоранты. Непрерывность гарантируется тем, что подынтегральная функция как функция от $\alpha > 0$ при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ является показательной функцией.

Займемся мажорантой, т. е. подбором такой интегрируемой функции, которая ограничивает подынтегральную функцию сверху. Естественно в качестве мажоранты взять точную верхнюю границу

$$g(x) = \sup_{\alpha > 0} e^{-x} x^{\alpha - 1}.$$

Как нетрудно понять, эта точная верхняя граница бесконечна, так что в качестве интегрируемой мажоранты бесполезна. Означает ли это, что интегрируемой мажоранты нет? Если искать ее на всей области определения $\alpha > 0$, то, по-видимому, действительно нет, так как точная верхняя граница реагирует, в частности, на большие значения α, а при таких значениях наша функция показательная и быстро возрастает на бесконечности.

Однако нас интересует непрерывность в некоторой конкретной точке α_0, а это свойство связано с α лишь из некоторой окрестности точки α_0. Иначе говоря, непрерывность в фиксированной точке — свойство локальное, отражающее поведение функции вблизи этой точки, поэтому достаточно найти мажоранту, подходящую не для всех $\alpha > 0$, а только из некоторой окрестности точки α_0.

Рассмотрим α лишь из интервала $(\alpha_0/2, 2\alpha_0)$. В качестве мажоранты можно взять функцию

$$g(x) = \sup_{\alpha_0/2 < \alpha < 2\alpha_0} e^{-x} x^{\alpha - 1} = \begin{cases} e^{-x} x^{2\alpha_0 - 1}, & \text{если } x \geqslant 1, \\ e^{-x} x^{\alpha_0/2 - 1}, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Покажем ее интегрируемость. Разобьем интеграл от функции g на два: от 1 до $+\infty$ и от 0 до 1. Имеем

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{2\alpha_0 - 1}\, dx = \int_1^{+\infty} e^{-x/2} e^{-x/2} x^{2\alpha_0 - 1}\, dx. \tag{4}$$

Функция $e^{-x/2} x^{2\alpha_0 - 1}$ для $x > 0$ ограничена, а интеграл от $e^{-x/2}$ сходится, стало быть, по мажорантному признаку сходится и интеграл (4).

Для $x \in (0,1)$ функция $e^{-x}x^{\alpha_0/2-1}$ непрерывна и ограничена, так как $\alpha_0/2-1 > 0$, следовательно, интегрируема. Тем самым мажоранта $g(x)$ интегрируема.

По теореме 7 функция $\Gamma(\alpha)$ непрерывна при каждом положительном α, т. е. на всей области определения.

Докажем, что $\Gamma(\alpha)$ дифференцируема. Фиксируем α_0 и будем искать мажоранту для производной по α из некоторой окрестности точки α_0, например, как и выше, для $\alpha \in (\alpha_0/2, 2\alpha_0)$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(e^{-x}x^{\alpha-1}) = e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x.$$

Положим

$$g(x) = \sup_{\alpha_0/2<\alpha<2\alpha_0} e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x = \begin{cases} e^{-x}x^{2\alpha_0-1}\ln x, & \text{если } x \geqslant 1, \\ e^{-x}x^{\alpha_0/2-1}|\ln x|, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Мажоранта построена. Покажем ее интегрируемость. Разобьем интеграл на два: от 1 до $+\infty$ и от 0 до 1. Имеем

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{2\alpha_0-1}\ln x\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x/3}e^{-x/3}x^{2\alpha_0-1}e^{-x/3}\ln x\,dx. \tag{5}$$

Функция $(e^{-x/3}x^{2\alpha_0-1})\cdot(e^{-x/3}\ln x)$ для $x>0$ ограничена как произведение ограниченных функций, а интеграл от $e^{-x/3}$ сходится, стало быть, по мажорантному признаку сходится и интеграл (5).

Наконец, рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha_0/2-1}|\ln x|\,dx. \tag{6}$$

Здесь функция e^{-x} ограничена, а $x^{\alpha_0/2-1}|\ln x|$ имеет в нуле особенность, и существование интеграла (6) равносильно существованию интеграла от функции $x^{\alpha_0/2-1}|\ln x|$. Для такого интеграла имеем

$$\int_0^1 x^{\alpha_0/2-1}|\ln x|\,dx = \int_0^1 x^{\alpha_0/4-1}(x^{\alpha_0/4}|\ln x|)\,dx, \tag{7}$$

и в последнем интеграле функция $x^{\alpha_0/4-1}$ интегрируема, так как $\alpha_0/4-1 > -1$, а $x^{\alpha_0/4}|\ln x|$ ограничена ввиду того, что ее предел в нуле равен нулю. По мажорантному признаку и теореме сравнения интеграл (7) существует.

Проделанную процедуру можно продолжать далее, а именно найти производную второго порядка, появится вторая степень логарифма, и применяя рассуждения, аналогичные проведенным, можно заключить, что выполнены все условия теоремы 8, так что у гамма-функции есть вторая производная, и так далее. Ясно, что у гамма-функции есть производная любого порядка.

Пример 2. Интеграл, зависящий от параметра, может оказаться разрывным, даже если подынтегральная функция непрерывна. Пример такого интеграла дает *интеграл Дирихле*, т. е. функция

$$F(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \begin{cases} \pi/2, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -\pi/2, & \alpha < 0 \end{cases}$$

(об интеграле Дирихле см. ниже, в примере 4). Как видно, подынтегральная функция достаточно хорошая, а интеграл как функция от параметра имеет разрыв в нуле. Можно заметить, что этот интеграл не существует в смысле Лебега, так что теорему 7 здесь применять нельзя. Он сходится только в несобственном смысле. В частности, во всех случаях, где в подынтегральной функции есть осциллирующие составляющие, надо быть особенно бдительным.

Пример 3 (непрерывность и дифференцируемость потенциала простого слоя). Известно, что точечный заряд q в начале координат создает электростатический потенциал

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \vec{r} = (x, y, z).$$

В $\mathbb{R}^3$ возьмем плоскость переменных x, y, на ней распределим заряд с некоторой поверхностной плотностью $\rho(x, y)$, и найдем, какой потенциал создает так заряженная плоскость. Предположим, что ρ непрерывна и обращается в нуль вне некоторого шара D. Запишем, какой потенциал в $\mathbb{R}^3$ создает заряженная плоскость, затем убедимся в его непрерывности и исследуем дифференцируемость.

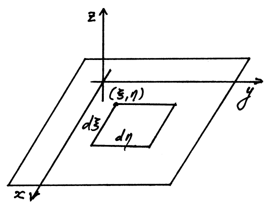

Рис. 4.1.

Фиксируем точку $\vec{r} = (x, y, z)$, и пусть (ξ, η) — точка на плоскости переменных x, y. Отступив от этой точки по x и y, рассмотрим малый прямоугольник со сторонами $d\xi$, $d\eta$ площадью $dS = d\xi d\eta$ (рис. 4.1). При малых $d\xi$, $d\eta$ можно считать, что заряд на прямоугольнике точечный при условии, что точка $\vec{r}$, в которой считается потенциал, достаточно далека от этого прямоугольника. Тогда потенциал в точке $\vec{r}$ от площадки dS, равен $\dfrac{\rho(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}$. Потенциал, создаваемый всей плоскостью, равен интегралу

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_D \frac{\rho(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}. \tag{8}$$

Этот интеграл можно понимать как интеграл Лебега. Убедимся, что $\varphi(\vec{r})$ определена для любого $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Пусть сначала $z \neq 0$, т. е. $\vec{r}$ вне плоскости. Тогда подынтегральная функция непрерывна и ограничена. Действительно, переменные x, y, z внешние, они фиксированы, меняются ξ, η. Величина под корнем в знаменателе дроби в (8) в нуль не обращается за счет наличия среди слагаемых фиксированного положительного z^2. Следовательно, знаменатель к нулю не подходит и особенности он не дает, а стоящая в числителе плотность непрерывна по предположению. Значит, вся дробь непрерывна и ограничена.

Пусть теперь $z = 0$. Тогда подынтегральная функция имеет вид $\dfrac{\rho(\xi,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$. Убедимся в том, что она интегрируема. Для этого достаточно предъявить ее интегрируемую мажоранту. Ввиду непрерывности и финитности плотности ρ она ограничена, пусть константой C. Тогда

$$\frac{|\rho(\xi,\eta)|}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \leqslant \frac{C}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

Функция в правой части последнего соотношения интегрируема, так как у нее особенность первого порядка для интеграла в $\mathbb{R}^2$, т. е. порядок особенности меньше размерности пространства. Следовательно, полученная мажоранта, а вместе с ней и подынтегральная функция интегрируемы по теореме 6. Получилось, что в любой точке пространства можно определить потенциал.

Докажем непрерывность потенциала. Предположим сначала, что $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ находится вне плоскости, т. е. $z_0 \neq 0$. Для непрерывности потенциала (8) нужна непрерывность подынтегральной функции по (x, y, z) в точке $\vec{r}_0$, что достаточно очевидно, а также наличие интегрируемой мажоранты в некоторой окрестности точки $\vec{r}_0$. Окружим $\vec{r}_0$ шаром $B(\vec{r}_0, |z_0|/2)$. Для точек (x, y, z) из такого шара выражение $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2$ отделено от нуля. Построим мажоранту. Имеем

$$g(\xi,\eta) = \sup_{(x,y,z)\in B(\vec{r}_0,|z_0|/2)} \frac{|\rho(\xi,\eta)|}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}} \leqslant \frac{C}{|z_0|/2},$$

и функция в правой части последнего неравенства интегрируема, так как ограничена, а вместе с ней интегрируема функция g, которую и возьмем в качестве интегрируемой мажоранты. Следовательно, функция $\varphi(\vec{r})$ непрерывна в шаре $B(\vec{r}_0, |z_0|/2)$, в частности, в точке $\vec{r}_0$.

Докажем непрерывность потенциала в том случае, когда точка $\vec{r}_0$ расположена на плоскости, т. е. $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$. А именно докажем, что $\varphi(\vec{r}) \to \varphi(\vec{r}_0)$ при $\vec{r} \to \vec{r}_0$. Согласно теореме 7 надо сначала гарантировать непрерывность подынтегральной функции почти всюду, т. е. за исключением точек множества нулевой меры. В нашем случае проблема может возникнуть в том случае, когда $\xi = x_0$, $\eta = y_0$. Но это одна точка, мера ее нулевая, так что достаточно проверять непрерывность подынтегральной функции всюду, кроме этой точки. Если $(\xi, \eta) \neq (x_0, y_0)$, то знаменатель в нуль не обращается и функция непрерывна как частное двух непрерывных функций.

Построим интегрируемую мажоранту. Ясно, что функция

$$g(\xi, \eta) = \sup_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} \frac{|\rho(\xi, \eta)|}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}$$

мажорантой будет, а вот интегрируемость ее неочевидна, так как у знаменателя есть возможность обращаться в нуль. В принципе, можно брать точную верхнюю границу не по всему пространству, а только по некоторой окрестности фиксированной точки, например по шару $B(\vec{r}_0, \delta)$. Но даже в таком случае в знаменателе могут оказаться точки, сколь угодно близкие к нулю, так что и в указанном случае эта граница бесконечна.

Здесь точка (x, y, z) фиксирована, а (ξ, η) меняется, и для разных (x, y, z) особенность находится в разных местах. Заменим переменные в интеграле (8) так, чтобы особенность оказалась в нуле, а именно положим

$$x - \xi = u, \quad y - \eta = v.$$

Ясно, что модуль якобиана этой замены равен единице. При такой замене плотность $\rho(x-u, y-u)$ отлична от нуля только на множестве

$$G = \{(u, v) \mid u = x - \xi,\ v = y - \eta,\ (x, y) \in B(\vec{r}_0, \delta),\ (\xi, \eta) \in D\}.$$

Множество G ограничено, поэтому можно считать, что интегрирование после замены ведется по некоторому шару $B(0, R)$, включающему в себя множество G. Имеем

$$\int\limits_D \frac{\rho(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} = \int\limits_{B(0,R)} \frac{\rho(x-u, y-u)\, d\xi d\eta}{\sqrt{u^2 + v^2 + z^2}}.$$

Функция $\dfrac{\rho(x-u,y-u)}{\sqrt{u^2+v^2+z^2}}$ непрерывна по $(x,y,z)\in B(\vec{r}_0,\delta)$ для п. в. (u,v), ибо проблема может возникнуть в одной точке, там, где $u=v=0$.

Построим интегрируемую мажоранту. Оценим сверху точную верхнюю границу подынтегральной функции по шару $B(\vec{r}_0,\delta)$:

$$\sup_{(x,y,z)\in B(\vec{r}_0,\delta)}\left|\frac{\rho(x-u,y-u)}{\sqrt{u^2+v^2+z^2}}\right|\leqslant\frac{C}{\sqrt{u^2+v^2}}=g(u,v),$$

и функцию $g(u,v)$ возьмем в качестве мажоранты. По теореме 6 она интегрируема, так как это функция двух переменных, а ее особенность первого порядка.

Итак, обоснована законность предельного перехода под знаком интеграла, стало быть, функция $\varphi(\vec{r})$ непрерывна всюду.

Изучим ее дифференцируемость. Известно, что напряженность поля в точке связана с потенциалом следующим образом:

$$E(\vec{r})=-\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Знак минус объясняется тем, что одноименные заряды отталкиваются. Рассмотрим вопрос о дифференцируемости на примере $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$. Изучение дифференцируемости по переменным x,y проводится аналогично, но проще, и соответствующие рассуждения оставим читателю. Поставим вопрос: можно ли ее найти, воспользовавшись формулой

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi(\vec{r})=\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_D\frac{\rho(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}$$
$$=\int\limits_D\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho(\xi,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right)d\xi d\eta?$$

Найдем производную подынтегральной функции:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho(\xi,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right)$$
$$=\frac{\rho(\xi,\eta)}{(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2})^2}\frac{-z}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}.$$

Для того чтобы воспользоваться теоремой 8, надо найти интегрируемую мажоранту. И здесь, как при изучении непрерывности, рассмотрим два случая: когда точка расположена вне плоскости и когда она принадлежит плоскости.

Пусть точка $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ такова, что $z_0 \neq 0$. Заключим ее в некоторый шар, не пересекающийся с плоскостью $z = 0$, например в шар $B(\vec{r}_0, |z_0|/2)$. При $\vec{r} \in B(\vec{r}_0, |z_0|/2)$ имеем

$$\left| \frac{\rho(\xi, \eta)}{(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2})^2} \frac{-z}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right| \leqslant \frac{C}{\left(\frac{|z_0|}{2}\right)^2} = g(\xi, \eta),$$

учтя, что

$$\left| \frac{-z}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right| \leqslant 1.$$

Функция g интегрируема по ограниченному множеству D, значит, внесение операции взятия частной производной под интеграл правомерно.

Пусть теперь точка лежит на плоскости, т. е. пусть $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$. В этом случае нет гарантий того, что производную можно внести под интеграл. Действительно, допустим, что мы пошли стандартным путем и хотим найти интегрируемую мажоранту для частной производной. Учитывая замену, выполненную при обосновании непрерывности, имеем

$$\sup_{(x,y,z) \in B(\vec{r}_0, \delta)} \left| \frac{\rho(x-u, y-u)}{(\sqrt{u^2+v^2+z^2})^2} \frac{-z}{\sqrt{u^2+v^2+z^2)}} \right| \leqslant \frac{C}{u^2+v^2}.$$

Но функция в правой части неинтегрируема, ибо ее особенность в знаменателе равна 2, т. е. размерности пространства.

Тот факт, что нам пока не удалось найти интегрируемую мажоранту, вовсе не означает, что ее нет, может, мы плохо оценивали сверху. Однако мы проводили оценки довольно точно, уменьшить их не представляется возможным, так что полученная мажоранта довольно качественная в том смысле, что вряд ли удастся получить меньшую. И тем не менее вопрос о дифференцируемости остался: отсутствие интегрируемой мажоранты показывает всего лишь, что теорема 8 неприменима, и дифференцируемость или ее отсутствие надо показывать другими средствами.

Найдем односторонние производные функции φ по z, заодно кое-что вспомним. Изучим следующие односторонние пределы:

$$\lim_{\Delta z \to \pm 0} \frac{\varphi(x_0, y_0, \Delta z) - \varphi(x_0, y_0, 0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to \pm 0} \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{B(0,R)} \left(\frac{\rho(x-u, y-v)}{\sqrt{u^2+v^2+\Delta z^2}} - \frac{\rho(x-u, y-v)}{\sqrt{u^2+v^2}} \right) dudv$$

$$= \lim_{\Delta z \to \pm 0} \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{B(0,R)} \rho(x-u, y-v) \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+\Delta z^2}} - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \right) dudv$$

$$= \lim_{\Delta z \to \pm 0} \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{B(0,R)} (\rho(x-u, y-v) - \rho(x,y))$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+\Delta z^2}} - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \right) dudv$$

$$+ \lim_{\Delta z \to \pm 0} \frac{1}{\Delta z} \rho(x,y) \int\limits_{B(0,R)} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+\Delta z^2}} - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \right) dudv.$$

Найдем отдельно второй интеграл:

$$\int\limits_{B(0,R)} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+\Delta z^2}} - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \right) dudv$$

(переходим к полярным координатам $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$)

$$= \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+\Delta z^2}} - \frac{1}{r} \right) r\, d\varphi dr$$

$$= 2\pi \left(\sqrt{r^2+\Delta z^2} \Big|_0^R - r \Big|_0^R \right) = 2\pi(\sqrt{R^2+\Delta z^2} - |\Delta z| - R).$$

Вернемся к нахождению предела:

$$\lim_{\Delta z \to \pm 0} \frac{1}{\Delta z} \rho(x,y) \int\limits_{B(0,R)} \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+\Delta z^2}} - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \right) dudv$$

$$= \rho(x,y) \cdot 2\pi \cdot \lim_{\Delta z \to \pm 0} \frac{1}{\Delta z} (\sqrt{R^2+\Delta z^2} - |\Delta z| - R)$$

$$= 2\pi\rho(x,y) \lim_{\Delta z \to \pm 0} \frac{R\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta z}{R}\right)^2 + o(\Delta z^2)\right) - |\Delta z| - R}{\Delta z} = \mp 2\pi\rho(x,y).$$

Оставшийся интеграл исследуется с помощью техники интеграла Лебега, и доказывается, что он равен нулю.

Поведем итоги. Получилось, что потенциал непрерывен всюду, вне точек плоскости интеграл можно дифференцировать и найти производную путем внесения операции взятия производной под знак интеграла. Если же точка расположена на плоскости, то односторонние производные по z существуют, они одинаковы по абсолютной величине, но разные по знаку. Тем самым в точках плоскости есть скачок производной по z.

Это связано с задачей нахождения напряженности равномерно заряженной бесконечной пластины. Для такой пластины с плотностью заряда ρ z-компонента напряженности электрического поля E сверху и снизу равна $2\pi\rho$ и $-2\pi\rho$ соответственно. Это те самые 2π, которые мы получили, и скачок равен $4\pi\rho$. Это тоже известный результат. А именно при прохождении через плоскость, на которой есть поверхностный заряд, нормальная компонента напряженности терпит разрыв $4\pi\rho$.

Вернемся к вопросу: может ли потенциал иметь разрыв? Вообще говоря, может. Здесь мы «намазывали» заряд одного знака, т. е. если посмотреть на сечение плоскости, то на нем везде заряд одинакового знака, и напряженность уходит в обе стороны от плоскости. Это называется простой слой. Если «намазать» заряд не одного знака, а диполи, пусть сверху плюс, снизу минус (это называется двойной слой), то у потенциала окажется разрыв.

Пример 4 (интеграл Дирихле). Найдем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{z}\, dx = \pi.$$

Подынтегральная функция четная, поэтому достаточно посчитать интеграл от 0 до ∞ и результат удвоить.

Воспользуемся техникой дифференцирования по параметру. В интеграле Дирихле параметра нет, мы его сами введем, и сделаем это следующим образом. Рассмотрим функцию

$$F(y) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-yx}\, dx, \quad y > 0.$$

Экспоненциально затухающий множитель весьма полезен, его довольно часто используют. Он при $y > 0$ обеспечивает убывание подынтегральной функции, достаточное для применения техники дифференцирования интеграла по параметру. Здесь такой множитель полезен еще и потому, что в пределе при $y \to 0$ получается исходный интеграл. Поэтому, найдя $F(y)$ и доказав непрерывность этой функции в нуле, получим значение интеграла Дирихле.

Сначала внесем дифференцирование под интеграл и проведем вычисления, законность такого действия обоснуем позже. Имеем

$$\frac{dF(y)}{dy} = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin x}{x} e^{-yx}\right) dx = -\int\limits_0^\infty e^{-yx}\sin x\, dx = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{dF(y)}{dy} = -\frac{1}{1+y^2},$$

значит,

$$F(y) = -\operatorname{arctg} y + C.$$

Для нахождения константы перейдем к пределу при $y \to +\infty$:

$$\lim_{y\to+\infty}\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-yx}\, dx = \lim_{y\to+\infty}(-\operatorname{arctg} y + C) = -\frac{\pi}{2} + C.$$

Покажем, что для интеграла в левой части последнего равенства выполнены условия теоремы 7 и тем самым предел можно внести под интеграл. Действительно, в качестве интегрируемой мажоранты можно взять, например, экспоненту e^{-x}. Стало быть, предел интеграла равен интегралу от предела, который, в свою очередь, равен нулю. Следовательно, $C = \dfrac{\pi}{2}$.

Подведем итоги:

$$F(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y, \quad y > 0.$$

Функция F непрерывна в нуле. Это можно доказать, хотя для этого теоремы Лебега недостаточно. Используя непрерывность в нуле, получаем, что $F(0) = \pi/2$, что и требовалось.

Обоснуем использованную выше возможность внесения производной под интеграл, а именно докажем справедливость равенства

$$\frac{d}{dy}\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-yx}\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin x}{x} e^{-yx}\right) dx, \quad y > 0.$$

Возьмем произвольное $y_0 > 0$ и докажем дифференцируемость в этой точке. Заключим y_0 в интервал $(y_0/2, +\infty)$. Поскольку для точной верхней границы имеем оценку

$$g(x) = \sup_{y\in(y_0/2,+\infty)}\left|\frac{\sin x}{x} e^{-yx}\right| \leqslant e^{-\frac{y_0}{2}x},$$

функция в правой части последнего неравенства является требуемой интегрируемой мажорантой. Следовательно, внесение операции взятия производной под интеграл законно.

Теорема 9 (о дифференцировании ИЗОП с переменными пределами интегрирования). *Пусть*

(1) $f(x,y)$ *— непрерывная на* $[a,b]\times[c,d]$ *функция, имеющая непрерывную частную производную по* y*;*

(2) $\alpha(y)$, $\beta(y)$ *— непрерывно дифференцируемые на* $[c,d]$ *функции со значениями в* $[a,b]$.

Тогда

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\alpha,\beta,y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dx.$$

У нее есть непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Операция законна, потому что интегрирование происходит по ограниченному множеству, подынтегральная функция непрерывна и имеет непрерывную частную производную, которая ограничена и тем самым имеет интегрируемую мажоранту. Кроме того, Φ дифференцируема по α и β на основе теоремы о дифференцируемости интеграла как функции от пределов интегрирования. Имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = f(\beta,y), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = -f(\alpha,y).$$

Но

$$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = \Phi(\alpha(y),\beta(y),y),$$

причем все функции достаточно хорошие. По теореме о дифференцировании композиции можно применить цепное правило и прийти к результату теоремы.

Теорема доказана.

Пример 5 (оператор интегрирования). Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[0,+\infty)$ функция. Сопоставим ей функцию, обозначаемую через $\mathscr{I}f$, которая действует по правилу

$$(\mathscr{I}f)(y) = \int\limits_0^y f(x)\,dx, \quad 0 \leqslant y < +\infty.$$

Отображение $\mathscr{I} : f \mapsto \mathscr{I}f$ называют *оператором интегрирования.*

Функция $\mathscr{I}f$ непрерывна на $[0,+\infty)$ и к ней можно применить тот же оператор интегрирования:

$$(\mathscr{I}(\mathscr{I}f))(z) = \int\limits_0^z \left(\int\limits_0^y f(x)\,dx \right) dy.$$

Это повторный интеграл с достаточно хорошей функцией, и можно изменить порядок интегрирования.

По теореме Фубини имеем

$$\int\limits_0^z \left(\int\limits_0^y f(x)\,dx \right) dy = \int\limits_0^z \left(\int\limits_x^z f(x)\,dy \right) dx = \int\limits_0^z f(x)(z-x)\,dx.$$

Можно продолжить процесс и обнаружить для n-кратного применения оператора интегрирования следующую формулу:

$$(\mathscr{I}^n f)(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^z f(x)(z-x)^{n-1}\,dx. \tag{9}$$

Докажем ее по индукции. Базу индукции составляют уже изученные случаи $n = 1, 2$. В предположении справедливости формулы для $n-1$, где $n \geqslant 2$, докажем ее для n. Для этого проверим, что

$$\frac{d}{dz}(\mathscr{I}^n f)(z) = (\mathscr{I}^{n-1} f)(z).$$

Действительно, по предыдущей теореме

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^z f(x)(z-x)^{n-1}\,dx\\
=&\frac{1}{(n-1)!}\left(f(z)(z-z)^{n-1}+\int\limits_0^z f(x)(n-1)(z-x)^{n-2}\,dx\right)\\
=&\frac{1}{(n-2)!}\int\limits_0^z f(x)(z-x)^{n-2}\,dx=(\mathscr{I}^{n-1}f)(z),
\end{aligned}$$

т. е. получили выражение предыдущего шага.

В формуле (9) выразим факториал через гамма-функцию. Тогда (9) примет вид

$$(\mathscr{I}^n f)(z)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_0^z f(x)(z-x)^{n-1}\,dx, \tag{10}$$

и можно заметить, что в виде (10) n может уже быть не натуральным числом, так как гамма-функция определена для любых положительных вещественных чисел и интегрировать можно выражение в любой вещественной степени. Тем самым можно определить *оператор интегрирования дробного порядка* α следующим образом:

$$(\mathscr{I}^\alpha f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^z f(x)(z-x)^{\alpha-1}\,dx. \tag{11}$$

Тем самым появилась возможность проинтегрировать не один раз, а, например, пол-раза. Можно проверить, что

$$\mathscr{I}^\alpha(\mathscr{I}^\beta f)=\mathscr{I}^{\alpha+\beta}f.$$

В частности, если проинтегрировать два раза по пол-раза, то получим однократное интегрирование:

$$\mathscr{I}^{\frac12}(\mathscr{I}^{\frac12}f)=\mathscr{I}f.$$

Оператор дробного интегрирования тесно связан с интегральным уравнением Абеля

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \frac{f(x)}{\sqrt{z-x}}\,dx=g(z). \tag{12}$$

В уравнении (12) требуется найти функцию f по заданной функции g. Это так называемое интегральное уравнение первого рода. Естествен вопрос: как его решить? Нетрудно заметить, что

$$(\mathscr{I}^{\frac{1}{2}} f)(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z \frac{f(x)}{\sqrt{z-x}}\, dx,$$

и вопрос стал таким: как восстановить функцию по ее половинному интегралу? Надо еще раз проинтегрировать с дробным порядком, а затем продифференцировать:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x \frac{g(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy.$$

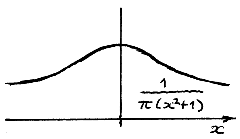

Рис. 4.3.

Пример 6 (дельтаобразные семейства). Рассмотрим функцию

$$w(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}.$$

Ее график показан на рис. 4.3. Вид этой функции похож на вид распределения Гаусса, но Гаусс гораздо круче, не в обыденном смысле, а в том, что он гораздо быстрее уходит в нуль на бесконечности. Эта функция интегрируема на $\mathbb{R}$.

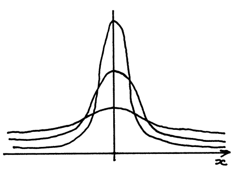

Рис. 4.4.

Рассмотрим семейство функций

$$\omega(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha} w\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}, \quad \alpha > 0.$$

При разных α графики таких функций изображены на рис. 4.4. Заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(x, \alpha)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}\, dx = 1, \quad \alpha > 0.$$

Возьмем непрерывную и ограниченную на $\mathbb{R}$ функцию $f(x)$ и рассмотрим ее интеграл с весом $\omega(x, \alpha)$, т. е. функцию

$$F(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \omega(x, \alpha)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha f(x)}{\pi(x^2+\alpha^2)}\, dx.$$

Что произойдет при $\alpha \to 0$, т. е. каков будет предел $\lim\limits_{\alpha\to 0} F(\alpha)$? Сначала посмотрим качественную картину, а затем приведем строгие обоснования. Значения произведения в какой области дадут наибольший вклад в интеграл? Естественно, из окрестности нуля, потому что мы умножаем на вес $\omega(x,\alpha)$, который сосредоточен вблизи нуля. Значения f вдалеке от нуля несущественны, и по мере уменьшения α их роль уменьшается, т. е. предел должен зависеть только от значения $f(0)$ и скорее всего он равен $f(0)$.

Предельный переход позволяет переходить к идеализированным объектам, например к точечной плотности заряда.

Оформим проведенные рассуждения. Попробуем найти предел по теореме Лебега. Согласно этой теореме требуется выполнение двух условий: наличие предела подынтегральной функции и интегрируемой мажоранты. Предел, очевидно, существует, т. е. для каждого фиксированного $x \neq 0$ имеем

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha f(x)}{\pi(x^2+\alpha^2)} = 0,$$

так что подынтегральная функция п. в. стремится к нулю. Для построения мажоранты, как обычно, рассмотрим точную верхнюю границу

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha>0}\left|\frac{f(x)\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}\right| &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\sup_{\alpha>0}\left|\frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}\right| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}\bigg|_{\alpha=|x|} = \frac{1}{2|x|}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|.\end{aligned}$$

Мажоранту получили, остался вопрос о ее интегрируемости. Однако эта функция неинтегрируема. Это не значит, что нельзя переходить к пределу, а означает всего лишь, что мы не можем воспользоваться соответствующей техникой.

Придется обосновывать предельный переход без привлечения теоремы Лебега. Имеем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\alpha\,dx}{\pi(x^2+\alpha^2)} \\ &\qquad = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f(x)-f(0))\frac{\alpha\,dx}{\pi(x^2+\alpha^2)} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(0)\frac{\alpha\,dx}{\pi(x^2+\alpha^2)}\end{aligned}$$

(второй интеграл равен f(0))

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{+\infty} \right) \frac{(f(x) - f(0))\alpha\, dx}{\pi(x^2 + \alpha^2)} + f(0)$$

$$= I_1(\alpha, \delta) + I_2(\alpha, \delta) + I_3(\alpha, \delta) + f(0).$$

Докажем, что все три интеграла стремятся к нулю. Эта сходимость основана на разных обстоятельствах. В I_1 и I_3 малость достигается за счет малости весовой функции, а в I_2 — за счет малости разности значений $f(x)$ и $f(0)$ на $(-\delta, \delta)$. Займемся оценками.

Имеем

$$|I_2(\alpha, \delta)| = \left| \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{(f(x) - f(0))\alpha\, dx}{\pi(x^2 + \alpha^2)} \right|$$

$$\leqslant \sup_{x \in [-\delta, \delta]} |f(x) - f(0)| \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\alpha\, dx}{\pi(x^2 + \alpha^2)}$$

$$\leqslant \sup_{x \in [-\delta, \delta]} |f(x) - f(0)| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha\, dx}{\pi(x^2 + \alpha^2)} = \sup_{x \in [-\delta, \delta]} |f(x) - f(0)|.$$

Первый и последний интегралы оцениваются по одной схеме, проведем рассуждения для третьего:

$$I_3(\alpha, \delta)| = \left| \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{(f(x) - f(0))\alpha\, dx}{\pi(x^2 + \alpha^2)} \right| \leqslant 2 \underbrace{\sup_{\mathbb{R}} |f(x)|}_{C} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\alpha\, dx}{\pi(x^2 + \alpha^2)}$$

$$= \frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\delta}{\alpha} \right) \right) \to 0$$

при $\alpha \to 0$ для каждого фиксированного $\delta > 0$.

Соберем вместе все проведенные оценки. Для первого интеграла дано:

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \forall \delta_1 > 0\ \exists \alpha_1 > 0\ \forall \alpha \quad 0 < \alpha < \alpha_1 \to |I_1(\alpha, \delta_1)| < \varepsilon_1.$$

Для второго интеграла дано такое свойство:

$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists \delta_2 > 0\ \forall \delta > 0\ \forall \alpha > 0$$
$$0 < \delta < \delta_2 \to |I_2(\alpha, \delta)| \leqslant \sup_{[-\delta_2, \delta_2]} |f(x) - f(0)| < \varepsilon_2.$$

Это вытекает из непрерывности f в нуле. Наконец, для I_3, как и для I_1, дано

$$\forall \varepsilon_3 > 0\ \forall \delta_3 > 0\ \exists \alpha_3 > 0\ \forall \alpha \quad 0 < \alpha < \alpha_3 \to |I_3(\alpha, \delta)| < \varepsilon_3.$$

А надо получить следующее утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha_0 > 0\ \forall \alpha > 0 \quad 0 < \alpha < \alpha_0 \to |I_1| + |I_2| + |I_3| < \varepsilon,$$

т. е. что предел при $\alpha \to 0$ суммы трех интегралов равен нулю.

По данному $\varepsilon > 0$ выберем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Далее обратимся к оценке второго интеграла, потому что там выбираемое δ_2 не зависит от α и годится для всех α. Так что по ε_2 выберем δ_2 с выполнением соответствующей оценки, т. е. мы как бы выбираем деление области. С выбранным δ_2 идем к оценке первого и третьего интегралов, и при фиксированном $\delta_1 = \delta_2$ находим α_1 и α_3 и для них есть оценки соответствующих интегралов. Осталось среди них выбрать наибольшее, т. е. взять $\alpha_0 = \min\{\alpha_1, \alpha_3\}$. Оно искомое.

Почему это семейство называют дельтаобразным? Если бы предельный переход и интеграл можно было поменять местами, мы бы написали

$$\lim_{\alpha \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega(x, \alpha)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overbrace{\lim_{\alpha \to 0} \omega(x, \alpha)}^{\omega_0(x)}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega_0(x)\, dx,$$

Однако в данном случае оказалось, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega(x, \alpha)\, dx = f(0).$$

Интересно, можно ли этот результат записать в ожидаемом виде, т. е. как

$$f(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega_0(x)\, dx?$$

Вопрос можно поставить так: что взять в качестве функции $\omega_0(x)$, чтобы интеграл от функции с таким весом был равен значению функции в нуле? Ясно, что вклад веса ω_0 должен быть весь сосредоточен в точке 0. Логично, что функция ω_0 должна быть устроена так:

$$\omega(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Однако если смотреть на ситуацию буквально с точки зрения интеграла, то значение функции в одной точке, имеющей меру нуль, не влияет на величину интеграла. Получается двойственность: с одной стороны, функция должна быть всюду нулевая, а в нуле — плюс бесконечность, и интеграл от нее будет нуль. С другой стороны, хочется получить ненулевое значение. Это противоречие приводит к формальному определению *функции Дирака* $\delta(x)$: полагают $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$ и $\delta(0) =$«$+\infty$», при этом для любой непрерывной функции должно быть выполнено равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0).$$

Значение $+\infty$ в определении функции Дирака взято в кавычки потому, что, вообще говоря, нельзя значение в нуле понимать буквально, в обычном смысле, это так называемая обобщенная функция. Образно можно представлять, что дельта-функция вся сосредоточена в нуле. С физической точки зрения это плотность точечного заряда.

Полученное выше предельное соотношение с использованием дельта-функции можно записать так:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\omega(x,\alpha)\,dx \to f(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,dx,$$

и в этом смысле есть сходимость

$$\omega(x,\alpha) \to \delta(x) \quad \text{при } \alpha \to 0,$$

т. е. семейство функций $\omega(x,\alpha)$ в некотором смысле стремится к дельта-функции, поэтому его называют *дельтаобразным*.

Оглавление

Основы математического анализа
для студентов-физиков. Лекции.
6. Мера и интеграл

Дятлов Глеб Владимирович

Подписано в печать 23.03.2015. Формат $60 \times 84\ {}^{1}/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3.5. Уч.-изд. л. 3.5. Тираж 200 экз. Заказ № 42.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.