

УДК 517.1
ББК 22.16
Д998

Дятлов Г. В.

Основы математического анализа для студентов-физиков. Лекции. 7. Анализ на многообразиях в конечномерных арифметических пространствах / Г. В. Дятлов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2015. — 64 с.

ISBN 978-5-86134-159-2

Первая часть седьмого раздела курса лекций, прочитанных автором студентам физического факультета Новосибирского государственного университета в 2014/15 учебном году. Включает в себя элементы анализа на многообразиях, в частности, на кривых и поверхностях в пространстве.

Для студентов специальностей с углубленным изучением математического анализа.

УДК 517.1
ББК 22.16
Д998

Д $\frac{1602070000-03}{Я82(03)-15}$ Без объявл.

© Дятлов Г. В. 2015

ISBN 978-5-86134-159-2

§ 1. Многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ В \mathbb{R}^n . Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называют *гладким элементарным многообразием размерности k* , где $k \leq n$, если существуют область $U \subset \mathbb{R}^k$ и отображение $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса C^1 такие, что $M = \Phi(U)$ и

- (1) существует обратное отображение Φ^{-1} , которое непрерывно,
- (2) ранг матрицы Якоби $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ максимальный, т. е. равен k .

Отображение Φ называют *параметризацией*, а переменные $u = (u^1, \dots, u^k)$ — *локальными координатами*.

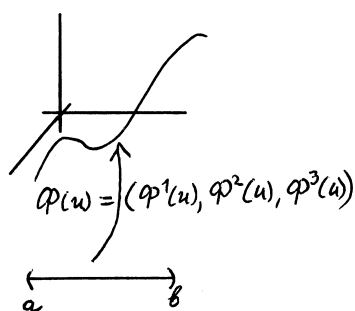


Рис. 1.1.

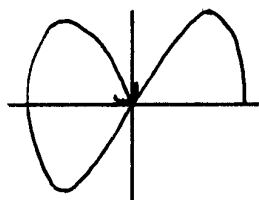


Рис. 1.2.

ПРИМЕР 1 (кривая в \mathbb{R}^3). Пусть $U = (a, b)$ и отображение $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ класса C^1 удовлетворяет условиям (1) и (2). Тогда $M = \Phi((a, b))$ — кривая в \mathbb{R}^3 (рис. 1.1).

Гладкость отображения Φ нужна для того, чтобы существовал касательный вектор в каждой точке кривой, т. е. чтобы можно было дифференцировать все компоненты функции Φ . Обратимость Φ гарантирует отсутствие самопересечений. Значение непрерывности в условии (1) показывает следующий пример. Рассмотрим отображение $\Phi^1(u) = \cos u$, $\Phi^2(u) = \sin 2u$, $u \in (0, 3\pi/2)$. Вид образа $\Phi((0, 3\pi/2))$ показан на рис. 1.2. Можно заметить, что мы в конце кривой подходим сколь угодно близко к одной из точек кривой, а именно к началу координат. Если находиться в некоторой окрестности начала, то там наблюдается сколь угодно близкий подход одной части кривой к другой ее части, и вблизи такой точки оказываются точки, соответствующие достаточно далеким друг от друга значениям u , а это означает отсутствие непрерывности обратного отображения. Такая ситуация для многообразия считается недопустимой.

Требование максимальности ранга в одномерном случае означает, что скорость движения по кривой не обращается в нуль, т. е. движение по кривой никогда не замирает. Дело в том, что если точка при движении по кривой остановилась, то она может немного подумать и уйти в другом направлении. В таком случае теряется гладкость. Так

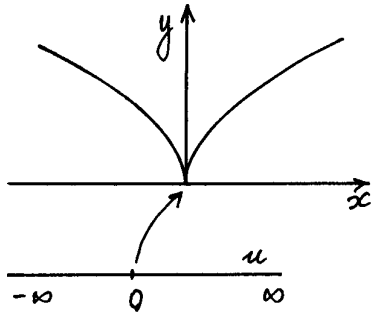


Рис. 1.3.

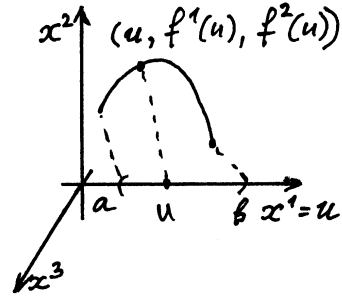


Рис. 1.4.

что требование максимальности ранга матрицы Якоби гарантирует гладкость многообразия.

Например, пусть

$$x = \Phi^1(u) = u^3, \quad y = \Phi^2(u) = u^2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Поскольку зависимость x от u взаимно однозначна, можно выразить u через x и представить нашу кривую как график функции $y(x) = x^{\frac{2}{3}}$, который имеет вид, показанный на рис.1.3. Результат получился с каспом, несмотря на гладкость отображений, задающих кривую. Дело в том, что ранг матрицы Якоби $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 3u^2 \\ 2u \end{pmatrix}$ равен нулю при $u = 0$, т. е. меньше максимального.

ПРИМЕР 2. График гладкой функции всегда многообразие. А именно, пусть, например, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Тогда $M = \{(u, f^1(u), f^2(u)) \mid u \in a, b\}$ — гладкая кривая, т. е. одномерное многообразие в \mathbb{R}^3 . Это множество нетрудно представить визуально (рис. 1.4). Действительно, взаимная однозначность и непрерывность обратного вытекает из того, что первая координата — сам параметр: если первые координаты у двух точек различны, то и точки различны, а близость двух точек кривой влечет соответствующую близость первых координат. Максимальность ранга следует из того, что в первой строке матрицы Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{d\Phi^1}{du} \\ \frac{d\Phi^2}{du} \end{pmatrix}$$

стоит единица.

Частный случай из примера 2 носит на самом деле достаточно общий характер: локально многообразие всегда представляет собой график некоторой функции.

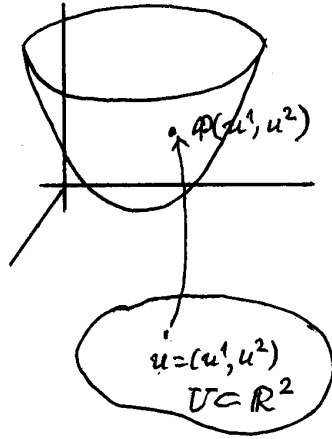


Рис. 1.5.

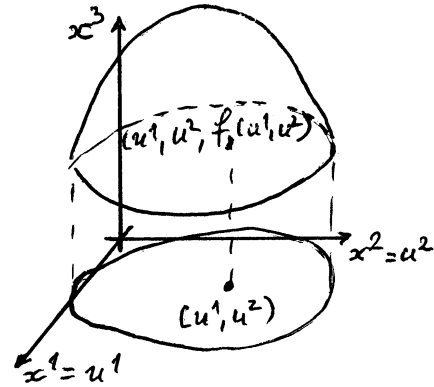


Рис. 1.6.

ПРИМЕР 3. В случае $k = 2$, $n = 3$ многообразие называют *поверхностью*. В этом случае $U \subset \mathbb{R}^2$ — область на плоскости, $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ — отображение, сопоставляющее точке $u = (u^1, u^2) \in U$ трехмерную точку $(\Phi^1(u), \Phi^2(u), \Phi^3(u))$ (рис. 1.5). Условия взаимной однозначности Φ и непрерывности обратного отображения гарантируют отсутствие самопересечений, а максимальность ранга обеспечивает гладкость поверхности. Если ранг в какой-то точке меньше двух, то в такой точке может оказаться особенность. Например, для поверхности, заданной параметризацией $\Phi(u^1, u^2) = ((u^1)^3, (u^2)^3, (u^1)^2 + (u^2)^2)$, матрица Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 3(u^1)^2 & 0 \\ 0 & 3(u^2)^2 \\ 2u^1 & 2u^2 \end{pmatrix}$$

вырождена в нуле, и поверхность имеет в этой точке вид поверхности вращения кривой на рис. 1.3 вокруг оси ординат.

ПРИМЕР 4. График гладкой функции, действующей из области в \mathbb{R}^2 в \mathbb{R} , — поверхность. А именно, пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ — область. Тогда $M = \{(u^1, u^2, f(u^1, u^2)) \mid (u^1, u^2) \in U\}$ является поверхностью в \mathbb{R}^3 (рис. 1.6). Максимальность ранга вытекает из того, что первые две координаты суть сами параметры: минор, составленный из первых двух строк матрицы Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u^1} & \frac{\partial f}{\partial u^2} \end{pmatrix},$$

всегда ненулевой.

Пока мы говорили только об элементарных многообразиях, а именно о многообразиях, являющихся образами каких-то областей соответствующего пространства. Однако не все множества, которые мы готовы считать многообразиями, являются элементарными многообразиями.

ПРИМЕР 5. Окружность на плоскости элементарным многообразием не является. В самом деле, если представить ее как образ некоторого интервала числовой прямой, то либо утратится взаимная однозначность, либо какие-то точки окружности не войдут в образ интервала. Аналогично сферу в \mathbb{R}^3 нельзя представить как образ области в \mathbb{R}^2 , охватив все точки сферы.

Естественно хотелось бы считать многообразием, например, замкнутый шар в пространстве. Однако и это множество не является элементарным многообразием — на этот раз будут проблемы с граничными точками.

В итоге понятие элементарного многообразия стоит расширить, допустив множественные параметризации и наличие края.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называют *гладким k -мерным многообразием*, если для любой точки $x \in M$ существуют

- (a) окрестность $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ точки x ,
- (b) область $U \subset \mathbb{R}^k$, $k \leq n$,
- (c) отображение $\Phi : U \rightarrow \Omega$ класса C^1 , у которого Φ^{-1} существует и непрерывно и ранг матрицы Якоби $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ максимален,

такие, что выполнено одно из двух условий:

- (1) $\Phi(U) = M \cap \Omega$,
- (2) $\Phi(U \cap \mathbb{H}^k) = M \cap \Omega$, где $\mathbb{H}^k = \{(u^1, \dots, u^k) \mid u^k \geq 0\}$ — полупространство.

Если для каждой точки $x \in M$ выполнено первое условие, т. е. $\Phi(U) = M \cap \Omega$, то M называют *многообразием без края*, или просто *многообразием*, а если есть точки, для которых выполняется второе условие (потому что нельзя выполнить первое), то M называют *многообразием с краем*, а точки, для которых выполнено второе условие, составляют *край многообразия*. Край многообразия M обозначают через ∂M .

Поясним определение. Пусть есть какой-то объект в \mathbb{R}^3 (рис. 1.7, на котором «ободок» не входит в множество), и представим себе, что некоторой окрестностью Ω точки $x \in M$ вырезается кусок. Можно ли

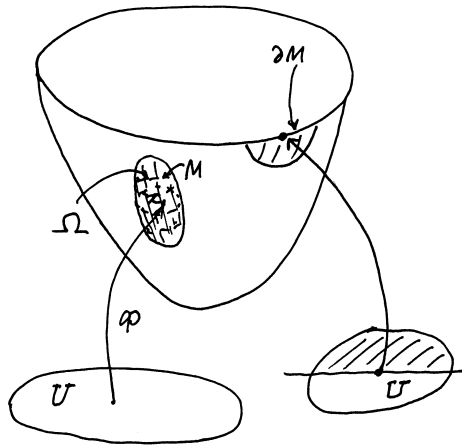


Рис. 1.7.

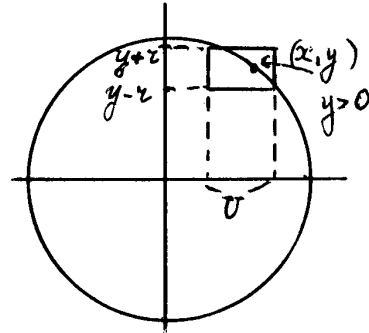


Рис. 1.8.

ту часть M , которая попала в Ω , «расправить», т. е. отобразить на область пространства соответствующей размерности, здесь — в \mathbb{R}^2 ? Если, как договорились, «ободок» в множество не входит, то такое возможно для каждой точки из M , стало быть, это многообразие без края. Если «ободок» входит в множество, то для точки ободка пересечение любой ее окрестности с множеством отображается не на область, а на часть области, расположенную в полупространстве. Точки «ободка» составляют край многообразия.

ПРИМЕР 6. Покажем, что множество $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ — одномерное многообразие в \mathbb{R}^2 . Для этого в окрестности каждой точки $(x, y) \in M$ надо задать параметризацию. Это можно сделать, например, так. Если точка расположена на верхней полуокружности и не попадает на ось абсцисс, то спроектируем эту часть окружности на ось абсцисс. В качестве U возьмем интервал, содержащий абсциссу данной точки (рис. 1.8), в качестве Ω — прямоугольник $\Omega = U \times (y - r, y + r)$, $0 < r < y$. Параметризацией служит отображение $\Phi(u) = (u, \sqrt{1 - u^2})$. Если $y < 0$, то можно проделать аналогичные построения, но в параметризации взять корень со знаком минус.

Если же мы попали на ось абсцисс, то можно такую точку заключить в соответствующий прямоугольник и в качестве параметризации взять отображение $\Phi(u) = (\sqrt{1 - u^2}, u)$.

Способов параметризовать окрестности точек на окружности много. Например, можно использовать отображение вида $u \rightarrow (\cos u, \sin u)$ на соответствующих интервалах числовой прямой.

ПРИМЕР 7 (верхняя полусфера с экватором). Пусть

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

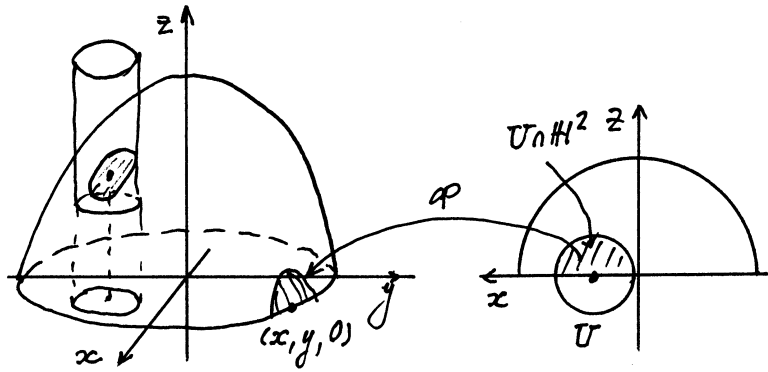


Рис. 1.9.

Убедимся в том, что это многообразие с краем. Если попадаем в точку, в которой $z > 0$, то для такой точки $x^2 + y^2 < 1$, значит, проекция (x, y) точки (x, y, z) попадет в открытый единичный круг плоскости переменных x, y . Тогда ее можно окружить окрестностью, полностью лежащей внутри круга, и взять ее в качестве параметризующей области U (рис. 1.9). Далее над этим кружком можно нарисовать сплошной цилиндр, он вырежет из сферы небольшую область, и параметризация устраивается очевидным образом:

$$\Phi(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}).$$

Что произойдет, если точка оказалась там, где $z = 0$, пусть это $(x, y, 0)$ и $y \neq 0$? Тогда в качестве параметров можно использовать переменные x, z (см. рис. 1.9). В качестве области изменения параметров возьмем круг U с центром $(x, 0, 0)$ такого радиуса, чтобы U не вобрало в себя точку $(1, 0, 0)$. В качестве окрестности Ω примем цилиндр с основанием U такой, чтобы он был окрестностью точки $(x, y, 0)$ в \mathbb{R}^3 и не задевал противоположной стороны сферы. В качестве параметризации возьмем отображение $\Phi(u^1, u^2) = (u^1, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2})$. Естественно, Φ рассматриваем на U в пересечении с полупространством $\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \mid z \geq 0\}$.

Сформулируем без доказательств несколько свойств многообразий.

Теорема 1 (о крае многообразия). *Если M — гладкое k -мерное многообразие с краем, то его край ∂M является гладким $(k - 1)$ -мерным многообразием без края.*

Например, у гладкой кривой с концами краем является множество, состоящее из концов, которое, в свою очередь, есть нульмерное многообразие без края.

Для многообразия из примера 7, т. е. полусферы с экватором, краем оказалась окружность, которая является одномерным многообразием без края.

Замкнутый шар в \mathbb{R}^3 — это трехмерное многообразие с краем, у которого край — это сфера, представляющая собой двумерное многообразие без края.

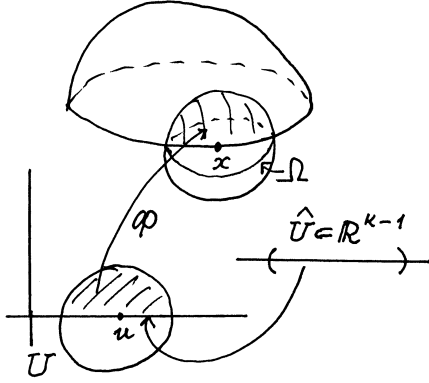


Рис. 1.10.

Пусть $x \in \partial M$, т. е. в окрестности $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ точки x выполнено условие 2: существуют область $U \subset \mathbb{R}^k$ и отображение Φ такие, что $\Phi(U \cap \mathbb{H}^k) = M \cap \Omega$ (рис. 1.10). Можно показать, что точки края в окрестности Ω это в точности образы точек вида $(u^1, \dots, u^{k-1}, 0)$. Тем самым возникает взаимно однозначное отображение между $U \cap (\mathbb{H}^{k-1} \times \{0\})$, и частью края, попавшей в область Ω . Это показывает, как можно устроить параметризацию края, если известна параметризация самого многообразия.

А именно, если Ω, U, Φ осуществляют параметризацию M в окрестности точки x , то параметризация $\hat{\Omega}, \hat{U}, \hat{\Phi}$ края ∂M в окрестности точки x получается так (см. рис. 1.10):

$$\hat{\Omega} = \Omega,$$

$$\hat{U} = \{(u^1, \dots, u^{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1} \mid (u^1, \dots, u^{k-1}, 0) \in U\},$$

$$\hat{\Phi}(u^1, \dots, u^{k-1}) = \Phi(u^1, \dots, u^{k-1}, 0).$$

У нас было два близких понятия: граница и край. Как они связаны между собой? Посмотрим, что будут представлять собой граница и край для кривой, поверхности и области в \mathbb{R}^3 . Для кривой γ с концами в \mathbb{R}^3 край — это ее концы, а границей будет вся кривая. Для поверхности с краем в \mathbb{R}^3 , например, для полусферы, краем будет окаймляющая ее окружность, а границей — вся поверхность. Наконец, для замкнутого шара $\bar{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ его краем будет сфера и границей — та же сфера. Тем самым все зависит от размерности многообразия: если оно полной размерности, то край совпадет с границей, а если меньшей, то это разные множества.

Хотя многообразие было определено как множество, допускающее локальную параметризацию в окрестности каждой своей точки, нередко его задают как множество, обладающее определенным набором свойств, выраженных уравнениями и, возможно, неравенством.

Теорема 2 (о задании многообразия системой уравнений). Пусть Ω — область в \mathbb{R}^n и F — отображение класса C^1 , действующее из Ω в \mathbb{R}^m , где $0 < m < n$, и такое, что в точках множества

$$M = \{(x^1, \dots, x^n) \mid F^1(x) = \dots = F^m(x) = 0\}$$

матрица Якоби имеет максимальный ранг, т. е. $\text{rank} \frac{\partial F}{\partial x} = m$. Тогда M — $(n - m)$ -мерное гладкое многообразие без края.

Доказательство проведем в нескольких частных случаях.

ШАГ 1 ($n = 3, m = 1$). Пусть Ω — область в \mathbb{R}^3 и отображение $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таково, что матрица Якоби $\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2}, \frac{\partial F}{\partial x^3} \right)$ имеет ранг 1 на множестве $M = \{(x^1, x^2, x^3) \mid F(x^1, x^2, x^3) = 0\}$. Пусть $x_0 \in M$. Максимальность ранга в точке x_0 означает, что хотя бы одна из частных производных в этой точке отлична от нуля, пусть для определенности $\frac{\partial F}{\partial x^3}(x_0) \neq 0$. По теореме о неявной функции существуют окрестность $W \subset \mathbb{R}^3$ точки x_0 , окрестность $U \subset \mathbb{R}^2$ точки (x^1, x^2) и единственное отображение $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $(u^1, u^2, g(u^1, u^2)) \in W$ и $F(u^1, u^2, g(u^1, u^2)) = 0$ для любой $(u^1, u^2) \in U$. В результате получилось, что $(u^1, u^2, g(u^1, u^2)) \in M$, когда $(u^1, u^2) \in U$. В итоге в окрестности точки x_0 построена параметризация

$$\Phi(u^1, u^2) = (u^1, u^2, g(u^1, u^2)).$$

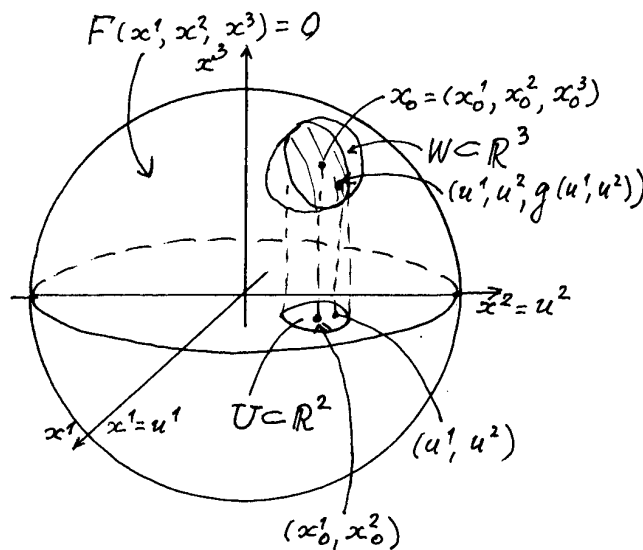


Рис. 1.11.

В определении параметризации участвовало три объекта: окрестность данной точки, параметризующая область и параметризация. Здесь мы получили параметризующую область U и параметризацию Φ , а в качестве окрестности, участвующей в определении многообразия, надо взять множество $\Omega = W \cap (U \times \mathbb{R})$.

Рассуждение шага 1 проиллюстрировано на рис. 1.11. Суть построений в том, что мы наше многообразие локально проектируем на одну из координатных плоскостей, в данном случае на плоскость (x^1, x^2) , берем эти переменные в качестве параметров и представляем многообразие как график функции.

ШАГ 2 ($n = 3, m = 2$). Пусть

$$M = \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \Omega \mid F^1(x) = F^2(x) = 0\}.$$

Фиксируем точку $x_0 \in M$. Согласно предположению матрица Якоби

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial F^1}{\partial x^2}(x_0) & \frac{\partial F^1}{\partial x^3}(x_0) \\ \frac{\partial F^2}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial F^2}{\partial x^2}(x_0) & \frac{\partial F^2}{\partial x^3}(x_0) \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг, стало быть, у нее есть отличный от нуля минор. Пусть это минор, составленный из первых двух столбцов. По теореме о неявной функции существуют окрестность $W \subset \mathbb{R}^3$ точки x_0 , окрестность $U \subset \mathbb{R}^2$ точки x_0^3 и функция $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ такие, что для любого $u \in U$ точка $(g^1(u), g^2(u), u)$ принадлежит W и $F^j(g^1(u), g^2(u), u) = 0, j = 1, 2$. В итоге построена локальная параметризация $\Phi(u) = (g^1(u), g^2(u), u)$ в окрестности точки x_0 .

Теорема доказана.

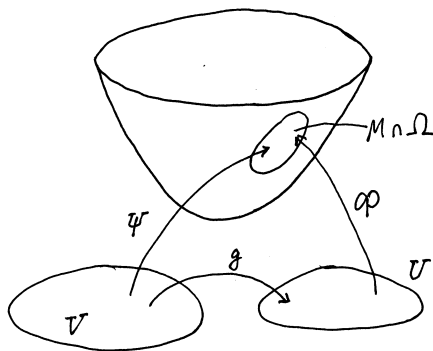


Рис. 1.12.

ЗАМЕЧАНИЕ О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ.

Пусть M — k -мерное многообразие в \mathbb{R}^n и $\Phi : U \rightarrow M$ — локальная параметризация M . Если $g : V \rightarrow U$ — диффеоморфизм области $V \subset \mathbb{R}^k$ в U , то их композиция $\Psi = \Phi(g(v))$ — тоже параметризация M (рис. 1.12). Следовательно, один и тот же кусок на многообразии допускает много разных параметризаций. Возникает вопрос: есть ли гарантия, что связанные с многообразием построения не будут зависеть от параметризации? Обычно при каких-либо связанных с многообразием конструкциях утверждается и доказывается, что рассматриваемые объекты не зависят от параметризации. Мы проведем такое

ли гарантия, что связанные с многообразием построения не будут зависеть от параметризации? Обычно при каких-либо связанных с многообразием конструкциях утверждается и доказывается, что рассматриваемые объекты не зависят от параметризации. Мы проведем такое

доказательство один раз — при интегрировании по многообразиям, в других местах независимость будем отмечать, но не доказывать. Для доказательства независимости чего-либо от параметризации понадобится следующий факт.

Теорема 3 (об эквивалентности параметризаций). Пусть M — многообразие в \mathbb{R}^n , а $\Phi : U \rightarrow M$ и $\Psi : V \rightarrow M$ — две параметризации одного и того же куска на M , т. е. $\Phi(U) = \Psi(V)$. Тогда существует диффеоморфизм $g : V \rightarrow U$ такой, что $\Psi = \Phi \circ g$.

Пояснение. Отображение g строится следующим образом:

$$g(v) = \Phi^{-1}(\Psi(v)).$$

Со взаимной однозначностью и непрерывностью такого отображения проблем нет, они легко следуют из соответствующих свойств составляющих композицию отображений. А с дифференцируемостью есть проблемы из-за разницы в размерностях пространств, выражающиеся в том, что обратное к параметризации отображение Φ^{-1} дифференцировать невозможно — оно определено не на области, а только на многообразии. Поэтому для дифференцируемости нужны некоторые дополнительные непростые построения, которые мы проводить не будем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОГО ВЕКТОРА И КАСАТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА. Пусть M — многообразие в \mathbb{R}^n и $\Phi : U \rightarrow M$ — параметризация в окрестности точки x такая, что $x = \Phi(u)$. Вектор $\xi = d\Phi(u)(h)$, $h \in \mathbb{R}^k$, называют *касательным вектором к многообразию M в точке x* . Совокупность всех касательных векторов в данной точке называют *касательным пространством* и обозначают через $T_x M$.

Участвующий в определении вектор приращения h надо представлять себе прикрепленным к точке u , и с этой точки зрения предпочтительно писать не $h \in \mathbb{R}^k$, а $h \in T_u \mathbb{R}^k$, полагая, что он берется из пространства, касательного к \mathbb{R}^k в точке u . Из U на M действует отображение Φ , и в том же направлении действует его дифференциал. Но в то время как отображение переносит точку в точку, дифференциал переводит вектор h в вектор ξ , который касается нашего многообразия (рис. 1.13).

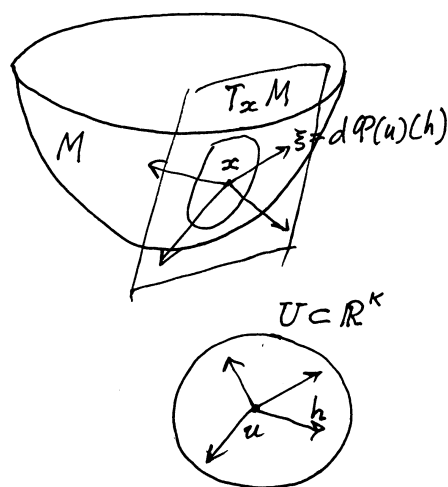


Рис. 1.13.

Касательные векторы замечают, вообще говоря, не все пространство, а только его часть, которая и является касательным пространством к многообразию в данной точке. Надо различать точки, составленные из концов касательных векторов, и сами касательные векторы, соединяющие точку, к которой мы прикрепились, и точки пространства.

Теорема 4 (о касательном пространстве). (1) Касательное пространство $T_x M$ — это k -мерное векторное пространство, являющееся подпространством $T_x \mathbb{R}^n$ всех векторов, прикрепленных к точке x .

(2) Определение касательного пространства не зависит от выбора параметризации.

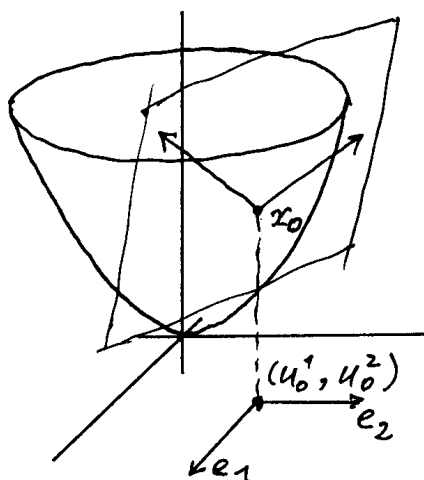


Рис. 1.14.

ПРИМЕР 8. Покажем, как записывать касательные векторы. Пусть M — многообразие, заданное параметризацией

$$\Phi(u^1, u^2) = (u^1, u^2, (u^1)^2 + (u^2)^2),$$

$$(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Его график представляет собой параболоид (рис. 1.14). Фиксируем точку $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$, и пусть $x_0 = \Phi(u_0)$. Как устроены касательные векторы к этому многообразию в данной точке? По определению

касательный вектор должен быть образом касательного вектора пространства параметров в точке u_0 . Действие дифференциала заключается в умножении на матрицу Якоби, т. е. для касательного вектора $\vec{\xi}$ имеем

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u_0^1 & 2u_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u_0^1 \end{pmatrix} h^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2u_0^2 \end{pmatrix} h^2.$$

Получилось, что любой касательный вектор является линейной комбинацией двух векторов.

Если многообразию задано неявно, то можно легко выписать касательное пространство через функции, его задающие.

Теорема 5 (о касательном пространстве к неявно заданному многообразию). Пусть M — многообразию, заданное посредством условий

$$F^1(x) = \dots = F^m(x) = 0.$$

Тогда касательное пространство к M в точке x_0 описывается так:

$$\begin{aligned} T_{x_0}M &= \{\xi \in T_{x_0}\mathbb{R}^n \mid dF^j(x_0)(\xi) = 0, j = 1, \dots, m\}, \\ &\qquad\qquad\qquad \text{или, подробнее,} \\ &= \left\{ \xi \in T_{x_0}\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x_0)\xi^i = 0, j = 1, \dots, m \right\} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{или, иначе,} \\ &= \{\xi \in T_{x_0}\mathbb{R}^n \mid \text{grad } F^j(x_0) \perp \xi, j = 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в окрестности точки x_0 некоторую параметризацию $\Phi : U \rightarrow M$, $x_0 = \Phi(u_0)$. По определению M как неявно заданного многообразия для любого $u \in U$ выполнены равенства

$$F^j(\Phi(u)) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Согласно правилу нахождения дифференциала композиции имеем

$$dF^j(\underbrace{\Phi(u_0)}_{x_0})(\underbrace{d\Phi(u_0)(h)}_{\xi}) = 0. \quad (2)$$

В равенстве (2) h — это произвольный вектор из $T_{u_0}U$. Далее, значение $d\Phi(u_0)(h)$ — это касательный вектор. Наконец, $\Phi(u_0) = x_0$. Получили, что для любого касательного вектора ξ значение дифференциала на нем равно нулю:

$$\forall \xi \in T_{x_0}M \quad dF^j(x_0)(\xi) = 0.$$

Последнее означает, что

$$\begin{aligned} T_{x_0}M &\subset \{\xi \in T_{x_0}\mathbb{R}^n \mid dF^j(x_0)(\xi) = 0, j = 1, \dots, m\} \\ &= \left\{ \xi \in T_{x_0}\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x_0)\xi^i = 0, j = 1, \dots, m \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

В последнем равенстве в правой части стоит множество решений однородной системы из m уравнений с n неизвестными. Размерность пространства решений равна $n - m$ (напомним, что ранг матрицы предполагается максимальным). Тем самым в правой части получилось подпространство размерности $k = n - m$, и в левой части стоит подпространство размерности k (гарантируется теоремой). Следовательно, в (3) строгого включения быть не может и реализуется равенство.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 9. Найдем касательную плоскость к эллипсоиду

$$M = \left\{ (x, y, z) \mid \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1}_{F(x,y,z)} = 0 \right\}.$$

Это неявно заданное многообразие. Фиксируем точку $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ и найдем $T_{\vec{r}_0}M$. По теореме 5

$$\begin{aligned} T_{\vec{r}_0}M &= \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \mid \frac{\partial F}{\partial x}(\vec{r}_0)\xi + \frac{\partial F}{\partial y}(\vec{r}_0)\eta + \frac{\partial F}{\partial z}(\vec{r}_0)\zeta = 0 \right\} \\ &= \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \mid \frac{2x_0}{a^2}\xi + \frac{2y_0}{b^2}\eta + \frac{2z_0}{c^2}\zeta = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Итак, касательное пространство состоит из векторов (ξ, η, ζ) , прикрепленных к точке \vec{r}_0 . Обозначая через (x, y, z) концы касательных векторов, можно заметить, что они пробегают множество

$$\left\{ (x, y, z) \mid \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z - z_0)}{c^2} = 0 \right\}.$$

Можно было еще раскрыть скобки и получить такое равенство:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1.$$

Подчеркнем, что когда речь идет о касательном пространстве, надо заранее договариваться о том, что под этим термином имеется в виду: множество векторов или множество концов векторов. Мы будем понимать всегда как множество векторов.

§ 2. Условный экстремум.

Принцип множителей Лагранжа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА. Пусть M — многообразие в \mathbb{R}^n , заданное неявно при помощи условий

$$F^1(x) = \dots = F^m(x) = 0.$$

Пусть f — функция, заданная в некоторой области пространства \mathbb{R}^n , содержащей M (в такой ситуации говорят, что функция задана в некоторой окрестности множества M). Говорят, что точка $x \in M$ является *точкой условного (относительного) минимума (максимума) функции f* (на M), если существует такая окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$ точки x , что для любого $y \in M \cap W$ выполнено неравенство $f(x) \leq f(y)$ (соответственно $f(x) \geq f(y)$). Если x — точка условного минимума или максимума, то говорят, что это *точка условного экстремума*.

Слово «условный» (или «относительный») употреблено по той причине, что сравнению подлежат значения функции не во всех точках из окрестности данной точки, а только в тех, которые подчинены условиям (принадлежат множеству M).

Сколько бы раз мы ни говорили об экстремумах, разговор начинается всегда с одного и того же — с необходимых условий. Здесь будет то же самое.

Теорема 6 (принцип множителей Лагранжа). Пусть M — многообразие в \mathbb{R}^n , заданное условиями

$$F^1(x) = \dots = F^m(x) = 0,$$

и $f(x)$ — функция класса C^1 , определенная в некоторой окрестности многообразия M . Если f имеет экстремум в некоторой точке $x_0 \in M$, то выполняются следующие эквивалентные условия:

- (1) $\text{grad } f(x_0) \perp T_{x_0} M$;
- (2) существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\text{grad } f(x_0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } F^j(x_0);$$

(3) существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, называемые *множителями Лагранжа*, такие, что функция Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j F^j(x)$$

удовлетворяет в точке (x_0, λ) необходимым условиям локального экстремума, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(x_0, \lambda) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda^j}(x_0, \lambda) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$ — точка экстремума. По определению многообразия в окрестности точки x_0 есть некоторая параметризация $\Phi : U \rightarrow M$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $k = n - m$. Пусть $x_0 = \Phi(u_0)$, $u_0 \in U$, и в окрестности M задана функция f . Для того чтобы что-то делать с функцией f , ее надо пересадить в область параметров, т. е. взять композицию $f \circ \Phi$, заданную уже на U . Достаточно очевидно, что f имеет экстремум на M в точке x_0 тогда и только тогда, когда функция $f \circ \Phi$ имеет экстремум в точке u_0 . Тем самым приходим к ситуации, когда функция $f \circ \Phi$ задана на области в \mathbb{R}^k и имеет локальный экстремум в точке u_0 . Это с необходимостью влечет равенство нулю всех частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial u^p}(f(\Phi(u_0))) = 0, \quad p = 1, \dots, k,$$

или обращение в нуль дифференциала на любом приращении:

$$d(f \circ \Phi)(u_0)(h) = 0, \quad h \in T_{u_0}\mathbb{R}^k.$$

Согласно правилу дифференцирования композиции имеем

$$df(\underbrace{\Phi(u_0)}_{x_0})(\underbrace{d\Phi(u_0)(h)}_{\xi}) = 0.$$

Заметим, что ξ — вектор, касательный к M в точке x_0 .

По определению градиент — это вектор, с помощью которого записывается дифференциал, т. е. для любого касательного вектора $\xi \in T_{x_0}M$ имеет место равенство

$$\langle \text{grad } f(x_0), \xi \rangle = 0.$$

Это означает, что градиент ортогонален касательному пространству или что градиент принадлежит ортогональному дополнению к касательному пространству:

$$\text{grad } f(x_0) \in (T_{x_0}M)^\perp = \{\eta \in T_{x_0}\mathbb{R}^n \mid \forall \xi \in T_{x_0}\mathbb{R}^n \langle \xi, \eta \rangle = 0\}.$$

В результате пришли к первому утверждению теоремы.

Для получения второго утверждения надо поработать с касательным пространством. С одной стороны, $\text{grad } f(x_0) \in (T_{x_0}M)^\perp$, с другой — по теореме 5

$$\begin{aligned} T_{x_0}M &= \{\xi \in T_{x_0}\mathbb{R}^n \mid \xi \perp \text{grad } F^j(x_0), j = 1, \dots, m\}. \\ &= \{\text{grad } F^j(x_0) \mid j = 1, \dots, m\}^\perp. \end{aligned}$$

Тем самым само касательное пространство — это ортогональное дополнение, к которому мы снова берем ортогональное дополнение. Получается, что

$$\text{grad } f(x_0) \in \{\text{grad } F^j(x_0) \mid j = 1, \dots, m\}^{\perp\perp}.$$

Двукратное применение перехода к ортогональному дополнению множества векторов дает их линейную оболочку, т. е. подпространство, натянутое на эти векторы. Оно представляет собой совокупность линейных комбинаций данных векторов со всевозможными коэффициентами. Тем самым

$$\text{grad } f(x_0) \in \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } F^j(x_0) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

Следовательно, для вектора $\text{grad } f(x_0)$ найдутся такие $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, что

$$\text{grad } f(x_0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } F^j(x_0).$$

Это утверждение п. (2).

Утверждение п. (3) — это немного зашифрованное утверждение п. (2). Действительно, заметим, что условия

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(x_0, \lambda) = 0$$

означают, что

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x_0) = 0.$$

Иначе говоря, i -я частная производная функции f является линейной комбинацией i -х частных производных функций F^j . В векторном виде это можно записать так:

$$\text{grad } f(x_0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } F^j(x_0).$$

Вторая группа условий

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^j}(x_0, \lambda) = 0$$

равносильна выполнению уравнений связи $F^j(x_0) = 0$, т. е. условию принадлежности точки многообразию.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^4 + y^4$ на множестве M точек (x, y) , удовлетворяющих условию $F(x, y) = xy - 1 = 0$.

Изучим, есть ли точки, удовлетворяющие необходимым условиям относительного экстремума. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda F(x, y) = x^4 + y^4 - \lambda(xy - 1).$$

По теореме 6 если (x, y) — точка условного экстремума, то

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x^3 - \lambda y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4y^3 - \lambda x = 0, \quad xy = 1.$$

Нетрудно найти, что множество решений этой системы состоит из двух наборов $x = \pm 1, y = \pm 1, \lambda = 4$. Обратим внимание на то, что еще нет гарантий того, что в найденных точках есть условный экстремум, пока мы получили, что в остальных точках условного экстремума точно нет.

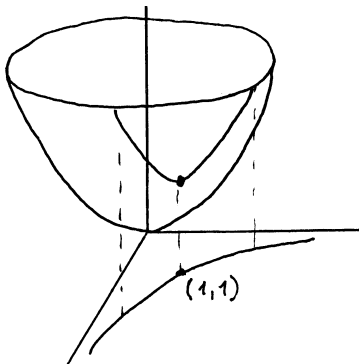


Рис. 2.1.

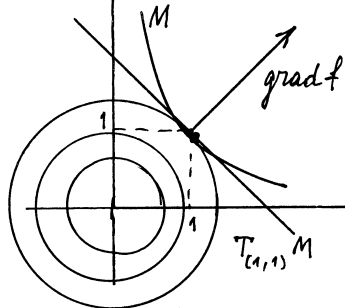


Рис. 2.2.

в частности, в точке $(1, 1)$ градиент f равен $(4, 4)$ (см. рис. 2.2), а градиент функции, задающей условие, равен $(1, 1)$. Можно

заметить, что градиент функции выражается через градиент условия. Кроме того, градиент функции ортогонален касательному пространству к многообразию в данной точке (см. рис. 2.2).

Почему точка, в которой может оказаться условный экстремум, находится именно здесь, а не в другом месте? Возьмем другую точку (x, y) и найдем в ней градиент $\text{grad } f(x, y)$ (рис. 2.3). Он должен быть перпендикулярен соответствующей касательной.

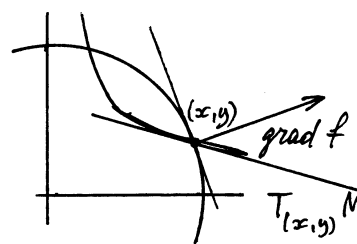


Рис. 2.3.

Кроме того, он указывает направление наибольшего изменения функции, т. е. вдоль градиента скорость изменения функции наибольшая, а вдоль линии уровня функция не меняется. Изобразим в этой же точке касательное пространство к кривой, задаваемой уравнением связи. В этом случае градиент имеет ненулевую проекцию на касательное пространство, а это означает, что при перемещении из данной точки вдоль касательного пространства значения функции могут существенно измениться, как увеличиться, так и уменьшиться. Можно к этому изобразить линии уровня, соответствующие значениям функции, близким к $f(x, y)$. Ясно, что, двигаясь по многообразию, можно перейти с одной линии уровня на другую, т. е. изменить значения функции. Стало быть, в такой точке относительного экстремума нет.

Нарисуем графики функций f и F в сечении $x = y$ (рис. 2.4). Тогда $f(x, x) = 2x^4$, $F(x, x) = x^2 - 1$. Вместе с функциями $f(x, x)$, $F(x, x)$ изобразим функцию Лагранжа

$$L(x, x, \lambda) = 2x^4 - 4x^2 + 4 = 2((x^2 - 1)^2 + 1).$$

Видно, что добавление условия, умноженно на подходящий множитель, подправляет данную функцию так, что у измененной функции (функции Лагранжа) вдоль градиента, т. е. в направлении, ортогональном многообразию, оказывается обычный экстремум.

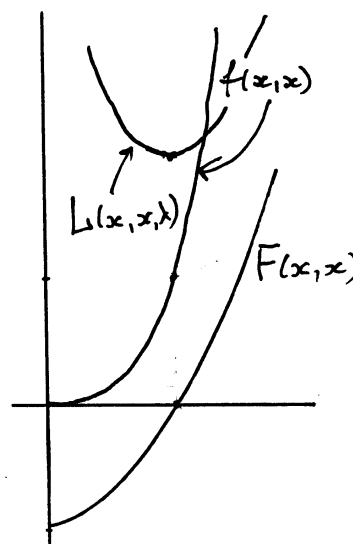


Рис. 2.4.

Теорема 7 (о достаточном условии условного экстремума). Пусть M — многообразие в \mathbb{R}^n , заданное условиями

$$F^1(x) = \dots = F^m(x) = 0,$$

и f — функция класса C^2 , заданная в некоторой окрестности множества M . Пусть в точке $x_0 \in M$ выполнены необходимые условия, т. е.

существуют такие $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, что

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda^j} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

(1) Если квадратичная форма

$$Q(\xi) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{\partial^2 L(x_0, \lambda)}{\partial x^p \partial x^q} \xi^p \xi^q \quad (1)$$

положительно определенная на касательном пространстве $T_{x_0}M$, т. е. $Q(\xi) > 0$ для любого $\xi \in T_{x_0}M$, $\xi \neq 0$, то x_0 — точка условного минимума.

(2) Если квадратичная форма (1) отрицательно определенная на касательном пространстве $T_{x_0}M$, то x_0 — точка условного максимума.

Обратим внимание на следующие особенности. Во-первых, квадратичная форма составляется только из производных по x , но не от исходной функции, а от функции Лагранжа. Во-вторых, знакоопределенность надо проверять не для всех касательных векторов, а только из касательного пространства к многообразию.

Эта теорема останется без доказательства и поясняющих примеров.

§ 3. Интеграл на многообразии

Задача простая: есть, например, поверхность, на которой задана функция, и нужно разумно проинтегрировать эту функцию по поверхности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА НА МНОГООБРАЗИИ. Пусть M — элементарное k -мерное многообразие в \mathbb{R}^n с параметризацией $\Phi : U \rightarrow M$ и $E \subset M$ — множество на многообразии такое, что его прообраз $\Phi^{-1}(E) \subset U$ измерим. Пусть функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что композиция $f \circ \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ измерима. Тогда интеграл от f по множеству E определяется так:

$$\int_E f(x) dM = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u)) \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^\top \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right)} d\mu^k(u).$$

Пусть, к примеру, M — поверхность в \mathbb{R}^3 и Φ — ее параметризация. Чтобы проинтегрировать по поверхности, мы должны все пересадить в область параметров U , расположенную в \mathbb{R}^2 . После такой пересадки в U получается функция на множестве параметров U , и ясно, что интеграл по поверхности должен определяться как интеграл от пересаженной функции по множеству U , взятый с учетом искажения, вносимого параметризацией.

Если многообразие M неэлементарное, т. е. не покрывается одной параметризацией, и множество E не покрывается одной параметризацией, то разобьем E на попарно не пересекающиеся множества, каждое из которых лежит в соответствующей параметризации. Тогда интеграл по всему множеству по определению равен сумме интегралов по множествам из дизъюнктного разбиения.

Можно показать также, что результат не зависит от того, как мы производим разбиение множества, и от того, какие параметризации обслуживают каждое из множеств разбиения. Позже мы обоснуем независимость от параметризации, остальное примем на веру.

Поскольку интеграл должен быть линеен относительно подынтегральной функции и аддитивен как функция множеств, естественно определять его как интеграл по прообразу от пересаженной функции с некоторым коэффициентом искажения:

$$\int_E f dM = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u)) \kappa(u) d\mu^k(u).$$

Вопрос в выборе коэффициента искажения.

Откуда берется вид коэффициента искажения? Для простоты предположим, что $E = M$. В случае $k = n$ n -мерное многообразие в \mathbb{R}^n — это просто область в \mathbb{R}^n , и естественно, что в таком случае интеграл по M как по многообразию есть не что иное как интеграл по области M . Если в этой области заданы другие координаты $\Phi : U \rightarrow M$, то по теореме о замене переменной (см. гл. 6, п. 3.2)

$$\int_M f(x) dM = \int_M f(x) d\mu^n(x) = \int_U f(\Phi(u)) \left| \det \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right| d\mu^n(u).$$

Появляется коэффициент искажения.

Пусть $k < n$. В этом случае параметризация действует из \mathbb{R}^k в \mathbb{R}^n , матрица Якоби уже не квадратная и у нее нет определителя. Обратимся к геометрическому смыслу определителя матрицы Якоби, например, в случае двух переменных. Пусть M — многообразие в \mathbb{R}^2

и $\Phi : U \rightarrow M$ — его параметризация. Пусть $x = \Phi(u)$. Единичные базисные векторы e_1, e_2 , приложенные к точке u , дифференциалом $d\Phi(u)$ переводятся в векторы ξ_1, ξ_2 касательного пространства к M в точке x . Тогда определитель $\det \frac{\partial \Phi}{\partial u}$ равен (ориентированной) площади параллелограмма, натянутого на векторы ξ_1, ξ_2 .

Если A — квадратная матрица, то

$$|\det A| = \sqrt{\det A^\top A}.$$

В частности, если $A = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$, то

$$\left| \det \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right| = \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^\top \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right)}. \quad (1)$$

Выражение в правой части последнего равенства имеет смысл не только для квадратной, но и для любой матрицы. Оказывается при этом, что все операции по нахождению правой части выполнимы.

Выпишем подробно выражение под корнем в (1), теперь уже не предполагая, что $k = n$. Имеем

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^\top \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial u^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^k} & \cdots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial u^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial u^k} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Вспомним, что i -й столбец матрицы Якоби есть не что иное как вектор ξ_i , получаемый переносом i -го базисного вектора пространства параметров в касательное к M пространство. Остальные столбцы матрицы Якоби интерпретируются аналогично. В транспонированной матрице, расположенной в произведении слева, эти же векторы расположены как строки. При перемножении этих матриц возникают попарные скалярные произведения векторов базиса касательного пространства, так что матрица в правой части (2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \langle \xi_1, \xi_1 \rangle & \cdots & \langle \xi_k, \xi_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \xi_1, \xi_k \rangle & \cdots & \langle \xi_k, \xi_k \rangle \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Она составлена из попарных скалярных произведений векторов ξ_i базиса касательного пространства к M в соответствующей точке. Матрицу (3) называют *матрицей Грама*. Она симметричная и положительно определенная.

Разберем несколько частных случаев.

ИНТЕГРАЛ ВДОЛЬ КРИВОЙ. Пусть γ — кривая, заданная параметризацией $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, и $f(x)$ — функция, заданная в точках кривой γ . Тогда, записывая меру на кривой в виде dl , можем написать

$$\int_{\gamma} f(x) dl = \int_a^b f(\Phi(u)) \sqrt{\left(\frac{d\Phi^1}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi^2}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi^3}{du}\right)^2} d\mu^1(u).$$

В принципе, похожая формула появлялась и раньше, при рассмотрении приложений одномерного интеграла.

ЭЛЕМЕНТ ДЛИНЫ ДУГИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ. Пусть кривая γ задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, где φ изменяется в некотором промежутке, пусть $\varphi \in (\varphi_{\min}, \varphi_{\max})$ (рис. 3.1). Параметризация кривой такова:

$$\Phi(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi).$$

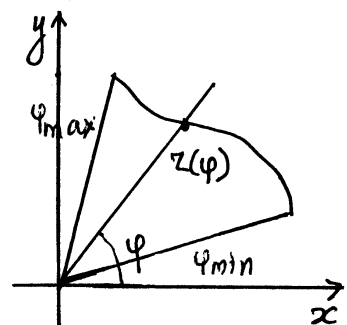


Рис. 3.1.

Касательный вектор равен

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \begin{pmatrix} r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Найдем его длину:

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{(r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 + (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2} \\ &= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)} \end{aligned}$$

В итоге интеграл от произвольной функции по заданной в полярных координатах кривой запишется так:

$$\int_{\gamma} f(x, y) dl = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)} d\varphi.$$

В частности, в полярных координатах элемент длины дуги это

$$dl = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)} d\varphi.$$

ИНТЕГРАЛ ПО ПОВЕРХНОСТИ. Пусть S — поверхность в \mathbb{R}^3 , представляющая собой элементарное двумерное многообразие, заданное параметризацией $\Phi : U \rightarrow S$, и F — функция, заданная на S . Запишем матрицу Якоби параметризации Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения коэффициента искажения найдем произведение матриц

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^\top \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

с элементами

$$E = \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^1} \right)^2, \quad G = \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^2} \right)^2,$$

$$F = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^1} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^2},$$

где ξ_1, ξ_2 — вектор-столбцы матрицы Якоби. Определитель матрицы размера 2×2 считается легко, так что

$$\varkappa(u) = \sqrt{EG - F^2}.$$

В итоге интеграл по элементарной поверхности от заданной на ней произвольной функции f равен

$$\int_S f(x) dS = \int_U f(\Phi(u)) \sqrt{EG - F^2} d\mu^2(u),$$

где $dS = \sqrt{EG - F^2} d\mu^2(u)$ — элемент площади.

Полезно убедиться в том, что корень, выражающий коэффициент искажения, есть не что иное как площадь параллелограмма, натянутого на векторы ξ_1, ξ_2 . Действительно,

$$\begin{aligned}\sqrt{EG - F^2} &= \sqrt{|\xi_1|^2|\xi_2|^2 - \langle \xi_1, \xi_2 \rangle^2} \\ &= \sqrt{|\xi_1|^2|\xi_2|^2(1 - \cos^2 \alpha)} = |\xi_1||\xi_2| \sin \alpha,\end{aligned}\quad (4)$$

где α — угол между ξ_1, ξ_2 . Выражение в правой части последнего равенства представляет собой площадь параллелограмма, натянутого на ξ_1, ξ_2 .

Посмотрим, как будет выглядеть коэффициент искажения на сфере в разных системах координат.

ЭЛЕМЕНТ ПЛОЩАДИ НА СФЕРЕ В ДЕКАРТОВЫХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ. Рассмотрим верхнюю половину сферы:

$$S^+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0\}.$$

Параметризуем ее так:

$$\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}).$$

Областью параметров является круг $x^2 + y^2 < R^2$. Последовательно найдем матрицу Якоби, матрицу Грама и коэффициент искажения. Имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$E = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2}, \quad G = 1 + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}, \quad F = \frac{xy}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Собираем коэффициент искажения:

$$\begin{aligned}\kappa^2(x, y) &= \left(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right) \left(1 + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}\right) - \frac{x^2 y^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^2} \\ &= \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}.\end{aligned}$$

В итоге элемент поверхности на сфере в декартовых координатах равен

$$dS = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

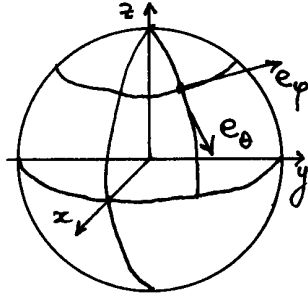


Рис. 3.2.

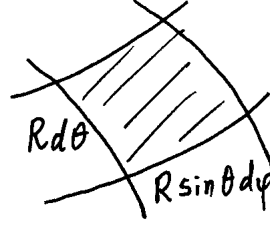


Рис. 3.3.

Можно заметить, что в верхней точке коэффициент искажения равен единице, а вблизи экватора он большой.

Пусть S^+ параметризуется так:

$$\Phi(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta).$$

Обратим внимание на то, что в сферических координатах параметризуется сфера за исключением нулевого меридиана. Однако меридиан имеет меру нуль и при интегрировании его из процесса интегрирования можно без ущерба для результата исключить, после чего появляется элементарное многообразие, параметризуемое сферическими координатами. При такой договоренности пределы изменения параметров таковы: $\varphi \in (0, 2\pi)$, $\theta \in (0, \pi/2)$. Запишем матрицу Якоби:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(\theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi & -R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi \\ -R \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть e_θ, e_φ — вектор-столбцы матрицы Якоби, представляющие собой два вектора касательной плоскости (рис. 3.2). Имеем

$$E = R^2, \quad G = R^2 \sin^2 \varphi, \quad F = 0.$$

Равенство $F = 0$ означает, что векторы e_θ, e_φ ортогональны. Наконец,

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Коэффициент $R^2 \sin \theta$ можно интерпретировать так. Пусть мы находимся в точке, соответствующей θ, φ , от которой откладываются малые приращения $d\theta$ и $d\varphi$. Нарисуем меридианы, соответствующие φ и $\varphi + d\varphi$, а также параллели, соответствующие θ и $\theta + d\theta$ (рис. 3.3). Появляется небольшой криволинейный четырехугольник на сфере. Его площадь и есть элемент площади, а стороны равны $R d\theta$ и $R \sin \theta d\varphi$ (см. рис. 3.3). Величины R и $R \sin \theta$ называют коэффициентами Ламе. Их произведение и дает коэффициент искажения.

Интересно, есть ли в координатах x, y на сфере геометрическая интерпретация, подобная интерпретации в сферических? Чем на сфере координаты x, y отличаются от сферических? По крайней мере тем, что в сферических координатах оказалось $F = 0$. Это указывает на перпендикулярность касательных векторов и позволяет считать площадь, перемножая длины сторон, а в координатах x, y нет ортогональности, и столь просто площадь найти не удастся.

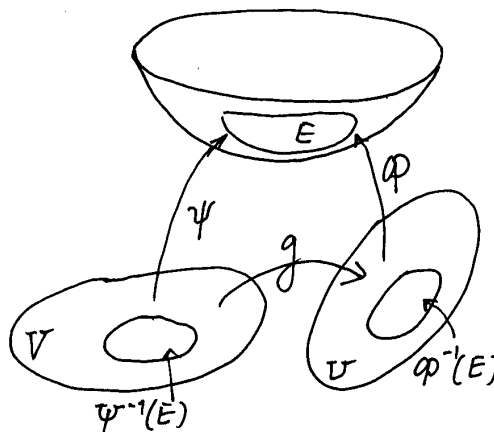


Рис. 3.4.

Теорема 8 (о независимости интеграла от параметризации). *Определение интеграла на многообразии не зависит от параметризации, т. е. если $\Phi : U \rightarrow M$ и $\Psi : V \rightarrow M$ — две параметризации одной и той же части многообразия, т. е. $E = \Phi(U) = \Psi(V)$, то*

$$\begin{aligned} \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u)) \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^\top \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right)} d\mu^2(u) \\ = \int_{\Psi^{-1}(E)} f(\Psi(v)) \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial v} \right)^\top \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) \right)} d\mu^2(v). \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 5 об эквивалентности параметризаций Φ, Ψ существует такой диффеоморфизм g , что $\Psi = \Phi \circ g$ (рис. 3.4). В левом интеграле равенства (5) сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u)) \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^\top \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right)} d\mu^2(u) \\ = \int_{g^{-1}(\Phi^{-1}(E))} f(\Phi(g(v))) \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^\top \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right) \Big|_{u=g(v)}} \left| \det \frac{\partial g}{\partial v} \right| d\mu^2(v). \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что в последнем интеграле равенства (6)

$$g^{-1}(\Phi^{-1}(E)) = \Psi^{-1}(E), \quad \Phi(g(v)) = \Psi(v),$$

и осталось показать, что

$$\sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^\top\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)\right)\Big|_{u=g(v)}\left|\det\frac{\partial g}{\partial v}\right|}=\sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)^\top\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)\right)}.$$

Действительно, продифференцируем тождество

$$\Psi(v)=\Phi(g(v)).$$

Имеем

$$\frac{\partial\Psi}{\partial v}(v)=\frac{\partial\Phi}{\partial u}(g(v))\frac{\partial g}{\partial v}(v).$$

Далее,

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)^\top\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^\top\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^\top\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right).$$

Отсюда

$$\det\left(\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)^\top\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)\right)=\det\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^\top\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)\right)\left(\det\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2. \quad (7)$$

Для получения требуемого равенства осталось взять корень из левой и правой частей равенства (7).

Теорема доказана

§ 4. Ориентация

До сих пор, интегрируя вдоль кривой, мы не интересовались направлением. Однако есть ситуации, в которых направление имеет значение. Например, если считать работу поля вдоль кривой, то важно направление обхода. Еще одна ситуация, в которой направление существенно, это нахождение потока векторного поля через поверхность. Интегралы, в которых направление не имеет значения, называют *интегралами первого рода*, их мы до сих пор и рассматривали, а интегралы, где важно направление, называют *интегралами второго рода*. Прежде чем приступить к рассмотрению интегралов второго рода, надо определиться с тем, что понимать под направлением и как его задавать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА. Фиксируя порядок векторов в базисе векторного пространства, мы задаем ориентацию этого векторного пространства. Точнее, пусть два базиса

e_1, \dots, e_k и f_1, \dots, f_k векторного пространства связаны матрицей a_i^j , т. е.

$$f_i = \sum_{j=1}^k a_i^j e_j.$$

Матрица невырожденная, стало быть, ее определитель отличен от нуля. Если $\det(a_i^j) > 0$, то говорят, что *базисы e_j , f_i одинаково ориентированы*, а если $\det(a_i^j) < 0$, то *противоположно ориентированы*. Таким образом все базисы векторного пространства разбиваются на две класса эквивалентности, в каждом из которых базисы ориентированы одинаково. Каждый из образованных классов эквивалентности называют *ориентацией*. Тем самым выбрать ориентацию означает выбрать какой-либо базис.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ, СОГЛАСОВАННОЙ С ПАРАМЕТРИЗАЦИЕЙ. Пусть в окрестности точки $x \in M$ задана параметризация $\Phi : U \rightarrow M$ и $x = \Phi(u)$. Параметризация порождает ориентацию, а именно векторы $d\Phi(u)(e_1), \dots, d\Phi(u)(e_k)$ задают на $T_x M$ ориентацию. Ее называют *ориентацией, согласованной с параметризацией Φ* .

Происходит следующее (рис. 4.1). К точке $u \in U$ прикрепляем векторы стандартного базиса и дифференциалом отправляем их в касательное пространство. Появляется базис в касательном пространстве, который задает определенную ориентацию. Ее и считают ориентацией, согласованной с параметризацией.

Можно на это посмотреть и так. Допустим, что в касательном пространстве к многообразию уже задана ориентация. Вместе с этим параметризация задает на касательном пространстве свою ориентацию, которая может попасть в один класс с заданной, и тогда они согласованы, а может в другой класс, и тогда согласования нет.

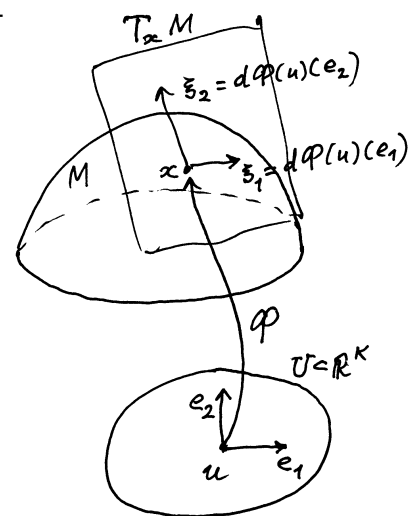


Рис. 4.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ НА МНОГООБРАЗИИ. Говорят, что на многообразии M *выбрана ориентация*, или что *многообразие ориентировано*, если в каждом касательном пространстве выбрана ориентация и они согласованы в следующем смысле. Если точки x, y лежат в какой-либо параметризации $\Phi : U \rightarrow M$, $x = \Phi(u)$, $y = \Phi(v)$, то ори-

ентация $T_x M$ согласована с Φ тогда и только тогда, когда ориентация $T_y M$ согласована с Φ .

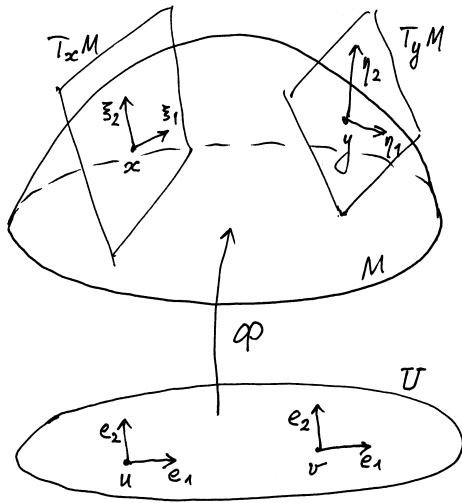


Рис. 4.2.

Поясним определение ориентации многообразия. Пусть M — многообразие, и возьмем на нем две точки x и y (рис. 4.2). В касательном пространстве в каждой из точек есть своя ориентация, но желательно, чтобы ориентации для разных точек были согласованы между собой. Если бы M не было искривленным, то можно было переместить базис из одной точки в другую и затем результаты сопоставить. Однако на искривленном многообразии недостаточно ясно, как организовать такое перемещение — касательные векторы крепятся к разным точкам и базисы не связываются матрицей перехода. Для сопоставления базисов переносят их «вниз», в пространство параметров, и если обе точки попали в зону действия одной параметризации, то базисы в пространстве параметров, связанные с базисами в разных точках многообразия, можно сравнить и считать ориентации в разных касательных пространствах согласованными, если они получаются из согласованных базисов пространства параметров.

Образно согласование ориентаций в разных точках воспринимают как возможность непрерывного перемещения по многообразию одного базиса до попадания его в касательное пространство другой точки и визуального сопоставления двух базисов в одном касательном пространстве.

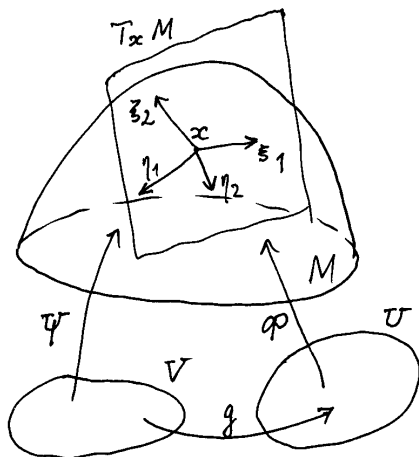


Рис. 4.3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Не все многообразия ориентируемы. Пример дает лист Мёбиуса, который можно получить следующим образом: взять полоску бумаги, перекрутить один из узких краев полоски и склеить с другим узким краем. Если какой-то базис непрерывно перемещать вдоль по полоске до прихода снова в эту же точку, то окажется, что результат перемещения ориентирован противоположно относительно первоначального базиса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОГЛАСОВАННЫХ ПАРАМЕТРИЗАЦИЙ. Пусть $\Phi : U \rightarrow M$ и $\Psi : V \rightarrow M$ — две параметризации в окрестности некоторой точки $x \in M$. Каждая из них задает свою ориентацию: $\xi_i = d\Phi(u)(e_i)$, $\eta_i = d\Psi(v)(e_j)$ (рис. 4.3). По теореме 5 существует диффеоморфизм $g : V \rightarrow U$ такой, что $\Psi(v) = \Phi(g(u))$. Продифференцируем последнее равенство:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi^1}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial \Psi^1}{\partial v^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Psi^n}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial \Psi^n}{\partial v^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial u^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial v^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g^k}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial g^k}{\partial v^k} \end{pmatrix}.$$

Столбцы в матрицах Якоби параметризаций Ψ и Φ представляют собой соответственно векторы η_1, \dots, η_k и ξ_1, \dots, ξ_k , а матрица Якоби отображения g есть не что иное как матрица перехода от одного из базисов к другому. По определению базисы ξ_i и η_j ориентированы одинаково тогда и только тогда, когда $\det \frac{\partial g}{\partial v}(v) > 0$. Определитель матрицы Якоби есть функция непрерывная, а сама матрица невырожденная, значит, на всей области знак определителя сохраняется. Следовательно, достаточно найти знак якобиана в одной точке, в остальных он будет тот же.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНЕШНЕЙ НОРМАЛИ К КРАЮ МНОГООБРАЗИЯ. Пусть M — k -мерное ориентированное многообразие с краем в \mathbb{R}^n . Возьмем точку $x \in \partial M$. Определим вектор внешней нормали $n(x)$ следующим образом: $n(x)$ принадлежит $T_x M$, перпендикулярен касательному пространству к краю $T_x \partial M$ и «смотрит наружу» (рис. 4.4). Последнее свойство означает следующее. Как известно, в окрестности края параметризация Φ устроена таким образом: она отображает пересечение некоторой окрестности U точки u и полупространства $\mathbb{H}^k = \{u \in \mathbb{R}^k \mid u^k \geq 0\}$. В точке x есть касательное пространство к многообразию, а есть касательное к краю (см. рис. 4.4). Все векторы касательного пространства к многообразию получаются перенесением касательных векторов в точке u пространства параметров при помощи

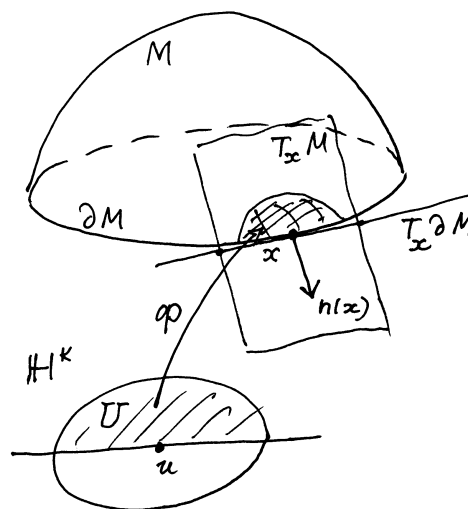


Рис. 4.4.

дифференциала. В пространстве параметров легко определить, будет ли последняя координата отрицательной или нет. В качестве вектора внешней нормали берется тот, прообраз которого имеет отрицательную последнюю координату.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДУЦИРОВАННОЙ ОРИЕНТАЦИИ КРАЯ. Пусть M — k -мерное ориентированное многообразие с краем в \mathbb{R}^n . Зададим ориентацию в касательном пространстве $T_x \partial M$ в точке $x \in \partial M$ следующим образом. Выберем произвольно векторы $\xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in T_x \partial M$ так, чтобы базис $n(x), \xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ касательного пространства $T_x M$ был согласован с ориентацией $T_x M$. Базис ξ_1, \dots, ξ_{k-1} задает индуцированную ориентацию на $T_x \partial M$.

Разумеется, здесь появляются вопросы о согласованности ориентаций в разных точках края. Это свойство, конечно, имеет место, но его обоснование мы опустим.

Тем самым ориентирующий базис в $T_x M$ располагают так, чтобы первый его вектор оказался во внешнем касательном полупространстве (см. рис. 4.4), а остальные были в касательном пространстве к краю. Они и задают ориентацию края.

ПРИМЕР 1 (ориентации полупространства $\partial \mathbb{H}^k$). Рассмотрим полупространство

$$\mathbb{H}^k = \{(x^1, \dots, x^k) \mid x^k \geq 0\}.$$

Ясно, что

$$\partial \mathbb{H}^k = \{(x^1, \dots, x^{k-1}, 0)\}.$$

Край можно снабдить индуцированной ориентацией, а можно задать там естественную ориентацию пространства \mathbb{R}_{k-1} . Совпадают эти ориентации или нет?

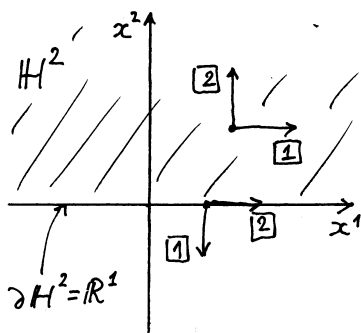


Рис. 4.5.

Ответим на этот вопрос в двух частных случаях: $k = 2$ и $k = 3$, в общем случае ответ получается аналогично. Пусть $k = 2$ (рис. 4.5). Стандартная ориентация в \mathbb{H}^2 берется из \mathbb{R}^2 и она задается векторами $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ (см. рис. 4.5). Для задания индуцированной ориентации края надо поместить в точке края базис так, чтобы первый вектор расположился во внешнем полупространстве и стал тем самым внешней нормалью. Второй вектор, оказавшись в касательном пространстве к краю, укажет индуцированную ориентацию края в данной точке (см. рис. 4.5). Нетрудно заметить, что она совпадает с естественной ориентацией \mathbb{R}^1 .

Второй вектор, оказавшись в касательном пространстве к краю, укажет индуцированную ориентацию края в данной точке (см. рис. 4.5). Нетрудно заметить, что она совпадает с естественной ориентацией \mathbb{R}^1 .

Пусть теперь $k = 3$ (рис. 4.6). Стандартную тройку в \mathbb{R}^3 поместим в точку края так, чтобы первый вектор был направлен вниз, т. е. во внешнее полупространство. Тогда оставшиеся два вектора зададут индуцированную ориентацию края (см. рис. 4.6). Естественная ориентация на $\partial\mathbb{H}^3$ как пространства \mathbb{R}^2 задается на рисунке векторами в кружочках. Видно, что она не совпадает с индуцированной. Так что в случае $k = 3$ индуцированная ориентация полупространства и его естественная ориентация противоположны, можно также сказать, что они отличаются на -1 . В общем случае можно сказать, что индуцированная ориентация края полупространства и его естественная ориентация связаны множителем $(-1)^k$.

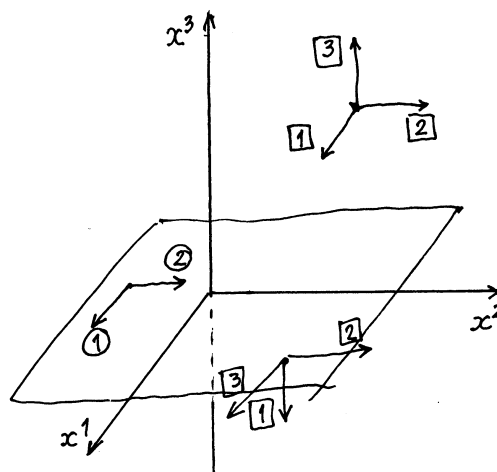


Рис. 4.6.

В принципе, можно было определить индуцированную ориентацию края так, чтобы в рассмотренной простейшей ситуации не было $(-1)^k$. Однако в таком случае $(-1)^k$ будет появляться в важнейших формулах, что нежелательно.

ПРИМЕР 2 (индуцированная ориентация на сфере как на крае шара). Рассмотрим шар

$$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}$$

и сферу

$$S = \partial M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R\}.$$

Какие из известных параметризаций

$$\Phi_{\pm}(x, y) = (x, y, \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

и

$$\Phi_*(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

согласованы с индуцированной ориентацией? Вторая параметризация охватывает почти всю сферу, остается непараметризованным меридиан, а первые параметризуют соответственно только верхнюю или нижнюю части сферы. Достаточно проверить согласованность в какой-то одной точке сферы.

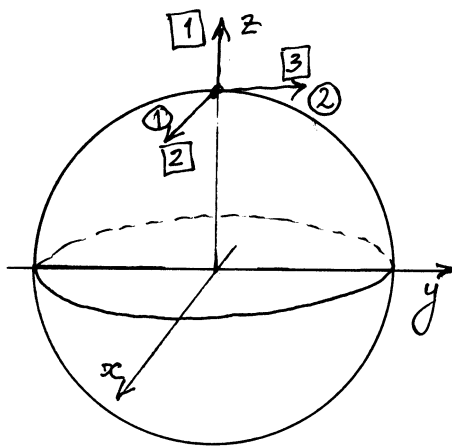


Рис. 4.7.

Возьмем, например, ориентацию Φ_+ и в качестве точки — северный полюс, т. е. точку $(0, 0, R)$. Поместим в эту точку стандартно ориентированный базис пространства (векторы в квадратиках) так, чтобы первый вектор смотрел вверх (рис. 4.7). Затем занумеруем по порядку оказавшиеся в касательном к сфере пространстве векторы (векторы в кружочках). Получили индуцированный порядок расположения векторов. Теперь запишем в этой же точке векторы базиса, порожденного

параметризацией, т. е. столбцы матрицы Якоби:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(x, y)} = (\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что базис из этих векторов ориентирован так же, как полученный выше базис на сфере. Следовательно, параметризация Φ_+ согласована с индуцированной ориентацией сферы. Нетрудно понять, что параметризация Φ_- нижней части сферы приносит туда ориентацию, противоположную индуцированной ориентации.

Как показано выше, на верхней полусфере параметризации Φ_+ и Φ_* согласованы, т. е. дают одну и ту же ориентацию, стало быть, Φ_* , как и Φ_+ , согласована с индуцированной ориентацией сферы. Этот факт можно пронаблюдать и геометрически, рассмотрев какую-либо точку на сфере, в которой действуют обе эти параметризации.

ПРИМЕР 3 (индуцированная ориентация на окружности как на крае полусферы). Пусть

$$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

и

$$\partial M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}.$$

Прежде чем задавать индуцированную ориентацию края, надо иметь ориентацию самого многообразия. Сферу можно ориентировать одним из двух возможных способов. Например, можно взять ориентацию из предыдущего примера. Зададим какую-нибудь параметризацию верхней полусферы, допустим, Φ_* из примера 2 по той причине, что она обслуживает почти всю верхнюю полусферу, в то время как параметризации Φ_{\pm} не действуют на важный для нас край полусферы.

Изобразим полусферу и возьмем точку на крае (рис. 4.8). Разместим в этой точке базис так, чтобы его первый вектор смотрел во внешнее полупространство к краю. Тогда второй из векторов базиса показывает направление обхода окружности (см. рис. 4.8). Получилось, что параметризация

$$\Phi_0(\varphi) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$$

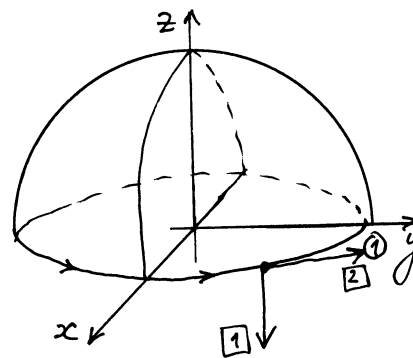


Рис. 4.8.

согласована с индуцированной ориентацией окружности ∂M .

ЗАМЕЧАНИЕ. Не всякое $(n - 1)$ -мерное ориентируемое многообразие в \mathbb{R}^n является краем n -мерного многообразия. Однако и на нем можно определить внешнюю (ориентирующую) нормаль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНЕШНЕЙ НОРМАЛИ К $(n - 1)$ -МЕРНОМУ ОРИЕНТИРОВАННОМУ МНОГООБРАЗИЮ В \mathbb{R}^n . Пусть M — $(n - 1)$ -мерное ориентированное многообразие. Определим *внешнюю нормаль* $N(x)$ как единичный вектор из $T_x \mathbb{R}^n$ такой, что $N(x) \perp T_x M$ и базис $N(x), \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ имеет стандартную ориентацию в \mathbb{R}^n , где ξ_1, \dots, ξ_{n-1} — базис в $T_x M$, согласованный с ориентацией.

Дадим образное описание ситуации. Рассмотрим поверхность M и точку $x \in M$ (рис. 4.9). В касательном пространстве $T_x M$ возьмем согласованный с ориентацией базис и дополним его одним вектором до базиса пространства \mathbb{R}^n так, чтобы дополняющий вектор был ортогонален касательному пространству к M и набор $N(x), \boxed{1}, \boxed{2}$ имел стандартную ориентацию пространства (см. рис. 4.9).

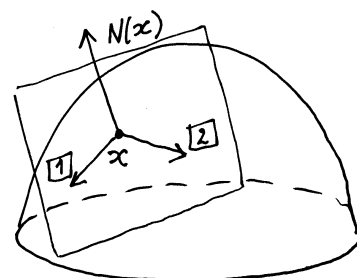


Рис. 4.9.

В рассмотренной конструкции, по существу, присутствуют три объекта: ориентация объемлющего пространства, ориентация на многообразии и вектор внешней нормали. Из этих объектов каждые два определяют третий. Обычно ориентацию объемлющего пространства фиксируют, а остальные два объекта определяют один через другой: если дана ориентация многообразия, то однозначно определяется внешняя нормаль, и, наоборот, если фиксирован вектор нормали к многообразию, то он определяет на касательном пространстве ориентацию и становится вектором внешней нормали по отношению к этой ориентации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ НА $(n-1)$ -МЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ ПРИ ПОМОЩИ НОРМАЛИ. Пусть в каждой точке $x \in M$ задана единичная нормаль $N(x)$ такая, что $N(x)$ меняется непрерывно в зависимости от $x \in M$. Указание такого семейства нормалей однозначно задает ориентацию на многообразии M , в которой $N(x)$ — внешняя нормаль.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим верхнюю полусферу и разберемся, как согласованы ориентации на верхней полусфере и на ее крае, причем ориентацию на полусфере будем задавать при помощи внешней нормали.

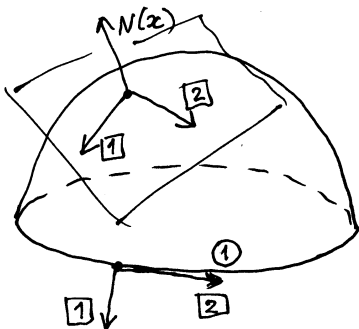


Рис. 4.10.

Процесс начинается с ориентации верхней полусферы путем указания внешней нормали на сфере как на $(n-1)$ -мерном многообразии. Эта нормаль ориентирует касательную к сфере плоскость в данной точке. Возьмем ориентирующий базис в точке края и расположим его так, чтобы первый из двух базисных векторов оказался во внешней полуплоскости, а второй расположился на касательной прямой к окружности. Он задаст ориентацию края, индуцированную ориентацией самой полусферы, которая, в свою очередь, была порождена вектором внешней (ориентирующей) нормали (рис. 4.10).

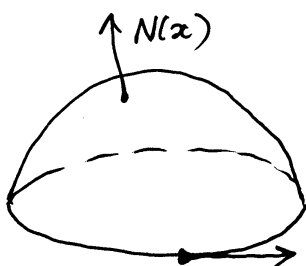


Рис. 4.11.

Если убрать все детали построения ориентации края, то можно увидеть, как на рис. 4.11, что если смотреть на поверхность с конца внешней нормали, то обход границы будет осуществляться против часовой стрелки.

ВЫРАЖЕНИЕ ВНЕШНЕЙ НОРМАЛИ И КАСАТЕЛЬНОГО ВЕКТОРА В \mathbb{R}^2 . Пусть S — двумерное многообразие с краем в \mathbb{R}^2 со стандартной ориентацией из \mathbb{R}^2 . Пусть $\Phi(u) : (a, b) \rightarrow \partial S$ — параметризация в окрестности точки $x \in \partial S$, согласованная с индуцированной ориентацией края, $x = \Phi(u)$. Посчитаем через эту параметризацию вектор внешней нормали и касательный вектор. Касательный вектор — это вектор скорости $\left(\frac{d\Phi^1}{du}, \frac{d\Phi^2}{du} \right)$. Нормировав его, получим вектор

$$\hat{\xi} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\Phi^1}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi^2}{du}\right)^2}} \left(\frac{d\Phi^1}{du}, \frac{d\Phi^2}{du} \right)$$

(размещение «крышки» над вектором указывает на его нормировку, т. е. приведение его длины к единице).

Для получения вектора, ортогонального $\hat{\xi}$, т. е. нормали, надо поменять местами компоненты $\hat{\xi}$ и перед одной из них поставить знак минус. Если знак отнести ко второй компоненте, то пара, составленная из нормали и данного вектора $\hat{\xi}$, имеет стандартную ориентацию на плоскости. В итоге

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\Phi^1}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi^2}{du}\right)^2}} \left(\frac{d\Phi^2}{du}, -\frac{d\Phi^1}{du} \right).$$

Тот факт, что пара $n(x), \xi(x)$ образует стандартную пару, можно проверить аналитически: определитель матрицы $\begin{pmatrix} \frac{d\Phi^2}{du} & \frac{d\Phi^1}{du} \\ -\frac{d\Phi^1}{du} & \frac{d\Phi^2}{du} \end{pmatrix}$ должен быть положителен, что на самом деле и есть.

Аналогичные выкладки можно проделать и в том случае, когда рассматривается одномерное многообразие в \mathbb{R}^2 , т. е. просто кривая на плоскости.

Нахождение работы поля вдоль кривой на плоскости. Пусть γ — элементарная ориентированная кривая в \mathbb{R}^2 , $\Phi : (a, b) \rightarrow \gamma$ — ее параметризация, согласованная с ориентацией, и $F(x) = (F^1(x), F^2(x))$ — векторное поле на γ (координаты декартовы). Работа поля F вдоль γ находится так:

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot \hat{\xi}(x) dl = \int_a^b \left(F^1(\Phi(u)) \frac{\frac{d\Phi^1(u)}{du}}{\sqrt{\left(\frac{d\Phi^1(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi^2(u)}{du}\right)^2}} + F^2(\Phi(u)) \frac{\frac{d\Phi^2(u)}{du}}{\sqrt{\left(\frac{d\Phi^1(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi^2(u)}{du}\right)^2}} \right) \kappa(x) du.$$

Заметим, что длина вектора $\xi(x)$ в точности равна коэффициенту искажения $\kappa(x)$:

$$\begin{aligned} |\xi(x)| &= \sqrt{\left(\frac{d\Phi^1(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi^2(u)}{du}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\det\left(\frac{d\Phi(u)}{du}\right)^\top \left(\frac{d\Phi(u)}{du}\right)\right)} = \kappa(x). \end{aligned}$$

В итоге получаем такую формулу для работы:

$$\int_a^b \left(F^1(\Phi(u)) \frac{d\Phi^1(u)}{du} + F^2(\Phi(u)) \frac{d\Phi^2(u)}{du} \right) du.$$

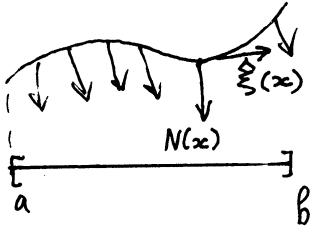


Рис. 4.12.

Вычисление потока векторного поля через кривую. Пусть в окрестности кривой γ задано векторное поле F , как в предыдущем примере. Найдем, сколько этого поля протекает через кривую γ . Для этого надо в каждой точке кривой найти нормальную составляющую поля F и проинтегрировать результат по элементу длины:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot N(x) dl &= \int_a^b \left(F^1(\Phi(u)) \frac{\frac{d\Phi^2(u)}{du}}{\sqrt{\left(\frac{d\Phi^1(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi^2(u)}{du}\right)^2}} - F^2(\Phi(u)) \frac{\frac{d\Phi^1(u)}{du}}{\sqrt{\left(\frac{d\Phi^1(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi^2(u)}{du}\right)^2}} \right) \kappa(x) du \\ &= \int_a^b \left(F^1(\Phi(u)) \frac{d\Phi^2(u)}{du} - F^2(\Phi(u)) \frac{d\Phi^1(u)}{du} \right) du \\ &= \int_a^b \begin{vmatrix} F^1(\Phi(u)) & \frac{d\Phi^1(u)}{du} \\ F^2(\Phi(u)) & \frac{d\Phi^2(u)}{du} \end{vmatrix} du. \end{aligned}$$

Это формула для потока векторного поля через кривую.

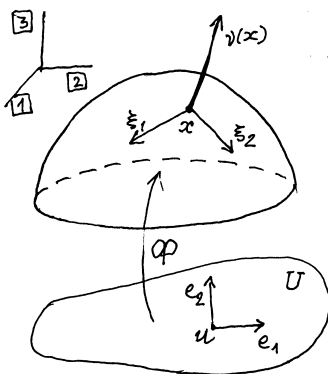


Рис. 4.13.

ВЫРАЖЕНИЕ ВНЕШНЕЙ НОРМАЛИ К ПОВЕРХНОСТИ ЧЕРЕЗ ПАРАМЕТРИЗАЦИЮ. Пусть S — ориентированная поверхность в \mathbb{R}^3 и $\Phi : U \rightarrow S$ — ее параметризация в окрестности точки $x = \Phi(u)$, согласованная с ориентацией. Наша цель — найти, как внешняя нормаль находится по параметризации (рис. 4.13).

Первое, что мы можем найти, это касательные векторы, которые получаются из базисных векторов e_1, e_2 пространства параметров:

$$\xi_1 = d\Phi(u)(e_1) = \left(\frac{\partial\Phi^1}{\partial u^1}(u), \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^1}(u), \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^1}(u) \right),$$

$$\xi_2 = d\Phi(u)(e_2) = \left(\frac{\partial\Phi^1}{\partial u^2}(u), \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^2}(u), \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^2}(u) \right).$$

Нормировать векторы ξ_1, ξ_2 не будем. Из этих векторов нормаль собирается посредством векторного произведения:

$$\nu(x) = \xi_1 \times \xi_2.$$

Эта нормаль имеет такое направление, при котором тройка векторов $\nu(x), \xi_1, \xi_2$ имеет по определению векторного произведения правую ориентацию, т. е. ориентирована так же, как базис в \mathbb{R}^3 . Стало быть, вектор $\nu(x)$ имеет то же направление, что и искомая внешняя нормаль. Можно выписать координаты этого вектора:

$$\begin{aligned} \nu(x) &= (\nu^1(x), \nu^2(x), \nu^3(x)) \\ &= \left(\frac{\partial\Phi^2}{\partial u^1} \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^2} - \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^2} \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^1}, \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^1} \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^2} - \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^1} \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^2}, \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^1} \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^2} - \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^1} \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^2} \right). \end{aligned}$$

Осталось этот вектор нормировать, и в результате получим искомую внешнюю нормаль:

$$N(x) = \frac{\nu(x)}{|\nu(x)|} = \frac{(\nu^1(x), \nu^2(x), \nu^3(x))}{\sqrt{(\nu^1(x))^2 + (\nu^2(x))^2 + (\nu^3(x))^2}}.$$

Придадим геометрический смысл объектам, связанным с внешней нормалью $N(x)$. Начнем с длины вектора нормали

$$|\nu(x)| = \sqrt{(\nu^1(x))^2 + (\nu^2(x))^2 + (\nu^3(x))^2}.$$

Вектор $\nu(x)$ был получен как векторное произведение векторов ξ_1 и ξ_2 , тем самым он перпендикулярен векторам ξ_1 и ξ_2 , его направление определяет правило буравчика, а длина этого вектора равна площади параллелограмма, натянутого на векторы ξ_1, ξ_2 (рис. 4.14).

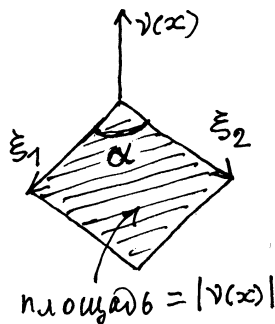


Рис. 4.14.

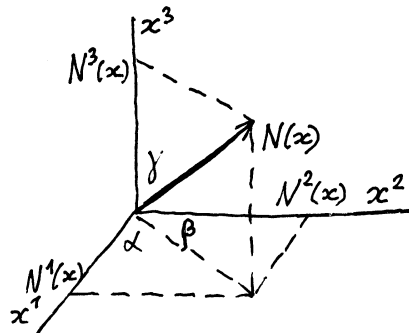


Рис. 4.15.

С другой стороны, при определении интеграла по многообразию также возникали пары векторов, и связанный с ними коэффициент искажения

$$\varkappa(u) = \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)^\top \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right)}$$

имел тот же геометрический смысл площади соответствующего параллелограмма (см. (4) в § 3). Значит,

$$|\nu(x)| = \varkappa(u).$$

Изобразим отвлеченно единичный вектор $N(x)$, приложенный к точке x , в этой точке поставим систему координат (x^1, x^2, x^3) и спроектируем вектор $N(x)$ на координатные оси (рис. 4.15). Пусть $N^1(x)$, $N^2(x)$, $N^3(x)$ — компоненты вектора $N(x)$. Поскольку длина вектора $N(x)$ равна 1, его компоненты равны соответственно косинусам углов между вектором $N(x)$ и осями координат:

$$N^1(x) = \cos \alpha, \quad N^2(x) = \cos \beta, \quad N^3(x) = \cos \gamma,$$

называемым *направляющими косинусами вектора нормали*.

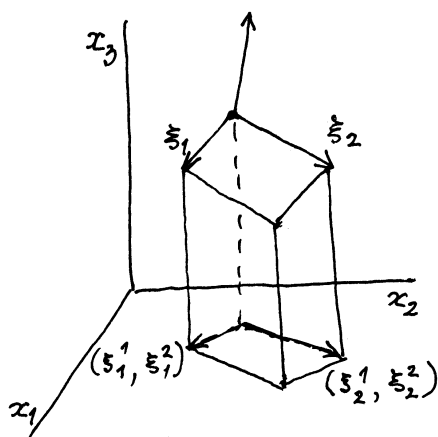


Рис. 4.16.

В рамках стандартной системы координат (x^1, x^2, x^3) изобразим касательные векторы ξ_1, ξ_2 (при этом само многообразие подразумевается) и натянутый на них параллелограмм (рис. 4.16). Этот параллелограмм можно спроектировать на каждую из координатных плоскостей. Изобразим проекцию на плоскость $x_1 O x_2$ и рассмотрим ее подробнее (см. рис. 4.16). Площадь этой проекции, порожденной векторами $(\xi_1^1, \xi_1^2), (\xi_2^1, \xi_2^2)$ на плоскости,

равна определителю $\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 \end{vmatrix}$. Здесь на-

до учесть, что полученное выражение дает площадь с учетом порядка расположения векторов. Проекция на плоскости $x^3 O x^1$ и $x^2 O x^3$ также дают параллелограммы, натянутые соответственно на пары векторов $(\xi_1^3, \xi_1^1), (\xi_2^3, \xi_2^1)$ и $(\xi_1^2, \xi_1^3), (\xi_2^2, \xi_2^3)$. Их площади суть соответственно $\det \begin{vmatrix} \xi_1^3 & \xi_2^3 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 \end{vmatrix}, \det \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_2^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 \end{vmatrix}$. Полученные определители равны соответствующим компонентам вектора нормали $\nu(x)$. Точнее, площадь параллелограмма, натянутого на проекции векторов ξ_1, ξ_2 на плоскость

x^1Ox^2 — это третья компонента $\nu^3(x)$, на плоскость x^3Ox^1 — это вторая компонента $\nu^2(x)$ и на плоскость x^2Ox^3 — это первая компонента $\nu^1(x)$. Тем самым компоненты ν^1, ν^2, ν^3 (ненормированной) нормали имеют следующий геометрический смысл: это площади проекций параллелограмма, натянутого на векторы ξ_1, ξ_2 , на соответствующие координатные плоскости, взятые с учетом ориентации.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТОКА ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ. Пусть S — элементарная ориентированная поверхность в \mathbb{R}^3 и $\Phi : U \rightarrow S$ — ее параметризация, согласованная с ориентацией. Пусть $F(x) = (F^1(x), F^2(x), F^3(x))$ — векторное поле в окрестности поверхности S , $N(x)$ — вектор единичной внешней нормали к S . Поток поля F через поверхность S равен

$$\begin{aligned} \int_S \langle F \cdot N(x) \rangle dS &= \int_U \left(F^1(\Phi(u)) \frac{\nu^1(\Phi(u))}{|\nu(\Phi(u))|} + F^2(\Phi(u)) \frac{\nu^2(\Phi(u))}{|\nu(\Phi(u))|} \right. \\ &\quad \left. + F^3(\Phi(u)) \frac{\nu^3(\Phi(u))}{|\nu(\Phi(u))|} \right) \kappa(u) d\mu^2(u) \\ &= \int_U \left(F^1 \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \end{vmatrix} + F^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^2} \end{vmatrix} + F^3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \right) d\mu^2(u) \\ &= \int_U \begin{vmatrix} F^1 & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^2} \\ F^2 & \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \\ F^3 & \frac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \end{vmatrix} d\mu^2(u). \end{aligned}$$

§ 5. Классические интегральные формулы

В одномерном случае есть замечательная формула Ньютона — Лейбница (ФНЛ), которую можно записать так:

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a).$$

В многомерном случае есть аналоги этой формулы, которые столь же важны. Это формулы Грина, Гаусса — Остроградского и Стокса.

Начнем с общего утверждения, из которого затем получим классические формулы как частные случаи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Носителем функции* $f : x \rightarrow \mathbb{R}$ называют замыкание множества всех x , в которых функция отлична от нуля. Носитель f обозначают через $\text{supp } f$ (от английского support). Иначе можно записать, что

$$\text{supp } f = \text{cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

ПРИМЕРЫ. 1. Носитель функции Хевисайда

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

это множество $\text{supp } H = [0, +\infty)$.

2. Носителем функции $\sin x$ является всё \mathbb{R} .

3. Носителем функции Дирихле на $[0, 1]$ служит отрезок $[0, 1]$.

Теорема 9 (аналог ФНЛ). Пусть M — гладкое n -мерное (ориентированное) многообразие в \mathbb{R}^n с краем ∂M и f — функция класса C^1 в окрестности многообразия M такая, что $\text{supp } f(x) \cap M$ — компактное множество. Тогда

$$\int_M \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) dM^n = \int_{\partial M} f(x) n^j(x) dM^{n-1},$$

где $n^j(x)$ — j -я компонента единичной внешней нормали $n(x)$ к ∂M .

По-существу, гладкое n -мерное многообразие в \mathbb{R}^n — это область с гладкой границей и $n(x)$ — внешняя нормаль к границе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ проведем только для частного случая, когда $n = 2$, т. е. для области на плоскости, $j = 2$ и множество M представляет собой часть плоскости, зажатой между графиками двух функций, т. е.

$$M = \{(x^1, x^2) \mid x^1 \in [a, b], \varphi_-(x^1) \leq x^2 \leq \varphi_+(x^1)\},$$

(рис. 5.1), причем $\varphi_+(a) = \varphi_-(a)$, $\varphi_+(b) = \varphi_-(b)$. Если удалить точки $(a, \varphi_{\pm}(a))$ и $(b, \varphi_{\pm}(b))$, то край ∂M распадается на две компоненты с параметризациями $\Phi_-(x_1) = (x^1, \varphi_-(x^1))$ и $\Phi_+(x_1) = (x^1, \varphi_+(x^1))$.

Выясним, как эти параметризации согласованы с индуцированной ориентацией края. Прделаем это геометрически. Ориентируем многообразие M так же, как ориентировано все \mathbb{R}^2 (см. рис. 5.1). Встанем в точку края и расположим базис в такой точке так, чтобы его первый вектор был расположен во внешнем пространстве, а второй — в касательном пространстве к краю. Тогда второй вектор даст ориентацию края (см. рис. 5.1). Образно можно сказать, что при обходе по контуру близлежащая к точке часть области остается слева по ходу движения. С увеличением x^1 точка $\Phi_-(x^1) = (x^1, \varphi_-(x^1))$ движется в том же направлении. Тем самым $\Phi_-(x_1) = (x^1, \varphi_-(x^1))$ согласована с ориентацией. Вместе с тем $\Phi_+(x_1) = (x^1, \varphi_+(x^1))$ задает ориентацию, противоположную индуцированной ориентации края.

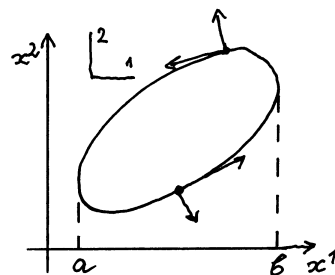


Рис. 5.1.

Выразим единичную внешнюю нормаль $n(x)$ через Φ_{\pm} . Сначала найдем касательный вектор:

$$\hat{\xi}_{\pm}(x) = \frac{\left(\frac{d\Phi_{\pm}^1}{dx^1}, \frac{d\Phi_{\pm}^2}{dx^1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d\Phi_{\pm}^1}{dx^1}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi_{\pm}^2}{dx^1}\right)^2}} = \frac{\left(1, \frac{d\varphi_{\pm}}{dx^1}(x)\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi_{\pm}}{dx^1}(x)\right)^2}}.$$

Повернув этот вектор по часовой стрелке, получим вектор нормали:

$$n(x) = \frac{\left(\frac{d\Phi_{\pm}^2}{dx^1}, -\frac{d\Phi_{\pm}^1}{dx^1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{d\Phi_{\pm}^1}{dx^1}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi_{\pm}^2}{dx^1}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{d\varphi_{\pm}}{dx^1}, -1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi_{\pm}}{dx^1}\right)^2}}.$$

на нижней части и

$$n(x) = \frac{-\left(\frac{d\varphi_{\pm}}{dx^1}, -1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi_{\pm}}{dx^1}\right)^2}}.$$

на верхней части.

Рассмотрим интеграл

$$\int_M \frac{\partial f}{\partial x^2}(x) dM^2(x) = \int_a^b \int_{\varphi_-(x^1)}^{\varphi_+(x^1)} \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1, x^2) dx^2 dx^1$$

$$\stackrel{\Phi_{\text{НЛ}}}{=} \int_a^b (f(x^1, \varphi_+(x^1)) - f(x^1, \varphi_-(x^1))) dx^1$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b f(x^1, \varphi_+(x^1)) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi_+}{dx^1}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{d\varphi_+}{dx^1}\right)^2 + 1} dx^1 \\
&+ \int_a^b f(x^1, \varphi_-(x^1)) \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi_-}{dx^1}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{d\varphi_-}{dx^1}\right)^2 + 1} dx^1. \quad (1)
\end{aligned}$$

Заметим, что корень $\sqrt{\left(\frac{d\varphi_{\pm}}{dx^1}\right)^2 + 1}$ есть не что иное как коэффициент искажения $\varkappa(x^1)$ и вместе с dx^1 он составляет элемент длины.

Множители $\frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi_{\pm}}{dx^1}\right)^2 + 1}}$ суть вторые компоненты нормали в каж-

дом из интегралов. Следовательно, интеграл в (1) запишется так:

$$\int_{\partial M} f(x) \cdot n^2(x) dM^1.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае область разрезают на части и применяют теорему для каждого из кусков.

Собственно этой теоремой мы, скорее всего, пользоваться не будем, это некая общая теорема, из которой выведем важные формулы.

ЗАМЕЧАНИЕ. На практике условием компактности носителя мы пользоваться не будем, так как доказываться все будет для компактной области и это обеспечивает компактность пересечения. Но если условие компактности в формулировке не упомянуть, то получается неверное утверждение. Например, без предположения компактности в качестве многообразия с краем можно взять полупространство и рассмотреть заданную на нем функцию, которая определена сколь угодно далеко. В таком случае теорема не работает. Действительно, пусть $M = \mathbb{H}^2$ и $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2}$. Формальное применение теоремы 9 приводит к следующему:

$$0 = \int_{\mathbb{H}^2} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \cdot (-1) dx = -\pi,$$

что неверно. Почему так получилось? Если повторить выкладки из доказательства для нашего случая, то получится так:

$$\int_{\mathbb{H}^2} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y} dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x, +\infty) - f(x, 0)) dx, \quad (2)$$

где

$$f(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Продолжим (2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x, +\infty) - f(x, 0)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, +\infty) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, 0) dx.$$

Возникает интеграл по настоящей границе, это второй интеграл, но возникает еще интеграл по «бесконечно удаленной» прямой. Но «бесконечно удаленная» прямая не входит в край многообразия. Чтобы проблем с «бесконечно удаленными» частями края не возникало, функцию слишком далеко не пускают, она должна обратиться в нуль заблаговременно. Тем самым либо многообразие должно быть компактным, и тогда выхода на бесконечность нет, либо функция финитной.

В принципе, можно этот результат распространить на случай отсутствия требования компактности, но там появляются другие дополнительные условия типа условия излучения, обеспечивающие соответствующий предельный переход.

Теорема 10 (формула Гаусса — Остроградского). Пусть M — 3-мерное многообразие с краем в \mathbb{R}^3 и $F(x) = (F^1(x), F^2(x), F^3(x))$ — вектор-функция, заданная в некоторой окрестности многообразия M , с компонентами класса C^1 такая, что множества $\text{supp } F^j \cap S$, $j = 1, \dots, n$, компактны. Пусть $n(x) = (n^1(x), n^2(x), n^3(x))$ — вектор единичной внешней нормали к краю ∂M .

Тогда имеет место формула Гаусса — Остроградского

$$\begin{aligned} \int_M \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(x) + \frac{\partial F^2}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial F^3}{\partial x^3}(x) \right) dV \\ = \int_{\partial M} (F^1(x) \cdot n^1(x) + F^2(x) \cdot n^2(x) + F^3(x) \cdot n^3(x)) dS. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 9 к каждой из функций $F^i(x)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\int_M \frac{\partial F^i}{\partial x^i} dV = \int_{\partial M} F^i n^i dS,$$

и результаты сложим.

Теорема доказана.

Теорему 10 можно легко обобщить на n -мерный случай.

Теорема 11 (формула Грина). Пусть S — гладкое 2-мерное многообразие с краем в \mathbb{R}^2 (т. е. область на плоскости с гладкой границей), и $F(x) = (F^1(x), F^2(x))$ — вектор-функция в окрестности S с компонентами класса C^1 такая, что множества $\text{supp } F^j \cap S$, $j = 1, 2$, компактны.

Тогда имеет место формула Грина

$$\int_S \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) dS = \int_{\partial S} (F^1 \hat{\xi}^1 + F^2 \hat{\xi}^2) dl,$$

где $\hat{\xi}(x) = (\hat{\xi}^1(x), \hat{\xi}^2(x))$ — единичный касательный вектор в точке $x \in \partial S$, согласованный с индуцированной ориентацией края ∂S , т. е. указывающий направление обхода, при котором близлежащая к x часть области остается слева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Касательный вектор $\xi(x)$ и вектор внешней нормали связаны следующим образом:

$$(n^1(x), n^2(x)) = (\hat{\xi}^2(x), -\hat{\xi}^1(x)).$$

По теореме 9 имеем

$$\int_S \frac{\partial F^2}{\partial x^1} dS = \int_{\partial S} F^2 \cdot n^1 dl = \int_{\partial S} F^2 \cdot \hat{\xi}^2 dl, \quad (3)$$

$$\int_S \frac{\partial F^1}{\partial x^2} dS = \int_{\partial S} F^1 \cdot n^2 dl = - \int_{\partial S} F^1 \cdot \hat{\xi}^1 dl, \quad (4)$$

откуда требуемый результат получается в результате вычитания равенства (4) из равенства (3).

Теорема доказана.

Теорема 12 (формула Стокса). Пусть S — гладкое двумерное ориентированное многообразие с краем в \mathbb{R}^3 и $F(x) = (F^1(x), F^2(x), F^3(x))$ — заданная в некоторой окрестности многообразия S вектор-функция с компонентами класса C^1 такая, что множество $\text{supp } F^j \cap S$, $j = 1, 2, 3$, компактно.

Тогда имеет место формула Стокса

$$\int_S \left(\left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3} \right) N^1(x) + \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1} \right) N^2(x) + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) N^3(x) \right) dS = \int_{\partial S} (F^1 \hat{\xi}^1 + F^2 \hat{\xi}^2 + F^3 \hat{\xi}^3) dl, \quad (5)$$

где $N(x) = (N^1(x), N^2(x), N^3(x))$ — вектор единичной внешней нормали, задающий ориентацию на S , а $\hat{\xi}(x) = (\hat{\xi}^1(x), \hat{\xi}^2(x), \hat{\xi}^3(x))$ — единичный касательный вектор к краю ∂S в точке x , согласованный с индуцированной ориентацией края.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что S проецируется на одну из координатных плоскостей, пусть на плоскость переменных x^1, x^2 , т. е. S — график некоторой функции $\varphi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$, заданной на замыкании области U с гладкой границей:

$$S = \{(x^1, x^2, \varphi(x^1, x^2)) \mid (x^1, x^2) \in \bar{U}\}.$$

Пусть поверхность ориентирована нормалью, направленной вверх, т. е. такой, у которой последняя координата положительна. Тогда параметризация $\Phi(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \varphi(u^1, u^2))$ согласована с ориентацией. Действительно, запишем матрицу Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} & \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \end{pmatrix},$$

и пусть, как обычно, через ξ_1, ξ_2 обозначены ее вектор-столбцы. Порождаемая параметризацией Φ (неединичная) нормаль равна

$$\nu = \xi_1 \times \xi_2 = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u^1}, -\frac{\partial \varphi}{\partial u^2}, 1 \right).$$

Замечаем, что ее последняя координата положительна.

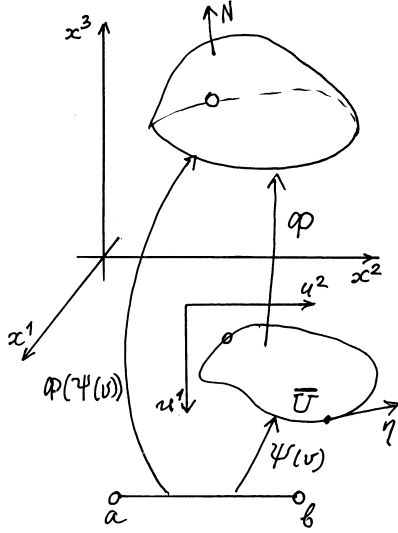


Рис. 5.2.

Уберем из края ∂U какую-то одну точку (это не повлияет на значение интеграла) и оставшуюся часть параметризуем одной параметризацией $\Psi : (a, b) \rightarrow \partial \bar{U}$, согласованной с индуцированной ориентацией края $\partial \bar{U}$ (рис. 5.2). Касательный (неединичный) вектор η к $\partial \bar{U}$ равен

$$\eta = \left(\frac{d\Psi^1}{dv}, \frac{d\Psi^2}{dv} \right).$$

Композиция $\Phi \circ \Psi$ является параметризацией края ∂S поверхности S без одной точки. Эта параметризация согласована с индуцированной ориентацией края ∂S . Действительно, обход контура $\partial \bar{U}$ совершается так же, как обход контура ∂S , что, в свою очередь, согласовано с внешней нормалью. Запишем касательный (неединичный) вектор ξ к краю ∂S в параметризации

$$\Phi(\Psi(v)) = (\Psi^1(v), \Psi^2(v), \varphi(\Psi^1(v), \Psi^2(v))).$$

Имеем

$$\xi = \left(\frac{d\Psi^1}{dv}, \frac{d\Psi^2}{dv}, \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{d\Psi^1}{dv} + \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \frac{d\Psi^2}{dv} \right).$$

Получили все необходимые для применения теоремы 9 объекты. Воспользовавшись формулой для нахождения потока векторного поля через поверхность (см. § 4) для левой части (5) имеем

$$\begin{aligned} & \int_S \left(\left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3} \right) N^1(x) + \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1} \right) N^2(x) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) N^3(x) \right) dS \\ &= \int_{\bar{U}} \left(\left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3} \right) \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right)}_{\nu^1} + \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1} \right) \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right)}_{\nu^2} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) \cdot \underbrace{\left(1 \right)}_{\nu^3} \right) d\mu^2(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(здесь всюду } F^j = F^j(u^1, u^2, \varphi(u^1, u^2))\text{)} \\
& = \int_{\bar{U}} \left(\left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^3} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^1} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial F^3}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) \right) d\mu^2(u) \\
& = \int_{\bar{U}} -\frac{\partial}{\partial u^2} F^1(u^1, u^2, \varphi(u^1, u^2)) + \frac{\partial}{\partial u^1} F^1(u^1, u^2, \varphi(u^1, u^2)) \\
& \quad + \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial F^3}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) d\mu^2(u). \quad (6)
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим выражение в правой части (5). Вспоминая нахождение работы поля вдоль кривой и используя параметризацию $\Phi \circ \Psi$, имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial S} (F^1 \hat{\xi}^1 + F^2 \hat{\xi}^2 + F^3 \hat{\xi}^3) dl \\
& = \int_a^b \left(F^1 \underbrace{\frac{d\Psi^1}{dv}}_{\xi^1 = \eta^1} + F^2 \underbrace{\frac{d\Psi^2}{dv}}_{\xi^2 = \eta^2} + F^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \frac{d\Psi^1}{dv} + \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \frac{d\Psi^2}{dv} \right) \right) dv \\
& \quad \text{(здесь всюду } F^j = F^j(\Psi^1(v), \Psi^2(v), \varphi(\Psi^1(v), \Psi^2(v)))\text{)} \\
& = \int_a^b \left(\left(F^1 + F^3 \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right) \frac{d\Psi^1}{dv} + \left(F^2 + F^3 \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) \frac{d\Psi^2}{dv} \right) dv \\
& = \int_{\partial \bar{U}} \left(\left(F^1 + F^3 \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right) \hat{\eta}^1 + \left(F^2 + F^3 \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) \hat{\eta}^2 \right) dl \\
& \quad \text{(здесь уже } F^j = F^j(u^1, u^2, \varphi(u^1, u^2))\text{)} \\
& = \int_{\bar{U}} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \left(F^2 + F^3 \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) - \frac{\partial}{\partial u^2} \left(F^1 + F^3 \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right) \right) d\mu^2(u) \\
& = \int_{\bar{U}} \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^3} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} + \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^1} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} + F^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^1 \partial u^2} \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^2} + \frac{\partial F^1}{\partial x^3} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} + F^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^1 \partial u^2} \right) \right) d\mu^2(u).
\end{aligned}$$

После приведение подобных членов в правой части последнего равенства находим, что она равна правой части в (6).

Теорема доказана.

§ 6. Основы векторного анализа

Здесь будем рассматривать скалярные и векторные поля в \mathbb{R}^3 и иногда в \mathbb{R}^2 . Скалярное поле — это просто скалярная функция, а векторное поле требует некоторого уточнения: как мы его будем записывать и понимать. Векторное поле в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — это сопоставление каждой точке $x \in \Omega$ вектора $F(x) \in T_x \mathbb{R}^3$, т. е. каждой точке $x \in \Omega$ сопоставляется вектор $F(x)$, прикрепленный к точке x .

В пространстве \mathbb{R}^3 всегда будем обращаться к стандартному базису e_1, e_2, e_3 и раскладывать векторы по этому базису, т. е. каждый вектор будет представляться так:

$$F(x) = \sum_{i=1}^3 F^i(x) e_i.$$

Векторное поле можно рассматривать как вектор-функцию из Ω в \mathbb{R}^3 :

$$F : (x^1, x^2, x^3) \mapsto (F^1(x), F^2(x), F^3(x)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ ГРАДИЕНТА grad, РОТОРА rot, ДИВЕРГЕНЦИИ div и ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА Δ . Градиентом скалярного поля $f(x)$ называют векторное поле $\text{grad } f(x)$ с декартовыми координатами $\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right)$, или, иначе,

$$\text{grad } f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} e_3.$$

Ротором векторного поля $F = (F^1, F^2, F^3)$ называют векторное поле

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}, \frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}, \frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right)$$

или

$$\begin{aligned} \text{rot}(F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3) &= \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3} \right) e_1 + \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1} \right) e_2 \\ &+ \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Последний определитель надо понимать следующим образом: разлагать его по первой строке и воспринимать вторую строку как необходимость выполнения операции, возникающей при подстановке в этот открытый для действия символ соответствующего значения.

В англоязычной литературе вместо rot пишут curl .

Дивергенцией векторного поля $F = (F^1, F^2, F^3)$ называют скалярное поле

$$\text{div } F = \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3}.$$

Можно заметить, что дивергенция — это след матрицы Якоби.

Оператор Лапласа определяется как композиция

$$\Delta f = \text{div grad } f = \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^3)^2}.$$

Введенные операции удобно записывать в терминах оператора Гамильтона (оператора «набла»). Оператор Гамильтона — это формальный вектор из частных производных:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right),$$

при помощи которого можно записывать градиент, ротор и оператор Лапласа. Действительно,

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} f, \frac{\partial}{\partial x^2} f, \frac{\partial}{\partial x^3} f \right),$$

где умножение «вектора» ∇ на функцию происходит по правилу умножения вектора на скаляр.

Далее,

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} F^3 - \frac{\partial}{\partial x^3} F^2, \frac{\partial}{\partial x^3} F^1 - \frac{\partial}{\partial x^1} F^3, \frac{\partial}{\partial x^1} F^2 - \frac{\partial}{\partial x^2} F^1 \right),$$

где компоненты вектора формируются на манер векторного произведения векторов.

Дивергенция записывается с использованием оператора Гамильтона так:

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x^1} F^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} F^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} F^3.$$

Оператор Лапласа можно представлять себе как формальное скалярное произведение двух набл:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Полезно от оператора набла проявляется, в частности, в том, что справедливы тождества, верные для векторов.

Перепишем формулы из § 5 в терминах введенных операторов.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФОРМУЛЫ ГАУССА — ОСТРОГРАДСКОГО И ДИВЕРГЕНЦИИ. Формулу Гаусса — Остроградского можно записать в виде

$$\int_{\partial V} F \cdot n \, dS = \int_V \operatorname{div} F \, dV, \quad (1)$$

и сказать, что поток векторного поля через замкнутую поверхность, ориентированную внешней нормалью, равен интегралу от его дивергенции по телу, ограниченному этой поверхностью.

Возьмем точку $x \in \mathbb{R}^3$ и окружим ее замкнутым шаром $\bar{B} = \bar{B}(x, r)$. Тогда по формуле Гаусса — Остроградского

$$\int_{\bar{B}} \operatorname{div} F \, dV = \int_{\partial \bar{B}=S} F \cdot n \, dS.$$

Если поле достаточно гладкое, хотя бы класса C^1 , то можно применить теорему о среднем, согласно которой существует точка $y \in \bar{B}(x, r)$ такая, что

$$\int_{\bar{B}(x, r)} \operatorname{div} F \, dV = \operatorname{div} F(y) \int_{\bar{B}} dV = \frac{4\pi r^3}{3} \operatorname{div} F(y).$$

При $r \rightarrow 0$ имеем $y \rightarrow x$ и

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{div} F(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{S(x, r)} F \cdot n \, dS}{\frac{4\pi r^3}{3}}.$$

Можно сказать, что точку окружают сферой, находят поток через сферу, его нормируют (делят на объем шара) и уменьшают радиус. В пределе получается некоторое число, характеризующее «расходимость» поля. Тем самым дивергенция — это предельное значение (интенсивность) потока через поверхность, окружающую точку, нормированное на объем, охватываемый поверхностью.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФОРМУЛЫ СТОКСА И РОТОРА. В новых обозначениях формулу Стокса можно записать в виде

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot \hat{\xi} \, dl, \quad (2)$$

и словами выразить так: циркуляция векторного поля по краю поверхности равна потоку его ротора через поверхность.

Возьмем точку $x \in \mathbb{R}^3$ и диск $S(x, r, e_i)$ с центром x радиуса r и нормалью e_i . Его край — это окружность, обозначим ее через γ . Она снабжена индуцированной ориентацией края. Применим формулу Стокса:

$$\int_S \underbrace{\text{rot } F \cdot e_i}_{(\text{rot } F)^i} dS = \oint_{\gamma} F \cdot \hat{\xi} dl.$$

Как и выше, по теореме о среднем (в левой части) имеем

$$(\text{rot } F)^i(x) = \lim_{r \rightarrow 0 (y \rightarrow x)} (\text{rot } F)^i(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma} F \cdot \hat{\xi} dl}{\pi r^2}.$$

Иначе говоря, происходит следующее. Выбираем направление, ставим ортогонально ему окружность и вдоль этой окружности считаем работу поля, делим на площадь круга и устремляем радиус круга к нулю. Если поле хотя бы класса C^1 , в пределе получится некоторое число, показывающее завихренность этого поля. Например, если вдоль окружности в каждой ее точке вектор поля дает ненулевую работу на малом участке окружности и работа вдоль всего контура ненулевая, и так происходит на всех достаточно малых окружностях, то получается некоторое число, показывающее завихренность поля. Проводя подсчет завихренности относительно всех осей, приходим к векторной величине, а именно к ротору. Величины завихренности векторного поля вдоль контуров, перпендикулярных базисным направлениям, составляют компоненты ротора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ. Поле $F(x)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называют *потенциальным*, если F можно представить в виде $F(x) = \text{grad } f(x)$, где $f(x)$ — функция. При этом функцию $f(x)$ называют *потенциалом поля* $F(x)$.

Теорема 13 (о потенциальных полях). Пусть $F(x)$ — векторное поле в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, компоненты которого принадлежат классу $C^1(\Omega)$. Условия

- (1) $F(x) = \text{grad } f(x)$, т. е. F потенциально;
- (2) для любой замкнутой кривой $\gamma \subset \Omega$ имеет место равенство

$$\oint_{\gamma} F \cdot \hat{\xi} dl = 0;$$

(3) $\operatorname{rot} F(x) = 0$ в каждой точке $x \in \Omega$
связаны следующим образом:

$$(2) \iff (1), \quad (1) \implies (3),$$

(3) \implies (1) при условии, что любая замкнутая
кривая в Ω стягивается в точку.

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ. Множество в \mathbb{R}^3 называют *односвязным*, если любую замкнутую кривую, лежащую в нем, можно непрерывно стянуть в точку.

Например, сфера в \mathbb{R}^3 односвязна. Вместе с тем тор или заполненный тор, называемый полноторием, не односвязны. Удаление из пространства какой-либо точки не нарушает его односвязности, а удаление прямой нарушает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) \implies (3) Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x^2} F^3 - \frac{\partial}{\partial x^3} F^2, \dots \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial f(x)}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial f(x)}{\partial x^2}, \dots \right) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

ввиду соответствующего свойства смешанных частных производных.

(1) \implies (2) Пусть γ — замкнутая кривая. Найдем циркуляцию поля F вдоль этой кривой. Удалим из нее одну точку и опишем оставшуюся часть кривой одной параметризацией $\Phi : (a, b) \rightarrow \gamma$. Имеем

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F \cdot \hat{\xi} dl &= \int_a^b \left(F^1(\Phi(u)) \frac{d\Phi^1}{du} + F^2(\Phi(u)) \frac{d\Phi^2}{du} + F^3(\Phi(u)) \frac{d\Phi^3}{du} \right) du \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\Phi(u)) \frac{d\Phi^1}{du} + \frac{\partial f}{\partial x^2}(\Phi(u)) \frac{d\Phi^2}{du} + \frac{\partial f}{\partial x^3}(\Phi(u)) \frac{d\Phi^3}{du} \right) du \\ &= \int_a^b \frac{d}{du} f(\Phi(u)) du = f(\Phi(b)) - f(\Phi(a)) = 0, \end{aligned}$$

где значения $\Phi(a)$, $\Phi(b)$ понимаются как пределы параметризации Φ в соответствующих точках и используется непрерывность функции f .

Доказательство обратного утверждения опустим.

(3) \implies (1) Докажем эту часть утверждения при более сильном условии звездности области. Множество Ω называют *звездным относительно точки* x_0 , если для любого $x \in \Omega$ отрезок с концами x_0, x содержится в Ω .

Для доказательства потенциальности поля достаточно указать его потенциал. Он получается в результате интегрирования. С физической точки зрения если $f(x)$ — потенциал поля F , то разность потенциалов $f(x) - f(y)$ — это работа, которую нужно совершить по перемещению из точки y в точку x . Ясно, что если к потенциалу прибавить константу, то получаемая функция тоже потенциал. Стало быть, потенциалов много и все они отличаются друг от друга на константу. Руководствуясь двумя высказанными наблюдениями, будем конструировать потенциал следующим образом. В точке x_0 , относительно которой область звезда, потенциал примем равным нулю, а в любой другой точке x положим его равным работе, совершаемой при перемещении в точку $x \in \Omega$, т. е. положим

$$f(x) = \int_{\gamma} F \cdot \hat{\xi} dl, \quad (3)$$

где γ — кривая, соединяющая x_0 и x и пробегаемая в направлении от x_0 к x .

Звездность области позволяет в качестве соединяющей x_0 и x линии взять отрезок с началом в x_0 и концом в x . Вдоль такого пути касательным будет вектор

$$\hat{\xi} = \frac{x - x_0}{|x - x_0|_2}.$$

Убедимся в том, что определенная равенством (3) функция действительно потенциал, т. е. покажем, что $F(x) = \text{grad } f(x)$ или, иначе,

$$F^i(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

В Ω возьмем замкнутую (кусочно гладкую) кривую, представляющую собой треугольник с вершинами в точках $x_0, x, x + he_j$. Заметим, что кусочная гладкость кривой помехой для наших действий не является, и мы обсудим это после доказательства теоремы. Пусть S — (плоская) поверхность, ограниченная получившимся треугольником. В принципе можно было взять любую поверхность, для которой

наш треугольник является границей, но можно обойтись и простейшей поверхностью. Ориентируем контур так, чтобы в каждой его точке близлежащая часть плоского треугольника оставалась слева. Тогда

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F \cdot \hat{\xi} dl &= \int_{[x_0, x]} F \cdot \hat{\xi} dl + \int_{[x, x+he^i]} F \cdot e_i dl - \int_{[x_0, x+he^i]} F \cdot \hat{\xi} dl \\ &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot N dS = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что интегралы $\int_{[x_0, x]} F \cdot \hat{\xi} dl$ и $\int_{[x_0, x+he^i]} F \cdot \hat{\xi} dl$ равны по определению значениям функции f в точках x и $x + he_i$. Тем самым равенство (4) можно записать так:

$$f(x) + \int_{[x, x+he^i]} F^i(z) dl - f(x + he_i) = 0.$$

По теореме о среднем существует такая точка y в отрезке $[x, x + he^i]$, что

$$\int_{[x, x+he^i]} F^i(x) dl = F^i(y) \int_{[x, x+he^i]} dl = F^i(y) \cdot h. \quad (5)$$

Следовательно,

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = F^i(y).$$

Устремляя h к нулю, в левой части (5) по определению получаем $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$, а в правой — $F^i(x)$ ввиду непрерывности поля F . Стало быть,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = F^i(x),$$

откуда и вытекает, что f — потенциал.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ КУСОЧНО ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЫ. Формулы Гаусса — Остроградского, Стокса и Грина можно применять в случае кусочно гладкой границы (края). Это обосновывается следующим путем. Часть границы вблизи перехода с одного гладкого куска края на другой сглаживаем, т. е. вместо излома рассматриваем близкое

к нашему множеству многообразия, край которого гладкий. К нему применяем соответствующую формулу, а затем участки сглаживания устремляем к изломам так, что разница между данным множеством и приближающими его многообразиями становятся мало отличающимися один от другого, интегралы по отличающимся частям границы стремятся к нулю, и в пределе появляется соответствующая формула уже для множества с кусочно гладкой границей.

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОСВЯЗНОСТИ. В обосновании предыдущего утверждения мы взяли замкнутую кривую и у нас была гарантия, что можно было подобрать поверхность, краем которой служила данная кривая, целиком лежащая в данной области. Если же область неодносвязна, например, часть пространства без оси аппликата, то могло получиться так, что треугольник (замкнутая кривая) окружает ось аппликата. Тогда оказалось бы невозможным обеспечить требуемую для применения формулы Стокса поверхность. Эта проблема подчеркивает существование требования к области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ. Векторное поле F в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называют *соленоидальным*, если F представимо в виде

$$F(x) = \operatorname{rot} A(x),$$

где $A(x)$ — некоторое векторное поле в Ω , называемое *векторным потенциалом поля $F(x)$* .

Векторное поле F называют *бездивергентным*, если $\operatorname{div} F = 0$ в Ω .

Теорема 14 (о соленоидальных векторных полях). Пусть F — векторное поле в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ класса C^1 . Тогда условия

(1) $F(x) = \operatorname{rot} A(x)$, т. е. F соленоидально;

(2) $\int_S F \cdot n \, dS = 0$ для любой замкнутой поверхности $S \subset \Omega$;

(3) $\operatorname{div} F(x) = 0$ в каждой точке $x \in \Omega$

связаны между собой следующим образом:

$$(2) \iff (1), \quad (1) \implies (3),$$

(3) \implies (1) при условии, что любая замкнутая поверхность в Ω стягивается в точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) \implies (3) Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(x) &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Другие утверждения теоремы оставим без доказательств.

ПРИМЕР 1 (электрическое поле точечного заряда). Точечный заряд q в точке $y \in \mathbb{R}^3$ порождает электростатическое поле

$$E(x) = \frac{q}{|x-y|^2} \cdot \frac{x-y}{|x-y|}, \quad x \neq y.$$

Для простоты будем считать, что y — начало координат, и тогда поле имеет вид

$$E(x) = \frac{qx}{|x|^3}.$$

Найдем его дивергенцию и ротор и тем самым выясним свойства этого поля. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{x^i}{|x|^3} = \frac{\delta_k^i \cdot |x|^3 - 3|x|^2 \frac{x^k}{|x|} x^i}{|x|^6} = \frac{\delta_k^i - 3 \frac{x^k}{|x|} \frac{x^i}{|x|}}{|x|^3}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E(x) &= \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{x^1}{|x|^3} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{x^2}{|x|^3} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{x^3}{|x|^3} \\ &= \frac{1 - 3 \frac{(x^1)^2}{|x|^2}}{|x|^3} + \frac{1 - 3 \frac{(x^2)^2}{|x|^2}}{|x|^3} + \frac{1 - 3 \frac{(x^3)^2}{|x|^2}}{|x|^3} = 0. \end{aligned}$$

Найдем одну из компонент ротора:

$$(\operatorname{rot} E)^1 = \frac{\partial E^3}{\partial x^2} - \frac{\partial E^2}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{x^3}{|x|^3} - \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{x^2}{|x|^3} = \frac{0 - 3 \frac{x^2}{|x|} \frac{x^3}{|x|}}{|x|^3} - \frac{0 - 3 \frac{x^2}{|x|} \frac{x^3}{|x|}}{|x|^3} = 0.$$

Ясно, что и остальные нулевые.

Итак, для поля электростатического заряда дивергенция и ротор равны нулю. Будет ли это поле потенциальным или соленоидальным? Ответы на эти вопросы зависят от топологии области. Поле определено всюду, кроме начала координат. Посмотрим, какие из дополнительных условий в утверждении (3) выполнены. Условие в первой теореме выполнено: любую замкнутую кривую, не содержащую

начало координат, можно стянуть в точку. Стало быть, поле $E(x)$ потенциально и его потенциал равен

$$\varphi(x) = \frac{q}{|x|}.$$

В самом деле,

$$E(x) = -\text{grad} \frac{q}{|x|}.$$

(В электродинамике поле равно минус градиенту потенциала.)

Однако условие во второй теореме не выполнено: не каждую замкнутую поверхность можно стянуть в точку, мешает отсутствие начала координат в области задания поля. Правда, это еще не означает, что поле не соленоидально, пока оказалось, что установить это с помощью теоремы нельзя — не выполнены ее условия. Порассуждаем насчет соленоидальности нашего поля. Согласно второму условию теоремы 14, равносильному соленоидальности, критерием соленоидальности служит равенство нулю потока поля через каждую замкнутую поверхность. Удастся ли нам подобрать такую замкнутую поверхность, поток через которую ненулевой? Ясно, что достаточно взять любую поверхность, охватывающую начало координат, например сферу S радиуса R с центром в начале координат. Поток через S легко находится:

$$\int_S E \cdot n \, dS = \int_S \frac{qx}{|x|^3} \cdot \frac{x}{|x|} \, dS = \int_S \frac{q}{|x|^2} \, dS = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q.$$

Получили, что поле не соленоидально.

ПРИМЕР 2 (магнитное поле прямой с током). Рассмотрим прямую с током, расположим ее, например, по оси Oz , и найдем наводимое ей магнитное поле. Пусть dl — бесконечно малый участок проводника, y — середина этого участка, и по нему протекает ток I в направлении e^3 . Пусть x — произвольная точка пространства, расположенная вне данного проводника.

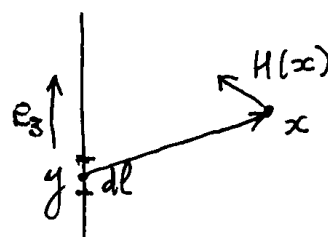


Рис. 6.1.

Соединим точки y и x вектором (рис. 6.1). Направление магнитного поля укажет векторное произведение вектора e^3 на вектор с началом в y и концом в x (см. рис. 6.1). Интенсивность поля обратно пропорциональна квадрату расстояния, так что для малого участка dl магнитное поле будет таким:

$$dH(x) = \frac{I \, dl}{c} \frac{1}{|x - y|^2} \frac{e_3 \times (x - y)}{|x - y|},$$

где c — скорость света. Магнитное поле, порождаемое током на оси Oz , равно

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_3 \times (x - y)}{|x - y|^3} dy^3 = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x^2, x^1, 0) dy^3}{\underbrace{((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3 - y^3)^2)^{3/2}}_{r^2}} \\ &= \frac{I}{c} (-x^2, x^1, 0) \frac{2}{r^2} = \frac{2I}{c} \frac{(-x^2, x^1, 0)}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}. \end{aligned}$$

При взгляде на это поле сверху можно заметить, что силовые линии этого поля суть концентрические окружности. Характерно, что интенсивность убывает как $\frac{1}{r}$.

Каковы свойства этого поля? Найдём его дивергенцию и ротор. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} e_1 + \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} e_2 + 0 \cdot e_3 \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ = \frac{0 \cdot r^2 - 2x^1(-x^2)}{r^4} + \frac{0 \cdot r^2 - 2x^1 x^2}{r^4} = 0, \end{aligned}$$

так что дивергенция равна нулю. Найдём ротор:

$$\operatorname{rot} H = \begin{vmatrix} e_1 & \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ e_2 & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ e_3 & \frac{\partial}{\partial x^3} & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3.$$

Получилось, что во всех точках, кроме точек оси Oz , дивергенция и ротор нулевые. Для использования теоремы 14 надо смотреть на свойства области, в которой это поле находится. Нетрудно понять, что поле в пространстве без оси Oz потенциальным не будет, несмотря на то, что его ротор нулевой, так как есть замкнутые кривые, вдоль которых циркуляция поля не равна нулю. Действительно, пусть $\gamma = \{(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2, x^3 = 0\}$ с касательным вектором $\hat{\xi} = \left(\frac{-x^2}{r}, \frac{x^1}{r}, 0 \right)$.

Тогда

$$\int_{\gamma} H \cdot \hat{\xi} dl = \frac{2I}{c} \int_0^{2\pi} \frac{(-x^2, x^1, 0) \cdot (-x^2, x^1, 0)r}{((x^1)^2 + (x^2)^2)((x^1)^2 + (x^2)^2)^{1/2}} d\varphi = \frac{4\pi I}{c}.$$

Интересно, что циркуляция векторного поля не зависит от радиуса, все зависит от того, какой ток пронизывает площадку, охватываемую контуром.

С векторным потенциалом дело обстоит иначе — он есть, и его нетрудно предъявить, а именно это поле

$$A(x) = \left(0, 0, -\frac{2I}{c} \ln((x^1)^2 + (x^2)^2) \right).$$

Можно легко проверить, что $H(x) = \text{rot } A(x)$.

Оглавление

§ 1. Многообразия	3
§ 2. Условный экстремум. Принцип множителей Лагранжа ...	16
§ 3. Интеграл на многообразии	21
§ 4. Ориентация	29
§ 5. Классические интегральные формулы	42
§ 6. Основы векторного анализа	51

**Основы математического анализа
для студентов-физиков. Лекции.
7. Анализ на многообразиях
в конечномерных арифметических
пространствах**

Дятлов Глеб Владимирович

Подписано в печать 28.04.2015. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 3.8. Уч.-изд. л. 3.8. Тираж 200 экз. Заказ № 67.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.