УДК 517.1
ББК 22.16
Д998

Дятлов Г. В.

Основы математического анализа для студентов-физиков. Лекции. 7. Анализ на многообразиях (окончание). 8. Функциональные последовательности и ряды / Г. В. Дятлов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2015. — 64 с.

ISBN 978–5–86134–163–9

Вторая часть седьмого раздела курса лекций, прочитанных автором студентам физического факультета Новосибирского государственного университета в 2014/15 учебном году. Включает в себя знакомство с дифференциальными формами и векторными операциями в криволинейных координатах. Восьмой раздел курса посвящен равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Для студентов специальностей с углубленным изучением математического анализа.

УДК 517.1
ББК 22.16
Д998

Д $\frac{1602070000–04}{Я82(03)–15}$ Без объявл.

ISBN 978–5–86134–163–9

§ 7. Дифференциальные формы

Оказывается, многое из того, что недавно было изучено, можно изложить с единых позиций, если ввести удачный объект.

Замечание о работе и потоке. Вспомним, что работа поля F вдоль кривой γ с параметризацией $\Phi : (a, b) \to \gamma$, согласованной с ориентацией, равна

$$\int\limits_{\gamma} F \cdot \hat{\xi}\, dl = \int\limits_{a}^{b} \left(F^1(\Phi(u)) \frac{d\Phi^1}{du} + F^2(\Phi(u)) \frac{d\Phi^2}{du} + F^3(\Phi(u)) \frac{d\Phi^3}{du} \right) du.$$

Поток векторного поля F через ориентированную поверхность S с параметризацией $\Phi : U \to S$, $U \subset \mathbb{R}^2$, согласованной с ориентацией, равен

$$\int\limits_{S} F \cdot N\, dS = \int\limits_{U} \left(F^1 \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^2} \end{vmatrix} + F^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^2} \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + F^3 \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \right) d\mu^2(u) = \int\limits_{U} \begin{vmatrix} F^1 & \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^2} \\ F^2 & \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^2} \\ F^3 & \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^2} \end{vmatrix} d\mu^2(u).$$

Для скалярной функции $f(x)$ можно посчитать интеграл от нее по области Ω, параметризованной отображением $\Phi : U \to \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$, согласованной со стандартной ориентацией в $\mathbb{R}^3$:

$$\int\limits_{\Omega} f\, dV = \int\limits_{U} f(\Phi(u)) \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^2} & \frac{\partial\Phi^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^2} & \frac{\partial\Phi^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^1} & \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^2} & \frac{\partial\Phi^3}{\partial u^3} \end{vmatrix} d\mu^3(u).$$

Получилось три интеграла, и во всех этих ситуациях встречаются определители. Что-то в этих интегралах связано с функцией, а что-то с параметризацией. Попробуем разделить объекты по причинам их появления.

В случае работы по векторному полю определим функцию двух переменных: точки пространства x и вектора ξ, полагая

$$\omega^1_F(x)(\xi) = F^1(x)\xi^1 + F^2(x)\xi^2 + F^3(x)\xi^3.$$

В этих обозначениях подынтегральная функция в интеграле работы равна $\omega^1_F(\Phi(u))\left(\dfrac{d\Phi}{du}\right)$. Индекс единица в обозначении ω^1_F указывает на то, что в этой функции участвует один вектор ξ.

В случае потока по F строим функцию от точки пространства x и двух векторов ξ_1, ξ_2, полагая

$$\omega^2_F(x)(\xi_1, \xi_2) = F^1(x)\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_2^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 \end{vmatrix} + F^2(x)\begin{vmatrix} \xi_1^3 & \xi_2^3 \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 \end{vmatrix} + F^3(x)\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 \end{vmatrix}.$$

Видно, что функции ω^1_F, ω^2_F зависят только от поля и от поставленной задачи — находить работу поля или его поток. Для нахождение потока поля F через параметрически заданную поверхность надо на место x в $\omega^2_F(x)(\xi_1, \xi_2)$ подставить соответствующее ему значение $\Phi(u)$, а на места ξ_1, ξ_2 — векторы касательного пространства, порожденные параметризацией, т. е. пару $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial u^1}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial u^2}\right)$.

Наконец, для скалярной функции $f(x)$ можно определить функцию

$$\omega^3_f(x)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f(x)\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \xi_3^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 \end{vmatrix},$$

после чего для нахождения интеграла в некоторой параметризации надо сделать следующее: на место x поставить значение $\Phi(u)$, а на места ξ_1, ξ_2, ξ_3 — векторы $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u^1}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u^2}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u^3}$.

Определение дифференциальной формы. Функцию

$$\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k),$$

определенную для x из некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и касательных векторов $\xi_i \in T_x\mathbb{R}^n$, называют *дифференциальной формой степени* k (или k-*формой*), если она

(1) гладко (хотя бы класса C^1) зависит от x при фиксированных $\xi_1, \ldots, \xi_k$;

(2) линейна по каждому из ξ_i, $i = 1, \ldots, k$, при фиксированных остальных (в таком случае говорят, что функция *полилинейна*);

(3) кососимметрична по ξ_i, т. е. меняет знак при перестановке местами любых двух векторов:

$$\omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k) = -\omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_k).$$

Заметим, что во всех предварительно рассмотренных случаях все эти условия выполняются.

На множестве форм одного порядка, заданных на одной области, можно поточечно определить операции сложения форм и умножения их на скаляр, относительно которых, очевидно, это множество становится векторным пространством. Займемся описанием базиса этого векторного пространства и разложением k-формы по базису.

Замечание о dx^i и дифференциале функции. Как известно, простейшее линейное отображение

$$dx^i : (\xi^1, \dots, \xi^n) \mapsto \xi^i, \quad \xi \in T_x\mathbb{R}^n,$$

используется для записи дифференциала функции, а именно имеет место представление

$$df(x)(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\, dx^i(\xi).$$

Из последнего равенства ясно, каковы должны быть базисные 1-формы и как по составленному из них базису выражается произвольная дифференциальная форма. Что будет базисом для форм более высокого порядка?

Вспомним, что в записи формы потока встречались определители, которые можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_2^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx^2(\xi_1) & dx^2(\xi_2) \\ dx^3(\xi_1) & dx^3(\xi_2) \end{vmatrix}.$$

Логично считать, что последний определитель — это произведение базисных форм dx^2 и dx^3, взятое на векторах ξ_1, ξ_2.

Исходя из изложенных наводящих соображений дадим следующее

Определение внешнего произведения 1-форм. Пусть $\omega_1(x)(\xi), \dots, \omega_k(x)(\xi)$ — 1-формы. Их *внешнее произведение* определяется как k-форма, действующая по правилу

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(x)(\xi_1) & \dots & \omega_1(x)(\xi_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_k(x)(\xi_1) & \dots & \omega_k(x)(\xi_k) \end{vmatrix}$$

Это действительно k-форма: если переставить местами два касательных вектора, поменяются местами два столбца в определителе и его знак изменится. Столь же очевидна и линейность по каждому из касательных векторов при фиксированных остальных. Можно заметить, что если поменять местами две 1-формы, то также изменится знак, так что порядок следования форм во внешнем произведении существен.

Пример. Имеем

$$(dx^1 \wedge dx^2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} dx^1(\xi_1) & dx^1(\xi_2) \\ dx^2(\xi_1) & dx^2(\xi_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 \end{vmatrix}.$$

Теорема 5 (о базисе в пространстве k-форм). (1) *1-Форма $\omega(x)(\xi)$ в $\mathbb{R}^n$ однозначно представляется в виде*

$$\omega(x)(\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx^i(\xi);$$

(2) *2-форма $\omega(x)(\xi_1, \xi_2)$ в $\mathbb{R}^2$ однозначно представляется в виде*

$$\omega(x)(\xi_1, \xi_2) = a(x)\, dx^1 \wedge dx^2(\xi_1, \xi_2),$$

где $a(x)$ — некоторая функция;

(3) *2-форма в $\mathbb{R}^3$ однозначно представима в виде*

$$\omega(x) = a_1(x)\, dx^2 \wedge dx^3 + a_2(x)\, dx^3 \wedge dx^1 + a_3(x)\, dx^1 \wedge dx^2$$

(вторая группа аргументов (ξ_1, ξ_2) для краткости опущена);

(4) *3-форма ω в $\mathbb{R}^3$ однозначно представима в виде*

$$\omega(x) = f(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

где f — некоторая функция.

Доказательство. Шаг 1 (1-форма в $\mathbb{R}^n$). Запишем действие ω на $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$:

$$\omega(x)(\xi) = \omega(x)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \omega(x)(e_i)\xi^i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\omega(x)(e_i)}_{a_i(x)}\, dx^i(\xi),$$

что и требовалось.

Шаг 2 (2-форма в $\mathbb{R}^3$). Запишем действие ω на $\xi_1 = \sum\limits_{i=1}^{3} \xi_1^i e_i$, $\xi_2 = \sum\limits_{k=1}^{3} \xi_2^k e_k$:

$$\begin{aligned}
\omega(x)(\xi_1, \xi_2) &= \omega(x)\left(\sum_{i=1}^{3} \xi_1^i e_i, \sum_{k=1}^{3} \xi_2^k e_k\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \omega(x)(e_i, e_k)\xi^i\xi^k \\
&= \omega(x)(e_1, e_2)\xi_1^1\xi_2^2 + \omega(x)(e_1, e_3)\xi_1^1\xi_2^3 + \omega(x)(e_2, e_1)\xi_1^2\xi_2^1 \\
&+ \omega(x)(e_2, e_3)\xi_1^2\xi_2^3 + \omega(x)(e_3, e_1)\xi_1^3\xi_2^1 + \omega(x)(e_3, e_2)\xi_1^3\xi_2^2 \\
&= \omega(x)(e_1, e_2)\big(\xi_1^1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2^1\big) + \omega(x)(e_2, e_3)\big(\xi_1^2\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^2\big) \\
&\qquad + \omega(x)(e_3, e_1)\big(\xi_1^3\xi_2^1 - \xi_1^1\xi_2^3\big) \\
&= \underbrace{\omega(x)(e_1, e_2)}_{a_3(x)} dx^1 \wedge dx^2(\xi_1, \xi_2) + \underbrace{\omega(x)(e_2, e_3)}_{a_1(x)} dx^2 \wedge dx^3(\xi_1, \xi_2) \\
&\qquad + \underbrace{\omega(x)(e_3, e_1)}_{a_2(x)} dx^3 \wedge dx^1(\xi_1, \xi_2).
\end{aligned}$$

Какие изменения произойдут, если рассматривать форму не в $\mathbb{R}^3$, а в $\mathbb{R}^2$? Из всех слагаемых останется только то, которое содержит $dx^1 \wedge dx^2$, остальные обратятся в нуль, и останется только соответствующая этому слагаемому форма, так что в $\mathbb{R}^2$ доказательство аналогично.

Шаг 3 (3-форма в $\mathbb{R}^3$). Имеем

$$\begin{aligned}
\omega(x)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \omega\left(\sum_{i=1}^{3} \xi_1^i e_i, \sum_{k=1}^{3} \xi_1^k e_k, \sum_{l=1}^{3} \xi_1^l e_l\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \omega(e_i, e_k, e_l)\xi_1^i\xi_2^k\xi_3^l. \qquad (1)
\end{aligned}$$

В последней сумме коэффициенты $\omega(e_i, e_k, e_l)$ равны 0, если хотя бы два из базисных векторов одинаковы. Оставшиеся шесть слагаемых будут отличаться только знаками в зависимости от четности соответствующей перестановки. Поэтому сумму в (1) можно записать так:

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{|\sigma|} \omega(e_1, e_2, e_3)\xi_1^{\sigma(1)}\xi_2^{\sigma(2)}\xi_3^{\sigma(3)} &= \omega(e_1, e_2, e_3)\det\big(\xi_i^j\big) \\
&= \omega(e_1, e_2, e_3)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3),
\end{aligned}$$

где S_3 — множество всех перестановок множества $\{1, 2, 3\}$ и $|\sigma|$ — четность перестановки. Здесь $f(x) = \omega(e_1, e_2, e_3)$ и есть та функция, которая фигурирует в формулировке теоремы.

Теорема доказана.

Нетрудно понять, что результат, аналогичный последнему, имеет место для любой n-формы в $\mathbb{R}^n$.

Мы определили дифференциальную форму как кососимметрическую функцию, забирающую несколько касательных векторов и возвращающую число. Бывают и другие формы, например скалярное произведение, оно также забирает два вектора и отдает число. Однако у скалярного произведения от перестановки векторов знак не меняется. Такие формы называют симметричными.

Связь между полями и формами в $\mathbb{R}^3$. Есть взаимно однозначное соответствие между полями и формами. Мы обнаружим ее в основных частных случаях.

1. Любая скалярная функция $f(x)$ порождает 0-форму

$$\omega_f^0(x) = f(x),$$

т. е. любую функцию можно рассматривать как нуль-форму. Обратно, любая нуль-форма — по определению это функция.

2. Любое векторное поле $F(x) = (F^1(x), F^2(x), F^3(x))$ порождает 1-*форму работы*

$$\omega_F^1(x)(\xi) = \sum_{i=1}^{3} F^i(x)\, dx^i(\xi). \tag{2}$$

Обратно, любая 1-форма в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i(x)\, dx^i,$$

и функции $a_i(x)$ можно рассматривать в качестве декартовых координат векторного поля.

3. Любое векторное поле $F(x) = (F^1(x), F^2(x), F^3(x))$ порождает 2-*форму потока*

$$\omega_F^2(x) = F^1(x)\, dx^2 \wedge dx^3 + F^2(x)\, dx^3 \wedge dx^1 + F^3(x)\, dx^1 \wedge dx^2.$$

Обратно, любая 2-форма раскладывается по базису, и функции, участвующие в таком разложении, суть компоненты порожденного 2-формой векторного поля. Так что и в этом случае есть взаимно однозначное соответствие между векторными полями и формами.

4. Скалярная функция $f(x)$ порождает 3-форму

$$\omega_f^3(x) = f(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{3}$$

Обратно, любая 3-форма в $\mathbb{R}^3$ имеет вид (3) с некоторой функцией.

Установленное соответствие позволяет все предыдущие результаты, относящиеся к полям, перенести на язык форм.

Если F и G — векторные поля, то определено их векторное произведение

$$\begin{aligned} F(x) \times G(x) = (&F^2(x)G^3(x) - F^3(x)G^2(x), \\ &F^3(x)G^1(x) - F^1(x)G^3(x), F^1(x)G^2(x) - F^2(x)G^1(x)). \end{aligned}$$

Поля F и G порождают 1-формы ω_F^1 и ω_G^1. Рассмотрим внешнее произведение

$$\begin{aligned} \omega_F^1 \wedge \omega_G^1 &= (F^1\, dx^1 + F^2\, dx^2 + F^3\, dx^3) \wedge (G^1\, dx^1 + G^2\, dx^2 + G^3\, dx^3) \\ &= (F^2G^3 - F^3G^2)\, dx^2 \wedge dx^3 + (F^3G^1 - F^1G^3)\, dx^3 \wedge dx^1 \\ &\qquad + (F^1G^2 - F^2G^1)\, dx^1 \wedge dx^2 = \omega_{F\times G}^2. \end{aligned}$$

Тем самым векторное произведение и внешнее произведение — это два разных взгляда на определители и вычисление миноров.

Определение операций Φ_* и Φ^*. Пусть $\Phi : U \to \Omega$ — отображение класса C^1 из области $U \subset \mathbb{R}^m$ в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Отображение Φ_* — это дифференциал функции:

$$\Phi_*(u)(h) = d\Phi(u)(h), \quad u \in U,\ h \in T_u\mathbb{R}^m,$$

т. е. это другое обозначение дифференциала. Отображение Φ^* действует на формы следующим образом: если ω — k-форма на Ω, то $\Phi^*\omega$ — форма на U, определенная так:

$$(\Phi^*\omega)(u)(h_1, \ldots, h_k) = \omega(\Phi(u))(\Phi_*(u)(h_1), \ldots, \Phi_*(u)(h_k)).$$

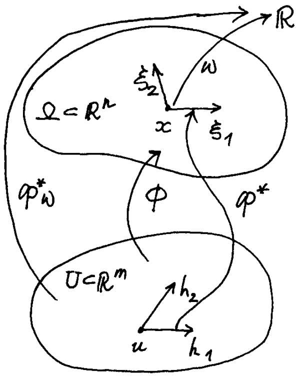

Рис. 7.1.

Механизм действия отображения Φ^* поясняет рис. 7.1. В то время как отображение Φ отправляет точку u в точку x, дифференциал берет касательный вектор, прикрепленный к этой точке, и отправляет его в касательный вектор, прикрепленный к точке x (см. рис. 7.1). У нас есть форма ω, забирающая точку x и векторы ξ_1, ξ_2, и надо пересадить ее в U. Для пересадки надо взять точку $u \in U$ и касательные векторы h_1, h_1, отправить их в точку x и соответствующие касательные векторы и далее подействовать на получившиеся объекты формой ω. То, что получится, и будет результатом действия пересаженной на U формы $\Phi^*\omega$. В некотором смысле это композиция формы и гладкого отображения Φ. Отличие от пересадки функции в том, что здесь появляется необходимость еще подействовать на все прилагаемые касательные векторы.

У отображений Φ_* и Φ^* есть емкие английские названия, точно описывающие, что они делают, а именно Φ_* называют push-forward, а Φ^* — pull-back. Образно говоря, отображение Φ^* форму сверху перетягивает вниз.

Определение интеграла от формы по многообразию. Дадим определение в самом простом случае: M — элементарное k-мерное ориентированное многообразие в $\mathbb{R}^n$ и ω — k-форма, заданная в некоторой окрестности многообразия M.

1. Если размерность многообразия равна размерности объемлющего пространства, то форма ω непременно представляется в виде $\omega(x) = f(x)\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ с некоторой функцией f, при этом важен порядок сомножителей в последнем внешнем произведении, а именно, он совпадет с порядком следования векторов в стандартном базисе. В описанной обстановке полагаем

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_M f(x)\,d\mu^n(x).$$

(Обратим внимание на то, что в обозначении интеграла от формы символы dx не присутствуют — они находятся внутри обозначения формы.)

2. Если $k < n$, где k — размерность многообразия, то возьмем параметризацию $\Phi : U \to M$ многообразия M, согласованную с ориентацией на M, и рассмотрим форму $\Phi^*\omega$. Это уже k-форма на k-мерной области U. В таком случае получаемая форма представима в виде

$$(\Phi^*\omega)(u) = f(u)\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^k,$$

и полагают

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_U \Phi^*\omega = \int\limits_U f(u)\, d\mu^k(u).$$

Если многообразие неэлементарное, т. е. обслуживается несколькими параметризациями, то поступают точно так же, как с функциями: разбивают его на куски, каждый кусок параметризуют, затем результаты складывают. Естественно, результат не зависит ни от разбиения на части, ни от выбора параметризаций, но детали это обстоятельства мы обсуждать не будем.

Посмотрим, как будут выглядеть интегралы от форм в простейших случаях.

Интеграл от формы работы. Пусть $F = (F^1, F^2, F^3)$ — векторное поле в окрестности некоторой кривой γ с параметризацией $\Phi : (a, b) \to \gamma$, согласованной с ориентацией на γ. Создадим 1-форму работы

$$\omega^1_F = F^1\, dx^1 + F^2\, dx^2 + F^3\, dx^3$$

и проинтегрируем ее по γ. Размерность формы равна 1, размерность объемлющего пространства равна 3, они разные, так что надо взять параметризацию, а она у нас уже есть, и пересадить форму в пространство параметров. Согласно определению

$$\begin{aligned}
\big(\Phi^*\omega^1_F\big)(u)(h) &= \omega^1_F(\Phi(u))(\Phi_* h) \\
&= F^1(\Phi(u))\, dx^1(\Phi_* h) + F^2(\Phi(u))\, dx^2(\Phi_* h) + F^3(\Phi(u))\, dx^3(\Phi_* h) \\
&= F^1(\Phi(u))\frac{d\Phi^1}{du}h + F^2(\Phi(u))\frac{d\Phi^2}{du}h + F^3(\Phi(u))\frac{d\Phi^3}{du}h \\
&= \underbrace{\left(F^1(\Phi(u))\frac{d\Phi^1}{du} + F^2(\Phi(u))\frac{d\Phi^2}{du} + F^3(\Phi(u))\frac{d\Phi^3}{du}\right)}_{f(u)} du(h)
\end{aligned}$$

(здесь и ниже производные берутся в точке u). В итоге

$$\int\limits_{\gamma} \omega_F^1 = \int\limits_{(a,b)} \Phi^*\omega_F^1$$
$$= \int\limits_{(a,b)} \left(F^1(\Phi(u))\frac{d\Phi^1}{du} + F^2(\Phi(u))\frac{d\Phi^2}{du} + F^3(\Phi(u))\frac{d\Phi^3}{du} \right) du = \int\limits_{\gamma} F \cdot \hat{\xi}\, dl.$$

Интеграл от формы потока. Пусть S — ориентированная элементарная поверхность в $\mathbb{R}^3$ с параметризацией $\Phi : U \to S$, согласованной с ориентацией, и в окрестности S задано векторное поле F. По этому векторному полю определим форму потока

$$\omega_F^2 = F^1\, dx^2 \wedge dx^3 + F^2\, dx^3 \wedge dx^1 + F^3\, dx^1 \wedge dx^2$$

и ее проинтегрируем по S. Рассмотрим

$$\Phi^*\omega_F^2(u)(h_1, h_2) = \omega_F^2(\Phi(u))(\Phi_* h_1, \Phi_* h_2)$$
$$= F^1(\Phi(u))\, dx^2 \wedge dx^3(\Phi_* h_1, \Phi_* h_2) + F^2(\Phi(u))\, dx^3 \wedge dx^1(\Phi_* h_1, \Phi_* h_2)$$
$$+ F^3(\Phi(u))\, dx^1 \wedge dx^2(\Phi_* h_1, \Phi_* h_2)$$
$$= F^1(\Phi(u)) \begin{vmatrix} (\Phi_* h_1)^2 & (\Phi_* h_2)^2 \\ (\Phi_* h_1)^3 & (\Phi_* h_2)^3 \end{vmatrix} + F^2(\Phi(u)) \begin{vmatrix} (\Phi_* h_1)^3 & (\Phi_* h_2)^3 \\ (\Phi_* h_1)^1 & (\Phi_* h_2)^1 \end{vmatrix}$$
$$+ F^3(\Phi(u)) \begin{vmatrix} (\Phi_* h_1)^1 & (\Phi_* h_2)^1 \\ (\Phi_* h_1)^2 & (\Phi_* h_2)^2 \end{vmatrix}$$

(заметим, что $(\Phi_* h_i)^j = \sum\limits_{p=1}^{2} \dfrac{\partial \Phi^j}{\partial u^p} h_i^p$

и тем самым, например, для первого слагаемого

$$\begin{pmatrix} (\Phi_* h_1)^2 & (\Phi_* h_2)^2 \\ (\Phi_* h_1)^3 & (\Phi_* h_2)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^1 & h_2^1 \\ h_1^2 & h_2^2 \end{pmatrix})$$

$$= F^1(\Phi(u)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \end{vmatrix} du^1 \wedge du^2(h_1, h_2)$$
$$+ F^2(\Phi(u)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^2} \end{vmatrix} du^1 \wedge du^2(h_1, h_2)$$

$$
+ F^3(\Phi(u)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} du^1 \wedge du^2(h_1, h_2)
$$

$$
= \left(F^1(\Phi(u)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \end{vmatrix} + F^2(\Phi(u)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^2} \end{vmatrix} \right.
$$

$$
\left. + F^3(\Phi(u)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \right) du^1 \wedge du^2(h_1, h_2).
$$

В итоге мы увидели ту скалярную функцию, которую нужно проинтегрировать. Это в точности интеграл, который был при нахождении потока, т. е.

$$
\int\limits_S \omega_F^2 = \int\limits_U \Phi^* \omega_F^2 = \int\limits_U \begin{vmatrix} F^1(\Phi(u)) & \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^1}{\partial u^2} \\ F^2(\Phi(u)) & \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^2}{\partial u^2} \\ F^3(\Phi(u)) & \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \Phi^3}{\partial u^2} \end{vmatrix} = \int\limits_S F \cdot N \, dS.
$$

Заметим, что при интегрировании 2-формы выражение $dx^2 \wedge dx^3$ равно $N^1\, dS$, и аналогичное можно сказать об оставшихся двух выражениях.

Определение дифференциала k-формы. *Дифференциалом k-формы*

$$
\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}
$$

называют $(k+1)$-форму

$$
\begin{aligned}
d\omega(x) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} da_{i_1 \dots i_k}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}(x)}{\partial x^p}\, dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.
\end{aligned}
$$

Установим соответствие между дифференциалом формы и векторными операциями grad, rot и div.

Пусть $\omega^0_f(x) = f(x)$ — 0-форма, т. е. функция. Тогда ее дифференциал согласно определению есть

$$d\omega^0_f(x) = \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^p}(x)\, dx^p,$$

и видим, что это есть не что иное как 1-форма, порожденная градиентом, тем самым

$$d\omega^0_f(x) = \omega^1_{\operatorname{grad} f(x)}.$$

Пусть F — векторное поле и $\omega^1_F = F^1\, dx^1 + F^2\, dx^2 + F^3\, dx^3$. Тогда

$$\begin{aligned} d\omega^1_F = &\left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial F^1}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial F^1}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^1 \\ &+ \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial F^2}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial F^2}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^2 \\ &+ \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial F^3}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial F^3}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^3 \\ = &\left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^1 \\ &+ \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 = \omega^2_{\operatorname{rot} F}. \end{aligned}$$

Пусть F — векторное поле и

$$\omega^2_F = F^1\, dx^2 \wedge dx^3 + F^2\, dx^3 \wedge dx^1 + F^3\, dx^1 \wedge dx^2$$

— форма потока. Тогда

$$\begin{aligned} d\omega^2_F = &\left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial F^1}{\partial x^3}\, dx^3\right) \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &+ \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial F^2}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial F^2}{\partial x^3}\, dx^3\right) \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\ &+ \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial F^3}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial F^3}{\partial x^3}\, dx^3\right) \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \omega^3_{\operatorname{div} F}. \end{aligned}$$

Итак, все векторные операции, т. е. операции дифференцирования полей, суть различные облики дифференциала формы.

Теорема 16 (обобщенная формула Стокса). *Пусть M — k-мерное ориентированное многообразие с краем ∂M, снабженным индуцированной ориентацией, и ω — $(k-1)$-форма в окрестности M такая, что ее носитель $\operatorname{supp}\omega \cap M$ — компакт. Тогда*

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega. \tag{4}$$

Носитель формы — это объединение носителей всех функций, выступающих множителями при базисных формах.

Мы не будем доказывать обобщенную формулу Стокса, но покажем, что все появившиеся у нас раньше формулы суть ее частные случаи.

Формула Грина как частный случай обобщенной формулы Стокса. Пусть S — 2-мерное многообразие с краем в $\mathbb{R}^2$ и в некоторой его окрестности есть 1-форма $\omega(x) = F^1(x)\,dx^1 + F^2(x)\,dx^2$. Запишем для нее обобщенную формулу Стокса:

$$\begin{aligned}&\int\limits_S d(F^1\,dx^1 + F^2\,dx^2)\\ &= \int\limits_S \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\,dx^2\right)\wedge dx^1 + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial F^2}{\partial x^2}\,dx^2\right)\wedge dx^2\\ &= \int\limits_S \left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right) dx^1\wedge dx^2 = \int\limits_{\partial S} F^1\,dx^1 + F^2\,dx^2.\end{aligned}$$

Можно заметить, что получилась формула Грина.

Формула Стокса как следствие обобщенной формулы Стокса. Пусть S — 2-мерное ориентированное многообразие (поверхность) в $\mathbb{R}^3$ и $\omega^1(x) = F^1\,dx^1 + F^2\,dx^2 + F^3\,dx^3$ — 1-форма в некоторой окрестности поверхности S. Согласно обобщенной формуле Стокса для этой ситуации имеем

$$\begin{aligned}&\int\limits_S d(F^1\,dx^1 + F^2\,dx^2 + F^3\,dx^3)\\ &= \int\limits_S \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}\right) dx^2\wedge dx^3 + \left(\frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}\right) dx^3\wedge dx^1\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial F^2}{\partial x^1}-\frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2=\int\limits_{\partial S}F^1\,dx^1+F^2\,dx^2+F^3\,dx^3.$$

Пришли к классической формуле Стокса.

Формула Гаусса — Остроградского как частный случай обобщенной формулы Стокса. Пусть V — 3-мерное ориентированное многообразие с краем в $\mathbb{R}^3$ и $\omega^2 = F^1\,dx^2\wedge dx^3 + F^2\,dx^3\wedge dx^1 + F^3\,dx^1\wedge dx^2$ — 2 форма, заданная в некоторой окрестности многообразия V. В этом случае обобщенная формула Стокса даст следующее:

$$\int\limits_V d\omega^2 = \int\limits_V\left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1}+\frac{\partial F^2}{\partial x^2}+\frac{\partial F^3}{\partial x^3}\right)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

$$=\int\limits_{\partial V}F^1\,dx^2\wedge dx^3+F^2\,dx^3\wedge dx^1+F^3\,dx^1\wedge dx^2.$$

Получили формулу Гаусса — Остроградского.

Мы ввели некое общее понятие дифференциальной формы, упаковали в него в виде внешнего произведения форм все, что связано с определителями, после чего оказалось, что все важные факты векторного анализа записываются в унифицированном достаточно компактном виде.

Обсуждение векторного анализа мы завершили изучением потенциальных и соленоидальных полей. Перенесем эти понятия на язык форм.

Теорема 17 (лемма Пуанкаре). 1. *Если ω — k-форма, то*

$$d(d\omega)=0.$$

2. *Если форма ω задана в звездной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и $d\omega=0$, то существует форма η такая, что $\omega=d\eta$.*

Проиллюстрируем утверждение 1. Пусть

$$\omega(x)=\sum_{i_1<\dots<i_k}a_{i_1\dots i_k}(x)\,dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}.$$

Первое дифференцирование дает форму

$$d\omega(x)=\sum_{i_1<\dots<i_k}\left(\sum_{p=1}^n\frac{\partial a_{i_1\dots i_k}(x)}{\partial x_p}\,dx^p\right)\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}.$$

После второго дифференцирования получим

$$d(d\omega)(x) = \sum_{i_1<\dots<i_k} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{i_1\dots i_k}(x)}{\partial x^p \partial x^q}\, dx^q \wedge dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Теперь заметим, что при вычислении двойной суммы если индексы p и q равны, то во внешнем произведении встречаются одинаковые сомножители, и такое выражение равно нулю. Если $p \neq q$, то в этой сумме слагаемые с данными индексами встречаются дважды: один раз с $p < q$ и второй раз с $p > q$. Такие пары при приведении подобных в сумме дадут нуль ввиду кососимметричности внешнего произведения. В итоге получается, что вся сумма равна нулю.

Посмотрим, какие утверждения получаются из леммы Пуанкаре в частных случаях.

Для формы ω_f^0 имеем

$$d\omega_f^0 = \omega^1_{\operatorname{grad} f}, \quad d(d\omega) = d\omega^1_{\operatorname{grad} f} = \omega^2_{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f} = 0.$$

Рассмотрим 1-форму ω_F^1. Для нее

$$d\omega_F^1 = \omega^2_{\operatorname{rot} F}, \quad d(d\omega_F^1) = d\bigl(\omega^2_{\operatorname{rot} F}\bigr) = \omega^3_{\operatorname{div} \operatorname{rot} F} = 0.$$

Наконец, для ω_F^3 ее дифференциал $d\bigl(d\omega_F^3\bigr)$ равен нулю по крайней мере по двум причинам. По лемме Пуанкаре второй дифференциал всегда нуль, а с другой стороны, это 4-форма в $\mathbb{R}^3$, что всегда нуль.

Эти утверждения имеют место и в обратную сторону. Правда, мы не уточняем условия, при которых это верно, но во всяком случае это так в звездной области.

Заметим, что дифференциалы бывают разные. В свое время у нас был второй дифференциал, и он ассоциировался с матрицей Гессе. Здесь тоже есть второй дифференциал, но он всегда нуль. Это означает, что дифференциал понимается в разных смыслах и тем самым всегда надо иметь в виду, как понимается второй дифференциал.

Проведем аналогию между формами и многообразиями. Для многообразий было утверждение, что край многообразия всегда есть многообразие без края, в обозначениях $\partial(\partial M) = \varnothing$. Для форм есть похожая формула $d(d\omega) = 0$. Несложно понять, что эти обстоятельства связаны, ибо по формуле Стокса символ перехода к дифференциалу формы перетекает в символ перехода к краю многообразия. Отсюда, по-видимому, происходит терминология, связанная с формами. Компактное многообразие без края выглядит замкнутым (типа сферы). Аналогично форму называют *замкнутой*, если ее дифференциал нулевой. Если форма является дифференциалом другой формы, то ее называют *точной*. Теорема Пуанкаре говорит, что точная форма всегда замкнута, а если замкнутая форма задана в звездной области, то она точная.

§ 8. Векторные операции в криволинейных координатах

В физике довольно часто приходится записывать операции «ротор», «дивергенция», «градиент» в криволинейных координатах, по крайней мере сферических, полярных, цилиндрических. Поставим минимальную цель: научиться записывать указанные выше операции в перечисленных системах координат. Вопрос в известной мере непростой. Во всяком случае надо овладеть основными идеями и научиться пользоваться результатами.

Сначала напомним обозначения, связанные с заменой переменных.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область. Обратим внимание на то, что здесь не идет речь о многообразии, здесь нет поверхностей и кривых. Есть область в трехмерном пространстве, в которой все и происходит. Пусть x — некоторая точка в Ω. Предположим, что в этой области заданы другие координаты. Они задаются посредством какого-то диффеоморфизма, который, как обычно, обозначим через Φ. Область изменения параметров обозначим через U, и пусть u — прообраз точки x. Иначе говоря, u — это новые координаты точки x. В указанном контексте x^1, x^2, x^3 — декартовы координаты в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и диффеоморфизм $\Phi : U \to \Omega$ задает (новые, или криволинейные) координаты u^1, u^2, u^3 в Ω. Обратим внимание, что u^i — это координаты точки из Ω, а не точки из U. Можно это представлять себе как другие имена той же самой точки. Как только появляются новые координаты, в области U можно нарисовать прямоугольную (декартову) сетку и отобразить ее в Ω. Там возникают линии, вдоль каждой из которых меняется какая-то из новых координат, так называемые координатные линии. Известно, что замена координат вызывает искажение пространства и квадратики в новых координатах выглядят вовсе не так, как в старых. В касательном пространстве в точке x есть стандартный базис, который будем обозначать через e_i. Тем самым $e_1, e_2, e_3 \in T_x\Omega$ — это векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$. При введении новых координат вместе с координатными линиями появляются касательные векторы к ним, эти векторы будем обозначать через h_j, т. е. $h_j = \Phi_*(e_j)$, $j = 1, 2, 3,$ — поднятые наверх векторы стандартного базиса в пространстве новых координат (там тоже есть свой стандартный базис). Или, более подробно, h_j суть векторы $h_j = d\Phi(u)(e_j)$. Это векторы нового базиса в касательном пространстве $T_x\Omega$, прикрепленном к точке x.

Пусть $a(x)$ — скалярная функция на Ω, а $F(x)$ — векторное поле на Ω с декартовыми координатами F^1, F^2, F^3, т. е.

$$F(x) = F^1(x)e_1 + F^2(x)e_2 + F^3(x)e_3.$$

Когда мы переходим в векторных выражениях к новым координатам, происходит два явления. Во-первых, на месте x появляется u, т. е. все рассматриваемые функции записываются в терминах новых аргументов u. Но это всего-лишь полдела, это происходит и со скалярными функциями. Вместе с точками меняется и базис, по которому раскладывается векторное поле. Когда мы пишем F^1, F^2, F^3, имеем в виду координаты в старом (первичном) декартовом базисе. А при переходе к новым координатам поля будут раскладываться по новому базису h_1, h_2, h_3, потому что дифференцирование по новой координате будет выражаться как дифференцирование вдоль соответствующей этой координате кривой, т. е. нахождению скорости изменения разных величин вдоль кривой, и тогда надо брать касательный к этой кривой вектор и раскладывать надо с его участием. Итак, в векторных выражениях происходит два явления: переход к новым координатам во всех функциях и смена базиса, по которому раскладываются векторы. Если все это учесть, получится правильное выражение.

Начнем разбираться с тем, по каким правилам происходят преобразования.

Первое — это связь между e_i и h_j, т. е. векторами старого и нового базисов. Запишем матрицу Якоби:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Phi^1}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi^1}{\partial u^3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\Phi^3}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi^3}{\partial u^3} \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы Якоби суть наши векторы h_j. Точнее, элементы столбцов — это координаты вектора h_j в стандартном базисе. Иначе говоря, элемент $\dfrac{\partial\Phi^i}{\partial u^j}$ — это i-я координата вектора h_j в базисе e_i. Тем самым

$$h^j = \sum_i \frac{\partial\Phi^i}{\partial u^j} e_i. \tag{1}$$

Заметим, что когда возникает много суммирований, знаки суммирования перестают писать и используют договоренность, состоящую в том, что по повторяющимся индексам, находящимся на разных уровнях, происходит суммирование (так называемое правило Эйнштейна).

Обратим внимание на то, что переход от старого базиса к новому, выраженный соотношением (1), происходит через умножение на транспонированную матрицу Якоби $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\right)$, поскольку суммирование идет по верхнему индексу. Мы подразумеваем объекты h_j расположенными в столбце и e_i — тоже в столбце. Все, что преобразуется по правилу, по которому преобразуются базисные векторы, называют *ковариантными компонентами* в том смысле, что они меняются вместе с базисом.

Перейдем к установлению связи между координатами векторов. Пусть $\xi \in T_x\Omega$ — касательный вектор, прикрепленный к точке x с декартовыми координатами ξ^i, т. е.

$$\xi = \sum_i \xi^i e_i.$$

Этот же вектор можно разложить и по новому базису h_j:

$$\xi = \sum_j \tilde{\xi}^j h_j.$$

(Новые координаты касательных векторов будем обозначать при помощи тильды.) Установим связь между старыми и новыми координатами. Для этого приравняем полученные два выражения и подставим выражение (1) h_j через e_i:

$$\sum_i \xi^i e_i = \sum_j \tilde{\xi}^j h_j = \sum_j \sum_i \tilde{\xi}^j \frac{\partial\Phi^i}{\partial u^j} e_i.$$

Поменяем порядок суммирования и заметим, что векторы равны тогда и только тогда, когда равны их координаты, т. е.

$$\xi^i = \sum_j \frac{\partial\Phi^i}{\partial u^j} \tilde{\xi}^j. \tag{2}$$

По правилу (2), т. е. через умножение на саму матрицу Якоби (не на транспонированную), происходит переход от новых координат к старым. Это второе из двух правил и все, что преобразуется по этому правилу, называется *контравариантным.* Естественно, у контравариантных компонент индекс пишется сверху. Тем самым при аккуратной записи получается, что если индекс нижний, то меняется как базис по правилу (1) (ковариантно), а если сверху, то это контравариантные компоненты и они меняются по правилу (2)

Установим связь между производными скалярной функции в переменных x и u. Мы это уже проделывали. Запись функции $a(x)$ в новых координатах определяется тождеством

$$\tilde{a}(u) = a(\Phi(u)),$$

в котором справа стоит композиция старой функции и отображения, выражающего новую систему координат. Продифференцируем его:

$$\frac{\partial \tilde{a}(u)}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a(x)}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi^i(u)}{\partial u^j}. \tag{3}$$

Получили связь между частными производными новой и старой функций. Здесь работает ковариантное правило: индекс записан на самом деле снизу, несмотря на то, что у координаты он записан сверху, но координата оказалась в знаменателе и индекс стал нижним. Кроме того, умножение происходит на транспонированную матрицу Якоби: суммирование берется по верхнему индексу и реализуется переход от старых производных к новым, так что производные меняются по ковариантному правилу.

Есть еще один объект, который тоже преобразуется, это скалярное произведение т. е. метрический тензор. Пусть $\xi, \eta \in T_x\Omega$ — два вектора, прикрепленных к точке x. Каждый из них раскладывается по базису e_i:

$$\xi = \sum_i \xi^i e_i, \quad \eta = \sum_k \eta^k e_k.$$

Будем придерживаться такого принципа в обозначениях. Составим пары из букв i, j, из k, l и из p, q. Первые буквы из этих пар будем использовать в качестве индексов для обозначения в старой (исходной, декартовой) системе координат, а вторые — для обозначения в новой системе координат. Тем самым по тому, что за буква используется, можно установить, к какой системе координат выражение относится.

Запишем скалярное произведение и преобразуем, воспользовавшись линейностью по каждому из аргументов:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \left\langle \sum_i \xi^i e_i, \sum_k \eta^k e_k \right\rangle = \sum_i \sum_k \xi^i \eta^k \langle e_i, e_k \rangle.$$

Базис у нас стандартный, так что получается либо единица, либо нуль, т. е. $\langle e_i, e_k\rangle$ — в точности символ Кронекера:

$$\langle e_i, e_k\rangle = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Тем самым двойная сумма в последнем равенстве преобразуется в одну:

$$\sum_i \sum_k \xi^i \eta^k \langle e_i, e_k\rangle = \sum_i \xi^i \eta^i.$$

В последнем суммировании проявляется некоторая непоследовательность в использовании расположения индексов в определении скалярного произведения — когда мы его определяли, ставили верхние индексы при суммировании. Однако если все правильно записано, то индексы, по которым суммируется, должны располагаться на разных уровнях. Предыдущие равенства эту непоследовательность объясняют. Здесь на самом деле есть еще объекты с нижними индексами, так что оказываются два верхних индекса и два нижних и проводится двойное суммирование. Просто в стандартном базисе эта матрица очень простая и не выписывается явно.

Разложим те же векторы по новому базису:

$$\xi = \sum_j \tilde{\xi}^j h_j, \quad \eta = \sum_l \tilde{\eta}^l h_l$$

и проделаем ту же операцию, т. е. посмотрим, как то же скалярное произведение выражается через новые координаты. Подставляя и пользуясь линейностью, получаем двойную сумму

$$\langle \xi, \eta\rangle = \sum_j \sum_l \xi^j \eta^l \langle h_j, h_l\rangle.$$

Введем обозначение $\langle h_j, h_l\rangle = g_{jl}$. Матрицу с элементами g_{jl} называют *матрицей Грама*, а сами g_{jl} — (*ковариантными*) *компонентами метрического тензора*. Вообще тензором называют объект, который зависит от одного или нескольких аргументов и линеен по каждому из них при фиксированных остальных. В частности, скалярное произведение — это тензор, линейный функционал тоже тензор, дифференциальные формы тоже тензоры, только кососимметрические, потому что в них при перестановке аргументов меняется знак. У тензоров есть компоненты, и появившиеся у нас — это компоненты соответствующего тензора.

Установим связь между компонентами g_{jl} метрического тензора в новых координатах и компонентами δ_{ik} тензора в старых. Оказывается, что там дважды применяется ковариантное правило. По определению

$$g_{jl} = \langle h_j, h_l \rangle = \left\langle \sum_i \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} e_i, \sum_k \frac{\partial \Phi^k}{\partial u^l} e_k \right\rangle = \sum_i \sum_k \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} \frac{\partial \Phi^k}{\partial u^l} \delta_{ik}. \qquad (4)$$

Здесь умножаем на транспонированную матрицу с суммированием по верхнему индексу и делаем это дважды, т. е. два раза применяется ковариантное правило. По этой причине компоненты g_{jl} называют *ковариантными*.

Поскольку e_i и h_j образуют базисы, матрицы Грама невырожденные и у них есть обратные. Элементы матрицы, обратной к матрице g_{jl}, обозначают через g^{lq} и называют *контравариантными компонентами метрического тензора*. Можно понять, что g^{lq} связаны с δ^{lq} через двойственное (контравариантное) правило, т. е. можно взять тождество (4), перейти к обратным, получится умножение на обратные и транспонированные. Отметим тождество

$$\sum_l g_{jl} g^{lq} = \delta_j^q = \begin{cases} 1, & j = q, \\ 0, & j \neq q. \end{cases}$$

Здесь δ_j^q также символ Кронекера. Можно заметить, что есть несколько символов Кронекера, различающихся местами расстановки индексов.

Ортогональные системы координат. Бывает так, что базисные векторы новой системы координат попарно ортогональны (хотя, возможно, не нормированы, т. е. имеют неединичную длину). Так происходит, например, в часто используемых полярной, цилиндрической и сферической системах координат. Если векторы h_j попарно ортогональны, то составленную из них систему координат называют *ортогональной* (или в случае $\mathbb{R}^3$ *триортогональной*).

Что можно сказать о матрице Грама, т. е. о метрическом тензоре, в этом случае? Оказывается, что для ортогональной системы координат g_{ik} представляет собой диагональную матрицу, в которой на диагонали стоят квадраты длин векторов:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle h_1, h_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle h_2, h_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle h_3, h_3 \rangle \end{pmatrix}.$$

Для этих величин есть специальные обозначения и название. Эти величины обозначают так: $\langle h_1, h_1\rangle = E_1$, $\langle h_2, h_2\rangle = E_2$, $\langle h_3, h_3\rangle = E_3$, они равны квадратам длин базисных векторов. Используют также корни из этих величин, т. е. собственно сами длины. Их обозначают так: $H_j = \sqrt{E_j} = |h_j|$, и называют *коэффициентами Ламе.* С именем Ламе связывают коэффициенты и параметры. Последние возникают в механике и описывают упругость тела, и желательно не путать их с коэффициентами.

Коли уж оказалось так, что векторы нового базиса попарно ортогональны, то можно довести дело до конца и их нормировать, т. е. работать с векторами

$$\hat{h}_j = \frac{h_j}{H_j}.$$

После нормировки возникает еще один базис, ортонормированный, и по нему тоже можно раскладывать. Коэффициенты в разложении по нормированным векторам будем обозначать через $\hat{\xi}^j$, т. е. добавлять сверху крышку, так что

$$\xi = \sum_j \hat{\xi}^j \hat{h}_j = \sum_j \tilde{\xi}^j h_j = \sum_j \xi^i e_i.$$

Тем самым есть три набора координат: исходные декартовы, в новом базисе и в ортонормированном базисе. В физике встречается именно разложение по ортонормированному базису, поэтому при переходе к новым координатам новый базис снова нормируют.

Базис удобно нормировать потому, что в таком случае абсолютная величина поля будет находиться по тому же удобному правилу, что и для старых координат, а именно для длины вектора имеем

$$|\xi|^2 = \sum_j (\hat{\xi}^j)^2 = \sum_i (\xi^i)^2.$$

Посчитаем коэффициенты Ламе классических систем координат.

(1) Полярная система координат. Все предыдущие записи были сделаны для случая $\mathbb{R}^3$, в $\mathbb{R}^2$ все остается таким же, только исчезает последняя координата. В этой системе координат матрица Якоби такова:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Первый столбец дает один из базисных векторов, длина его равна 1, второй столбец — другой базисный вектор, его длина равна r. Здесь коэффициенты Ламе естественно индексировать не цифрами, а названиями переменных. Тем самым $H_r = 1$, $H_\varphi = r$. Это те же величины, которые стояли при дифференциалах в замене переменных, когда мы выписывали элементы площади и объема в различных системах координат — dr было само по себе, а $d\varphi$ сопровождалось коэффициентом r.

(2) Цилиндрическая система координат. Коэффициенты Ламе таковы:

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1.$$

(3) Сферическая система координат. Коэффициенты Ламе таковы:

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta.$$

Запись $\operatorname{grad} f$ в криволинейных системах координат. Пусть даны скалярная функция $f(x)$ и новые координаты u, задаваемые диффеоморфизмом Φ, т. е. $x = \Phi(u)$.

Выясним, как преобразуются частные производные f. Запишем f в новых координатах: $\tilde{f}(u) = f(\Phi(u))$, и продифференцируем. Получим (см. (3))

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j}(u) = \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}(u). \tag{5}$$

Вспомним, как определяется $\operatorname{grad} f$, и поймем, как координаты $(\operatorname{grad} f)^i$ этого векторного поля связаны с частными производными $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$. По определению градиент — это такой вектор, который дает нам действие дифференциала и выражает его через скалярное произведение:

$$\langle \operatorname{grad} f, \xi\rangle = df(x)(\xi). \tag{6}$$

В стандартных координатах дифференциал действует так:

$$df(x)(\xi) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\xi^i, \tag{7}$$

а скалярное произведение в свете того, что мы о нем недавно узнали, запишется так:

$$\langle \operatorname{grad} f, \xi\rangle = \sum_i \sum_k (\operatorname{grad} f)^k \xi^i \delta_{ki}, \tag{8}$$

и ввиду произвольности вектора ξ должно быть

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_k (\operatorname{grad} f)^k \delta_{ki} = (\operatorname{grad} f)^i. \tag{9}$$

Надо обратить внимание на то, что в (9) равны величины с разновысотными индексами, и это происходит только в декартовой системе координат за счет специфического метрического тензора δ_{ki}.

Как связаны координаты векторных полей в базисах e_i и h_j? Вернемся немного назад и заметим, что они меняются контравариантно, т. е. происходит переход от новых к старым путем умножения на матрицу Якоби. Тем самым должно быть так:

$$(\operatorname{grad} f)^k = \sum_l \frac{\partial \Phi^k}{\partial u^l} (\operatorname{grad} \tilde{f})^l. \tag{10}$$

Это контравариантное правило, связывающее компоненты векторов.

Подставим на соответствующее место в равенстве (5) выражения для $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x^i}$ из (9), а затем на место $(\operatorname{grad} f)^k$ подставим выражение для него из (10). Имеем

$$\frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^j} = \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} = \sum_i \sum_k (\operatorname{grad} f)^k \delta_{ki} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}$$
$$= \sum_i \sum_k \sum_l \frac{\partial \Phi^k}{\partial u^l} (\operatorname{grad} \tilde{f})^l \delta_{ki} \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}.$$

Вынесем сумму по l наружу, а в суммировании по i и k, участвуют соответствующие компоненты касательных векторов в стандартном базисе, а именно

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial u^l} = h_l^k, \quad \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} = h_j^i,$$

и мы их сворачиваем с метрическим тензором. Координаты в стандартном базисе, и в стандартном же базисе берется скалярное произведение. Это скалярное произведение векторов h_l и h_j. Получаем матрицу Грама. В итоге получается так:

$$\frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^j} = \sum_l (\operatorname{grad} \tilde{f})^l g_{lj}. \tag{11}$$

Мы хотим выразить $(\operatorname{grad} \tilde{f})^l$ через $\dfrac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^j}$. Для этого надо умножить на матрицу, обратную к метрическому тензору, иначе говоря, свернуть с контравариантными компонентами. Применяя обратную матрицу g^{lj}, получаем

$$(\operatorname{grad} \tilde{f})^l = \sum_j g^{lj} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j}. \tag{12}$$

Это правило годится для любой, не обязательно ортогональной, системы координат.

В случае ортогональной системы координат желательно выписать не просто компоненты в новом базисе, а в нормированном базисе. Для этого надо разделить на коэффициенты Ламе. Поскольку при нормировке мы делили вектор на коэффициенты Ламе, для компенсации этого действия координаты (коэффициенты) должны умножить на эти коэффициенты. Если система ортогональна, то ее матрица Грама диагональна, обратная к ней тоже диагональна и на диагонали у нее будут стоять квадраты коэффициентов Ламе в минус первой степени. Здесь

$$(g^{lj}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{H_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{H_3^2} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Тем самым в (12) умножение на матрицу сводится к умножению на диагональные элементы и суммирование по j уходит. Стало быть, в новой ортонормированной системе координат

$$(\operatorname{grad} \hat{f})^l = H_l \frac{1}{H_l^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^l} = \frac{1}{H_l} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^l}. \tag{14}$$

Из (14) видно, что в общем случае градиент не является вектором, составленным из частных производных, требуется еще разделить на коэффициенты Ламе.

В частности, в двумерном случае для полярных координат

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} \hat{e}_\varphi \tag{15}$$

(крышка над вектором показывает, что он нормирован), в трехмерном для сферических

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \hat{e}_\theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \varphi} \hat{e}_\varphi. \tag{16}$$

Для цилиндрической системы надо взять полярную и приписать последний вектор.

То же самое можно проделать с ротором и дивергенцией. В чем особенности соответствующих действий? Вспомним, что при выражении градиента мы брали функцию, получали векторное поле и потом его преобразовывали. А когда будем считать дивергенцию в новых координатах, сначала должны будем получить компоненты векторного поля в новых координатах, вернуть их в старые, там провести дифференцирование и сложить. Но поскольку сначала надо перейти к старым координатам и затем дифференцировать, там матрицы Якоби, которые у нас сложились замечательно и дали метрический тензор, стоят по разные стороны от производных и складываются с некоторым трудом. А с ротором дело совсем плохо — он берет векторное поле и возвращает тоже векторное поле, т. е. получаем компоненты вектора в новой системе координат, разворачиваем их в старую, там считаем эту длинную конструкцию, а затем возвращаем ее в новые координаты. Очень громоздкий переход. Есть способ сделать это удобно и красиво, а именно через дифференциальные формы, поскольку градиент, ротор и дивергенция представляют собой дифференциал дифференциальной формы в конкретных случаях. Но это тоже не очень прозрачно, и мы этого делать не будем. На эту тему можно прочесть либо у В. И. Арнольда в книге «Математические методы классической механики», либо в учебнике В. А. Зорича.

Ограничимся записью соответствующих формул.

Ротор в ортогональных координатах. Пусть F — векторное поле с координатами $\widehat{F}^j$ в новой системе координат, т. е.

$$F = \sum_j \widehat{F}^j \hat{h}_j. \tag{17}$$

Тогда

$$\operatorname{rot} F = \frac{1}{H_1H_2H_3} \begin{vmatrix} H_1\hat{h}_1 & \dfrac{\partial}{\partial u_1} & H_1\widehat{F}^1 \\ H_2\hat{h}_2 & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & H_2\widehat{F}^2 \\ H_3\hat{h}_3 & \dfrac{\partial}{\partial u_3} & H_3\widehat{F}^3 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Наблюдения такие. У градиента в результате преобразований внизу оказалась первая степень коэффициента Ламе. И здесь должно произойти то же самое. Видим, что перед определителем находится третья степень внизу и в самом определителе дважды первая степень вверху, и в итоге появится первая степень коэффициента Ламе внизу.

Дивергенция в ортогональных координатах. В указанных выше обозначениях

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}(H_2H_3\widehat{F}^1) + \frac{\partial}{\partial u^2}(H_3H_1\widehat{F}^2) + \frac{\partial}{\partial u^3}(H_1H_2\widehat{F}^3)\right) \\ &= \frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_j}\widehat{F}^j\right). \end{aligned} \tag{19}$$

В каждом конкретном случае берете коэффициенты Ламе в данной системе координат, подставляете и записываете.

Запишем дивергенцию в сферической системе координат. Имеем

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta \widehat{F}^1) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin\theta \widehat{F}^2) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \widehat{F}^3) \right). \qquad (20)$$

В формуле (20) можно провести небольшие упрощения, но это можно проделать по желанию. Как видно, получилось довольно громоздкое выражение, так что использовать дивергенцию в сферической системе имеет смысл в случае, когда поле в ней выглядит как-то удачно, например когда у поля есть только радиальная компонента, а остальные нулевые, тогда выражение существенно упрощается.

Оператор Лапласа в ортогональной системе координат. Имеем

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad}.$$

Каждую из операций div и grad можно записать в криволинейных координатах, и если мы проделаем это, то получим запись оператора Лапласа в криволинейных координатах:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{f}(u) &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_j} \frac{1}{H_j} \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^j} \right) \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_j^2} \frac{\partial}{\partial u^j} \tilde{f}(u) \right). \end{aligned} \qquad (21)$$

Заметим, что здесь нет смешанных частных производных. Первые производные будут, ибо кое-где берутся производные от произведения, а вот смешанных не будет, потому что система координат ортогональна и рассматривается оператор Лапласа, не содержащий смешанных производных. Такого уже не будет, если система координат не ортогональна или если считаем не оператор Лапласа, а какую-то комбинацию вторых частных производных, тогда обязательно появятся смешанные производные.

В качестве примера запишем оператор Лапласа в полярных координатах. В них коэффициенты Ламе $H_1 = 1$, $H_r = r$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{f}(r, \varphi) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \tilde{f} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{f} \right) \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \tilde{f} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tilde{f}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Получили то же выражение, которое получали ранее другим путем.

Покажем, как можно вывести формулу для дивергенции в простейшем случае из ее инвариантного определения.

Дивергенция в полярных координатах. Пусть поле F в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ задано в полярных координатах:

$$F(r,\varphi) = F_r(r,\varphi)\hat{e}_r + F_\varphi(r,\varphi)\hat{e}_\varphi.$$

Найдем его дивергенцию $\operatorname{div} F$, пользуясь инвариантным определением дивергенции, которое вытекает из ее физического смысла. Напомним, что в пространстве

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\int\limits_{\partial B(x,r)} F \cdot n\, dS}{V(B(x,r))}.$$

Заметим, что в этой формуле нет никаких координат.

Мы рассматриваем плоский случай, так что поле будет на плоскости и нужно считать его поток через кривую, а не через поверхность, и делить на площадь области, ограниченной данной кривой. Кстати, в качестве фигуры не обязательно брать круг — можно взять любую фигуру с кусочно гладкой границей. Сначала запишем общую формулу и посмотрим, что она дает в нашем случае:

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{H_r H_\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H_r H_\varphi}{H_r} F_r\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{H_r H_\varphi}{H_\varphi} F_\varphi\right)\right)$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(F_\varphi)\right).$$

Возьмем точку (r_0, φ_0) и приращения Δr, $\Delta\varphi$ и нарисуем соответствующий криволинейный четырехугольник (рис. 8.1). Посчитаем поток $\int\limits_\gamma F \cdot n\, dl$ поля через границу (край) γ этого четырехугольника. Край состоит из четырех кусков $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ (см. рис. 8.1). Векторы единичной внешней нормали на них равны $\hat{e}_r$, $-\hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi$, $-\hat{e}_\varphi$, а элементы длины дуги dl равны $(r_0 + \Delta r)\, d\varphi$, $r_0\, d\varphi$, dr и dr соответственно.

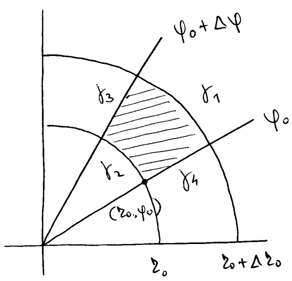

Рис. 8.1.

Стало быть,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} F\cdot n\,dl &= \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta\varphi} F_r(r_0+\Delta r,\varphi)(r_0+\Delta r)\,d\varphi - \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta\varphi} F_r(r_0,\varphi)r_0\,d\varphi \\
&\quad + \int\limits_{r_0}^{r_0+\Delta r} F_\varphi(r,\varphi_0+\Delta\varphi)\,dr - \int\limits_{r_0}^{r_0+\Delta r} F_\varphi(r,\varphi_0)\,dr \\
&= \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+\Delta\varphi} \left(F_r(r_0+\Delta r,\varphi)(r_0+\Delta r) - F_r(r_0,\varphi)r_0\right)d\varphi \\
&\quad + \int\limits_{r_0}^{r_0+\Delta r} \left(F_\varphi(r,\varphi_0+\Delta\varphi) - F_\varphi(r,\varphi_0)\right)dr \\
&= \big(F_r(r_0+\Delta r,\varphi_0+\theta\Delta\varphi)(r_0+\Delta r) - F_r(r_0,\varphi_0+\theta\Delta\varphi)r_0\big)\Delta\varphi \\
&\quad + \big(F_\varphi(r_0+\eta\Delta r,\varphi_0+\Delta\varphi) - F_\varphi(r_0+\eta\Delta r,\varphi_0)\big)\Delta r,
\end{aligned}$$

где $\theta,\eta\in(0,1)$ — точки, существование которых гарантируется теоремой о среднем.

Вычислим площадь четырехугольника:

$$S = \frac{\pi((r_0+\Delta r)^2 - r_0^2)}{2\pi}\Delta\varphi = r_0\,\Delta r\Delta\varphi + (\Delta r)^2\Delta\varphi/2$$

Разделим поток на площадь и перейдем к пределу при $\Delta r\to 0$ и $\Delta\varphi\to 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\int\limits_{\gamma} F\cdot n\,dl}{S} \\
&\quad = \frac{(F_r(r_0+\Delta r,\varphi_0+\theta\Delta\varphi)(r_0+\Delta r) - F_r(r_0,\varphi_0+\theta\Delta\varphi)r_0)}{r_0\,\Delta r\Delta\varphi + (\Delta r)^2\Delta\varphi/2}\Delta\varphi \\
&\qquad + \frac{(F_\varphi(r_0+\eta\Delta r,\varphi_0+\Delta\varphi) - F_\varphi(r_0+\eta\Delta r,\varphi_0))}{r_0\,\Delta r\Delta\varphi + (\Delta r)^2\Delta\varphi/2}\Delta r \\
&\qquad\qquad \to \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r(r,\varphi)) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\varphi(r,\varphi))\right]\Bigg|_{\substack{r=r_0,\\ \varphi=\varphi_0}}.
\end{aligned}$$

Полученный результат полностью согласуется с общей формулой для дивергенции.

Пример 1 (запись электрического поля точечного заряда в сферической системе координат). Известно, что

$$E(\vec{r}) = \frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{q}{|\vec{r}|^3}(xe_x + ye_y + ze_z).$$

Легко заметить, что в сферических координатах

$$\hat{e}_R = \frac{x}{|\vec{r}|}e_x + \frac{y}{|\vec{r}|}e_y + \frac{z}{|\vec{r}|}e_z.$$

Тогда

$$E(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}|^2}\hat{e}_r.$$

Тем самым для этого поля в сферических координатах нетривиальна только одна координата.

Для дивергенции этого поля имеем

$$\operatorname{div} E(\vec{r}) = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \sin\theta \frac{q}{R^2}\right)\right) = 0.$$

Пример 2 (магнитное поле в цилиндрических координатах). Магнитное поле в декартовых координатах имеет вид

$$H(\vec{r}) = \frac{2I}{c}\frac{(-y, x, 0)}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \frac{2I}{c}\frac{(-y, x, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

С учетом того, что $\dfrac{(-y, x, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ есть не что иное как $\hat{e}_\varphi$, а $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ — это $\dfrac{1}{r}$, имеем

$$H(\vec{r}) = \frac{2I}{c}\frac{1}{r}\hat{e}_\varphi.$$

§ 9. Аналитические функции

Будем считать, что предварительное знакомство с комплексными числами у нас есть, и будем обсуждать в основном вопросы, лежащие в области наших интересов. Поэтому мы не будем заботиться о полноте набора определений и т. п.

Комплексное число z можно представлять как пару $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ или как сумму $z = x + iy$, где i можно считать вектором с координатами $(0, 1)$ или магическим числом, квадрат которого равен -1.

Множество комплексных чисел обозначают обычно символом $\mathbb{C}$.

Во многом комплексная плоскость — это просто плоскость $\mathbb{R}^2$, но с одной дополнительной операцией — умножением комплексных чисел.

Для комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ определен его модуль

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где для $z = x + iy$ число $\bar{z} = x - iy$ называют *сопряженным к* z. Геометрически модуль показывает расстояние от начала координат до точки z и есть не что иное как евклидова норма на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Вспомним определения, связанные с пределом.

Определение предела последовательности комплексных чисел. Говорят, что последовательность $z_n \in \mathbb{C}$ *сходится к* $a \in \mathbb{C}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0 \quad |z_n - a| < \varepsilon.$$

Определение предела функции. Говорят, что число $l \in \mathbb{C}$ является *пределом функции* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *в точке* z_0, предельной для области определения f, или *при* z, *стремящемся к* z_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in \mathbb{C} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \to |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Для предела последовательности и функции в точке используют те же обозначения, что и в вещественном случае.

Заметим, что в обоих предыдущих определениях умножение комплексных чисел не используется, так что в вопросах сходимости комплексная плоскость — это просто $\mathbb{R}^2$.

Замечание перед определением производной комплекснозначной функции. Функцию $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ можно рассматривать как функцию из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Если

$$f(z) = \underbrace{\operatorname{Re} f(z)}_{u(x,y)} + i \underbrace{\operatorname{Im} f(z)}_{v(x,y)},$$

то возникает отображение $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. При его дифференцировании как отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ возникает матрица Якоби $\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$.

Вместе с тем для числовой функции одной переменной производная определялась как

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если представить себе, что в последнем равенстве берутся точки из $\mathbb{R}^2$, т. е. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, то и приращение окажется из $\mathbb{R}^2$, т. е. $\Delta x = (\Delta x^1, \Delta x^2)$, и на него, вообще говоря, делить невозможно. Но в комплексной плоскости есть дополнительная структура, позволяющая делить на вектор как на комплексное число. Тем самым приходим к следующему определению.

Определение аналитической функции. Говорят, что функция $f : \Omega \to \mathbb{C}$, где Ω — область в $\mathbb{C}$, *имеет производную в точке* z, если существует следующий предел:

$$\frac{df}{dz}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Если f имеет производную в каждой точке из Ω, то f называют *аналитической в* Ω.

Предел, используемый в определении производной комплексной функции, не связан с умножением, эта операция употребляется внутри выражения, к которой применяется операция взятия предела.

Замечание после определения аналитической функции. Наличие предела в $\mathbb{R}^n$ (в частности, в $\mathbb{R}^2$) означает наличие предела по всем направлениям и их совпадение, хотя наличие одного и того же предела по всем направлениям еще не влечет существование предела в точке. Посмотрим, что для аналитической функции означает равенство пределов по всем направлениям, проходящим через данную точку.

Теорема 18 (об условиях Коши — Римана). *Комплекснозначная функция $f(z)$, заданная в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, аналитична тогда и только тогда, когда $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ удовлетворяет условиям Коши — Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \tag{1}$$

Доказательство проведем только в одну сторону, в другую, конечно, факт верен, но у нас не хватит аппарата для его обоснования.

Рассмотрим отношение из определения производной:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Поскольку отношение в последнем равенстве имеет предел при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, существуют пределы по всем направлениям, в частности, по направлениям x и y, равные одному и тому же значению. Рассмотрим случай, когда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y = 0$. Имеем

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

В случае $\Delta x = 0$, $\Delta y \to 0$ имеем

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{i\Delta y}$$
$$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (3)$$

Из (1), (2) следует выполнение условий Коши — Римана.

Условия Коши — Римана позволяют для данной функции проверить, аналитическая она или нет. Все элементарные функции, определенные для комплексных чисел, а именно степенная, показательная, тригонометрические и т. п., аналитичны. Проверим это, например, для экспоненты. Для комплексного $z = x + iy$ по определению полагают

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y.$$

Продифференцируем:

$$u'_x = e^x\cos y, \quad u'_y = -e^x\sin y, \quad v'_x = e^x\sin y, \quad v'_y = e^x\cos y,$$

и выполнение условий Коши — Римана очевидно.

Операторы $\dfrac{\partial}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \bar z}$. Для производной аналитической функции

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

имеем

$$\frac{df}{dz} = u'_x + iv'_x = \frac{1}{2}(u'_x + v'_y) + \frac{i}{2}(v'_x - u'_y)$$
$$= \frac{1}{2}((u'_x + iv'_x) - i(u'_y + iv'_y)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv).$$

Это один из способов вычисления производной аналитической функции. Для возникшего здесь оператора используют отдельное обозначение:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Аналогично можно определить оператор

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Подействовав оператором $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ на какую-либо комплекснозначную функцию $f = u + iv$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = \frac{1}{2}(u'_x - v'_y + i(u'_y + v'_x)),$$

и видно, что выполнение условий Коши — Римана равносильно равенству

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Посмотрим, что получится в результате применения композиции операторов $\dfrac{\partial}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) &= \frac{1}{2}(\partial_x - \partial_y)(\partial_x + \partial_y) f(z) \\ &= \frac{1}{4}\big(\partial_x^2 + \partial_y^2\big)(u + iv) = \frac{1}{4}\big(\big(\partial_x^2 + \partial_y^2\big)u + i\big(\partial_x^2 + \partial_y^2\big)v\big),\end{aligned}$$

и мы получили, что рассмотренная композиция операторов есть одна четверть от оператора Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{1}{4}\Delta f(z).$$

Определение интеграла от аналитической функции. Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$ и f — аналитическая в Ω функция. Интеграл от функции f от точки $z_1 \in \Omega$ до точки $z_2 \in \Omega$ определяется так. Возьмем произвольную гладкую кривую с началом в z_1 и концом в z_2 с параметризацией $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $t \in [0, 1]$, лежащую в Ω. Положим

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = \int\limits_0^1 f(\zeta(t)) \cdot \zeta'(t)\, dt,$$

где умножение понимается как умножение комплексных чисел. Оказывается, что для аналитической функции интеграл не зависит от выбора пути, идущего из одной точки в другую.

Теорема 19 (об интеграле от аналитической функции). *В односвязной области интеграл от аналитической функции не зависит от пути интегрирования.*

Доказательство. Пусть γ — гладкая кривая в Ω, являющаяся краем некоторой области $G \subset \Omega$. Покажем, что

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Удалим из γ одну точку, и оставшуюся часть параметризуем отображением $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$. По определению имеем (где $u = u(\xi(t), \eta(t))$, $v = v(\xi(t), \eta(t))$)

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} f\,dz &= \int\limits_0^1 (u + iv) \cdot (\xi'(t) + i\eta'(t))\,dt \\
&= \int\limits_0^1 ((u\xi'(t) - v\eta'(t)) + i(v\xi'(t) + u\eta'(t)))\,dt \\
&= \int\limits_0^1 (\langle (u, -v), (\xi'(t), \eta'(t))\rangle + i\langle (v, u), (\xi'(t), \eta'(t))\rangle)\,dt
\end{aligned}$$

(по формуле Грина)

$$\int\limits_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

ввиду аналитичности функции и выполнении для нее условий Коши — Римана.

Доказанное утверждение верно и для кусочно гладких кривых.

Пусть теперь γ_1, γ_2 — две различные кривые, соединяющие точки z_1, z_2 и ориентированные в направлении от z_1 к z_2. Если они не пересекаются, то в объединении окружают некоторую область G, при этом ориентация одной из кривых γ_1, γ_2 согласована с индуцированной ориентацией края, а другой — противоположная. Следовательно,

$$\int\limits_{\partial G} f\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f\,dz - \int\limits_{\gamma_1} f\,dz = 0.$$

В принципе, кривые γ_1 и γ_2 могут и пересекаться, и в случае пересечения надо рассмотреть все части между точками пересечения и применить установленный факт для каждого участка.

§ 10. Гармонические функции

Определение гармонической функции. Функцию $f(x)$, заданную в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, называют *гармонической в* Ω, если

$$\Delta f = 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Пример. Выше мы уже встречались с примером гармонической функции — таковой был потенциал точечного заряда $\varphi(x) = \dfrac{q}{|x|}$. Это гармоническая функция в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Действительно, для электрического поля этого заряда было показано, что

$$E(x) = -\operatorname{grad}\varphi(x)$$

и

$$\operatorname{div} E(x) = \operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi(x)) = \Delta\varphi(x) = 0.$$

На самом деле мы начинали с записи электрического поля точечного заряда, считали от него дивергенцию в явном виде, а потом делали заключение о его потенциальности и явно предъявляли потенциал. Более того, в любой области, в которой нет заряда, потенциал всегда гармоническая функция. Поэтому гармонические функции играют важную роль.

Теорема 20 (формула Грина). *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ с (кусочно) гладкой границей и $u(x)$ — функция класса C^2 в некоторой окрестности области Ω. Тогда в произвольной точке $x \in \Omega$ значения функции u находятся следующим образом:*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \Delta u(y) \frac{-1}{4\pi|x-y|}\, dV + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{-1}{4\pi|x-y|}\right) - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS, \qquad (1)$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n_y}(y) = n_y \cdot \operatorname{grad} u(y)$ — производная в направлении (единичной) внешней нормали n_y к S в точке y.

В частности, для гармонической функции формула (1) *принимает вид*

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{-1}{4\pi|x-y|} - \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \frac{-1}{4\pi|x-y|} \right) dS,$$

т. е. значение гармонической функции в любой внутренней точке полностью определяется значениями $u(y)$ *и* $\dfrac{\partial u(y)}{\partial n_y}$ *на границе.*

Доказательство. Шаг 1 (первая и вторая формулы Грина). Пусть u, v — функции класса C^2 в некоторой окрестности области Ω. Имеем

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) - u\Delta v. \tag{3}$$

Действительно, запишем (3) подробнее:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(u \frac{\partial v}{\partial x^i} \right) - \sum_{i=1}^{3} u \frac{\partial^2 v}{\partial (x^i)^2}.$$

По формуле Гаусса — Остроградского

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dV &= \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) \, dV - \int\limits_{\Omega} u\Delta v \, dV \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} u \, n \cdot \operatorname{grad} v \, dS - \int\limits_{\Omega} u\Delta v \, dV = \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS - \int\limits_{\Omega} u\Delta v \, dV.\end{aligned} \tag{4}$$

Равенство (4) называют *первой формулой Грина.*

Запишем первую формулу Грина, поменяв местами u и v:

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u \, dV = \int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS - \int\limits_{\Omega} v\Delta u \, dV,$$

и вычтем, собрав при этом интегралы по области в левой части, а интегралы по границе — в правой. Получим

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \, dV = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v \right) dS. \tag{5}$$

Это *вторая формула Грина.*

Шаг 2 (последняя формула Грина). Фиксируем внутреннюю точку $x \in \Omega$, возьмем шар $B = B(x, r) \subset \Omega$ и применим вторую формулу Грина к функциям $u(y)$ и $v(y) = \dfrac{1}{|x-y|}$ в области $\Omega \setminus B$ с границей $\partial\Omega \cup \partial B$, ориентированной вектором внешней нормали. С учетом ориентации края имеем

$$\int\limits_{\Omega \setminus B} \left(u(y)\Delta_y \frac{1}{|x-y|} - \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} \right) dV$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) \frac{1}{|x-y|} \right) dS$$

$$- \int\limits_{\partial B} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) \frac{1}{|x-y|} \right) dS.$$

Заметим, что $\Delta_y \dfrac{1}{|x-y|} = 0$. На границе шара ∂B нормаль выражается так:

$$n_y = \frac{y-x}{|y-x|},$$

а градиент так:

$$\operatorname{grad}_y \frac{1}{|x-y|} = \frac{x-y}{|x-y|^3},$$

стало быть,

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} = -\frac{|x-y|^2}{|x-y|^4} = -\frac{1}{r^2}.$$

Для второго слагаемого $\dfrac{1}{|x-y|} = \dfrac{1}{r}$.

Используя теорему о среднем, для первого слагаемого получаем

$$\int\limits_{\partial B} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|}\, dS = -\int\limits_{\partial B} u(y) \frac{1}{r^2}\, dS$$

$$= u(\eta) 4\pi r^2 \frac{-1}{r^2} = -4\pi u(\eta) \to -4\pi u(x) \text{ при } r \to 0,$$

где η — некоторая точка сферы ∂B, возникающая в результате применения теоремы о среднем. Для второго слагаемого

$$\int\limits_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n}(y) \frac{1}{|x-y|}\, dS = \int\limits_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n}(y) \frac{1}{r}\, dS = \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} \frac{4\pi r^2}{r} \to 0 \text{ при } r \to 0,$$

где ξ — точка на соответствующей сфере, существование которой гарантирует теорема о среднем.

Что произойдет с интегралами по областям при стягивании шара в точку? По теореме Лебега

$$\int\limits_{\Omega\setminus B} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|}\,dV \underset{r\to 0}{\to} \int\limits_{\Omega} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|}\,dV,$$

так как особенность $\dfrac{1}{|x-y|}$ интегрируема в $\mathbb{R}^3$ и $\dfrac{\sup|\Delta u(y)|}{|x-y|}$ можно взять в качестве интегрируемой мажоранты.

В итоге при $r\to 0$ получаем

$$\int\limits_{\Omega} \frac{-\Delta u(y)}{|x-y|}\,dV = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|} - \frac{\partial u}{\partial n}(y)\frac{1}{|x-y|} \right) dS + 4\pi u(x).$$

Для получения требуемой формулы в последнем равенстве надо обе части разделить на 4π и все, кроме $u(x)$, собрать в одной части.

В частности, для гармонической функции u интеграл по области исчезает.

Теорема доказана.

Замечание. Функцию $\dfrac{-1}{4\pi|x-y|}$ называют *фундаментальным решением оператора Лапласа.*

Теорема 21 (о среднем). *Пусть $u(x)$ — гармоническая в области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ функция и $x\in\Omega$ — произвольная точка. Пусть $S=S(x,r)\subset\Omega$ — некоторая сфера. Тогда*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{S} u(y)\,dS.$$

Доказательство. Сначала отметим такой факт для гармонической функции u:

$$\int\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = 0,$$

причем это верно не только для сферы, но и для любой замкнутой поверхности. Действительно, по формуле Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int\limits_{S} n(x)\cdot \operatorname{grad} u(x)\,dS$$

$$= \int\limits_{B(x,r)} \operatorname{div}\operatorname{grad} u(x)\,dV = \int\limits_{B(x,r)} \Delta u(x)\,dV = 0.$$

По формуле Грина, учитывая, что интегрирование ведется по сфере, имеем

$$u(x) = \int\limits_S \left(u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{-1}{4\pi|x-y|} - \frac{\partial u(y)}{\partial n} \frac{-1}{4\pi \underbrace{|x-y|}_{r}} \right) dS$$

$$\text{(заметим, что } \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{-1}{4\pi|x-y|} = \frac{(y-x)\cdot(y-x)}{|x-y||x-y|^3} = \frac{1}{|x-y|^2} \text{)}$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S(x,r)} u(y)\, dS.$$

Теорема доказана, можно пользоваться.

Теорема 22 (принцип максимума для гармонических функций). *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в некоторой окрестности области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно гладкой границей. Тогда строгий экстремум функции u в замыкании $\overline{\Omega}$ не может достигаться во внутренних точках, т. е. экстремум гармонической функции достигается на границе области.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что $x \in \Omega$ — внутренняя точка, в которой u имеет, например, строгий максимум. Тогда по теореме о среднем для произвольной сферы $S(x,r)$, лежащей в Ω, и настолько малого радиуса, что значения функции в точках сферы строго меньше значения в точке x, имеем

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S(x,r)} u(y)\, dS < \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S(x,r)} u(x)\, dS = u(x),$$

что невозможно.

Теорема доказана.

Нестрогий экстремум может быть и внутри области, например, в случае постоянной функции.

Вспомним (см. пример 1 в гл. 7, § 6), что точечный заряд q в точке y порождает электростатическое поле

$$E(x) = \frac{q}{|x-y|^2} \frac{x-y}{|x-y|}.$$

Если зарядов несколько, то их электрические поля складываются согласно принципу суперпозиции. А именно если в точках y_j расположены заряды q_j, $j = 1, \dots, N$, то порождаемое этой системой зарядов поле имеет вид

$$E(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j(x - y_j)}{|x - y_j|^3}.$$

Наконец, если заряд распределен в пространстве непрерывным образом с некоторой пространственной плотностью $\rho(y)$, то, естественно, от суммы переходят к интегралу и электрическое поле имеет вид

$$E(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)(x - y)}{|x - y|^3}\, dV(y),$$

причем предполагается, что распределение заряда либо финитно, либо настолько быстро убывает, что последний интеграл существует. Вообще у этого интеграла две особенности — на бесконечности и в точке x, но последняя интегрируема, так как в числителе стоит первая степень разности $x - y$.

Это интегральный закон. Выведем из него дифференциальный, т. е. перейдем к дифференциальному уравнению, которому должно удовлетворять соответствующее электростатическое поле.

Теорема 23 (закон Гаусса). *Пусть ρ — финитная функция класса C^1 в $\mathbb{R}^3$. Тогда электрическое поле, порожденное $\rho(x)$, удовлетворяет уравнению*

$$\operatorname{div} E(x) = 4\pi\rho(x). \tag{6}$$

Заметим, что дифференциальный закон носит локальный характер — берем электрическое поле в одной точке, для его дифференцирования надо располагать информацией о нем лишь в некоторой окрестности данной точки. Если изменить плотность поодаль от данной точки, то его дивергенция в данной точке не изменится.

Доказательство. Пусть носитель функции ρ содержится в некоторой ограниченной области Ω. Тогда в декартовых координатах имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^i} E^i(x) = \frac{\partial}{\partial x^i} \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(y)(x^i - y^i)}{|x - y|^3}\, dV(y). \tag{7}$$

Естественна мысль внести операцию дифференцирования под интеграл. Проанализируем, возможно ли такое, и если да, то что мы в результате получим? Достаточным условием возможности внесения производной под интеграл является наличие интегрируемой мажоранты у производной. Однако нетрудно понять, например найдя производную подынтегральной функции, что получается неинтегрируемая особенность, так что обеспечение интегрируемой мажоранты проблематично. Более того, если бы мы внесли производную внутрь и просуммировали, то получили бы дивергенцию поля точечного заряда, а это нуль, что неправдоподобно, и все потому, что внесение производной внутрь интеграла не было законным.

Тем не менее внутрь-то мы производную внесем, но посадим ее на функцию ρ, предварительно заменив переменные. Положим $x-y=z$, $y=x-z$, область Ω перейдет в некоторую ограниченную область Ω' в $\mathbb{R}^3$, и в результате правая часть в (7) запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\int\limits_{\Omega'}\frac{\rho(x-z)z^i}{|z|^3}\,dV(z)=\int\limits_{\Omega'}\frac{\partial\rho}{\partial x^i}(x-z)\frac{z^i}{|z|^3}\,dV(z).$$

Законность проделанной операции мотивируется тем, что

$$\left|\frac{\partial\rho}{\partial x^i}(x-z)\frac{z^i}{|z|^3}\right|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|z|^2},$$

а последняя особенность уже интегрируема в $\mathbb{R}^3$.

Возьмем шар $B=B(0,r)$, лежащий в области интегрирования, и применим первую формулу Грина в области $\Omega'\setminus B(0,r)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}E(x)&=\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{\Omega'}\frac{\partial\rho}{\partial x^i}(x-z)\frac{z^i}{|z|^3}\,dV(z)\\&=\int\limits_{\Omega'}\operatorname{grad}_x\rho(x-z)\cdot\operatorname{grad}\frac{-1}{|z|}\,dV(z)=\int\limits_{\Omega'\setminus B}+\int\limits_{B}\\&=\int\limits_{\partial\Omega'}\rho(x-z)\frac{\partial}{\partial n_z}\frac{-1}{|z|}\,dS(z)-\int\limits_{\partial B}\rho(x-z)\frac{\partial}{\partial n_z}\frac{-1}{|z|}\,dS(z)\\&-\int\limits_{\Omega'\setminus B}\rho(x-z)\Delta\frac{-1}{|z|}\,dV(z)+\int\limits_{B}\operatorname{grad}\rho(x-z)\cdot\operatorname{grad}\frac{-1}{|z|}\,dV(z).\end{aligned}$$

Первый интеграл равен нулю, поскольку интегрирование идет по границе области Ω', а по предположению к этому моменту функция ρ уже равна нулю. Во втором интеграле нормальная производная легко находится и будет равна $\dfrac{-1}{r^2}$. В третьем интеграле есть применение оператора Лапласа к функции $\dfrac{-1}{|z|}$, что равно нулю. В итоге получим выражение

$$\frac{4\pi r^2}{r^2}\rho(\xi) + \int\limits_B \operatorname{grad}\rho(x-z)\cdot\operatorname{grad}\frac{-1}{|z|}\,dV(z),$$

где $\xi \in S(x,r)$. Последний интеграл устремится к нулю при $r \to 0$, поскольку $\operatorname{grad}\rho(x-z)$ есть функция ограниченная, особенность $\operatorname{grad}\dfrac{-1}{|z|}$ интегрируема, а область интегрирования стягивается в точку, т. е. ее мера исчезает, и вместе с этим весь интеграл в пределе даст нуль. Наконец, $\rho(\xi)$ в пределе даст $\rho(x)$, и тем самым получим требуемое.

Теорема доказана.

Глава 8. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Определение поточечной и равномерной сходимостей функциональной последовательности. Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, заданных на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$. Фиксировав $x \in X$, получаем числовую последовательность $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Если для любого $x \in X$ эта числовая последовательность сходится, то возникает новая функция

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in X,$$

и говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *поточечно на множестве* X.

Обратим внимание на то, что при поточечной сходимость скорость сходимости может зависеть от выбора точки x. Запишем факт сходимости, используя определение предела последовательности: $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ в каждой точке $x \in X$ означает, что

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon, x)\ \forall n \geqslant n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ *сходится к функции* f *равномерно на множестве* X, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Равномерную сходимость последовательности f_n к f обозначают через $f_n \rightrightarrows f$.

Разница между поточечной и равномерной сходимостями в том, что изменилось местоположение квантора $\forall x \in X$. При поточечной сходимости требуемый номер n_0 зависит, вообще говоря, от ε и от x, а при равномерной его можно выбрать так, чтобы он подходил в равной мере для всех точек данного множества.

Нетрудно понять, что из равномерной сходимости последовательности функций следует ее поточечная сходимость, разумеется, к тому же пределу.

Пример. Последовательность $f_n(x) = x^n$ на отрезке $[0,1]$ поточечно сходится к функции, равной нулю на $[0,1)$ и единице при $x=1$. Ясно, что

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & \text{при } x \neq 1 \\ 0 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Можно ли здесь при заданном $\varepsilon > 0$ подобрать номер n_0 так, что $|x^n| < \varepsilon$ для любого $x \in [0,1]$? Возможность такого выбора, очевидно, равносильна возможности выбора номера для $\sup\limits_{x\in[0,1]} x^n$. Но эта точная верхняя граница равна единице, и так как к ней можно сколь угодно близко подойти значениями нашей функции, подобрать требуемый номер невозможно. Тем самым здесь равномерной сходимости нет.

Пример 2. Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Она поточечно сходится к нулю. Эта сходимость равномерна, поскольку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

и так как последовательность точных границ разности сходится к нулю, сходимость данной функциональной последовательности равномерна.

Последовательность производных функций этой последовательности: $f_n'(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$ также сходится к тождественно нулевой функции равномерно. Как будет отмечено ниже, в этом случае безразлично, сначала ли мы переходим к пределу, а затем берем производную от предельной функции, или же сначала берем производную от каждой из функций последовательности, а затем переходим к пределу.

Пример 3. Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Она поточечно сходится к нулю. Эта сходимость равномерна, поскольку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0.$$

Однако последовательность $f_n'(x) = \cos nx$ производных на всем множестве $\mathbb{R}$ предела не имеет, и здесь нельзя поменять местами предельный переход и дифференцирование.

Теорема 1 (о равномерном пределе последовательности непрерывных функций). *Пусть последовательность $f_n(x)$ непрерывных на некотором множестве X функций сходится равномерно к функции $f(x)$. Тогда f непрерывна на X.*

Доказательство. В принципе, множество X может быть произвольным, но для содержательности доказательства предположим, что у множества X не все точки изолированные. Пусть $x \in X$ — предельная точка множества X. Покажем, что $f(y) \to f(x)$ при $y \to x$.

Дано. Согласно условию каждая из функций f_n непрерывна в точке x, т. е.

$$\forall n_1 \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon_1 > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall y \in X \quad |x - y| < \delta_1 \to |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)| < \varepsilon_1. \tag{1}$$

Далее, последовательность f_n равномерно сходится к f, т. е.

$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_2\ \forall z \in X \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon_2. \tag{2}$$

Надо. Обеспечить утверждение

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X \quad |x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Надо оценить разность $|f(x) - f(y)|$. При этом можно для каждого фиксированного n оценить соответствующую разность и в каждой точке — разность между значением предельной функции и последовательностью значений функций в данной точке. Имеем

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Взяв в (2) $\varepsilon_2 = \varepsilon/3$, найдем номер n_2, для которого $|f_{n_2}(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ для любого $z \in X$. Теперь с фиксированным n_2 и $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$ из соотношения (1) получаем δ_1 такое, что $|f_{n_2}(x) - f_{n_2}(y)| < \varepsilon/3$. Наконец, полагаем $\delta = \delta_1$, и нетрудно заметить, что так выбранное δ нам подходит.

Определение равномерной нормы. Для функции $f \in C(K)$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, величину

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

называют *равномерной нормой функции* f.

Замечание 1. Равномерная норма определена, т. е. конечна, для всех $f \in C(K)$, потому что непрерывная функция на компактном множестве ограничена. В принципе, равномерную норму можно определить на векторном пространстве всех ограниченных на данном множестве функций.

Замечание 2. Нетрудно убедиться в том, что отображение, сопоставляющее каждой $f \in C(K)$ число $\|f\|$, удовлетворяет всем условиям нормы:

1) $\|f\| \geqslant 0$, и $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда f — тождественно нулевая функция;

2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $f \in C(K)$;

3) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ для любых $f, g \in C(K)$.

Замечание 3. Равномерная норма естественна для $C(K)$ в том смысле, что для последовательности непрерывных функций сходимость $\|f_n - f\| \to 0$, равносильная равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$, не выводит результат за пределы пространства непрерывных функций, как было доказано в теореме 1. Вторая причина в том, что нормированное пространство непрерывных функций с равномерной нормой полно по этой норме. Полнота нормированного пространства связана с выполнением критерия Коши для сходимости в этом пространстве. Последовательность $f_n \in C(K)$ называют *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geqslant n_0 \quad \|f_m - f_n\| < \varepsilon.$$

Нормированное пространство называют *полным* (или *банаховым пространством*), если всякая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел в этом нормированном пространстве.

У каждого векторного пространства есть своя естественная норма, с которой его целесообразно рассматривать. С векторными пространствами $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ связана норма «модуль числа», с векторным пространством непрерывных на компакте функций — равномерная норма.

§ 2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение поточечной и равномерной сходимостей функционального ряда. Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, заданных на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$. Если для любого $x \in X$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится, то говорят, что этот ряд *сходится поточечно на* X. Положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{1}$$

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится равномерно на* X, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

или, что равносильно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon,$$

или

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k - f \right\| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (о непрерывности суммы ряда). *Пусть* $f_n : X \to \mathbb{R}$ — *последовательность функций на* X *такая, что*

(1) *каждая из функций* f_n *непрерывна на* X*;*

(2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно к* $f(x)$ *на* X.

Тогда функция $f(x)$ *непрерывна на* X.

Доказательство состоит в применении теоремы 1 к последовательности частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Теорема 3 (о дифференцируемости функционального ряда). *Пусть*

(1) *функции* $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы;*

(2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится поточечно на* (a, b)*;*

(3) *ряд из производных* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *сходится равномерно на любом замкнутом промежутке, содержащемся в* (a, b).

Тогда сумма ряда $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *дифференцируема и имеет место равенство*

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x). \tag{2}$$

Замечание 1. Условие равномерной сходимости ряда из производных довольно сильное, и относительно самого ряда можно предполагать, чтобы он сходился хотя бы в одной точке интервала. Однако мы не будем гоняться за редко требуемой общностью и ограничимся чаще всего встречающимися условиями.

Замечание 2. В теореме 2 можно рассматривать функции многих переменных и формулировать результат для частных производных.

Теорема 4 (об интегрировании функционального ряда). *Пусть*
(1) $f_n \in \mathscr{R}([a,b])$;
(2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$.
Тогда сумма ряда интегрируема по Риману и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{3}$$

Обратим внимание на то, что в теореме 4 предполагается равномерная сходимость сразу на всем отрезке.

Примеры применения сформулированных теорем будут даны в следующем параграфе при рассмотрении степенных рядов.

Для обоснования равномерной сходимости функциональных рядов чаще всего применяется мажорантный признак Вейерштрасса, основанный на критерии Коши.

Теорема 5 (критерий Коши сходимости функционального ряда). *Пусть* $f_n : X \to \mathbb{R}$ — *последовательность функций на* $X \subset \mathbb{R}$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* X *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geqslant n \geqslant n_0 \quad \left\| \sum_{k=n}^{m} f_k \right\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Его доказательство состоит в переформулировке критерия Коши равномерной сходимости последовательности функций применительно к последовательности частичных сумм ряда.

Теорема 6 (мажорантный признак Вейерштрасса). *Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ — последовательность функций на $X \subset \mathbb{R}$. Предположим, что*

(1) *существует такая числовая последовательность c_n, что*

$$\sup_{x \in X} |f_n(x)| \leqslant c_n;$$

(2) *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на X.

Доказательство. Дано. Во-первых, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in X} |f_n(x)| \leqslant c_n,$$

а во-вторых, числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, стало быть, по критерию Коши

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall m \geqslant n \geqslant n_1 \quad \left| \sum_{k=n}^{m} c_k \right| < \varepsilon_1. \tag{5}$$

Надо установить выполнение условия Коши для функционального ряда, т. е. что

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall m \geqslant n \geqslant n_1 \quad \left| \sup_{x \in X} \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon. \tag{6}$$

При заданном $\varepsilon > 0$ обращаемся к (5), полагаем там $\varepsilon_1 = \varepsilon$, берем гарантированный высказыванием (5) номер n_1 и убеждаемся, что можно принять $n = n_1$. Это следует из того, что

$$\sup_{x \in X} \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{m} c_k.$$

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. Он сходится поточечно при любом $x \in \mathbb{R}$, что нетрудно установить например по признаку Даламбера. Будет ли этот ряд сходиться равномерно на всем $\mathbb{R}$? Скорее всего, нет. Конечно, факториал подавляет степенную функцию, но только при каждом фиксированном x. Однако если после выбора номера позволить меняться аргументу x, то ожидать сколь угодно малых значений не следует: за счет выбора x общий член ряда при фиксированном n можно сделать большим. Для подтверждения гипотезы отсутствия равномерной сходимости этого ряда можно проверить отрицание условия Коши, т. е. утверждение

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists m \geqslant n_0 \ \exists n \geqslant n_0 \ \exists x \in \mathbb{R} \quad \left| \sum_{k=n}^{m} \frac{|x|^k}{k!} \right| \geqslant \varepsilon. \qquad (7)$$

За счет чего сумму в (7) будем делать большой? За счет величины x. Нетрудно понять, что выбором x можно сделать большим даже один член из суммы, стало быть, вместо суммы можно взять один член ряда, например $\dfrac{|x|^{n_0}}{n_0!}$, и можно подобрать x так, что, допустим, это выражение будет не меньше чем единица, и в качестве требуемого ε можно взять единицу.

Обратившись к теореме о дифференцировании функционального ряда, заметим, что в ее условиях предполагается равномерная сходимость ряда из производных на любом ограниченном отрезке, содержащемся в области сходимости ряда. А это свойство уже есть, так как для ряда из производных на ограниченном отрезке есть сходящийся числовой ряд, общий член которого ограничивает сверху общий член рассматриваемого ряда: достаточно взять ряд из значений составляющих ряд функций на одном из концов отрезка. Тем самым сумма ряда есть функция, дифференцируемая в каждой точке из $\mathbb{R}$, и ее производная равна сумме ряда из производных.

Вспомним, что сумма этого ряда равна e^x.

§ 3. Степенные ряды

Определение степенного ряда. Функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка и $z \in \mathbb{C}$ — произвольная точка, называют *степенным рядом.* Сдвигом начала координат общий случай сводится к случаю ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Тем самым всегда можно считать, что рассматривается степенной ряд с нулем в качестве начальной точки.

Во многих конкретных случаях рассматриваются степенные ряда вещественной переменной, но есть серьезные причины рассматривать сходимость степенных рядов именно для комплексных чисел.

Определение верхнего предела числовой последовательности. *Верхним пределом числовой последовательности* x_n называют наибольший из ее частичных пределов. Верхний предел последовательности x_n обозначают через $\overline{\lim}\, x_n$.

Если последовательность имеет предел, то все ее частичные пределы равны пределу последовательности. В общем случае может оказаться, что у последовательности предела нет, но можно доказать, что среди всех частичных пределов последовательности всегда есть наибольший, т. е. у каждой последовательности есть ее верхний предел.

Теорема 7 (о сходимости степенного ряда). *Для степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *определим число* $r = \dfrac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|c_n|}}$, *называемое радиусом сходимости* (*если* $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, *то полагают* $r = \infty$, *а если* $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, *то* $r = 0$).

(1) *Если* $r = 0$, *то ряд сходится только при* $z = 0$. *Если* $r > 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *сходится для любого* z *такого, что* $|z| < r$.

(2) *Если* $r < \infty$, *то для любого* z *такого, что* $|z| > r$, *ряд расходится.*

(3) *При* $r > 0$ *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *сходится равномерно в любом замкнутом круге* $|z| \leqslant \rho$, *где* $0 < \rho < r$.

Доказательство. Шаг 1. Для простоты будем предполагать, что существует $\lim \sqrt[n]{|c_n|}$. Пусть $r > 0$ и $z \in \mathbb{C}$ таково, что $|z| < r$, т. е. $\dfrac{|z|}{r} < 1$. Возьмем число q такое, что $\dfrac{|z|}{r} < q < 1$. Тогда $\lim \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| < q$. По определению предела существует такое n_0, что для любого $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| < q$, т. е. $|c_n z^n| < q^n$. Так как $0 < q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, и по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится и даже абсолютно.

Шаг 2 (расходимость). Пусть $z \in \mathbb{C}$ таково, что $|z| > 1$, т. е.

$\dfrac{|z|}{r} > 1$. Тогда $\lim \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| > 1$. Тем самым существует такое n_0, что для любого $n \geqslant n_0$ имеем $\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z| > 1$, или $|c_n z^n| > 1$, и оказывается, что общий член нашего ряда не стремится к нулю, т. е. не выполнено необходимое условие сходимости ряда, а значит, ряд расходится.

Шаг 3 (равномерная сходимость). Возьмем ρ так, что $0 < \rho < r$. Согласно шагу 1 ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \rho^n|$ сходится. Поскольку для любого z такого, что $|z| < \rho$, выполнено неравенство $|c_n z^n| \leqslant |c_n \rho^n|$, получили ряд, выступающий в качестве мажорантного для нашего степенного ряда. По признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится равномерно в круге $|z| \leqslant \rho$.

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Ясно, что его радиус сходимости равен единице. Так же легко понять, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \tag{1}$$

Но последнее равенство выполнено только для $|z| < 1$. Возникает двойственность: с одной стороны, левая часть в (1) определена только для $|z| < 1$, а с другой — правая часть определена для любого комплексного числа, кроме точки 1. Причиной этому явлению служит точка, в которую «упирается» сходимость степенного ряда, и если есть хоть одна точка на круге сходимости, в которую упирается сходимость степенного ряда, то за пределы этого круга равенство между суммой степенного ряда и той функцией, к которой он сходился внутри круга сходимости, продолжить невозможно.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$. Нетрудно показать, что его сумма равна $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$. Ясно, что его радиус сходимости равен единице. Для вещественных z функция $f(z)$ определена всюду на $\mathbb{R}$. Вместе с тем сумма ряда существует только для $|z| < 1$, и может показаться не совсем понятным, почему правая часть на вещественной прямой есть всегда, а левая — только на $(-1, 1)$. Объяснением этому эффекту служит расположение особых точек функции $f(z)$ —

это точки $\pm i$ комплексной плоскости, именно в них упирается круг сходимости, за который сходимость ряда не распространяется.

Теорема 8 (о дифференцировании степенного ряда). *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *— степенной ряд с радиусом сходимости* $r > 0$.

(1) *Сумма ряда* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *— аналитическая в круге* $|z| < r$ *функция.*

(2) *Ряд можно дифференцировать почленно:*

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}, \quad |z| < r. \tag{2}$$

Доказательство. Применим пока формально оператор $\dfrac{\partial}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+iy)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x+iy)^{n-1}.$$

Точно так же можно продифференцировать по y:

$$\frac{\partial f(x+iy)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+iy)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n i (x+iy)^{n-1}.$$

Из полученных результатов составим оператор $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+iy)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (1 + i\cdot i)(x+iy)^{n-1} = 0.$$

Стало быть, выполнены условия Коши — Римана и сумма ряда — функция аналитическая. Значит,

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n n (1 - i\cdot i)(x+iy)^{n-1},$$

и получаем формулу (2).

Шаг 2 (обоснование законности почленного дифференцирования). Возьмем z такое, что $|z| < r$, и число $\rho \in (|z|, r)$. В круге

$|z| \leqslant \rho$ есть равномерная сходимость исходного ряда. Для доказательства равномерной сходимости в этом круге ряда из производных выпишем этот ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)z^n.$$

Это тоже степенной ряд, и можно утверждать, что он сходится равномерно в любом круге, строго содержащемся в круге сходимости. Осталось показать, что у ряда из производных радиус круга сходимости такой же, как у исходного ряда. Это легко следует из того, что $\lim \sqrt[n]{n+1} = 1$. Действительно, имеем

$$\sqrt[n]{|c_{n+1}|(n+1)} = |c_{n+1}|^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{1}{n}} = (|c_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}(n+1)^{\frac{1}{n}}$$
$$e^{(1+\frac{1}{n})\ln(|c_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})}e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)} = \lim |c_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 9 (об интегрировании степенного ряда). *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *— степенной ряд с радиусом сходимости* $r > 0$ *и* z_0 *— какая-либо точка из круга сходимости. Тогда*

$$\int_0^{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^{z_0} z^n \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z_0^{n+1}}{n+1}.$$

Иначе говоря, степенной ряд можно интегрировать почленно.

Доказательство. Возьмем число ρ так, что $|z_0| < \rho < r$. Пусть $\zeta(t) = z_0 t$, $t \in [0,1]$, — параметризация отрезка с началом в нуле и концом в z_0. Тогда

$$\int_0^{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \, dz = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\zeta(t))^n \underbrace{\zeta'(t)}_{z_0} \, dt. \tag{3}$$

Ряд в правой части равенства (3) сходится равномерно на $[0,1]$ ввиду того, что исходный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится при $|z| \leqslant \rho$, а функция $\zeta'(t) = z_0$ от t не зависит, поэтому на сходимость не влияет. Осталось воспользоваться теоремой 4.

Теорема доказана.

Пример 1 (интегральный синус). По определению интегральный синус — это функция

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt. \tag{4}$$

Известно, что первообразная в правой части (4) не находится в классе элементарных функций. Тем не менее встает вопрос о нахождении значений этой функции. Можно, конечно, воспользоваться методами численного интегрирования, но можно поступить иначе. Представим синус в виде ряда и запишем подынтегральную функцию так:

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Нетрудно найти, что радиус сходимости этого ряда равен $+\infty$. Следовательно, ряд сходится равномерно на любом ограниченном промежутке $|t| \leqslant \rho < \infty$. В результате его почленного интегрирования получаем

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Получили представление интегрального синуса в виде ряда. Кстати, при малых значениях аргумента можно получить вполне приемлемое приближение.

Пример 2 (функция Бесселя). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - \nu^2) u(x) = 0. \tag{5}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка. Число ν, в принципе, может быть произвольным, но для простоты будем считать, что $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Заметим, что это уравнение с переменными коэффициентами. Для таких уравнений универсального метода их решения нет, и для каждого такого уравнения приходится придумывать что-то свое. Это уравнение возникает во многих приложениях, в частности, при нахождении решений уравнения Лапласа

$$\Delta f(r, \varphi, z) = 0 \tag{6}$$

в цилиндрических координатах, когда ищутся решения вида

$$f(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z). \tag{7}$$

С какой целью ищут решения такого вида вы узнаете немного позже из физики. Здесь только отметим, что если подставить (7) в уравнение (6) и записать оператор Лапласа в полярных координатах, то через некоторое время для функции R получится уравнение вида (5).

Для простоты разберем случай $\nu = 0$ и получим функцию Бесселя нулевого порядка. В таком случае уравнение (5) принимает вид

$$xu''(x) + u'(x) + xu(x) = 0. \tag{8}$$

Его можно рассматривать на всей числовой прямой. Будем искать решение в виде ряда

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9}$$

(мы используем вещественный аргумент). Подставим (9) в (5) и пока формально продифференцируем. Получим

$$x\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{10}$$

Равенство (10) должно выполняться при всех x, а это равносильно обращению в нуль коэффициентов при всех степенях. Получим

$$\begin{array}{lrcr}
x^0: & a_1 \cdot 1 = 0 & \to & a_1 = 0 \\
x^1: & a_2 \cdot 2 \cdot (2-1) + a^2 \cdot 2 + a_0 = 0 & \to & a_2 \cdot 2^2 + a_0 = 0 \\
x^2: & a_3 \cdot 3^2 + a_1 = 0 & \to & a_3 = 0 \\
\end{array}$$

....

В итоге все коэффициенты при нечетных степенях равны нулю, а для четных n приходим к рекуррентному соотношению

$$a_{n+2}(n+2)^2 + a_n = 0.$$

При этом условий на коэффициент a_0 нет и его можно выбрать произвольно. Выберем нормировку так, что $a_0 = 1$. Тогда

$$a_2 = \frac{-1}{a^2}, \quad a_4 = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}, \ldots, \; a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(n!)^2 \cdot 2^n}, \ldots.$$

В итоге получается ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 \cdot 2^n}. \tag{11}$$

Радиус сходимости равен бесконечности. Сумму ряда (11) называют *функцией Бесселя нулевого порядка* и обозначают через $J_0(x)$. Ряд (11) можно рассматривать и на комплексной плоскости, так что функция Бесселя может быть определена на $\mathbb{C}$. Кроме функции Бесселя есть много других специальных функций.

Определение Ряда Тейлора. Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция в окрестности некоторой точки x_0. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{12}$$

называют *рядом Тейлора функции* f.

У ряда (12), как у любого степенного ряда, есть круг сходимости, и если его радиус больше нуля, то внутри круга сходимости ряд сходится. Однако даже если ряд сходится, еще не факт, что он сходится к данной функции. Например, для функции e^{-1/x^2} ряд Тейлора с нулевой начальной точкой состоит только из нулей (так как все производные этой функции в нуле равны нулю), так что сходится всюду, однако сама функция не всегда равна нулю (см. замечание в конце § 2 гл. 4). Зачастую ряд Тейлора сходится к самой функции. По крайней мере так будет для всех рассмотренных выше элементарных функций.

Теорема 10 (о рядах Тейлора элементарных функций). *Ряды Тейлора элементарных функций* e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\mu$ *с нулевой начальной точкой сходятся к этим функциям.*

Доказательство. Для одной из этих функций, а именно для e^x, это утверждение было показано в замечании в конце § 2 гл. 4, для тригонометрических делается аналогично, а для логарифма и бинома обоснование потруднее и проводится с привлечением остатка в интегральной форме или в форме Коши.

Итак, указанные в теореме 10 функции, ранее определенные каким-то способом, допускают представление в виде степенного ряда Тейлора. Но ряд можно рассматривать и на комплексной плоскости. Стало быть, элементарные функции можно распространить и на $\mathbb{C}$. А именно по определению для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\ln(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^k}{k}, \quad |z|<1,$$

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad z\in\mathbb{C},$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad z\in\mathbb{C},$$

$$(1+z)^{\mu}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{k!}z^k, \quad |z|<1.$$

Формула Эйлера. Если в качестве аргумента в экспоненту подставить число iz, то получится

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{iz}{1!}-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\dots.$$

Собирая отдельно члены с четными и с нечетными номерами, можно заметить, что ряд представится в виде суммы

$$\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)=\cos z+i\sin z$$

для любого комплексного z. Получили формулу

$$\boxed{e^{iz}=\cos z+i\sin z}, \quad z\in\mathbb{C},$$

называемую *формулой Эйлера.*

Тем самым функции, которые появлялись разными путями, связаны воедино формулой Эйлера. Она символизирует единство алгебры, анализа и геометрии и вообще всей математики, и на физике вы тоже ей будете пользоваться. Поэтому каждый раз, когда вы будете писать e^{iz} (или $e^{i\omega t}$), вспоминайте анализ и помните, что без знания математики нельзя понять физику.

Всё.

Оглавление

Основы математического анализа для студентов-физиков. Лекции.
7. Анализ на многообразиях (окончание)
8. Функциональные последовательности и ряды

Дятлов Глеб Владимирович

Подписано в печать 26.05.2015. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3.8. Уч.-изд. л. 3.8. Тираж 200 экз. Заказ № 78.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.