

Теория функций комплексного переменного (2011/12 ФФ НГУ)

Лектор: к.ф.-м.н. С.Г.Бугаева

Вопросы к экзамену

1. Вопросы, которые войдут в билеты. Они требуют доказательств или выводов за исключением особо оговоренных случаев.

Сфера Римана. Стереографическая проекция, ее формулы и свойства. Бесконечно удалённая точка. Расширенная комплексная плоскость.

Дифференцирование функций комплексного переменного. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Теорема об обратной функции (без доказательства). Понятие конформного отображения.

Сопряженные гармонические функции. Гармоничность действительной и мнимой частей аналитической функции. Существование для заданной гармонической функции сопряженной к ней.

Интеграл функции комплексного переменного по ориентированной кривой. Корректность определения. Общие свойства интеграла функции комплексного переменного по ориентированной кривой, связь с криволинейными интегралами.

Интегральные теоремы Коши для односвязной и конечносвязной области. Сформулировать и доказать «слабый» вариант теоремы Коши.

Интегральная формула Коши.

Интеграл типа Коши, интегральные представления для производных, бесконечная дифференцируемость аналитической функции.

Первообразная аналитической функции. Вспомогательная теорема. Формула Ньютона — Лейбница. Теорема Мореры.

Теорема о среднем. Принцип максимума модуля аналитической функции.

Первая теорема Вейерштрасса о рядах аналитических функций.

Вторая теорема Вейерштрасса о рядах аналитических функций.

Степенные ряды: первая теорема Абеля (без доказательства), круг и радиус сходимости, аналитичность суммы степенного ряда.

Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.

Внутренняя теорема единственности.

Теорема о разложении аналитической в кольце функции в ряд Лорана. Главная и правильная части ряда Лорана.

Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема Лиувилля.

Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Сформулировать теоремы о строении ряда Лорана в окрестности устранимой особой точки, полюса и существенно особой точки. Доказать теорему о строении ряда Лорана в окрестности устранимой особой точки.

Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Сформулировать теоремы о строении ряда Лорана в окрестности устранимой особой точки, полюса и существенно особой точки. Доказать теорему о строении ряда Лорана в окрестности полюса.

Вычет в конечной особой точке. Формулы для нахождения вычета в полюсе. Основная теорема теории вычетов.

Вычет в бесконечно удалённой точке. Теорема о сумме вычетов.

Интегрирование рационально-тригонометрических функций. Интегрирование рациональных функций.

Преобразование Фурье рациональной функции. Лемма Жордана.

Интегрирование рациональных выражений со степенным «весом». Вычисление интегралов с логарифмическими особенностями.

Теорема о «логарифмическом вычете». Принцип аргумента сформулировать.

Принцип аргумента. Теорема Руше.

Теорема Руше. Применение ее для доказательства основной теоремы алгебры.

Линейные и дробно-линейные функции. Конформность этих функций. Консерватизм углов.

Теорема о существовании и единственности дробно-линейного отображения. Инвариантность ангармонического отношения при дробно-линейных отображениях.

Круговое свойство для дробно-линейных отображений. Симметрия относительно окружности.

Аналитическая зависимость интеграла от параметра (без доказательства). Оригиналы и изображения. Аналитичность изображения.

Формула обращения. Свойства преобразования Лапласа: линейность, теорема подобия, смещение изображения.

Преобразование Лапласа производных и интегралов.

Дифференцирование и интегрирование изображений. Запаздывание оригинала. Свёртка оригиналов.

Теорема Бореля об умножении изображений. Формула Дюамеля.

Асимптотические последовательности и ряды. Асимптотический нуль. Единственность асимптотического разложения. Арифметические операции с асимптотическими разложениями.

Интегрирование действительных асимптотических разложений.

Интеграл Лапласа. Вспомогательная лемма. Принцип локализации (без доказательства, только наводящие соображения). Лемма Морса (только формулировка, без доказательства). Лемма о редукции. Лемма Ватсона.

Нахождение главного члена асимптотики интеграла Лапласа в типичных случаях.

Интеграл Фурье. Асимптотика интеграла Фурье с фазовой функцией без стационарных точек.

Лемма Эрдейи.

Нахождение главного члена асимптотики интеграла Фурье с фазовой функцией с невырожденной стационарной точкой.

2. Вопросы, которые в билеты не войдут, но могут быть заданы как дополнительные. Эти вопросы следует знать на уровне определений.

Комплексные числа. Действительная и мнимая часть, модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Операции над комплексными числами. Предел последовательности комплексных чисел. Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Многозначные функции и точки ветвления, ветви функций $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$. Понятие римановой поверхности. Нули аналитической функции. Бесконечно удалённая особая точка. Вычисление интегралов в смысле главного значения (без вывода формул).

3. Некоторые лекционные примеры могут быть использованы как задачи в практических билетах.

4. Некоторые формулировки определений и утверждений, а также формулы можно посмотреть на лекционных слайдах.

5. Состав вопросов в п.1 может измениться.