Мат. анализ

Ульянов

Обратить внимание на геометрию.

Важно: научиться решать задачи!

Система оценок: оценка = все задачи + устный экз.

Задачи: дз. + месячные + Демидович

Глава 0. Стартовая позиция

0.1 Вещественные числа → к десятичным дробям.

Мат. анализ – теория функций от 1, 2, 3 .. переменных

Числовые множества и системы:

мн-во

$\mathbb{N}$ – натуральные $= \{0; 1; 2; 3 \dots\}$

$\mathbb{Z}$ – целые числа $= \{\dots -1; 0; 1 \dots\}$

$\mathbb{Q}$ – рациональные $= \{\frac{p}{q}\}$ ← несократимые дроби

$\mathbb{R}$ – вещественные

$\mathbb{C}$ – комплексные

$\in$ – элемент в мн-ве

$\subseteq$ – подмножество в мн-ве

Промежуток

$[a; b] = \langle x = \mathbb{R} \mid a \le x \le b \rangle$ – замкнутый

$(a; b) = \underbrace{\langle x = \mathbb{R} \mid a < x < b \rangle}_{\text{условие}}$ – открытый

$[a; +\infty) = \langle x = \mathbb{R} \mid a \le x \rangle$

$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$

0.2 Функция – отображение числовых мн-в

$f(x) = x^2; e^x; \sin x; \ln x; \sqrt{x}$

$+; -; \times; \div$ – арифметические операции

Композиция: $f(g(x))$
Обратная фун-ция.
Элементарные фун-ия:

Основные: $x^{\frac{p}{q}}$; e^x; $\ln x$; $\sin x$; $\cos x$; $tg(x)$; $arctg\, x$
(не все) $\uparrow$ полином

Функция: $f: X \to \mathbb{R}(Y)$

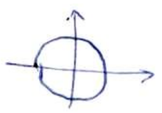
$X \subseteq \mathbb{R}$ ← подмножество

$(x \in X) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}\,(Y)$

x – прообраз y
y – образ x

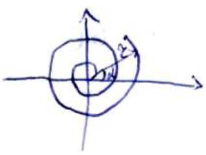
$X \to Y$ – это отображение множеств
$x \mapsto y$ – это отображение эл-ов мн-тв

Все эл-ные фун-ии непрерывны.
Хорошая функция: непрерывная.
Научиться применять → формальность.



Соотношения между ур-ми и фун-ми и графиками (не одно и то же)

$x^2 + y^2 = 1$ ← гораздо удобнее, чем $y = \pm\sqrt{1-x^2}$
функция задана неявно



$\boxed{\rho = \varphi}$ ← в полярных координатах (угол)

$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$

$\rho = \varphi \Rightarrow \begin{cases} x = \varphi \cdot \cos\varphi \\ y = \varphi \cdot \sin\varphi \end{cases}$

$(x(\varphi); y(\varphi))$ – параметрическое задание функции

Циклоида: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

Можно задавать фун-цию:
1) задана неявно
2) параметрически задана ← посмотреть

Определение функции (зав-ть, выражаемая формулой)

$f: X \to Y$ состоит из двух мн-в: обл. определения X и обл. значения Y;

и правила, сопоставляющего каждому элементу $x \in X$ элемент $y \in Y$.

Это правило обозначается:

$y = f(x)$ или

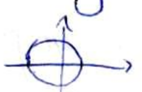
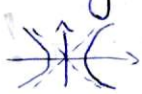
$x \mapsto f(x)$

y — образ x; x — прообраз y

<u>Уравнения ≠ функциям ≠ графику</u>

$y^2 = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$ — явно указана зав-ть y от x

1) $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 - y^2 = 1$ — уравнения, но не функции!

можно состряпать из 2 функций: $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y = \sqrt{1-x^2} \cdot (-1)$

иногда говорят, что $x^2 + y^2 = 1$ — неявн фун-ция. но для более сложных неявн нельзя „состряпать" несколько явных

2) $x(t)$; $y(t)$ — параметрически задана функция $y(x)$.

Тоже бывает несколько значений y для одного x.

Операции с фун-ми

1) $(f \underset{\div}{\overset{+}{\underset{\times}{-}}} g)(x) = f(x) + g(x)$

2) Композиция $f(g(x))$

3) Частный случай композиции: $f(\alpha x + \beta)$

постоянные

Обратные фун-ции:

$y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$

$y=tg\,x \Leftrightarrow x=arctg(y)$

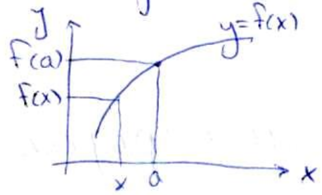
$y=x^3 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}$

можно задать обратную, элементарную

$y=x^5+x \Leftrightarrow x=?$ ← не эл-ая

0.3 Непрерывность и разрыв

Наивное опр-ие:



$x\approx a \Rightarrow f(x)\approx f(a)$

При $x \to a$ ← стремится

будет $f(x)\to f(a)$

Все элементарные фун-ции непрерывны.

даже $y=tg\,x$! (или нет)

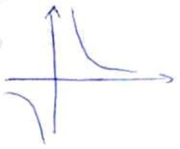
Непрерывность рассматривается на заданных в обл. определения! ← посмотреть

Предел: $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$

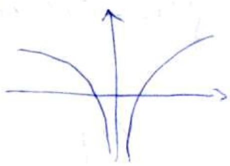
Подвох там, где разрыв (в теоремах). ← ЛЗ

Разрывы

$y=\frac{1}{x}$

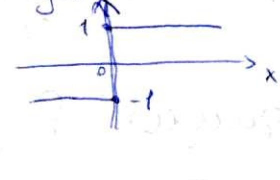


$y=\ln x^2$



$g(x)=\lim\limits_{y\to 0} f(x;y)$

$f(x,y) = arctg\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{2}{\pi}$



$sgn\,x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

Обратная функция:

$f^{-1}(x)$ – обратна к ф-ии $f(x)$, если

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

Эл-ые функции:

Ф-ия называется элементарной, если она представлена конечным числом операций из основных эл-ых ф-ий:

1) $f(x) = x^n$ ← для $n \in \mathbb{N}$
2) Рациональные функции: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ многочлены
3) 1) → обратная функция = алгебраические функции:
$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$
+ трансцендентные ф-ии:
4) показательные: a^x
5) логарифмические: $\log_a x$
6) триго-ие: $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ и им обратные
7) гиперболические: $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{cth} x$ и им обратные

Оставить можно:

$$x^{p/q}, e^x, \ln x, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \arcsin x, \operatorname{arctg} x$$

Непрерывность

Теорема: Всякая эл-ая функция непрерывна в каждой точке своей обл. опр-ия.

Схема док-ва: 1) Проверяется непрерывность основных эл-ых функций
2) Проверка непрерывности суммы, разности, произведения, частного и композиции двух непрерывных функций.
3) Сказано про деление на функцию, приближающуюся к нуль – в таких точках значение не определено

Общий способ получения новых фун-ий, разрывных (в том числе) в некоторых точках своей обл. опр-ия:

$$f(x) = \lim_{y \to b} g(x;y)$$

Типы точек разрыва

Односторонние пределы функции при $x \to a$:

при $x < a$: $f(a-0)$ – предел слева

при $x > a$: $f(a+0)$ – предел справа

Пример: $f(x) = \frac{1}{x}$ – не имеет предела при $x \to 0$

предел слева: $f(0-0) = -\infty$

предел справа: $f(0+0) = +\infty$

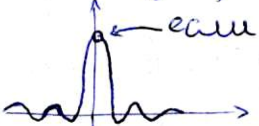
1) В точке устранимого разрыва оба одн-их предела существуют, конечны и равны ($f(a+0) = f(a-0) =$ конечные);
2) В точке разрыва первого рода оба одн-их предела существуют, конечны, но не равны ($f(a+0) \neq f(a-0)$, оба конечные);
3) В точке разрыва второго рода хотя бы один предел одн-ий бесконечен или не существует.

односторонний

Пример:

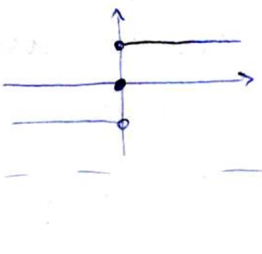
1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ – имеет устранимый разрыв в $x = 0$

$\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$

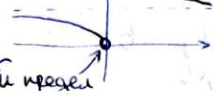


если заклеить точку разрыва, будет фун-ия $\operatorname{sinc} x$

2) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ ← вычисляет знак x



3.1) $f(x) = e^{1/x}$



конечный предел

3.2) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

не имеет предела в 0

8.09 Функция Дирихле:

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

0.4 Предпосылки возникновения анализа

Три важнейшие задачи

(А) Найти ур-ие касательной к линии;

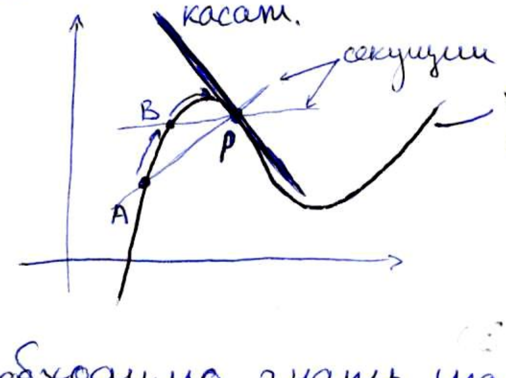
(Б) Найти площадь под графиком линии;

(В) Вычисление значений функций с высокой точностью
($\sin x, \sqrt{x}, \ln x$)

(А1) Найти min и max

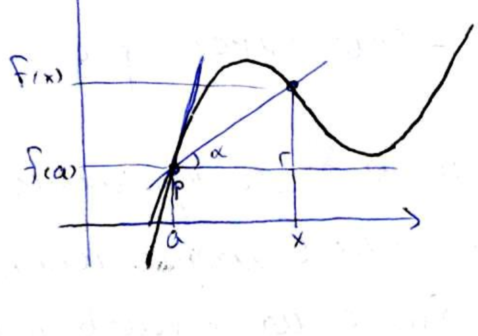
Задача о касательной (А)

Точки A, B приближаются к точке P и мы получаем касательную.



хорошая линия, но есть непрерывная

Необходимо знать угол наклона кас-ой, чтобы узнать ур-ие касательной



$$tg\alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ приращения

$$tg\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(a+\delta) - f(a)}{\delta}$$

$x - a = \delta$ — приращение

Секущая — средняя скорость $\longrightarrow$ касательная — мгновенная скорость.

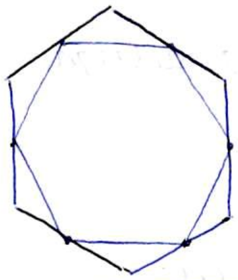
Задача о площади (Б)

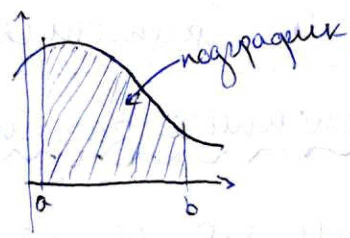
Предельный переход

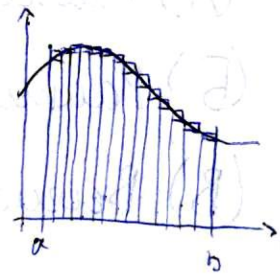
Метод неделимых

↓

бесконечно малая величина

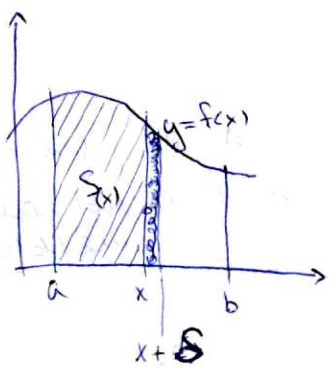






$$S = \sum_{k=a}^{b} f(x_k)\cdot\Delta x_k \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

Латинская Σ – это греческая $\int$



$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$f(x) = \lim_{\delta\to 0} \frac{S(x+\delta)-S(x)}{\delta}$$

Задача о вычислении (В)

$$a_k = const$$

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$ – степенной ряд

Интерполяция – замена функции на более простую, имеющую заданные значения в табличных точках, используется для того, чтобы посчитать значения в неизвестных точках.

Глава 1. Производные и интегралы

Определение:

$$f'(a) = \lim_{\delta\to 0}\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

1.1. Правила вычисления производных

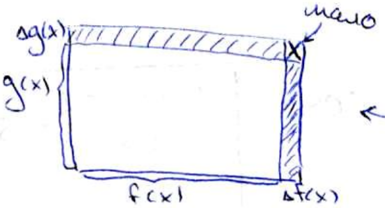
$\boxed{\delta = \Delta x}$

Теорема: производная всякой эл-ой функции эл-на.

Правила: для всех основных функций
для всех операций:

I) Арифметические операции: 1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$$



2) $(f(x)g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

3) $\left(f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\right)' = f'\cdot\frac{1}{f} + f\cdot\left(\frac{1}{f}\right)' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g}{g^2}$

5) $f'(g(x)) =$

II) Степенные: $1' = 0 \; (=(x^0)')$

$x' = 1 \qquad \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

По правилу произв-ия: $\boxed{(x^n)' = n\cdot x^{n-1}}$

x^2: $\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x \to 2x$

мало: $\Delta x \to 0$

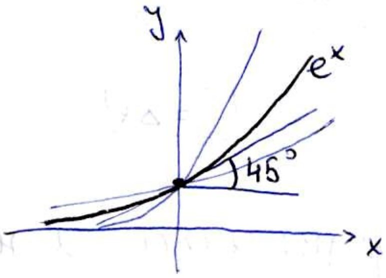
$x^{\frac{1}{2}}$: $\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x\cdot(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{\cancel{x} + \cancel{\Delta x} - \cancel{x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \xrightarrow{\text{стремится}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

умножим на сопр.

мало при $\Delta x \to 0$

$$(x^n)' = (\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n})' = x' \cdot x^{n-1} + x \cdot x' \cdot x^{n-2} + \ldots = n(\underset{1}{x'} \cdot x^{n-1}) = n \cdot x^{n-1}$$

III) Показательная: a^x



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \boxed{a^x} \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$\to \ln a$

производная a^x в 0

Для особого a: $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to 1$.

И это $a = e$ — замечательный предел:

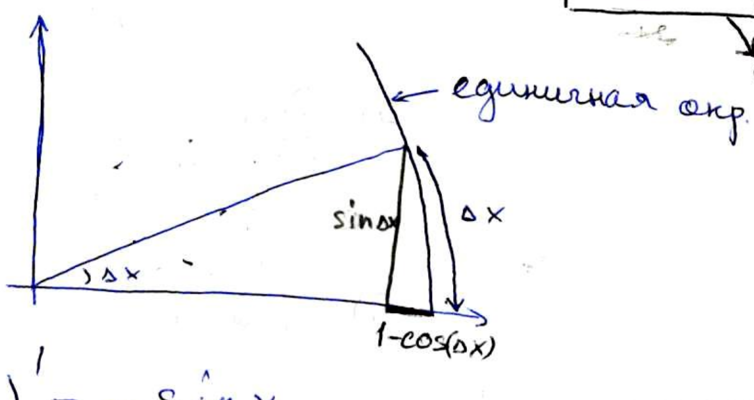
$$\boxed{\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (e^x)' = e^x \; ; \; (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

IV) Тригонометрические: $\left.\begin{aligned} &\cos(\alpha+\beta) = \ldots \\ &\sin(\alpha+\beta) = \ldots \end{aligned}\right\}$ можно получить что угодно

1) $\cos x$: $\frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \cos x \cdot \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} - \sin x \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$

2) $\sin x$: $\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}}_{\to 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{\to 1}$



$$(\cos x)' = -\sin x$$

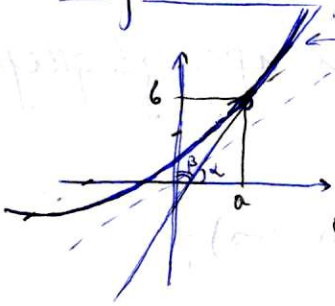
$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

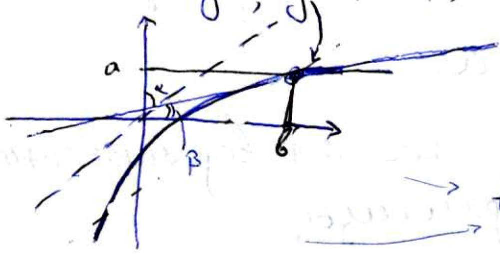
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$$

V) Обратная ф-ия

$y=f(x) \longleftrightarrow x=f(y),\ y=f^{-1}(x)$



симметрична отн. прямой $y=x$



$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}$

$b=f(a)$, $a=f^{-1}(b)$

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Пример: 1) $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$

$f^{-1}(x)=\ln x \Rightarrow \left(f^{-1}(x)\right)'=(\ln x)' = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$

2) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $f'(x)=1+\operatorname{tg}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow (\operatorname{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$

3) $f(x)=\sin x$, $(\sin x)'=\cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

VI) Композиция: $f(g(x))$:

$x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta g}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

правило цепочки

$$f(g(x))'_x = f'(g)\cdot g'(x)$$

Следств.: $x^\alpha = e^{\alpha\cdot\ln x}$

$\alpha\in\mathbb{R}$

$x>0$

$\Rightarrow (x^\alpha)' = (e^{\alpha\cdot\ln x})' = e^{\alpha\cdot\ln x}\cdot(\alpha\cdot\ln x)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

Особые случаи

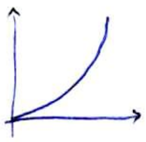
Иногда непрерывная функция не имеет производную в точке $x=a$:

1) в точке a кас-ая вертикальна (или $f'(a)=\pm\infty$);
2) a - точка границы;
3) a - точка излома;
4) a - точка с колебательным подходом;
5) a - всё вместе, в том числе точка возврата.

2) $k(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ - определено при $x\to a$ только с одной стороны - односторонняя производная.

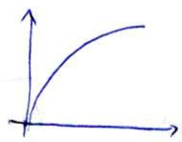
Примеры:

$f(x)=\sqrt{x^3}$



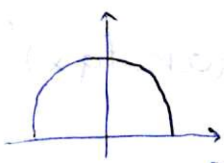
$f'(0+0)=0$
правая

$f(x)=\sqrt{x}$



$f'(0+0)=\infty$
правая

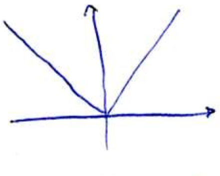
$f(x)=\sqrt{1-x^2}$



$f'(-1+0)=+\infty$; $f'(1-0)=-\infty$
правая ; левая

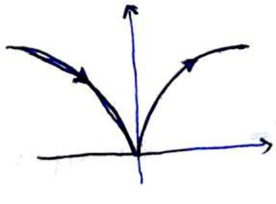
$$\operatorname{sgn} x=\frac{1}{2}\left(f'(x+0)+f'(x-0)\right)$$

3) $f(x)=|x|$



$f'(0+0)=1$
$f'(0-0)=-1$

4) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$



Александр Петрович
Ульянов

1.2. Поиск первообразных

Определение: $F(x)$ называется первообразной $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$.

Лемма: все первообразные непрер. ф-ции на промежутке, отличаются прибавлением постоянной.

Док-во: $F_1'(x)=f(x)$

$F_2'(x)=f(x)$

$$(F_1-F_2)'=0 \Rightarrow F_1-F_2=Const$$

Определение: Совокупность (беск. мн-во) всех первообразных для одной функции называется неопределённым интегралом $f(x)$.

Начальная таблица интегралов

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1} \Rightarrow \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$ ← не содержит все первообр.

$$(e^x)'=e^x \Rightarrow \int e^x dx=e^x+C$$

$$(a^x)'=a^x \Rightarrow \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0;\ a\neq 1)$$

$$(-\cos x)'=\sin x \Rightarrow \int \sin x\,dx=-\cos x+C$$

$$(\sin x)'=\cos x \Rightarrow \int\cos x\,dx=\sin x+C$$

$$(\mathrm{arctg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}\,x+C$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$$

Общие правила:

1) $(F(x)+G(x))' = F'(x) + G'(x) \Rightarrow \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2) $(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) \Rightarrow \int \alpha f(x)dx = \alpha \cdot \int f(x)+dx$

линейность: $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

3) замена переменных

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\cdot x'(t)\,dt$$

$x = x(t) \Rightarrow dx = x'(t)\cdot dt$

или

$u = u(x) \Rightarrow \int f(u)\,du = \int f(u(x))\cdot u'(x)dx$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$.

то $\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{1}{\alpha}\cdot F(\alpha x+\beta) + C$

Пример: $tg x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-(\cos x)'}{\cos x}$

$$\int tg x\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int (\sin t)^2\,dt = -\frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\cdot dt = -\frac{1}{2}\cdot t + \frac{1}{4}\int \cos 2t\cdot d(2t)$$

$x = \cos t \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sin t$

$\frac{dx}{dt} = -\sin t \Rightarrow dx = -\sin t\cdot dt$

$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$

$= -\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t = -\frac{\arccos x}{2} + \cancel{+\frac{1}{4}\sin(2\arccos x)} + \frac{1}{2}\cdot x\sqrt{1-x^2} + C$

$\sin 2t = 2\sin t\cdot\cos t =$

$= 2x\cdot\sqrt{1-x^2}$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{\arccos x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Интегрирование по частям

$$\int (fg)'\,dx = \int (f'g+fg')\,x = fg$$

$$\int \overset{df}{f'g\,dx} = fg - \int f\,\overset{dg}{g'dx}$$

$$\int u\,dV = uV - \int V\,du \quad , dV = V'\cdot dx \quad , dU = U'\cdot dx$$

Пример: 1) $\int x\cos x\,dx = x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx = x\cdot \sin x - \cos x + C$

$x\cos x\,dx = x\,d(\sin x)^{*}$

2) $\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{v} = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\cdot\ln x - x + C$

$$dU = d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

1.3 Определённый интеграл

10 сент. в день

$S = ?$

$S \approx \sum f(x_i)\,\Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$

b ← верхний предел

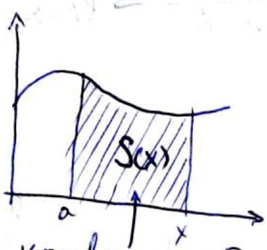
a ← нижний предел

Св-ва: 1) линейность → $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$

2) аддитивность → $S_{a\to c} = S_{a\to b} + S_{b\to c}$

3) монотонность → при $f(x)\geq 0$, $x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ при $a\leq b$

Фундаментальная теорема анализа



криволинейная трапеция

Интеграл с переменным верхним пределом:

разные x

$$S(x) = \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt$$

заменим переменную x на t

Теорема: Если функция f непрерывна на $[a;b]$, то

(1) $S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ — является первообразной для f.

(2) Для всякой первообразной F верно

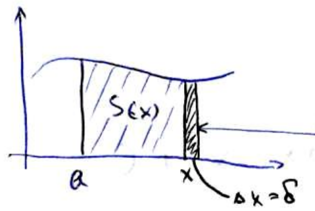
$$\boxed{F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx} = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Формула Ньютона-Лейбница

Док-во:

(1) $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{S(x+\delta)-S(x)}{\delta} = S'(x) \underbrace{= f(x)}_{\text{из картинки}}$

$S(x+\delta)-S(x)=\int_a^{x+\delta} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+\delta} f(x)\,dx = S_{\text{трапеции}}$



(2) $F(x)=S(x)+C$

$F(b)-F(a)=S(b)+\cancel{C}-(\cancel{S(a)}^{0}+\cancel{C}) = S(b)=\int_a^b f(t)\,dt$

В функцию $S(x)$ уже заложено, что она считается от a. Поэтому $S(a)=0$ — считаем от a до a, то есть 0.

ещё раз о первообр.

Степенная функция:

$\int_1^x t^\alpha\cdot\frac{dt}{\alpha}=\frac{x^\alpha-1}{\alpha}\rightarrow \ln x$ | $\int_1^x\frac{dt}{t}=\ln t\Big|_1^x=\ln x-\ln 1=\ln x$

при $\alpha\to 0$ оказывается, что предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{x^\alpha-1}{\alpha}=\ln x$

Простейшие преобразования

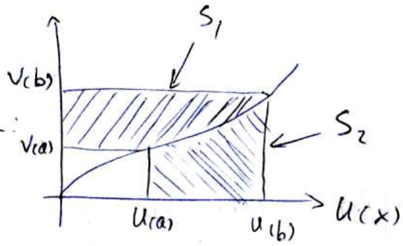
$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b$ при переходе от x к $u=u(x)$: $\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u(x))\,du(x)$

Неопр.: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\downarrow$

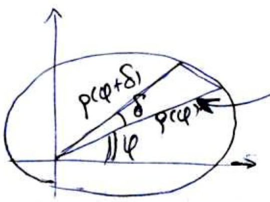
Опр.: $\underbrace{\int\limits_{v(a)}^{v(b)} u(x)\,dv(x)}_{S_1} + \underbrace{\int\limits_{u(a)}^{u(b)} v(x)\,du(x)}_{S_2} = (u(x)\,v(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$

$\left.\begin{array}{l} v=v(x)\\ u=u(x)\end{array}\right\}$ параметр. задана



14 Интегралы в геометрии и физике

Площадь в полярных координатах



почти треугольник

важно!

$S(\varphi+\delta) - S(\delta) = \frac{1}{2}\cdot\rho(\varphi+\delta)\cdot\rho(\varphi)\cdot\sin\delta + \boxed{o(\delta)}$

малая величина, которой пренебрегаем

При $\delta \to 0$: $\sin\delta \approx \delta$;

$\rho(\varphi+\delta) \approx \rho(\varphi)$:

$S(\varphi+\delta) - S(\delta) = \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\cdot\delta \Rightarrow S'(\varphi) = \frac{\rho^2(\varphi)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi$

Длина линии:

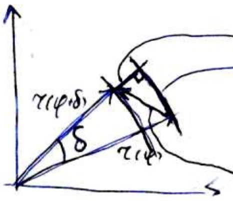
1. В декартовых коор-ах:

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$; $\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t))$, $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow L = \int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$

В 3-х мерном: $L = \int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$

2. В полярных коор-ах:

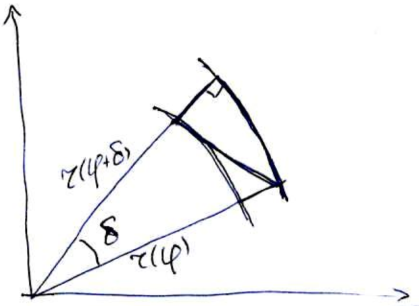


$|\rho(\varphi+\delta) - \rho(\varphi)| = |\rho'(\varphi)\delta|$

$\rho(\varphi) \approx \rho(\varphi)\cdot\sin$

$L(\varphi+\delta) - L(\varphi) = \sqrt{\rho'(\varphi)^2 + \rho(\varphi)^2}\,|\delta|$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'(\varphi)^2 + \rho(\varphi)^2}\,d\varphi$$



Фигуры вращения

$y = f(x)$

Вращаем вокруг Ox: ур-ие поверхности $y^2 + z^2 = f(x)^2$

Объём: $\underbrace{V(x+\delta) - V(x)}_{\text{малый блин}} = \pi f(x)^2 \delta + o(\delta)$

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

Боковая поверхность: $S(x+\delta) - S(x) = \dfrac{2\pi f(x)\delta}{\cos\alpha(x)} = 2\pi f(x)\delta\cdot\sqrt{1+tg^2\alpha(x)} = 2\pi f(x)\delta\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}$

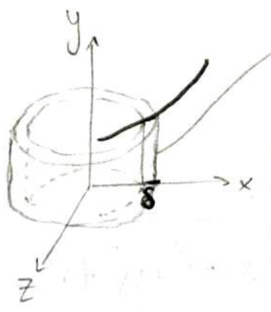
$tg\,\alpha(x) = f'(x)$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\delta$$

Вращаем вокруг Oy:

Объём: $\underbrace{V_1(x+\delta) - V_1(x)}_{} = \pi f(x)((x+\delta)^2 - x^2) = \pi f(x)(x^2 + 2x\delta + \delta^2 - x^2)$

объём между двумя цилиндрами



$= \pi f(x)(2x\delta + \delta^2) =$ пренебрегаем

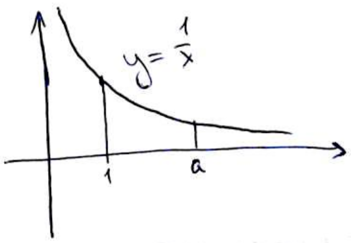
$= 2x\underset{\Delta x}{\delta}\cdot\pi f(x)$

$$V_1 = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

Александр Петрович Ульянов

1.5 Новые функции

Трансцеденнтные эл-ые ф-ции



$$\int_1^a \frac{dx}{x} = L(a)$$

$$\begin{cases} L(ab) = L(a) + L(b) \\ L(1) = 0 \end{cases}$$

$$L(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} =$$

$$= L(a) + \int_1^{b} \frac{du}{u} = L(a) + L(b)$$

$t = au$

$t = a \Leftrightarrow u = 1$

$t = ab \Leftrightarrow u = b$

$$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{b} \frac{du}{u} = \int_1^{b} \frac{dt}{t}$$

Простейшие дифференциальные ур-ия

$y = y(x)$ или $y(t)$ или $x(t)$ неизвестная ф-ция

$y' = f(x, y)$ - сложно

Можно решить: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ - ур-ие с разделяющимися переменными

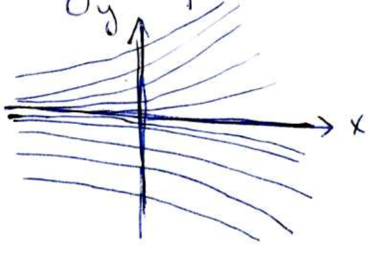
$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

Пример: $y' = ay$

$|y| = C \cdot e^{ax}$ ← предполагая, что C может быть меньше 0, мы избавляемся от модуля

$y = 0$ решение (из общего при $C = 0$)



$$\boxed{y = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

Глава 2. Комплексные числа и приложения.

2.1 Комплексные числа

$x^2+1=0$

$x^3=15x+4$ есть решение $x=4$

Алгебраическая форма записи

$z=\underset{\text{веществ.}}{a}+i\,\underset{\text{мнимая часть}}{b}$ $\qquad$ $\bar{z}=z^*=a-ib$ – сопряжённое

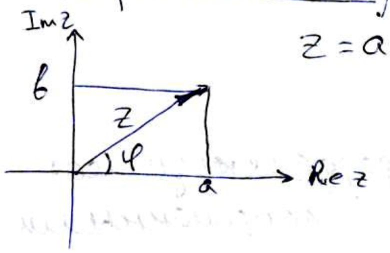
Операции:

1) $(a_1+ib_1)\pm(a_2+ib_2)=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)$

2) $(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$

3) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|}$ } останется только веществ. часть

Тригонометрическая форма записи



$z=a+ib=\underset{\rho}{|z|}(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$

$z=\rho\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi=\arg z$

$z'=i\cdot z$

$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

Комплексная экспонента

$E(t)=\cos t+i\cdot\sin t$

$\frac{d}{dt}E(t)=i(\cos t+i\sin t)=iE(t)$, $E(0)=1$

$E(t)=e^{it}\Rightarrow\boxed{e^{it}=\cos t+i\sin t}\Rightarrow e^{i\pi}=-1$

Формула Эйлера

$z_1\cdot z_2=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\rho_1\rho_2$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

Александр Петрович Ульянов (11)

$$\begin{cases} e^{it} = \cos t + i\cdot\sin t \\ e^{-it} = \cos t - i\cdot\sin t \end{cases}$$

$\Downarrow$

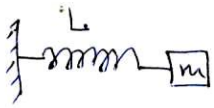
$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \qquad ch\, t = \cosh t = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \qquad sh\, t = \sinh t = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})$$

$$\lambda = \alpha + i\beta \Rightarrow e^{\lambda t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\cdot\sin(\beta t))$$

$\lambda \in \mathbb{C}$

2.2 Уравнения свободных кол-ий



$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}}$$

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

$$m\ddot{\vec{x}} + k\vec{x} = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

$$\boxed{a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0} \qquad a \neq 0$$

линейное, однородное

Лемма: если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ решение, то их линейная комб. тоже решение.

Док-во: $a(x_1 + x_2)'' + b(x_1 + x_2)' + c(x_1 + x_2) =$

$= (ax_1'' + bx_1' + cx_1) + (ax_2'' + bx_2' + cx_2) = 0$

Опыт угадывания: 1) $\ddot{x} = x$, $x_1 = e^t$, $x_2 = e^{-t}$

$x(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2$

$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

2) $\ddot{x} = -x$, $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$

$x(t) = c_1\cdot\cos t + c_2\cdot\sin t = k_1\cdot e^{it} + k_2\cdot e^{-it}$

3) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $x_1 = \cos\omega t$, $x_2 = \sin\omega t$

Значит будем искать решение с экспонентой.

$$x(t) = Re(c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{-i\omega t})$$

Характеристическое ур-ие и решение

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

Попробуем: $x = e^{\lambda t}$, $\lambda = const$

$$a\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + b\lambda \cdot e^{\lambda t} + c \cdot e^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

$\Rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ – хар-ое ур-ие для

Три случая: (1) $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(2) λ – кратный корень $\in \mathbb{R}$.

(3) $\lambda = \alpha \pm i\beta$ – компл. сопр. пара

Случай (1): $x(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$

(3): $x(t) = k_1 \cdot e^{(\alpha + i\beta)t} + k_2 \cdot e^{(\alpha - i\beta)t} \approx$

$$\approx e^{\alpha t}(C_1 \cdot \cos\beta t + C_2 \cdot \sin\beta t)$$

(2): $x_1 = e^{\lambda t}$, $x_2 = t \cdot e^{\lambda t}$ | $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda + \delta$, $\delta \to 0$

$$\frac{e^{(\lambda+\delta)t} - e^{\lambda t}}{\delta} \xrightarrow[\delta \to 0]{} t \cdot e^{\lambda t} = \frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda t})$$

Общее решение

(1): $x(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$

(2): $x(t) = e^{\lambda t}(C_1 + tC_2)$

(3): $x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cdot \cos\beta t + C_2 \cdot \sin\beta t)$

Александр Петрович Ульнов

§ 2.3 Интегрирование рациональной ф-ции

Полином (x) = многочлен $(x) = P(x)$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ = рац. функция = дробь

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \to$ какие новые ф-ции?

Ответ: никаких (условно)

Теорема (Эйлер): первообразная всякой рациональной функции с известными корнями знаменателя выражается через рац. ф-ции, $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$.

Алгебра: $P(x)$ – полином представляется произведением неприводимых (которые нельзя разложить).

Осн. теорема алгебры: каждый комплексный полином имеет комплексный корень =>

$\Rightarrow P(x) = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)$ над $\mathbb{C}$

$P(x) = a(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)\cdot(x^2+m_1x+n_1)\cdot\ldots$ над $\mathbb{R}$

С комплексными работать намного проще

Разложение дроби на простейшие в теории

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ называют правильной, если $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

степень

Неправильную дробь можно разделить с остатком:

Неправ. = полином + правильная

Пример: $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$ ← найти A и B

Способ 1: метод неопр. коэффициентов.

$$0x + 1 = \underbrace{(A+B)}_{0}x + \underbrace{(3A-2B)}_{1}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A-2B=1 \end{cases}$$

Способ 2: хитрее

1) $\cancel{(x-2)} \cdot \frac{1}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = A + \frac{x-2}{x+3} \cdot B$ ← при $x=2$

$$\frac{1}{2+3} = \boxed{\frac{1}{5} = A}$$

2) $\cancel{(x+3)} \cdot \frac{1}{(x-2)\cancel{(x+3)}} = \frac{x+3}{x-2} A + B$ ← при $x=-3$

$$\frac{1}{-3-2} = \boxed{-\frac{1}{5} = B}$$

Общий: видно, что произошло понижение степени:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{x-b}$$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \underbrace{\frac{B'}{x-b} + \frac{C'}{x-c}}$$, только если $b \neq c$

Но не всегда можно так разложить:

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ = примарной, если $Q(x)$ является степенью неприводимого

Пример: $\frac{x^2}{(x-5)^3}$

$$\frac{x^2}{(x-5)^3} = \frac{x^2-5x+5x}{(x-5)^3} = \frac{(x-5)\,x}{(x-5)^3} + \frac{5x-25+25}{(x-5)^3} = \frac{x+5}{(x-5)^2} + \frac{25}{(x-5)^3} \ ?$$ не так

$$\frac{x^2}{(x-5)^3} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{C}{(x-5)^3} = \frac{A(x-5)^2 + B(x-5) + C}{(x-5)^3}$$

$$\underbrace{1}x^2 + \underbrace{0}x + \underbrace{0} = \underbrace{(\ldots)}_{1}x^2 + \underbrace{(\ldots)}_{0}x + \underbrace{(\ldots)}_{0}\cdot 1$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ = простейшая, если $Q(x)$ — степень неприводимого $= q(x)^k$ и $\deg P(x) < \deg q(x)$

=> всякая дробь = полином + Σ простейших.

Лемма: это разложение единственно.

всякая дробь = Σ правильных + Σ полиномов ?

Лемма: правильная = Σ примарных

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{Q(x)}\cdot P(x) = P(x)\,\Sigma\frac{1}{\ldots}$$

Лемма: примарная = Σ простейших — схема Горнера

$$\frac{1}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

Разложение на практике:

$$\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

Интегрирование простейших дробей:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

Где arctg x? А он выражается через ln x!

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right)$$

$$\frac{1}{x^2+bx+c} = \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2+(c-\frac{b^2}{4})} \underset{\text{замена перемен.}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Формула понижения}}}{=} (\quad \text{ф-ция}) + (\text{коэф.}) \int \frac{dx}{(1+x^2)^{k-1}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^k} = \frac{(1+x^2)^{1-k}}{1-k} \cdot \frac{1}{2} + C, \quad k > 1$$

$$J_k = \int \frac{dx}{(1+x^2)^k} = \frac{x}{(1+x^2)^k} - \int x\, d\left(\frac{1}{(1+x^2)^k}\right) =$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^k} - \int \frac{(-k)\cdot 2(x^2+1-1)}{(1+x^2)^{k+1}}\,dx = \frac{x}{(1+x^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dx}{(1+x^2)^k} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}}\right) =$$

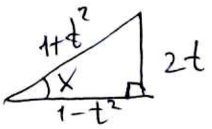
$$= \frac{x}{(1+x^2)^k} + 2k(J_k - J_{k+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{k+1} = \text{рац. ф.} + (\text{коэф.}) \cdot J_k \text{ — понижение.}$$

2.4 Рационализация интегрирования

$R(u, v)$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ $\rightsquigarrow$ рац. ф

Тригонометрия: $R(\cos x, \sin x)$



$$(1+t^2)^2 = (1-t^2)^2 + (2t)^2$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$x = 2\alpha$: $\quad \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$t = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ — универсальная подстановка

$x = 2\cdot\operatorname{arctg} t$

$dx = 2\,\dfrac{dt}{1+t^2}$

Другой способ использует чётность

3 случая: 1. $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x) \leftarrow t = \cos x$

2. $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x) \leftarrow t = \sin x$

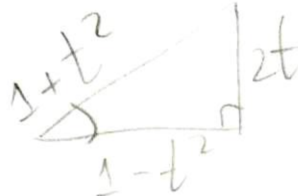
3. $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x) \leftarrow t = \operatorname{tg} x$

Пример: $\sin^3 x\,dx = -\sin^2 x \cdot d(\cos x) = -(1-\cos^2 x)\,d(\cos x) = -(1-t^2)\,dt$

$$\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{-d(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg} x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$



$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Александр Петрович Ульянов

Глава 3. Разложение по степеням

3.1 Бином Ньютона

Бином – сумма из двух слагаемых

Бином до Ньютона

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

$(1+x)^n = ?$

$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$

$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$

$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \end{array}$$

биномиальный коэф.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Биномиальные коэф-ты: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Таблица:

n	0	1	2	3	4	5
$n!$	1	1	2	6	24	120

Полезно:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k} = \prod_{=1}^{k}\frac{n-\,+1}{} = \prod_{1\le s\le k}\frac{n-s+1}{s}$$

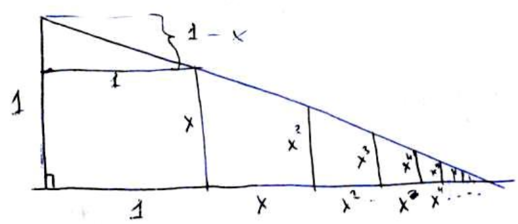
Геометрическая прогрессия

$$1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$1+x+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

при $|x|<1$, можно взять беск. сумму: $n\to\infty$

$$1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots = \frac{1}{1-x} \quad (x^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0)$$



$$\mathrm{ctg}\,\alpha = 1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x}$$

Бином Ньютона

$(1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdot \frac{\alpha-2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{\alpha-k+1}{k}$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k\ge 0} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$(1+x)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}, \quad \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+x} = 1+x$$

Пример: а) $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{2} \cdot x^2 + \ldots =$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$$

б) $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \ldots$

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{-\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{-\frac{3}{2}}{2} t^2 \mp \ldots =$$

$$= 1 - \frac{t}{2} + \frac{3}{8}t^2 \mp \ldots$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3} \cdot x^3 + o(x^3)$$

3.2 Приближение ф-ий полиномами

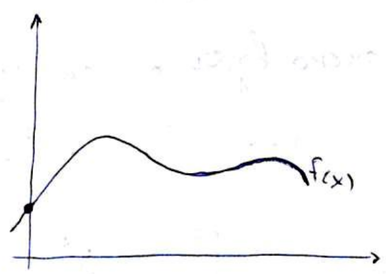
$f(x) \approx A$

$f(x) \approx A_0 + A_1 x$

$f(x) \approx A_0 + A_1 x + A_2 x^2$

$\vdots$

улучшение точности



Около нуля:

$f(x) \approx f(0)$

$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$

$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3} x^3 + \ldots \approx \sum_{0\le k\le n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ – Формула Тейлора

Около x_0:

$f(x) \approx \sum_{0\le k\le n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$ – Полином Тейлора

Простейшие разложения (около 0):

$(e^x)' = e^x$ 1 1 1 1 1 1 1

$(\cos x)' = -\sin x$ 1 0 -1 0 1 0 -1

$(\sin x)' = \cos x$ 0 1 0 -1 0 1 0

$$e^x = \sum \frac{1}{k!} x^k \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^5)$$

$$\cos x = \sum \frac{1}{k!} \ldots \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + O(x^6)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^5)$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}ix^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}ix^5 \mp \ldots$$

$$e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots\right)}_{Re(e^{ix}) = \cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \mp \ldots\right)}_{Im(e^{ix}) = \sin x}$$

Для бинома Ньютона $(1+x)^\alpha = f(x)$:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot(1+x)^{\alpha-2}$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot(1+x)^{\alpha-3} \Rightarrow$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Разложение первообразных

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{t+1} \approx \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)\,dt \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k>0} \frac{1}{k}(-x)^k$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + \ldots\right)dt = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \ldots$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \approx \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \ldots)\,dt \approx x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$$

Неэлементарные ф-ции:

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,erf(x)$$

$$F(x)\approx\int_0^x\left(1-t^2+\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{6}t^6+\ldots\right)dt\approx 1-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{42}x^7+\ldots$$

3.3 Асимптотические сравнения

o-малое и O-большое
(омикрон) (омега)

Хотим сравнить $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$ (часто $x\to 0$ или $x\to\infty$).

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\tau(x)$$

$\tau(x)\ll 1$, $\tau(x)\sim 1$, $\tau(x)\gg 1$

Определение: 1) Если $\frac{f(x)}{g(x)}\to 1$ при $x\to a$, то $\underbrace{f(x)\sim g(x)}_{\text{эквивалентные ф-ции}}$ при $x\to a$

Пример:
$\sin x\sim x$ при $x\to 0$
$\cos x\sim 1$ при $x\to 0$
$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
$\ln(1+x)\sim x$
$tg\,x\sim x$
$(1\pm x)^\alpha\sim 1\pm\alpha x$

| $\sin x\sim x-\frac{1}{6}x^3$
| $\cos x\sim 1-\frac{1}{2}x^2$

2) Если нет предела $\tau(x)$ при $x\to a$
то ~~только~~ плохо

3) Если $\tau(x)\to A$, то $\begin{cases}A=0\\ 0<|A|<\infty\\ |A|=+\infty\end{cases}$

Бесконечные

Сперва $g(x)=1$

Определение: Если $f(x)\to 0$ при $x\to a$,
то $f(x)$ – бесконечно малое
$$f(x)=o(1)$$

<u>Определение</u>: Если $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ при $x \to a$,

то $f(x) = o(g(x))$ отмис

$f(x)$ — бесконечно малое <u>по сравнению</u> с $g(x)$.

Пример: $x = o(1)$ при $x \to 0$

$x^2 = o(x)$

$x^2 = o(1)$

$\sin x \sim x \Rightarrow \sin x - x = o(x^2)$

$\frac{\sin x}{x} - 1 \to 0 \Rightarrow \sin x = x + o(x)$

$\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2} \to 0 \Rightarrow \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\frac{e^x - 1}{x} - 1 \to 0 \Rightarrow e^x = 1 + x + o(x)$

$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} - \alpha \to 0 \Rightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

<u>Опр.</u> Если $|f(x)| < \underset{const}{k}$ при ~~...~~ x близких к a,

то $f(x)$ — называется „<u>ограниченной</u>" вблизи a.

<u>Опр.</u> Если $|f(x)| < k|g(x)|$ при x близких к a,

то $f(x)$ — ограниченная относительно $g(x)$:

$$f(x) = O(g(x))$$

Чуть более формально:

Слабее $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a \Leftrightarrow |f(x)| \le k|g(x)|$ вблизи a для некоторой $k>0$

Сильнее $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a \Leftrightarrow |f(x)| \le \varepsilon|g(x)|$ вблизи a для любого $\varepsilon > 0$.

<u>Примеры преобразований</u>

$o(x^2) + o(x^3) \rightarrowtail o(x^2)$, потому что $o(x^2) > o(x^3)$

$x^3 \cdot o(x^2) \rightarrowtail o(x^5)$

$O(x^3) \cdot O(x^4) \rightarrowtail O(x^7)$

$O(x^3) \cdot o(x^4) \rightarrowtail o(x^7)$

$\frac{o(x^5)}{x^2} \rightarrowtail o(x^3) \rightarrowtail x^3 \cdot o(1)$

$o(x^2) \rightarrowtail O(x^2)$

но $O(x^2) \not\rightarrowtail o(x^2)$

Пример: $x^3 + o(x^2) \rightarrowtail o(x^2) + o(x^2) \rightarrowtail o(x^2)$

$\sin^2 x \cdot o(x) \rightarrowtail x^2 \cdot o(x) \rightarrowtail o(x^3)$

$(4x + o(x))(x^2 + o(x^3)) \rightarrowtail 4x^3 + x^2 \cdot o(x) + 4x \cdot o(x^3) + o(x) \cdot o(x^3) \rightarrowtail$

$\rightarrowtail 4x^3 + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) \rightarrowtail 4x^3 + o(x^3)$

Лемма Условия $\begin{cases} f(x) \sim g(x) \\ f(x) = g(x) + o(g(x)) \end{cases}$ равносильны.

Док-во: $f(x) = \tau(x) \cdot g(x) =$

$= g(x) + \underbrace{(\tau(x) - 1)}_{\to 0} g(x)$

$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \tau(x) \to 1 \Leftrightarrow \tau(x) - 1 \to 0$

$\Leftrightarrow \tau(x) - 1 = o(1)$

$\Leftrightarrow (\tau(x) - 1) g(x) = o(g(x))$

Бесконечно большие

$f(x)$ беск. малое относительно $g(x) \Leftrightarrow g(x)$ б.б. относ. $f(x)$

$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow g(x) = \omega(f(x))$

Сперва $g(x) = 1$

Определение: $f(x)$ б. большое при $x \to a$,

если $|f(x)| \to \infty$.

$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \to \infty \Rightarrow f(x)$ б.б. отн. $g(x)$

Пример: $\alpha > 0 \Rightarrow x^\alpha \to \infty$ при $x \to \infty$

$x^\alpha = \omega(1)$

$\ln(x) = \omega(1)$

$e^x = \omega(1)$

$e^x = \omega(x^\alpha)$, $x^\alpha = \omega(\ln x)$

3.4 Методы разложения функций

Суммы и разности

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cancel{o(x^3)} \quad \underline{-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cancel{o(x^3)} \quad \underline{-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)}$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \cancel{o(x^3)} \quad \underbrace{+\frac{1}{5}x^5 + o(x^5)}_{\text{добавим точности}}$$

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + o(x^2)$$

$$g(x) = 1 + x + o(x)$$

Тогда $f(x) - g(x) = x + o(x)$

Произведение

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x \cdot \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Композиция

1) $\exp(g(x)) = 1 + (x - \frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}x^2)^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{1}{2}x^2)^3 + o((x - \frac{1}{2}x^2)^3) =$

[$g(x) = x - \frac{1}{2}x^2$, до x^3

$=$

2) $h(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ до x^4

$$\underbrace{x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}}_{} = x + 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$\ln(1+g) = g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \frac{1}{4}g^4 + o(g^4)$$

$$g = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = (x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)) - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}x^2 \cancel{- \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)})^2 + \frac{1}{3}(x + \frac{1}{8}x^2 \cancel{- \frac{1}{8}x^4})^3 \cdot \frac{1}{4}(x + \cancel{\frac{1}{2}x^2} \cancel{\frac{1}{8}x^4})^4$$

$= \underset{\text{упражнение}}{\dots} = x + x^3(-\frac{1}{6}) + o(x^4)$

Частное:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h(x)\cdot g(x) = f(x)$$

$$h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

Пример: $tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $tg(-x) = -tg x$

нечёт => только нечёт. степени

$$tg(x) = a_1 x + a_3 x^3 + o(x^3)$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))\cdot(a_1 x + a_3 x^3 + o(x^3))$$

$0 = a_0$ $\qquad 1 = a_1$

$0 = a_2 - \frac{1}{2}a_0$ $\qquad -\frac{1}{6} = a_3 - \frac{1}{2}a_1$

$$\Rightarrow tg x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Обратные и неявные

Пример: $xy^2 + y + 1 = 0$ вблизи $(0, -1)$ до x^2

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

$a_0 = -1$

$$x(-1 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2))^2 + (\cancel{-1} + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)) \cancel{+1} = 0$$

$$(a_1 + 1)x + (a_2 - 2a_1)x^2 + o(x^2) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = -1;\ a_2 = -2 \Rightarrow y = -1 - x - 2x^2 + o(x^2)$$

Пример: $x = y\cdot\cos y$ до x^3

y-нечётная: $y = a_1 x + a_3 x^3 + o(x^3)$

Методы: $x = y \cdot \cos y$

$y_0 = 0$

$y_1 = y_0 + \delta_0, \quad \delta_0 \ll 1$

$x = \delta \cdot \cos\delta = \delta - \cancel{\frac{1}{2}\delta^3} \Rightarrow \delta_0 = x, \quad y_1 = x$

$y_2 = y_1 + \delta_1; \quad \delta_1 \ll \delta_0$

$x = (x + \delta) \cdot \cos(x + \delta)$

$x = (x+\delta)(1 - \frac{1}{2}(x+\delta)^2)$

$x = (x+\delta)(1 - \frac{1}{2}x^2 - x\delta - \frac{1}{2}\delta^2)$

$x = x - \frac{1}{2}x^3 + \delta(1 - x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x\delta \cancel{- \frac{1}{2}\delta^2 - x\delta^2 - \frac{1}{2}x\delta^2})$

$\Rightarrow \delta_1 = \frac{1}{2}x^3$

Решение дифф. уравнений

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

$\Rightarrow y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$

Пример: $y' = y$, a_0 – произвольный

$a_0 = a_1 \quad a_1 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2}$

$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{6}$

$\vdots$

$a_n = \frac{a_0}{n!}$

$y = a_0(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots) = a_0 e^x$

Пример: $y' = -2xy$

$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots = -2a_0 x - 2a_1 x^2 - 2a_2 x^3 - 2a_3 x^4 + \ldots$

$a_1 = 0 \quad a_0 = -1a_2$, a_0 – произвольное $\Big\}$ $a_2 = -a_0$

$a_1 = -\frac{3}{2}a_3; \quad a_2 = -2a_4 \quad$ $a_4 = -2a_0$

$a_3 = 0$

$\Rightarrow y = y(0)(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \ldots) \Rightarrow y = y_0 \cdot e^{-x^2}$

Пример: $y''+y=0$

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots=0$$

a_0, a_1 – произв.

$$a_2=-\frac{a_0}{2} \quad a_3=-\frac{a_1}{6} \quad a_4=-\frac{a_2}{12} \quad a_5=-\frac{a_3}{20}$$

$$y=a_0\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)+a_1\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots\right)$$

$$y=y(0)\cdot\cos x+y'(0)\cdot\sin x$$

Пример: $y''=xy$

$$a_0x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+\ldots=$$

$$=1\cdot2\,a_2+2\cdot3\,a_3x+3\cdot4\,a_4x^2+4\cdot5\,a_5\cdot x^3+\ldots$$

$$a_2=0\Rightarrow a_5=0\Rightarrow a_8=0\ldots$$

$$\Rightarrow y=y(0)\left(1-\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{5\cdot6}x^6\right)+y'(0)\left(x-\frac{1}{3\cdot4}x^4+\frac{1}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{6\cdot7}\cdot x^7+\ldots\right)$$

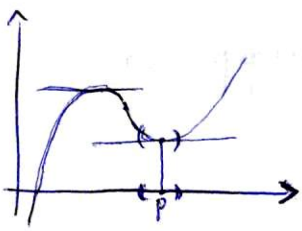
ГЛАВА 4. Теорема о среднем и приложения

4.1 Теорема о среднем

Определение: Окрестностью точки $x=a$ называют любой (открытый) интервал, содержащий точку a.

обычно маленький. $(a-\delta_1, a_2+\delta_2)$

Локальный экстремумы



Определение: $x=p$ называется точкой лок-ого минимума (максимума) $f(x)$;

если $f(x) \geq f(p)$ ($\leq$) в некоторой окр-ти p вблизи

лок. экс. = либо лок. макс. либо лок. мин.

Теорема (Ферма): Если во внутр. точке мин. экстр. ф-ции её производной существует, то она равна 0.

Док-во: Уклон корды:

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \geq 0 \quad \text{при } x<p$$

$$\leq 0 \quad \text{при } x>p$$

при $x \to p$ должны получить $\to 0$.

□

Следствие: Экстремум может достигаться только в точках одного из трёх типов:

(1) на границе

(2) в точках, где нет производной

(3) в точках, где произв. $= 0$.

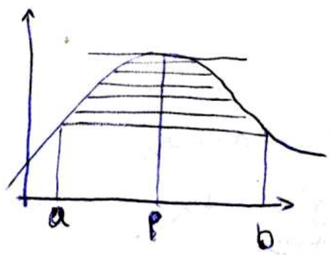
exists $\exists$
all $\forall$
Кванторы

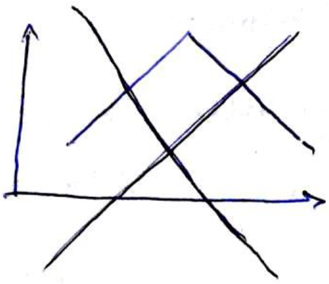
Теорема (Ролля)

Если ф-ия дифф-ма на $[a, b]$ и $f(a) = f(b)$, то $\exists p \in (a, b)$ такое, что $f'(p) = 0$.

Док-во: Очевидно, что:

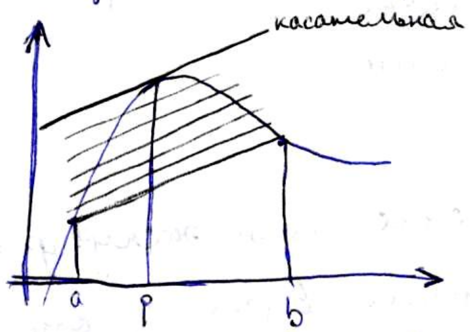
(1) если ф-ия дифф-ма, то она непрерывна (теорема будет);
(2) если ф-ия непрерывна, то она достигает минимума и максимума на отрезке (теорема будет).





— не дифф-ма

Теорема (Лагранжа)



Если $f(x)$ дифф-ма на $[a; b]$, то $\exists p \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(p)(b-a)$$

Формула конечных приращений

Док-во: $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$\varphi(x) = f(x) - kx \Rightarrow \varphi(a) = (a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot a$$

$$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot b$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = 0$$

$$\Downarrow$$

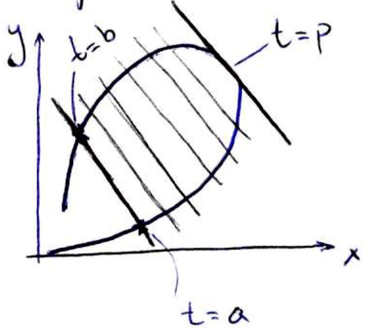
$$\varphi(b) = \varphi(a)$$

Теорема Ролля для $\varphi(x)$:

$\exists p \in (a, b)$ такое, что $\varphi'(p) = 0$. $\square$

Теорема (Коши)

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$



Если на отр. $[a,b]$ ф-ции $f(t)$ и $g(t)$ дифф-мы (и $g'(t) \neq 0$ везде), то $\exists p \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{f'(p)}{g'(p)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

← $g(b) \neq g(a)$, но тогда можем перевернуть дробь.

Рисунок не мешает.

(Если $g(x)=x$, то т. Лагранжа.)

Док-во: $k = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

$\varphi(t) = f(t) - k \cdot g(t) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists p \in (a,b)$ такая, что $\varphi'(p) = 0 = f'(p) - k g'(p)$. □

Теорема Ролля

4.2 Монотонность и экстремумы

Участки монотонности

Ф-ция $f(x)$ монотонна на числовом мн-ве X, если для всех пар $x_1 < x_2 \in X$ сохраняется нер-во $f(x_1) \lesseqgtr f(x_2)$:

$f(x_1) \geq f(x_2)$ – невозрастающая

$f(x_1) \leq f(x_2)$ – неубывающая

$f(x_1) > f(x_2)$ – возр-ая

$f(x_1) < f(x_2)$ – уб-ая

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ строгая монотонность

Типичная гладкая ф-ия

↖ непрерывно дифф-мая

Следствие: Если f дифф-ма на Δ (промежуток), то

(1) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ – неубыв

(2) $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)$ – невозр.

(3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ – постоянна

(4) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ – возрастает

Пример: $f(x) = x^3$

(5) $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ – убывает

Док-во:

(1) $(\Rightarrow) [x_1, x_2] \subseteq \Delta$

По т-ме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(p)(x_2 - x_1)$

$(\Leftarrow)$ $u, x \in [x_1, x_2]$

$$0 \leq \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \xrightarrow[u \to x]{} f'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0$$

Необходимые условия = Т-ма Ферма
$\Rightarrow$ границы, особые, точки где $f'(p) = 0$

Условия локального экстремума

Теорема: 1ое достаточное условие локального экс-ма

Если точка $x = p$ имеет такую окр-ть, что слева знак $f'(x)$ сохраняется и справа сохр-тся, то:

- если $f'(x) > 0$ при $x < p$
  и $f'(x) < 0$ при $x > p$,
  то $x = p$ – максимум локальный.
- если $f'(x) < 0$ при $x < p$
  и $f'(x) > 0$ при $x > p$,
  то $x = p$ – лок-ый минимум.
- если знаки $f'(x)$ слева и справа одинаковы, то экстр. нет.

Док-во:

Теорема: 2-ое достаточное условие лок. экстр-ма

Если $f(x)$ дважды дифф-ма на Δ и в (.) $p \in \Delta$ с условием $f'(p)=0$.

- $f''(p) > 0 \Rightarrow$ т. лок. мин.
- $f''(p) < 0 \Rightarrow$ т. лок. мах
- $f''(p) = 0 \Rightarrow$?

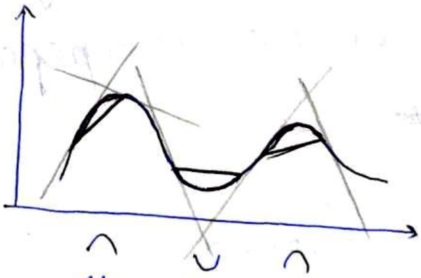
$$f(x) = f(p) + \cancel{f'(p)}(x-p) + \frac{1}{2}\cancel{f''(p)}(x-p)^2 + \frac{1}{3!}\cancel{f'''(p)}\cdot(x-p)^3 + \frac{1}{4!}f^{IV}(p)(x-p)^4 + \dots$$

если $f'''(p) > 0$
$f'''(p) < 0$ нет экстр.

$f'''(p) = 0$

если $f^{IV}(p) > 0$
$f^{IV}(p) < 0$
$f = 0$

4.3 Выпуклость и перегибы

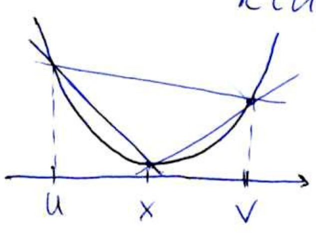


$$k(u,v) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$$

Лемма: Выпуклая вниз ф-ия f на Δ равносильна неравенству

$k(u,x) \le k(x,v)$ при $u<x<v$

$k(u,x) < k(u,v) < k(x,v)$



Теорема: Если $f(x)$ дважды дифф-ма на Δ, то

$f'' \geq 0 \Leftrightarrow$ (1) • $f'(x)$ не убыв. $\Leftrightarrow f(x)$ выпукла вниз,

$f'' \leq 0 \Leftrightarrow$ • $f'(x)$ не возр. $\Leftrightarrow f(x)$ выпукла вверх,

$f'' > 0 \Rightarrow$ • $f'(x)$ возр. $\Leftrightarrow f(x)$ строго вып. вниз;

$f'' < 0 \Rightarrow$ • $f'(x)$ убыв. $\Leftrightarrow f(x)$ строго вып. вверх.

$f'' = 0 \Leftrightarrow$ • $f'(x)$ пост. $\Leftrightarrow f(x)$ прямолинейна

Док-во: (1) $(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$ $x_1 < x < x_2 \Rightarrow$ по лемме.

$k(x_1; x) \leq k(x; x_2)$

$f'(x_1) \leq k(x_1; x_2) \leq f'(x_2)$

предельный переход: $x \to x_1$

предельный переход $x \to x_2$.

Определение: Если вблизи (•) $x = p$ $f(x)$ меняет напр. выпуклости, то $x = p$ – точки перегиба.

Лемма: Точка перегиба f является точкой лок. экстр. $f'(x)$;

Точка строгого лок. экстр. $f'(x)$ является т. перегиба f.

Следствие: (1) Если $f''(p) = 0$ и $\exists f'''(p) \neq 0$, то p – т. перегиба

(2) если $x = p$ т. перегиба, то $f''(p) = 0$.

Неравенство Йенсена

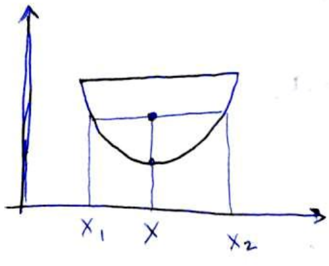
Лемма: Вып $f(x)$ вниз на Δ равносильно

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

для любых $x_k \in \Delta$ и любых $\alpha_k \geq 0$

с усл. $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

Док-во:



Ц.м. двух тел, с массами α_1 и α_2 находится в точке $(x_0; y_0) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2; \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2))$.

При этом выходит, что $y_0 > f_0(x_0)$

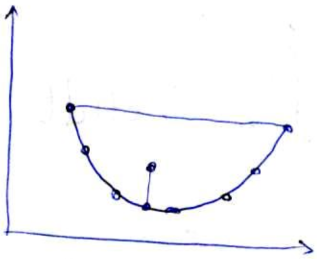
Теорема Йенсена: Если $f(x)$ вып. вниз на Δ, то равносильно:

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

$$f(\Sigma \alpha_i x_i) \leq \Sigma \alpha_i f(x_i)$$

для всех $x_k \in \Delta$ и $\alpha_k \geq 0$ с условием $\Sigma \alpha_k = 1$

Док-во:



$$\ln(\Sigma \alpha_k x_k) \geq \Sigma \alpha_k \ln x_k$$

$$e^{\ln(\Sigma \alpha_k x_k)} \geq e^{\Sigma \alpha_k \ln x_k}$$

Σ

4.4 Доказательства формулы Тейлора

Теорема: Если функция f в точке $x=a$ дифф-ма n раз, то $f(x) = \underbrace{\sum_{0\le k\le n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k}_{P_n(x) - \text{полином Тейлора степени } n} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{при } x\to a}$ остаток

$f^{(0)}(a) = f(a)$, считаем $x>a$.

I) Интегрирование по частям

1) $f(x) = f(a) + \int_a^x 1\cdot f'(t)\,dt$ — основная теорема анализа (Ньютона-Лейбница)

$u = f'(t) \Rightarrow du = f''(t)\,dt$

$dV = dt \Rightarrow V = -(x-t)$

2) $f(x) = f(a) + \underbrace{\left[-f'(t)(x-t)\right]_{t=a}^{t=x}}_{0+f'(a)(x-a)} + \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt$

$u = f''(t) \Rightarrow du = f'''(t)\,dt$

$dV = (x-t)\,dt \Rightarrow V = -\frac{(x-t)^2}{2}$

3) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{\left[-f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\right]_{t=a}^{t=x}}_{0+f''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt$

$\vdots$

$= P_n(x) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{n+1}(t)\,dt = P_n(x) + \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $o((x-a)^n)$

$M = \max\{|f^{n+1}(t)|,\ t\in[a,x]\}$, $\int_a^x (x-t)^n dt = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$

II) Теорема о среднем как шаг индукции

$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$

Лемма: Если в точке $x=a$ фун-ия $r(x)$ имеет $k\ge 1$ производных $=0$, то $r(x) = o((x-a)^k)$

Сырое док-во по ММИ:

Теорема Лагранжа (23)
$r(x)-r(a)=r'(p)(x-a)=$
$=$ формула конечных приращений

БАЗА $\begin{cases} k=1: r(a)=0, \quad r'(a)=0 \\ \dfrac{r(x)}{x-a}=\dfrac{r(x)-r(a)}{x-a} \to r'(a)=0 \to r(x)=o(x-a) \end{cases}$

$k=2$: $r''(a)=0=(r')'=r'' \Rightarrow$ для r' верна лемма $k=1$
$\Rightarrow r'(x)=o(x-a)$

$a<p<x \Rightarrow r'(p)=o(p-a)=o(x-a)$?

ф-ла кон. прир. $r(x)-\cancel{r(a)}=r'(p)(x-a)=(x-a)\cdot o(x-a)=o((x-a)^2)$

$k=3$: $r'''(a)=0 \Rightarrow$ для $r'(x)$ случай $k=2$
$\Rightarrow r'(x)=o((x-a)^2)$

+ ф-ла конечных приращений $\Rightarrow r(x)=o((x-a)^3)$

Док-во:

База: ...

Шаг: $r(x)-\cancel{r(a)}^{0}=r'(p)(x-a)=(x-a)\cdot o((x-a)^{k-1})=o((x-a)^k)$
$r'(x)=o((x-a)^{k-1})$

III) Доказательство Коши (... дифф-ма $n+1$ раз ...)

Теорема Коши: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(p)}{g'(p)}$

$\varphi(x)=f(x)-P_n(x)$
$\psi(x)=(x-a)^{n+1}$
$\Longrightarrow \dfrac{\varphi^{(n+1)}(p)}{\psi^{(n+1)}(p)}=\dfrac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}$

Имеем: $\varphi(a)=0 \quad \psi(a)=0$
$\varphi'(a)=0 \quad \psi'(a)=0$
$\vdots$
$\varphi^{(n)}(a)=0 \quad \psi^{(n)}(a)=0$

$$\frac{\varphi(x)-\cancel{\varphi(a)}}{\psi(x)-\cancel{\psi(a)}}\underset{\text{т-ма Коши}}{=}\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}=\frac{\varphi'(x_1)-\varphi'(a)}{\psi'(x_1)-\psi'(a)}\underset{-''-}{=}\frac{\varphi''(x_2)-\varphi'(a)}{\psi''(x_2)-\psi''(a)}\underset{-''-}{=}\dots=\frac{\varphi^{(n)}(x_n)-\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(x_n)-\psi^{(n)}(a)}\underset{-''-}{=}\frac{\varphi^{(n+1)}(p)}{\psi^{(n+1)}(p)}$$

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} \Rightarrow f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(p) \cdot (x-a)^{n+1}}_{\text{лучше, чем надо.}}$$

$$a < p = x_{n+1} < x_n < \ldots < x_2 < x_1 < x$$

4.5 Раскрытие неопределённостей

$f(x) \to A$, $g(x) \to B$ при $x \to a$

$f(x) \pm g(x) \to A \pm B$

$f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$

$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$

$f(x)^{g(x)} \to A^B$

Неопределённость: $\boxed{\frac{0}{0}}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \pm \infty$, 0^0, 1^∞ ...

Пример: $th x = \frac{sh x}{ch x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ при $x \to +\infty$

$= \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \Rightarrow \frac{1}{1} = 1$

Пример: $\frac{tg\,2x}{tg\,x} \xrightarrow[x\to 0]{} \left(\frac{0}{0}\right)$?

$\frac{tg\,2x}{tg\,x} = \frac{1}{\cancel{tg\,x}} \cdot \frac{2\cancel{tg\,x}}{1-tg\,x} \xrightarrow[x \to 0]{} 2$ $\quad$ $tg\,x \sim x$, $tg\,2x \sim 2x$ $\quad \frac{tg\,2x}{tg\,x} \sim \frac{2x}{x} \Rightarrow 2$

$\frac{tg\,2x}{tg\,x} = \frac{2x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{2 + o(1)}{1 + o(1)} \to 2$

Применение ф-лы Тейлора $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^m + o((x-a)^m)}{\frac{1}{n!} \cdot g^{(n)}(a)(x-a)^n + o((x-a)^n)}$$

Если $m > n$: $\frac{0}{k \neq 0} = 0$

$\frac{k \neq 0}{0} = \infty$

$m = n$: $const \neq 0, \neq \infty$

Пример: $\frac{tg\,x - x}{x - \sin x} = \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x}{x - (x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3))} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 2$

4.5 Раскрытие неопределенностей

$\frac{0}{0}$ $\left.\begin{array}{l} f(x)\to 0 \\ g(x)\to 0 \end{array}\right\}$ при $x\to a$ $\quad \frac{f(x)}{g(x)}\to ?$

Правило Бернулли-Лапиталя

Теорема Бернулли: Если две хорошие ф-ции $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ при $x\to a$ (включая предел на бесконечности и односторонний), то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{*}{=} \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

как только второй $\exists$.

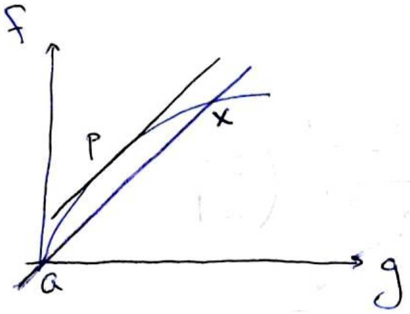
Пример: Не работает в обратную сторону

$\frac{\sin x}{x}\to 1$ при $x\to 0$	$\frac{\sin x}{x}\to 0$ при $x\to\infty$
$\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \frac{\cos x}{1}$	$\frac{\cos x}{1}$ нет предела

Док-во: Для дифф-мых (сильно хороших) f, g:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\cancel{f(a)}^{0} + f'(a)(x-a) + o(x-a)}{\cancel{g(a)}^{0} + g'(a)(x-a) + o(x-a)} = \frac{f'(a)+o(1)}{g'(a)+o(1)}$$

Схема более общего док-во:



возьмём x, как параметр:

$(g(x), f(x))$

Т-ма Коши: $\frac{f(x)-\cancel{f(a)}^{0}}{g(x)-\cancel{g(a)}^{0}} = \frac{f'(p)}{g'(p)}$

$x\to a;\ a<p<x$

$\Rightarrow p = p(x)\to a$ $\square$

Примеры: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(tgx-x)'}{(x-\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+tg^2x-1}{1-\cos x}=$ → тригонометрия

$$\frac{tg^2x}{1-\cos x}\underset{\uparrow}{\sim}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

путь эквивалентности

Для бесконечности:

$\frac{\infty}{\infty}$ $\left.\begin{matrix}f(x)\to\infty\\ g(x)\to\infty\end{matrix}\right\}$ при $x\to a$ $\frac{f(x)}{g(x)}\to ?$

Как и с нулём: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Примеры:

$\alpha>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(\ln x)'}{(x^{\alpha})'}=\frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}x^{-\alpha}\to 0\right).$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}\overset{*}{=}L\frac{nx^{n-1}}{e^x}\overset{*}{=}L\frac{n(n-1)\cdot x^{n-2}}{e^x}\overset{*}{=}\ldots\overset{*}{=}Ln!\frac{1}{e^x}\to 0$$

Если $n=\underset{\uparrow}{[\alpha]}$, $n-1\le\alpha<n$
целая часть

Прочие неопределённости: $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^{∞}, $0\cdot\infty$ — сводят к $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

$0\cdot\infty$: $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{g(x)^{-1}}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$\infty-\infty$: $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{f^{-1}(x)}-\frac{1}{g^{-1}(x)}=\frac{g^{-1}-f^{-1}}{g^{-1}\cdot f^{-1}}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

Примеры: $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x=L\frac{\ln x}{x^{-1}}\overset{*}{=}L\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}$

$$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-ctgx\right)=L\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{x\cdot\sin x}\overset{*}{=}L\frac{\cancel{\cos x}+x\cdot\sin x-\cancel{\cos x}}{x\cdot\cos x+\sin x}\to 0$$

$$\overset{\shortparallel}{\lim\limits_{x\to 0}}\frac{tg-x}{xtgx}\to 0$$

$x\cdot\sin x\sim x^2$
$x\cdot\cos x+\sin x\sim 2x$

Часть 2. Одномерный анализ

Глава 5. Начальная арифметизация

5.1 Точные грани и полнота

Полнота – св-во вещ. чисел. То, что отличает их от иррац.

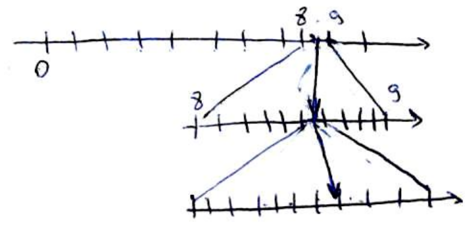
Формы выражения полноты:

$\mathbb{Z}$ – дискретное подмн-во
$\mathbb{Q}$ – всюду плотное

(1) десятичные дроби
(2) принцип вложенных отрезков
(3) сечения Дедекинда
(4) точные грани

} аксиомы равносильны

(1)



(2) Принцип влож. отр.:
Для любой цепочки вложенных отрезков $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ имеет (хотя бы одну) общую точку для всех сразу.

(3) Точные грани

Определение: Числ. мн-во A ограничено сверху,

если $\exists b: \forall a \in A: a \le b$

b = верх. грань A.

Для $A = \{0; 1; 2\}$ $b=3$ подходит и $b=2$ подходит, но $b=2$ – лучше всех

Опр: Наименьшая верх. грань мн-ва A = точная верх. грань.

Называется супремум: $\sup A$

Если $\exists b: \forall a \in A: a \ge b$

b = нижн. грань A = инфимум A = $\inf A$

→ всегда есть (Th)

<u>Примеры</u>: $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\cdot \ln f(x))$

$$0^0 = e(0\cdot\infty)$$
$$\infty^0 = e(0\cdot\infty)$$
$$1^\infty = e(\infty\cdot 0)$$

Пример гадкой ф-ии:

0^0: $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} \exp(x\ln x) \overset{!}{=} \exp(\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x) = e^0 = 1$

Если ф-ия непрерывна, то можно применять такое

∞^0: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(\frac{\ln x}{x}) \overset{!}{=} \exp(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}) = \exp(0) = 1$

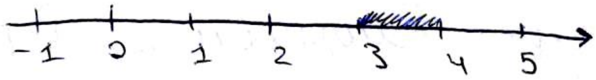
1^∞: $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0\pm 0} \exp(\frac{\ln(1+x)}{x}) \overset{!}{=} \exp(\underbrace{\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}) = e^1 = e$

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\left(\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x}\right) \Rightarrow 1$$

Александр Петрович Ульянов

Теорема: всякое ограниченное не пустое числовое мн-во имеет точные грани.

Док-во: $A \neq \emptyset$, огран. сверху

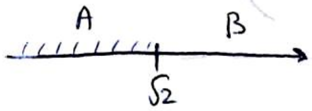


1. Разобьём числовое мн-во на отрезки.
2. Берём самый правый отрезок, содержащий число.
3. Разбиваем всё больше и больше, записывая номер отрезка: $C = C_0\ C_1 C_2 C_3 \dots$

Это и будет $\sup A$: если $\exists a \in A: a > C$, то имеется j такое, что на j-ой позиции $a_j > c_j$ — противоречит построению.
Если $\exists b: \forall a \in A: b > a$ и $b < c$, то на какой-то позиции i b лежит левее, то есть $b < a$.

Пример: $A = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p > 0,\ q > 0,\ p^2 < 2q^2 \right\}$

$\frac{p}{q} < \sqrt{2} = \sup A$



$a \leq b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$

Определение: Если A не ограниченно сверху, то $\sup A = \infty$, если не огр. снизу, то $\inf A = -\infty$.

$\begin{cases} \sup \emptyset = -\infty \\ \inf \emptyset = \infty \end{cases}$ ← если $A \leq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$, $\inf A \geq \inf B$

---

(3) **Теорема (Дедекинда):** Если непустые числ. мн-ва A и B таковы, что $a \leq b$ $\forall a \in A$ и $\forall b \in B$, то $\exists c \in \mathbb{R}$, такое что $a \leq c \leq b$.

Док-во: $(4 \Rightarrow 3)$ т.г. с.д. $b \in B \Rightarrow b =$ верхн. грань $A \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup A \leq b \quad \forall b \in B$

$\sup A \leq \inf B$

если равенство, то $c = \sup A = \inf B$

$(3 \Rightarrow 4)$ с.д. т.г. $A \neq 0$

$B = \{ b \mid a \leq b \ \forall a \in A \}$

Теорема Дедекинда $\Rightarrow c = \sup A = \inf B$

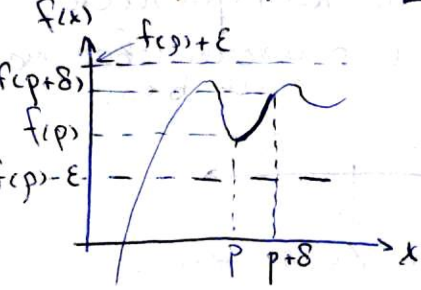
5.2 Непрерывность ф-ции в точке

$f(x) \approx f(p)$ при $x \approx p$] Эволюция определения непр-ти
$f(x) \to f(p)$ при $x \to p$

Можно сделать $f(x)$ сколь угодно близким к $f(p)$, если выбирать x достаточно близко к p.

Больцано – Коши – Вейерштрасс

$\boxed{\text{Для любого}}$ $\varepsilon > 0$ $\boxed{\text{найдётся}}$ такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|x-p| < \delta$ $\boxed{\text{влечёт}}$ $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ (для всех x из обл. опр-ия).



ε = erreur
δ = distance?

Высказывание:

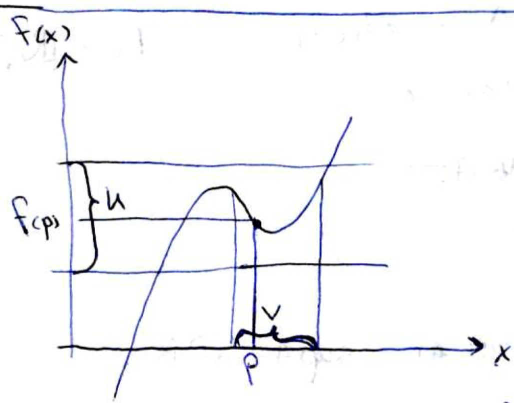
$\underset{\text{для любого}}{\boxed{\forall}}\varepsilon > 0\ \underset{\text{найдётся "существует"}}{\boxed{\exists}}\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \underset{\delta\text{-окр-ть точки } p}{|x-p| < \delta} \underset{\text{импликация}}{\boxed{\Rightarrow}} \underset{\varepsilon\text{-окр-ть точки } f(p)}{|f(x) - f(p)| < \varepsilon} \quad (\forall x \in X).$

$B_\delta(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-p| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} \mid p - \delta < x < p + \delta\}$

Переписав непрер.:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : x \in \underset{(\cap X)}{B_\delta(p)} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(p))$

} Другое обозначение



$\forall$ окр-ти $U \ni f(p)$ $\exists$ окр-ть $V \ni p$:
$x \in V \Rightarrow f(x) \in U$

$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$
образ X при отображении f

$\forall \overset{\circ}{U} \ni f(p)\ \exists \overset{\circ}{V} \ni p : f(V) \subseteq U$

„нолик" значит, что открытое

Упражнения из лекций

§5.1

Лемма: Если числовое мн-во $A \neq \varnothing$ ограничено сверху, то $\forall \varepsilon$ для точки $c = \sup A$ $\exists a \in A$ и $\exists b \notin A$.

Док-во: От противного: если $\exists c_1 < c$: $c_1 > d : \forall d \in A$, то $c \neq \sup A$;
если $\exists c_2 > c : c_2 \in A$, то $c \neq \sup A$;
противоречие.

Лемма: Если $A \subseteq B$, то $\sup A \leq \sup B$ и $\inf A \geq \inf B$.

Док-во: От противного: если $c_1 = \sup A > \sup B$, то:
а) $c_1 \in A$, $c_1 \notin B \Rightarrow$ противоречие,
б) $c_1 \notin A$, $\exists (a \in A) \geq \sup B$, $\sup B \notin B \Rightarrow$ противоречие.

Аналогично для inf.

Принцип вложенных отрезков

Теорема: Для любой последовательности $K_0 \supseteq K_1 \supseteq \ldots$ вложенных отрезков существует общая точка всех отрезков.

Док-во: $A = \{a_n\}$ – множество левых концов отрезков $K_n = [a_n; b_n]$,
$B = \{b_n\}$ – правых концов.

Для них выполняется теорема Дедекинда:

$$a_i \leq b_j \ (i, j \text{ – любые})$$
$$\Downarrow$$
$$\exists c : a_n \leq c \leq b_n \text{ – } c \text{ – общая точка всех отрезков } K_n.$$

Расширенная числовая прямая

Мн-во $\overline{\mathbb{R}}$ - это мн-во $\mathbb{R}$ и ещё 2 эл-та: $\pm\infty$.

Теорема: Всякое подмн-во расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ имеет точную нижнюю и точную верхнюю грань.

§5.3

Теорема: Всякая липшицева функция на мн-ве X непрерывна на нём.

Док-во: Возьмём $(\varepsilon>0)$: $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$ и для любой точки $p\in X$:

$|x-p|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке p.

§5.6

Определение дифф-ти по Каратеодори:

Функцию $f(x)$ называют дифф-мой в точке $x=p$, если существует такая функция $\varphi(x)$, непрерывная в точке $x=p$, что:

$$f(x) = f(p) + \varphi(x)(x-p)$$

Производная $f'(p)$ - значение $\varphi(p)$.

$$\varphi(x) = f'(p) + \tau(x).$$

Маленькие хитрости неравенств

(1) уже пригодную δ-окр-ть можно уменьшить;
(2) если удалось втиснуть ф-ию в 2ε-окр-ть, то её удается и в ε-окр-ти: $\to M>0,\ M<+\infty$

$$\varepsilon \to 0 \Rightarrow M\cdot\varepsilon \to 0.$$

Лемма (Нер-во треугольника)

Для любых вещ. или компл. чисел верно:

I тип: $|u+v| \leq |u| + |v|$

II тип: $|u-w| \leq |u-v| + |v-w|$ ← введём знак $\overset{\triangle}{\leq}$ (нер-во тр-ка)

v - отличается только в одном признаке от u и только в одном признаке от w.

Лемма (о близких значениях)

Если $f(x)$ непрерывна в т. $x=p$ и $f(p) > y$ (или $\lessgtr$), то это нер-во $f(x)>y$ верно и на некоторой окр-ти т. $x=p$.
(вывести из непр-ти)

Непрерывность и операции

Лемма: Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x=p$, то $f(x) \pm g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ тоже непр. в точке $x=p$.
Если $g(p) \neq 0$, то $f(x)/g(x)$ тоже непр. в точке $x=p$.
То есть арифмет. операции сохраняют непрерывность.

Док-во: $F = f(x)$, $A = f(p)$
$G = g(x)$, $B = g(p)$

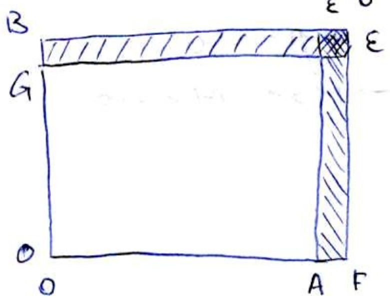
$|x-p|<\delta_1 \Rightarrow |F-A|<\varepsilon$
$|x-p|<\delta_2 \Rightarrow |G-B|<\varepsilon$
$\min(\delta_1, \delta_2) = \delta$ — годиться из-за 1-ой хитрости

(1) $|F \pm G - A \mp B| \overset{\triangle}{\leq} \underbrace{|F-A|}_{\text{на одной окр-ти}} + \underbrace{|G-B|}_{\text{на другой окр-ти}} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ — нер-во тр-ка первого типа

2) $|FG - AB| = |FG - AG + AG - AB| \leq |FG - AG| + |AG - AB| =$

$= |F-A| \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{перем.} \\ g(x)}}{|G|} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{пост.} \\ f(p)}}{|A|} \cdot |G - B| \leq (|A| + |B| + \varepsilon)\,\varepsilon = M\varepsilon \Rightarrow$ непрерывно произведение

$M = |A| + |B| + \varepsilon > |A| + |G|$



← интерпретация

(3) $\frac{1}{g(x)}$ непрер.:

$\left|\frac{1}{G} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-G}{BG}\right| < M\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \cdot \overset{M}{\boxed{\frac{1}{|B|} \cdot \frac{2}{|B|}}} \Rightarrow \frac{1}{g(x)}$ – непрерывно тоже

Выбрать $\varepsilon < \frac{1}{2}|B|$ ← например $\Rightarrow |G| > \frac{1}{2}|B|$

$|G - B| < \varepsilon \Rightarrow B - \varepsilon < G < B + \varepsilon$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)} \cdot f(x)$ □

Лемма (Композиция): Если ф-ия $y = f(x)$ непрер. в точке $x = p$ и ф-ия $z = g(x)$ непрер. в т. $y = f(p)$, то ф-ия $z = g(f(x))$ непрер. в т. $x = p$.

Док-во:

Надо:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - p| < \delta \xRightarrow{\ \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \xi \Rightarrow\ } |g(f(x)) - g(f(p))| < \varepsilon$

Есть:

$\forall \xi > 0\ \exists \delta(\xi) > 0 : |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \xi$ (непрер. f)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \xi > 0 : |y - f(p)| < \xi \Rightarrow |g(y) - g(f(p))| < \varepsilon$ (непрер. g)

просто другая переменная

Или:

$x \in B_\delta(p) \Rightarrow f(x) \in B_\xi(f(p)) \Rightarrow g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(p)))$

Композиция в другом обозначении

$\forall U \ni f(p)\ \exists V \ni p: f(V) \subseteq U$

$\forall W \ni g(f(p))\ \exists U \ni f(p): g(U) \subseteq W$

$$\left.\begin{matrix} f(V) \subseteq U \\ g(U) \subseteq W \end{matrix}\right\} \Rightarrow g(f(V)) \subseteq W$$

Теорема:

Все элементарные ф-ции непрерывны во всех точках определения.

§3 Теоремы о непрер. фу-иях

На отрезке!

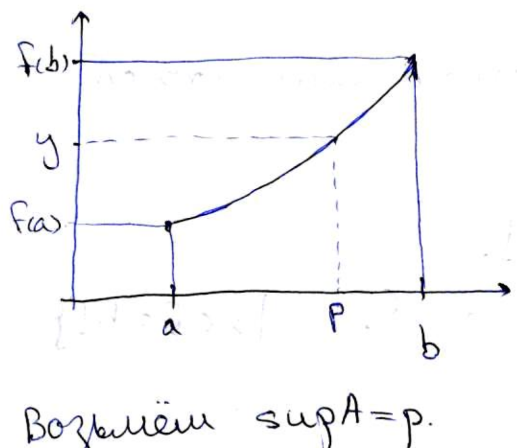
Липшицевы ф-ции

Опр-ие: $f(x)$ липшицева на мн-ве X, если $\exists L > 0$ такое что $\forall x_1, x_2 \in X$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L |x_1 - x_2|$$

L — Липшицева константа для f на X

Теорема о промежуточном значении (Больцано):



Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, и $f(a) \ne f(b)$, то $\forall y$ между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists p \in (a, b)$ такое что $f(p) = y$.

Док-во: Два случая $\left.\begin{matrix} 1)\ f(a) < y < f(b) \\ 2)\ f(a) > y > f(b) \end{matrix}\right\}$ почти нет различий

(лемма о близких значениях)

$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < y\}$ — имеет точную грань.

Возьмём $\sup A = p$.

$f(p) < y$ — окр-ть (по лемме о бл. знач.), целиком лежащую в A;

$f(p) > y$ — окр-ть, целиком лежащую вне A.

Остаётся искомое $f(p) = y$. □

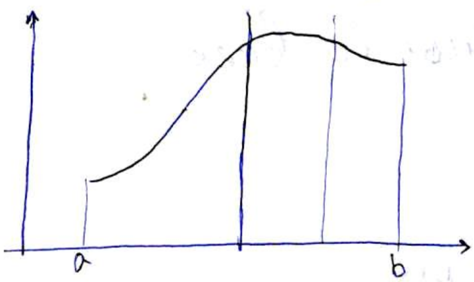
Теорема об экстремальных значениях (Больцано - Вейерштрасс)

Функция f на X ограничена, если ограничен образ $f(X)=\{f(x)|x\in X\}$

Точка $p\in X$ называется точкой (глобального) максимума/мин-ма f на X, если $f(p) \gtreqless f(x) \quad \forall x\in X$

Теорема: Всякая непрер. фу-ия на отрезке ограничена и и достигает своих мах. и мин.

Док-во: методом деления отрезка пополам.



$K_0=[a,b]$, $\beta=\sup f(K_0)$

K_1 = та половина, где $\beta=\sup f(K_1)$

K_2 = та половина, где $\beta=\sup f(K_2)$

$K_0\supseteq K_1\supseteq K_2\supseteq\ldots$ длина $K_n\to 0$ при $n\to\infty$

последов. вложенных значениях

Принцип влож. отрезков => общая точка.

$p\in K_n \; \forall n$

$f(p)>\beta$ невозможно, ибо $\beta=\sup f(K_0)$. $\boxed{\exists y: f(p)<y<\beta}$

Предпол., что $f(p)<\beta$, тогда (лемма о близких значениях):

$\exists$ окр-ть $U\ni p$ т. что $f(n)<\beta \quad \forall n\in U$

$\Rightarrow \exists n$ что $U\supset K_n \Rightarrow \forall x\in K_n \; f(x)<y \Rightarrow \sup f(K_n)\leq y<\beta$

Противоречит построению K_n.

$\Rightarrow f(p)=\beta$ □.

Следствие из обеих теорем:

Непрерывный образ отрезка является отрезком или точкой.

Док-во:

Если $f(x)=c \quad \forall x\in[a,b] \quad f([a,b])=\{c\}$.

Если $f(x)$ не постоянна, то $m=\min$, $M=\max\{f(x)|x\in[a,b]\}$

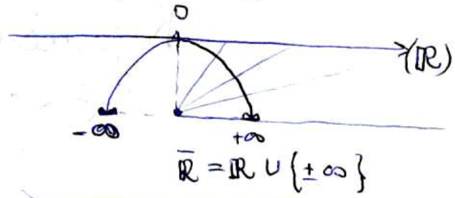
$[m,M]=f([a,b])$

Теорема: Если непостоянная f непрерывна на промежутке Δ, то $f(\Delta)$ является промежутком.

Док-во: $\alpha = \inf f(\Delta) = \inf \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

$\beta = \sup f(\Delta) = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

Промежуток



Расширенная числ. прямая, включающая бесконечность

$f(\Delta) \subseteq [\alpha, \beta] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ($\leftarrow \alpha$ и β могут быть ∞)

$\underline{\forall y \in (\alpha, \beta)}$ $\quad \exists\, u, v \in \Delta$:

$\alpha \leq f(u) < y < f(v) \leq \beta$

$[u; v]$ или $[v; u]$ применимы на предыд. следствие $\Rightarrow$

$\Rightarrow y \in f([u; v]) \subseteq f(\Delta)$

$\underline{y \in f(\Delta)}$

Итак, $y \in (\alpha, \beta) \Rightarrow y \in f(\Delta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\Delta) = \begin{cases} [\alpha; \beta] \\ (\alpha; \beta] \\ [\alpha; \beta) \\ (\alpha; \beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha; \beta) \subseteq f(\Delta) \subseteq [\alpha; \beta] \text{ все промежутки.} \ \square$$

Монотонные функции

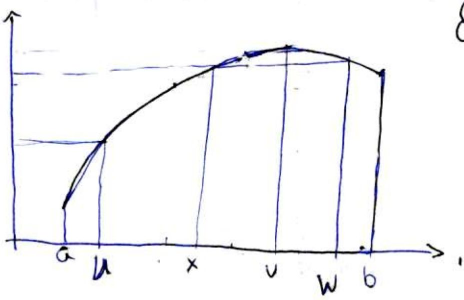
Определение: f инъективна, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Строгого моноток.: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ — возрастание

$\Rightarrow$ следует инъективность

Теорема: Если f на отрезке непрер. и инъективна, то она строго монотонна.

Док-во: $u < v < w \Rightarrow f(v)$ между $f(u)$ и $f(w)$.



Если $f(w) \in [f(u), f(v)]$, то

$\exists x : f(x) = f(w),\ x \in [u, v]$

$a < x_1 < x_2 < b$

$f(a) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(b)$

Теорема: Если f на пром-ке Δ монотонна и $f(\Delta)$ промежуток, то f непрерывна на Δ.

Док-во: Выбираем вариант возрастания.

Возьмём p внутри Δ

$\varepsilon > 0$ маленькое $B_\varepsilon(f(p)) \subset \underbrace{f(\Delta)}_{\text{образ}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists u, v \in \Delta: \quad f(p) - \varepsilon < f(u) < f(p) < f(v) < f(p) + \varepsilon$

$$-\varepsilon < f(u) - f(p) < 0 < f(v) - f(p) < \varepsilon$$

$u < x < v \Rightarrow \quad f(u) < f(x) < f(v) \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - f(p) < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon): |x - p| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(p)| < \varepsilon}$$

$$x \in B_\delta(p) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(p)) \ \square$$

Теорема: Если f на промежутке Δ непрер. и строго монотонна, то обратная функ-ия f^{-1} существует, строго моном. того же типа и непрерывна.

Док-во: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \gtrless f(x_2)$

Тогда $f^{-1}(y_1) \lessgtr f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2$

даёт монотонность того же типа.

Предыд. теорема применяется к f^{-1}:

$f^{-1}: f(\Delta) \to \underbrace{\Delta}_{\text{промежуток}}$, то есть:

Следствие: Если f^{-1} на пром-ке $f(\Delta)$ монотонна и $\Delta = f^{-1}(f(\Delta))$ пром-ок, то f^{-1} непрер. на $f(\Delta)$.

5.4 Предел функции

Александр Петрович Ульянов

Определение

Непрерывность: $f(x) \to f(p)$ при $x \to p$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$

заменим $f(p)$ на какое-то A - предел.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (1)

запрет $x = p$

$x \in \underbrace{\overset{\circ}{B}_\delta(p)}_{\text{выколотая окр-ть}} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(A)$

Определение: Ф-ия f имеет предел $= A$ в точке $x = p$, если (1):

предел слева: $p - \delta < x < p$ — x слева от p

предел справа: $p < x < p + \delta$ — x справа от p

$f(x) \to A$ при $x \to p$: $\lim\limits_{x \to p} f(x) = A$ — обычный, двусторонний

слева: $\lim\limits_{x \to p-0} f(x) = f(p-0)$

справа: $\lim\limits_{x \to p+0} f(x) = f(p+0)$

Лемма: Предел ф-ии в конечной точке существует тогда и только тогда, когда её левый и правый пределы существуют и равны: $f(x) \to A$ при $x \to p \Leftrightarrow f(p-0) = f(p+0) = A$

Исчезает лемма, если представить предел через образ:

$f(U^\circ) \subseteq V$

$x \in U^\circ \quad A \in V$

Общие св-ва предела

1) единственность
2) арифметические
3) порядковые

Теорема: Если $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$ при $x \to p$, то

(1) $f(x) < g(x)$ вблизи $x = p$ $\Rightarrow A \leq B$

$\exists$ окр-ть $U^\circ \ni p$ т. что $x \in U \Rightarrow$

(2) $A < B \Rightarrow f(x) < g(x)$ вблизи $x = p$.

Док-во: (2) $2\varepsilon < B - A$ — возьмём ε такие, что из A не перекрывала точку B и наоборот.

(1) От противного:

$A > B \underset{(2)}{\Rightarrow} \underbrace{f(x) > g(x)}$ вблизи $x = p$.

противоречие с $f(x) < g(x)$. $\square$

Пример: $f(x) = 0$, $g(x) = e^{-x}$ при $x \to +\infty$.

$g(+\infty) = 0$

Следствие: $\exists$ не более одного предела f при $x \to p$

Док-во: $f(x) \to A$ и $f(x) \to B > A$

$\Rightarrow f(x) < f(x)$ вблизи p. $\square$

Теорема: Если $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$ при $x \to p$, то

(1) $f(x) \pm g(x) \to A \pm B$

(2) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$

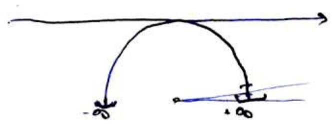
(3) $f(x) / g(x) \to A / B$ в случае $B \neq 0$.

Док-во: Аналогично док-ву ~~для~~ для непр-ти при $f(x) = F$, $g(x) = G$ и $A = \lim_{x \to p} f(x)$, $B = \lim_{x \to p} g(x)$

Если допускать бесконечные пределы A и B, то аналогично, кроме неопр-ей:

$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞ / ∞.

Бесконечные вариации: надо $B^{\circ}_{\delta}(\pm\infty)$ и $B_{\varepsilon}(\pm\infty)$.



$B_N(+\infty) = (N, +\infty]$

$B^{\circ}_N(+\infty) = (N, +\infty)$

$B_N(-\infty) = [-\infty; -N)$

$f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$

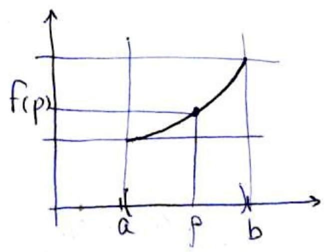
$\forall N > 0 \quad \exists M(N) > 0: \quad x < M \Rightarrow f(x) > N$

Простейшие признаки существования (7пр)

Если f монотонна, то пределы = точные грани.

Лемма: Всякая монотон. ф-ия на промежутке имеет одностор. пределы (в каждой мыслимой точке)

Док-во: Выберем неубывающую.



В определение не входят точки a и b, поэтому они могут быть и ~~открытые~~ бесконечности

$L = \inf\{f(x) \mid x > p\}$

$L+\varepsilon \leftarrow$ не нижн. грань

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : L < f(p+\delta) < L+\varepsilon.$

$\forall x: p < x < p+\delta \Rightarrow L \le f(x) < f(p+\delta) < L+\varepsilon$

$|f(x) - L| < \varepsilon$ □

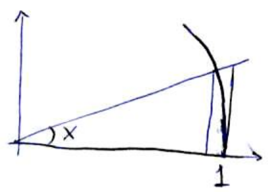
Зажатость: $f(x) \le g(x) \le h(x)$ вблизи $x = p$.

Лемма: Если $f(x) \le g(x) \le h(x)$ вблизи $x = p$, $f(x) \to A$ и $h(x) \to A$ при $x \to p$, то $g(x) \to A$.

Док-во: Разобраться с определением предела.

Примеры применения: замечат. пределы

1) $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$

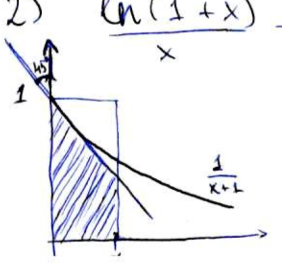


$$\frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 \leftarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < \cos x \to 1$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 1$$

2) $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ при $x \to 0$



$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$$

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}x}_{\to 1 \text{ при } x \to 0} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

5.5 Дальнейшее изучение предела

Замена переменных в предельном переходе: $z = g(f(x))$

$y = f(x)$ и $z = g(y)$

$y \to f(a)$, но $y \neq f(a)$

Лемма: Если выполнены 3 условия:

(1) $f(x) \to b$ при $x \to a$;

(2) $f(x) \neq b$ при $x \neq a$, кроме, возможно, её самой;

(3) $g(y) \to c$ при $y \to b$,

то $g(f(x)) \to c$ при $x \to a$.

$(A \& B \& C) \Rightarrow D$

$(A \& B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)$

Если выполнены 2 условия: (1) и (2), то $g(y) \to c$ при $y \to b$ влечёт $g(f(x)) \to c$ при $x \to a$.

Док-во: Тоже, что в лемме о композиции для непрерывности, но теперь все окр-ти — выколотые.

Правило Бернулли-Лопиталя

По сути: признак существования предела.

Теорема: Если при $x \to a+0$ ← доказываем для одностороннего

$f(x) \to A$ и $g(x) \to A$, $A = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

и ф-ии дифф-мы на некотором интервале (a, b), то:

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

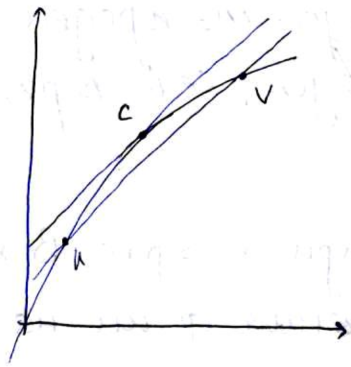
как только второй $\exists$ (существует).

Док-во: $(A = 0)$

Если $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ бесконечен, то перевернём дробь, то есть

$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ конечен при всех x.

$\forall \varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ т. что: $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon$ при $x \in (a, a+\delta)$



возьмём три точки: $\overset{a<}{u} < c < \overset{<a+\delta}{v}$. По т-ме Коши:

$$\frac{f(v) - f(u)}{g(v) - g(u)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ — это есть, т.к. $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, a+\delta)$:

(I) $\left| \frac{f(v) - f(u)}{g(v) - g(u)} - L \right| < \varepsilon$. Просто переходим к пределу: пусть $u \to a+0 \Rightarrow f(u) \to 0$, $g(u) \to 0$ и тогда:

$$\left| \frac{f(v)}{g(v)} - L \right| \leq \varepsilon$$

$\square$

$(A = \pm\infty)$

(I) $\cdot \left(1 - \frac{g(v)}{g(u)}\right)$

$(A = \infty)$

(I). Умножим на $1 - \frac{g(v)}{g(u)} = \frac{g(u)-g(v)}{g(u)}$:

$$\left|\frac{f(u)-f(v)}{g(u)} - L + L\cancel{\frac{g(v)}{g(u)}}\right| < \varepsilon\left(1-\cancel{\frac{g(v)}{g(u)}}\right) < 2\varepsilon$$

маленькие хитрости

$$\frac{f(u)-f(v)}{g(u)} = \frac{f(u)}{g(u)} - \cancel{\frac{f(v)}{g(u)}}$$

поскольку $g(v)$ и $f(v)$ не уходят в бесконечность, а $g(u)$ уходит в беск-ть: $u \to a+0$.

Получаем: $\left|\frac{f(u)}{g(u)} - L\right| < 2\varepsilon$.

Верхний и нижний предел

Предел существует не всегда, а вот точные грани существуют всегда. Поэтому можно определить предел через точные грани. При этом предел существует, если верхний и нижний предел совпадают (?).

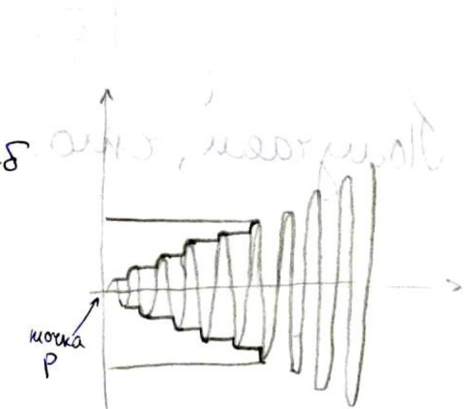
Рассмотрим и изучим поведение $f(x)$ при $x \to p+0$. В ходу будут окр-ти $(p, p+\delta)$. Рассмотрим значения ф-ии на этом интервале: $R_\delta = \{f(x) \mid x \in (p, p+\delta)\}$

множество значений ф-ии

Теперь можем рассмотреть

нижнюю грань $f_*(p,\delta) = \inf R_\delta$

верхнюю грань $f^*(p,\delta) = \sup R_\delta$



Если теперь $\delta_1 > \delta_2 > 0 \Rightarrow R_{\delta_1} \supseteq R_{\delta_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_*(\delta_1) \le f_*(\delta_2)$ $\qquad$ $f^*(\delta_1) \ge f^*(\delta_2)$

$f_* \searrow$ $\qquad$ $f^* \nearrow$

$\exists \lim\limits_{\delta \to 0+0} f_*(\delta) = \sup\limits_{\delta>0} \inf R_\delta$ $\qquad$ $\exists \lim\limits_{\delta \to 0-0} f^*(\delta) = \inf\limits_{\delta>0} \sup R_\delta$

Верхний и нижний предел

$\exists \lim\limits_{\delta \to 0+0} f_*(\delta) = \sup\limits_{\delta>0} \inf R_\delta = \lim\limits_{x \to p+0} \inf f(x)$ – нижний предел ($\underline{\lim}$).

$\exists \lim\limits_{\delta \to 0-0} f^*(\delta) = \inf\limits_{\delta>0} \sup R_\delta = \lim\limits_{x \to p+0} \sup f(x)$ – верхний предел ($\overline{\lim}$)

Встречается в признаках сходимости рядов.

<u>Теорема</u>: $\lim \exists \Leftrightarrow \underline{\lim} = \overline{\lim}$

<u>Критерий Коши</u>

Применяется больше в доказательствах свойств. Этот критерий равносилен существованию предела, но при этом не используется число A:

$f(x) \to A$ при $x \to p$.

<u>Условие Коши</u>: для f при $x \to p$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon): \underbrace{\begin{cases} 0 < |x_1 - p| < \delta \\ 0 < |x_2 - p| < \delta \end{cases}}_{x_1, x_2 \in \overset{o}{B}_\delta(p)} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Определение предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \underbrace{0 < |x - p| < \delta}_{x \in \overset{o}{B}_\delta(p)} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

x принадлежит выколотой окр-ти этой точки

Критерий Коши <=> Теорема Коши – Дедекинда

f имеет конечный предел при $x \to p$ **<=>** f удовл. критерию Коши при $x \to p$.

Док – во: (=>) $|f(x_1) - f(x_2)| \overset{?}{\leq} |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < 2\varepsilon$.

(<= – Коши не смог)

От противного => нижний предел не равен верхнему:

$$\underline{\lim} = A,\ \overline{\lim} = B\ ,\ A < B.$$

$$A = \sup_\delta (\underbrace{\inf R_\delta}_{f_*(p,\delta)}) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ A + \varepsilon > \inf R_\delta \Rightarrow \exists x_1 \in \overset{\circ}{B}_\delta(p) : A + \varepsilon > f(x_1)$$

сдвинемся вверх

поскольку двусторонний: $(p-\delta,\ p+\delta)$

$\boxed{\Rightarrow \forall \delta > 0 : A \geqslant \inf R_\delta}$

$\exists x_2 \in \overset{\circ}{B}_\delta(p) : B - \varepsilon < f(x_2)$

$f(x_2) - f(x_1) > B - A - 2\varepsilon \geqslant \varepsilon$

нужно получить

Т.к. док-во от противного, то должны получить отрицание условия Коши:

$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \dots$

?

Достаточно взять $\varepsilon < \frac{B - A}{3}$.

Далее используем св-во полноты, то есть то, что верхний и нижний пределы существуют.

Изолированные точки и точки сгущения

При $x \to p$: (1) x лежит в $B_\delta(p)$ или $\mathring{B}_\delta(p)$,
(2) x лежит в области определения f.

Определение: точка p числового мн-ва X называют точкой сгущения X, если в любой её (выколотой) окрестности есть другие точки X.

одно есть отрицание другого

Определение: точка p числового мн-ва X называют изолированной точкой X, если найдётся её (выколотая) окрестность не содержащая других точек X.

Пример: $\bar{\mathbb{R}} \supset \mathbb{N}$ — все точки изолированные
$\bar{\mathbb{R}} \supset \mathbb{Q}$ — все точки сгущения $\mathbb{R}$
У $(0, 1)$ точки сгущения — мн-во $[0, 1]$.
Мн-во точек сгущения $\mathbb{N}$: $\{+\infty\}$
$\mathbb{Q}$: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

X	$\neg X$	
+	+	сгущ.
+	−	изолир.

Лемма (пародоксальная):
Всякая функция непрерывна в каждой изолир. точке своей области определения.

! Если мы рассматриваем предел, то только в точках сгущения.

Лемма: Каждая фу-ия непрерывна во всех изолированных точках своей обл. определения.

Док-во: $f(x) = f(p)$, ибо $x = p \Rightarrow$ в опр-ии непрерывности неравенство выполнено. □

5.6 Дифференцируемость и дифференциалы

Эволюция определения дифф-сти

Определение (Коши) Ф-ию f наз. дифф-мой в точке $x=p$, если
$$\exists \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=f'(p)=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(p+\delta)-f(p)}{\delta}$$

$$r(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-f'(p) & x\neq p\\ 0 & \text{при } x=p\end{cases}$$

Определение (Вейерштрасс): Ф-ию f называют дифф-мой в точке p, если $\exists$ число $f'(p)$ и ф-ия $r(x)$ (непрерывна при $x\to p$ и $r(p)=0$).

Сильное определение

такие, что: $f(x)=f(p)+\boxed{f'(p)(x-p)+r(x)(x-p)}$

Ур-ие кас-ой: $f(x)=f(p)+k(x-p)$

$f(x)-f(p)$ = приращение f

Одно из направлений

$\boxed{f(x)=f(p)+\varphi(x)(x-p)}$ ← где $\varphi(x)=f'(p)+r(x)$ непрер. при $x=p$.

$\varphi(x)$ - непрер.

и тогда $\varphi(p)=f'(p)$. - то, что мы называем производной.

Общие правила дифф-ния

Теорема: Если f и g дифф-мы в точке $x=p$, то $f\pm g$, fg, а также f/g при $g(p)\neq 0$, дифф-мы в т. $x=p$ и их производные вычисляются по известным правилам.

Док-во: 1) $f(x)=f(p)+\varphi(x)(x-p)$

$g(x)=g(p)+\psi(x)(x-p)$

$f(x)\pm g(x)=(f(p)\pm g(p))+(\varphi(x)\pm\psi(x))(x-p)$

2) $f(x)\cdot g(x) = f(x)\, g(p) + f(x)\cdot \varphi(x)\,(x-p) =$

$= \underbrace{f(p)\cdot g(p)}_{\text{значение}} + \underbrace{(\varphi(x)\cdot g(p) + f(x)\cdot \psi(x))}_{\text{непрерывная ф-ия}} \overbrace{(x-p)}^{\text{приращение}}$

$\Rightarrow f'(p)\cdot g(p) + f(p)\cdot g'(p)$

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(p)}{g(p)} = \dfrac{f(x)\cdot g(p) - f(p)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(p)} = \dfrac{\cancel{f(p)\cdot g(p)} + \varphi(x)\cdot g(p)(x-p) - \cancel{f(p)\, g(p)} - f(p)\cdot \psi(x)(x-p)}{g(x)\cdot g(p)} =$

$= \dfrac{\varphi(x)\cdot g(p) - f(p)\cdot \psi(x)}{g(x)\cdot g(p)} \cdot (x-p)$

$x = p \Rightarrow \dfrac{f'g - fg'}{g^2} = \left(\dfrac{f}{g}\right)'$ □

Теорема: Если $y = f(x)$ дифф-ма в точке $x = p$ и $z = g(y)$ дифф-ма в точке $y = f(p)$, то $z = g(f(x))$ дифф-ма в точке $x = p$.

$(g\circ f)'(p) = g'(f(p))\cdot f'(p)$

Док-во: $f(x) - f(p) = \boxed{\varphi(x)(x-p)}$

$g(y) - g(f(p)) = \psi(y)\boxed{(y - f(p))}$

$g(f(x)) - g(f(p)) = \psi(f(x))\cdot \varphi(x)(x-p)$ □

Теорема: Если f обратима и дифф-ма в точке $x = p$, причём $f'(p) \neq 0$, то обратная ф-ия f^{-1} дифф-ма в точке $q = f(p)$ и

$(f^{-1})'(p) = \dfrac{1}{f'(p)} = f'(p)^{-1}$

Док-во: $f(x) - f(p) = \varphi(x)(x-p)$

$y = f(x),\ x = f^{-1}(y)$
$q = f(p),\ p = f^{-1}(q)$

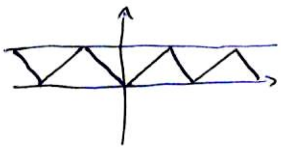
$y - q = \varphi(f^{-1}(y))\cdot (f^{-1}(y) - f^{-1}(q))$

$f^{-1}(y) = f^{-1}(q) + \dfrac{1}{\varphi(x)}\cdot (y-q)$ □

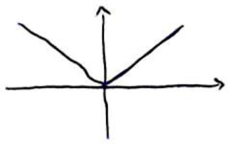
Следствие: Все основные элем. ф-ии дифф-мы во всех внутренних точках области опр-ия.

Док-во: x^n (+ полинома, $\frac{P(x)}{Q(x)}$)
e^x и $\sin x$ из замеч. пределов
остальные обратные или из тригонометрии. □

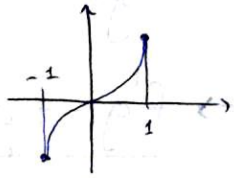
arccos(cos x):



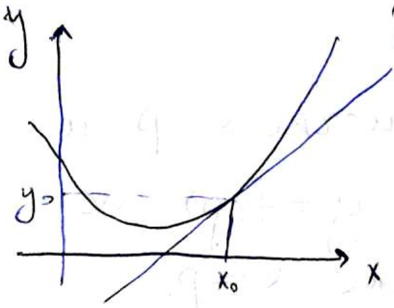
$|x| = \sqrt{x^2}$:



arcsin x:



Дифференциалы



Ур-е кас: $\underbrace{y - y_0}_{dy} = f'(x_0)\cdot \underbrace{(x - x_0)}_{dx = \Delta x}$ ← в с.к., где (x_0, y_0) – начало: $dy = f'(x_0)\,dx$

Это мы называем дифф-ом переменной, или приращением.

Это не приращение, но приращение ф-ии:

$f(x) - f(x_0) = dy + o(dy)$ ← т.к. $dy = \overset{=\text{const}}{f'(x_0)}dx$, то $o(dy) = o(dx)\cdot f'(x_0)$

Дифф-ал dy является главной линейной частью приращения ф-ции.

По Вейерштрассу:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{r(x)(x - x_0)}$$ перешёл, справедливо

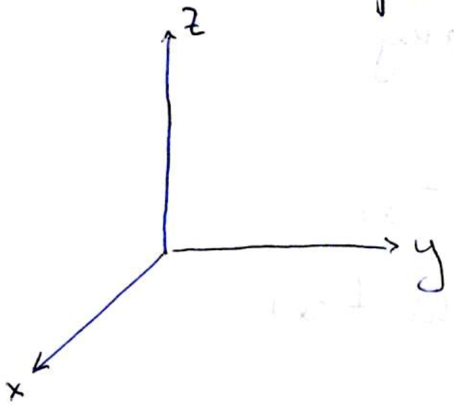
Поменяли: $\left.\begin{aligned} x_0 &\mapsto x \\ x &\mapsto x + \Delta x \end{aligned}\right\} \Rightarrow$
$dx(x, \Delta x) = \Delta x$
$dy(x, \Delta x) = f'(x)\cdot\Delta x \quad \Rightarrow$
$dy = f'(x)\cdot dx$

$d(f \pm g) = df \pm dg$
$d(f\cdot g) = g\,df + f\,dg$
$d(f/g) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$

$\frac{dx}{dt} = x'(t)$
$\frac{dy}{dx} = y'(x)$
$\Rightarrow y(x(t)) \sim \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$
$y'(t) = y'(x)\cdot x'(t)$

Инвариантность формы записи первого дифф-ла $\begin{cases} dy = y'(x)\,dx = y'(x)\cdot x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \end{cases}$

Две переменные



$z = f(x, y)$

в точке

Ур-ие касат.: $z - z_0 = f'_x(\cdot)(x - x_0) + f'_y(\cdot)(y - y_0) + o(\dots)$

$z_0 = f(x_0; y_0)$

При $y = y_0$: $z = f(x, y_0)$ $\quad$ $x = x_0$: $z = f(x_0, x)$

$$df = dz = \underbrace{f'_x(x, y)}\,dx + \underbrace{f'_y(x, y)}\,dy$$

частные производные

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Высшие дифференциалы

$df \to d(df) = d^2 f$

$d^2 x = d(dx) = 0$ – если x независимая переменная

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + \cancel{f'(x)\cdot \underbrace{d(dx)}_{0}} = f''(x)\cdot(dx)^2$$

$dx^2 = (dx)^2$

$d^3 f = d(d^2 f) = \dots = f'''(x)dx^3$

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)$$

Если $x = x(t)$, то $d^2 x = x''(t)\cdot dt^2$

$$f(x) \Rightarrow d^2 f = d(df) = d(f'(x)\cdot x'_t\, dt) = (\underbrace{f''_{xx}\cdot x'_t\cdot x'_t + f'_x\cdot x''_t}\ )dt^2$$

5.7 Интегрирование по Риману и Дарбу

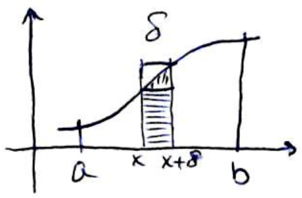
Теорема: Площадь $S(x)$ под графиком $f(x)$ является первообразной для $f(x)$.

Док-во: Выберем $\delta > 0$.

$$\min\{f(c) \mid c \in [x, x+\delta]\} = m(x)$$

$$\max\{f(c) \mid c \in [x, x+\delta]\} = M(x)$$

$$\Rightarrow \quad m(x) \le f(x) \le M(x)$$



$$m(x)\delta \le \frac{S(x+\delta) - S(x)}{\delta} \le M(x)\delta$$

$$\delta \to 0: \quad f(x) \le S'(x) \le f(x)$$

Теорема о среднем:

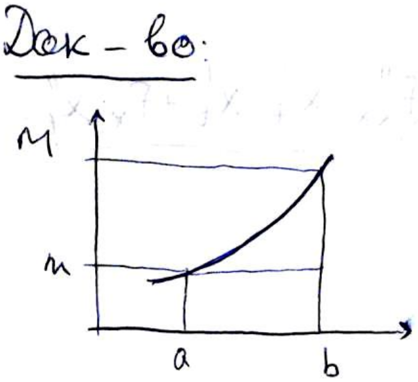
Если f на $\Delta = [a,b]$ имеет первообразную, то f интегрируема на Δ.

Теорема: Если f на Δ ограничена:

$$m \le f(x) \le M, \text{ то}$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Док-во:



$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ – дифф-ма на Δ, то по т-ме Лагранжа:

$$\exists c \in \Delta: \ F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) \underset{\text{по опр-ию } F(x)}{=} f(c)(b-a)$$

Теорема о взвешенном среднем:

Если ф-ии $f(x)$ и $g(x) \geq 0$ непрер. на $\Delta = [a, b]$, то

$$\exists c \in \Delta : \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

Док-во: Образ $f([a,b])$ $\underbrace{\text{либо } \{c\}}_{f(x)=f(c)}$, либо $[m, M]$.

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\int_a^b m\, g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x) g(x)\, dx \leq \int_a^b M g(x)\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\exists c \in [a, b] : f(c) \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

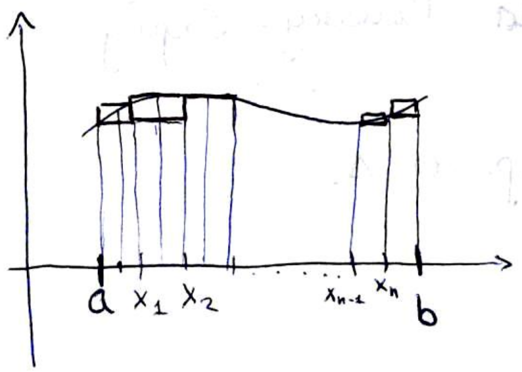
Св-ва интеграла (определенного):

а) линейность (линейные комбинации): $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$;

б) аддитивность: $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$;

в) монотонность: $f(x) \geq g(x)$ на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$

Разбиения



$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ — конечное мн-во точек

$P' \supseteq P \Rightarrow P'$ мельче, чем P

измельчение

$\Delta x_k = |x_k - x_{k-1}|$

длина фрагмента

$$\delta(P) = \max \Delta x_k$$

$\downarrow$

характерный параметр P.

Суммы Римана

$c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$\sum\limits_{1 \leq k \leq n} f(c_k) \Delta x_k$ — f интегрир., если Σ имеют предел при $\delta = \delta(P) \to 0$.

Суммы Дарбу

$$\left.\begin{array}{l} m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\} \end{array}\right\}$$

$m_k \leq f(x) \leq M_k$ на $[x_{k-1}, x_k]$

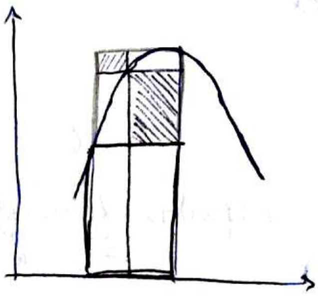
~~Появляется „лифт", доп. площадь.~~ Тогда значение суммы Римана зажимается суммами Дарбу.

$L(f,P) = \sum m_k \Delta x_k \Rightarrow L = \underset{P}{\overset{\inf}{\cancel{\sup}}} L(f,P)$ по всем разбиениям ;

$U(f,P) = \sum M_k \Delta x_k \Rightarrow U = \underset{\sup}{\cancel{\inf}} U(f,P)$?

$L(P) \quad L(P') \quad ? \quad U(P') \quad U(P)$

Лемма: I) Если $P' \geq P$, то $L(P') \geq L(P)$,
$U(P') \leq U(P)$.



$L \leq U$
по построению

II) $\forall P, Q : L(P) \leq U(Q)$

Док-во: Возьмём $P \cup Q$

$$P \subseteq P \cup Q \supseteq Q$$

$$L(P) \leq L(P \cup Q)$$
$$\wedge$$
$$U(Q) \leq U(P \cup Q)$$

Если $L = U$, то f интегрир. по Риману-Дарбу на $\Delta = [a,b]$ и $\int_a^b f\,dx = L = U$.

Если $L < U$, то f не интегрир. на Δ.

Лемма: Фу-ия f интегр. по Дарбу на $\Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists P: E(f,P)<\varepsilon$.

$$E(f,P) = U(f,P) - L(f,P)$$

ошибка интегрирования

Теорема Дарбу, Дюбуа-Реймон

Фу-ия f интегрир. на $\Delta \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon): \ (\forall P) \ \delta(P)<\delta \Rightarrow E(f,P)<\varepsilon$.

Ограниченная: $|f(x)|<M$

хар. параметр P ?

Следствие: Фу-ия интегрируема по Д. $\Leftrightarrow$ по Р.

Интегрируемость и разрывы

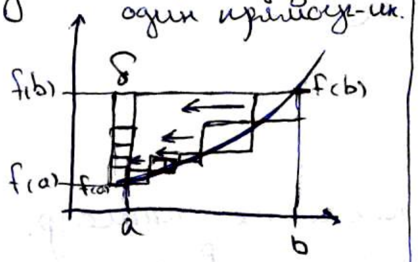
Теорема: Всякая монотонная (очень хорошая ф-ия) ф-ия на отрезке интегр-ма.

Док-во: $f(x)\nearrow$, возьмём P с $\delta(P)=\delta$.

Т.к. $f(x)$ не убывает $\left.\begin{array}{l} m_k = f(x_{k-1}) \\ M_k = f(x_k) \end{array}\right\}$ $E(f,P)=\sum\limits_{1\le k\le n}(M_k-m_k)\Delta x_k \le \sum\limits_{1\le k\le n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\delta =$

$= \delta(f(b)-f(a))$. □

Всё, что происходит в т-ме: сдвижка площадей в один прямоуг-ик.



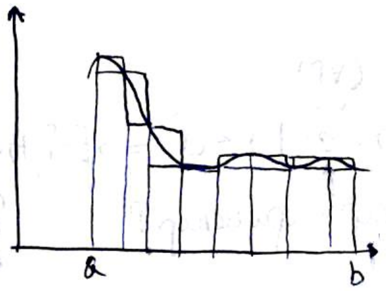
Теорема: Всякая непрер. фу-ия на отрезке интегрируема.

Определение: Колебание ф-ии на мн-ве X:

$$\omega(f,X) = \sup f(X) - \inf f(X)$$ ← $\infty-\infty$ нет

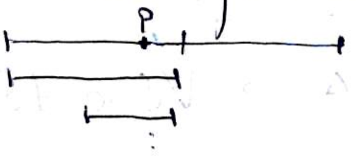
Лемма (О малых колебаниях): Если ф-ия непрер. на отрезке K, то $\forall \varepsilon > 0$ можно разбить K на конечное число фрагментов так, что колебание на каждом $< \varepsilon$.

Док-во:



$$E(f, P) \leq (b-a)\,\varepsilon$$

$K = K_0$. От противного по методу пополам.



$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots \ni \{p\}$

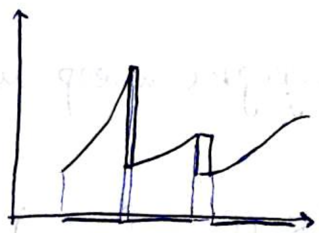
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{2}) : |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega(f, B_\delta(p)) < \varepsilon$ — противоречие, т.к.:

$\exists n : K_n \subset B_\delta(p) \Rightarrow \underbrace{\omega(f, K_n)}_{\geq \varepsilon} \leq \omega(f, B_\delta(p))$

Определение: Ф-ия с конечным мн-вом разрывов первого рода наз-тся *кусочно-непрерывной*.

Теорема: Всякая кус.-непрер. ф-ия на отрезке интегрируема.



$\delta < \frac{\varepsilon}{H}$.

$H = \Sigma$ скачков.

Док-во: Разобьём весь отрезок на более мелкие отрезки, внутри которых ф-ия непрерывна, и рассмотрим их отдельно. Вклад скачка высоты h в сумму Дарбу не превосходит $|h| \cdot \delta(P) \to 0$. □

Пример: I) Ф-ия Дирихле $= \chi(\mathbb{Q}) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Какой-бы отрезок не взяли:

$m_k = 0$, $M_k = 1$.

$L = 0$, $U = 1 \Rightarrow$ ф-ия Дирихле не интегр.

II) Ф-ия Римана (Томэ): $f(x) = \begin{cases} 1/q, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Непрер. в иррац. точках, интегрируема!

Глава 6. Числовые последовательности

6.1 Зачем нужны последовательности?

Определение: Если для $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\mathbb{Z}, \geq 0$) задано x_n, то мы говорим: определена (бесконечная) последовательность $\{x_n\}$.

Откуда берутся:
- итерации;
- суммирование бесконечных рядов;
- как инструмент док-ва;
- искусственные примеры со спец. св-ми.

Метод Ньютона–Рафсона:

Корни ур-ия $f(x)=0$ можно вычислить, как: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Сумма ряда: предел $\lim S_n$ частичных сумм: $\underbrace{S_n = a_1 + \ldots + a_n}_{\text{суммирование ряда}}$, когда он существует и конечен.

$$\boxed{\text{Последовательность = функция на } \mathbb{N} \text{ числах: } \{a_n\} \longrightarrow a(x) = a_{\lfloor x \rfloor}}$$

Пример рекурсии: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $x_0 = 1$.

Пример беск. произведения: $\Pi_n = a_n \cdot \Pi_{n-1}$, $\Pi_0 = 1$.

$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \ldots$ ← как разложение полинома на мн. мн-ли, соотв. его нулям

6.2 Предел последовательности

Определение: Числовая посл-сть $\{a_n\}$ – это ф-ия на мн-ве $\mathbb{N}$, заданная правилом $n \mapsto a_n$. Предел посл-ти берётся при $n \to +\infty$, т. к. $+\infty$ – точка сгущения $\mathbb{N}$. $\lfloor x \rfloor$ – округление числа x вниз.

Последовательность $\{a_n\}$ называют сходящейся, если $\exists a$, что:

окр-ть беск-ти: $(N, +\infty)$ ⟶ $\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.}$

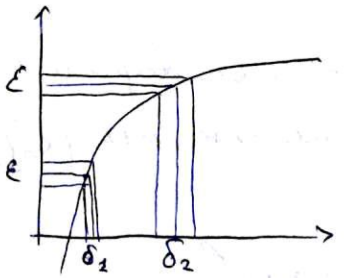
Иначе $\{a_n\}$ – расходящаяся посл-ть.

$a_n \to +\infty$; $a_n \to -\infty$; отрицание

$p\in[a,b]$

Равномерная непрерывность

$\forall p\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,p): \underset{\forall x\in[a,b]}{|x-p|<\delta} \Rightarrow |f(x)-f(p)|<\varepsilon$



δ = „мера" непрер. в точке

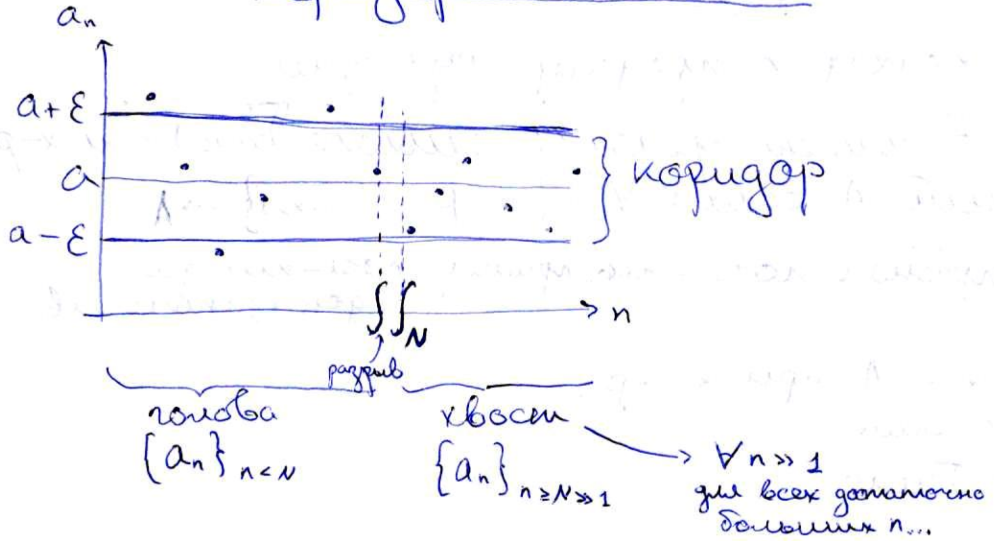
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon): \forall \overset{y}{\cancel{p}}, x\in X: |x-\overset{y}{\cancel{p}}|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\overset{y}{\cancel{p}})|<\varepsilon$

Опр.: Ф-ия f называется равномернонепрер. на X, если

Теорема: Всякая непрер. ф-ия на отрезке равномерно непрер. на нём.

Доказать через лемму о малых кол-ях.

Коридоры и хвосты



Арифметические и порядковые св-ва предела n

$a_n > b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

$\lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$

Бесконечные пределы

Секвенциальный подход к пределу фун-ции

Определение: Фу-ия F имеет предел (в смысле Гейне) в т. $x=p$ равный A, если: $\forall \{x_n\} \to p \quad \{f(x_n)\} \to A$

$\{x_n\}$ – пробная посл-ть, пример посл-ти для доказательств.

Утверждение $C = f(x) \to A$ при $x \to p$, по Коши

H = по Гейне.

Теорема: Пределы по Коши и по Гейне равносильны:

$C \Rightarrow H \qquad \cancel{H \Rightarrow C}$

$\neg C \Rightarrow \neg H$

Док-во: $(C \Rightarrow H)$

По Коши: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X \quad 0 < |x_n - p| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$.

Выберем пробную посл-ть: $\{x_n\} \to p$.

$\forall \delta > 0 \quad \exists N = N(\delta) : n > N \Rightarrow 0 < |x_n - p| < \delta$

В итоге: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\delta(\varepsilon)) : n > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\{f(x_n)\} \to A$.

$(\neg C \Rightarrow \neg H)$

Отрицание по Коши: $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x : 0 < |x - p| < \delta \ \& \ |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$

$\delta_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$ для каждого δ_n получу x_n:

$\underbrace{0 < |x_n - p| < \frac{1}{n}}_{x_n \to p} \ \& \ \underbrace{|f(x_n) - A| \geq \varepsilon}_{f(x_n) \not\to A}$

6.3 Зажатость и монотонные посл-ти

$x_n \le y_n \le z_n$, $x_n \to a$, $z_n \to a \Rightarrow y_n \to a$

Монотон.: $x_{n+1} \ge x_n$ – неубывающая

$x_{n+1} \le x_n$ – невозрастающая

$x_{n+1} > x_n$ – возрастающая

$x_{n+1} < x_n$ – убывающая

Теорема (Вейерштрасса): Вся (ограниченная) монотон. посл-ть имеет (конечный) предел.

Док-во: По лемме.

Примеры трюков

$\sqrt[n]{n} \to x^{\frac{1}{x}}$, $\frac{a^n}{n!} \to \frac{a^x}{x!}$

Число e как предел

$T_n = (1 + \frac{1}{n})^n \to e$.

$2 \le T_n \le 3$ Бернулли.

$2 < \lim T_n < 3$

$n = \frac{1}{x} \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ (уже считали).

Эйлер: $S_n = \sum\limits_{0 \le k \le n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

$n! \ge 2^{n-1}$, $n > 2$

$\Rightarrow S_n < 1 + \sum\limits_{1 \le k \le n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{геом. прогр.}}$

$1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$

Теорема (Эйлер): Число e иррационально.

Док-во: От противного: $e = \frac{p}{q}$

$$S_n \to e,\ S_{q+n} \to e,\ q! \cdot S_{q+n} \to (q-1)! \cdot p \in \mathbb{Z}$$

$$q!\ S_{q+n} = \sum_{0 \le k \le q+n} = \sum_{0 \le k \le q} \underbrace{\frac{q!}{k!}}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\left(\frac{q!}{(q+1)!} + \dots + \frac{q!}{(q+n)!}\right)}_{R_n}$$

т.к. $q \ge k$

$$R_n = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1)\dots(q+n)} < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{(q+1)^n} = \frac{1}{q} \cdot \left(1 - \frac{1}{(q+1)^n}\right)$$

$$q > 1 \Rightarrow 0 < R_n < 1 \Rightarrow R_n \notin \mathbb{Z}$$

6.4 Частичные пределы и компактность отрезка

Точки сгущения и подпослед-ти

Определение: Число a наз-тся точкой сгущения $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \infty \ n : |x_n - a| < \varepsilon$.

Примеры: $x_n = \sin\frac{\pi n}{2} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1 \dots\}$

$\{$т. сгущ.$\} = \{0, 1, -1\}$

$x_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5} \dots$

$\{$т. сгущ.$\} = [0, 1]$

Лемма: Т. сгущ. = предельная точка = частичный предел.

Определение: $n_k = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ – возраст. посл-ть нат. чисел.
$\{x_n\} \rightsquigarrow \{x_{n_k}\}$ = подпоследовательность

Определение: Предел подп-ти $\{x_{n_k}\}$ называют частичным пределом $\{x_n\}$.

Теорема (о точке сгущения)
Всякая (ограниченная) последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

Док-во: Если не ограничена, то $+\infty$ – точка сгущения.
Если ограничена, то делим пополам.
$K \supset \{x_n\}$, K_0 – отрезок. Каждый раз выбираем ту половину, в которой лежит бесконечное число точек:
$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \ni \{c\} \Rightarrow \forall U \ni \{c\}, \exists n : K_n \subset U$ $\square$

Верхний и нижний пределы

Определение: Наим. частичный предел = нижний = $\liminf x_n = \underline{\lim} x_n$
Наиб. частичный предел = верхний = $\limsup x_n = \overline{\lim} x_n$

Лемма: Мн-во частичных пределов всегда содержит свои точные грани.

Док-во: $\longrightarrow$

Теорема: Посл-ть $\{x_n\}$ сходится (имеет конечный предел) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \underline{\lim}\{x_n\} = \overline{\lim}\{x_n\}$

Док-во:

Теорема о покрытии отрезка интервалами

Теорема: Из любого покрытия отрезка интервалами можно извлечь конечное (подпокрытие) $\mathcal{U}$ - сем-во мн-в,
$\mathcal{U}$ - покрытие X $\qquad X \subseteq \bigcup u$
$\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ $\qquad u \subseteq \mathcal{U}$

Док-во: Методом деления пополам. От противного:
$K_0 \supset K_1 \supset \ldots \ni \{c\}$
$\exists U \in \mathcal{U}$ такое, что $c \in U$
$\exists n : K_n \subset U$ - противоречие. $\square$

Новое док-во старых теорем

Теорема об экстремальных значениях:

Всякая непрерывная f на отрезке достигает min и max.

Док-во: (№2) $\beta = \sup f(X) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$

Найдём последовательность $\{x_n\}$:

$\exists \{x_n\} : f(x_n) \to \beta$

Выберем подпоследовательность $\{x'_n\}$ (тоже, что и $\{x_{n_k}\}$):

$x'_n \to c \in X$

$f(x'_n) \to \beta \Rightarrow f(c) \overset{!}{=} \beta$

Теорема о промежуточных значениях: Если f непрер. на $[a, b]$, то $\forall y$ между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in [a, b] : f(c) = y$

Док-во: (№2) $f(a) \leq y \leq f(b)$ ← методом деления пополам: $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \ni c$

a_1 a_2 b_2 b_1

$\{a_n\} \to c$

$\{b_n\} \to c$

$$\underset{\searrow}{f(a_n)} \leq \underset{f(c)}{\overset{}{y}} \leq \underset{\swarrow}{f(b_n)}$$

Док-во: (№3) $g(x) = f(x) - y$

$g(a)$ и $g(b)$ – разных знаков

Теорема: всякая непрерывная f на отрезке X равномерно непрерывна на X.

Док-во: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 : |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

6.5 Фундаментальные последовательности

$a_n \to a$

Определение: $\{x_n\}$ фундаментальна (или посл-ть Коши), если
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \quad m, n \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Лемма: Верхний и нижний предел фундам. посл-ти равны.

Теорема: Числовая посл-ть имеет конечный предел $\Leftrightarrow$ она фунд-на.

Док-во: $(\Rightarrow)$ $|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a|$

1. $(\Leftarrow)$ Лемма + кон. предел

2. $(\Leftarrow)$ $x_{n_k} \to a$

$|x_1 - x_n| < \varepsilon$

$$|x_n - a| \leq \underbrace{|x_n - x_1|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|x_1 - x_{n_k}|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|x_{n_k} - a|}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon$$

Сходимость и пополнение

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \right\}$.

Рассмотрим посл-ть $\{$ Фундам. посл-ты рац. чисел $\}$ / эквивалентность.

Определение: Две фундам. (рац.) посл-ти $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): n > N \quad |x_n - y_n| < \varepsilon$

Отношение эквивалентности — это отношение, удовлетворяющее св-вам:

1) $a \sim a$
2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
3) $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ — транзитивность

ГЛАВА 7 Несобственные интегралы и числовые ряды

7.1 Несобств. интегралы

Пример (D'Аламбер):

$$\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} = -\frac{1}{b} - \frac{1}{a} < 0$$

$0<a<b$

$$\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x^2} = \int_{-a}^{0}\frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{b}\frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-a}^{x\to 0-0} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{x\to 0+0}^{x=b} = +\infty + \infty = +\infty$$

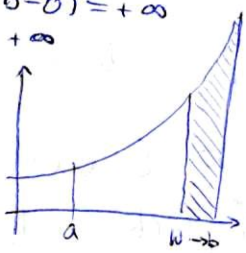
Одна особенность с краю

Можем: непр. f на $[a,b]$

I) Теперь: f непр. на $[a,b)$ → либо разрыв в $x=b$; либо $f(b-0)=+\infty$; либо $b=+\infty$

Тогда введём первообразную:

$$F(w) = \int_a^w f(x)\,dx,\quad a<w<b$$



Определение: Несобств. интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{w\to b-0}\int_a^w f(x)\,dx$$

Пример: $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \left(-e^{-x}\right)_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} + e^{0} = 1$

Если $\lim \nexists$ (не сущ.), то несобств. инт. $\nexists$ и расходится.

Если $\lim \exists$ и $= \pm\infty$, то несобств. инт. $\exists$ и расходится.

Если $\lim \exists$ и конечен, то несобств. инт. сходится (то и $\exists$)

II) Теперь: f непр. на $(a,b]$:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{w\to a+0}\int_w^b f(x)\,dx$$

Разделение особенностей

III) $(a;b) = (a,c] \cup [c,b)$ — уже побеждены

IV) $[a;b] = [a;c) \cup (c;b]$, c — плохая точка

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a)\ ;\ \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a+0)\ ;\ \int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0)$$

$$\int_{x=a}^{x\to b} U(x)\,dV(x) = \Big[U(x)\cdot V(x)\Big]_{x=a}^{x\to b} - \int_{x=a}^{x\to b} V(x)\,dU(x)$$

Пример: $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_{x=0}^{x\to+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = (0-0)+1 = 1.$

Оказывается: $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

Сравнение и эквивалентность

Задачи для несобств. инт-лов:

(1) установить сходимость/существование.

(2) вычислить

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x\to b-0\ ;\ G(x) = \int_a^x g(t)\,dt,\ x\to b-0$$

Лемма (сравнение): Если $0 \le f(x) \le g(x)$ на $[a,b)$, то

(0) $F^* = F(b-0)$ и $G^* = G(b-0)$ $\exists$;

(1) Если G^* сходится, то и F^* сходится;

(2) Если F^* расходится, то и G^* расходится.

Док-во:

(0) $f(x) \ge 0 \Rightarrow F(x)\nearrow$, $g(x)\ge 0 \Rightarrow G(x)\nearrow$ $\Big\}$ $0 \le F^* \le G^* \le +\infty$ по монотонности

Следствие: Если $f(x) \sim g(x)$ (т. е. $\frac{f(x)}{g(x)} \to A$, $0 < A < +\infty$), то F^* и G^* сход. или расх. одновременно.

либо $m\,g(x) \le f(x) \le M\,g(x)$, $0 < m \le M < +\infty$ вблизи $x=b$

Степенные особенности

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda} \quad \text{или} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \quad \text{или} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$$

$$\int_a^b x^{-\lambda}dx = \begin{cases} (0<\lambda<1) & \frac{1}{1-\lambda}(b^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}) \\ (\lambda=1) & \ln b - \ln a \\ (\lambda>1) & \frac{1}{1-\lambda}(b^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}) \end{cases}$$

	$b \to +\infty$	$a \to 0+0$
$(0<\lambda<1)$	∞	0
$(\lambda=1)$	∞	∞
$(\lambda>1)$	0	∞

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ → расх. при $\lambda \le 1$; → сход. при $\lambda > 1$

$\int_0^{1} \frac{dx}{x^\lambda}$ → расх. при $\lambda \ge 1$; → сход. при $0<\lambda<1$

Следствие: Если $f(x) \sim Ax^{-\lambda}$, при некоторых постоянных A и $\lambda>0$

(1) при $x \to 0+0$, то

$\int_0^b f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \lambda < 1$

(2) при $x \to +\infty$, то

$\int^{\infty} f(x)dx$ сходится $\Leftrightarrow \lambda > 1$

Пример: а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ — при $x \to 0$ $f(x) \sim x^{-\frac{1}{2}}$ ← сходится

при $x \to +\infty$ $f(x) \sim x^{-\frac{3}{2}}$ ← сходится

б) Парадокс маляра

7.2 Бэта- и гамма-функции

$B(x,y) \qquad \Gamma(x)$

Предыстория B-ф.:

$$\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt = \Big[\ldots\Big]_{t=0}^{t=1} \to 0 \;+\; \frac{n}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{n-1}\,dt =$$ похоже на биномиальный коэффициент

$m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — интегрирование по частям

при $t=1 \Rightarrow (1-t)^n = 0$

при $t=0 \Rightarrow t^m = 0$

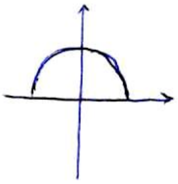
но при $n \in \mathbb{N}$

Сделав замену $m \rightsquigarrow \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ — ничего не изменится

$t = 1-u$ "$\Rightarrow$" $n \rightsquigarrow \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

может быть можно

Началось всё с площади полуокружности:



$$S = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-u)^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{\pi}{2}$$

$t^2 = u,\ t=\sqrt{u} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,du$

интеграл-то несобственный

Бэта-функция

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

$x \geq 1,\ y \geq 1 \Rightarrow$ инт-л собственный

$x > 0,\ y > 0 \Rightarrow$ инт-л несобственный и сходится

$B(x,y) \to +\infty$ при $x \to 0$
при $y \to y$

Св-ва:

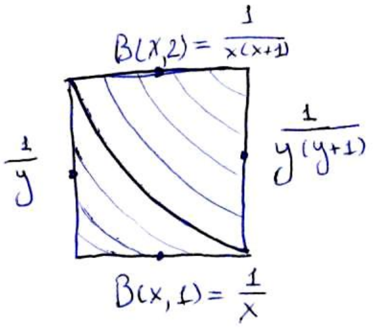
1) $B(x,y) = B(y,x)$
2) Т.к. B ф-ия в целых значениях — биномиальный коэф., то выполнено

$$\binom{k+1}{m+1} = \binom{k}{m+1} + \binom{k}{m}$$ — возможно, выполнено и для нецелых значений степеней

$\times\ 1 = t + (1-t) \Rightarrow B(x,y) = B(x+1,y) + B(x,y+1)$

3) $B(x,y+1) = \frac{y}{x+y} \cdot B(x,y)$

$\Rightarrow$ Достаточно взять $B(x,y)$ на квадрате $[1;2]\times[1,2]$



Применение:

$\int_0^1 \sin^\alpha x \cdot \cos^\beta x \, dx$ – сводится к B-ф-ии

$B(\frac{1}{2};\frac{1}{2}) = \pi$; $B(\frac{1}{2};\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2}$; $B(\frac{3}{2};\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{8}$.

Все B-ф-ии считаются дроблением.

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} s^{x-1} \cdot (1+s)^{-x-y} ds$$

Гамма-функция

$n! \rightsquigarrow x! \rightsquigarrow z!$

$a_n(x) = (1+\frac{1}{n})^x / (1+\frac{x}{n})$

$\Gamma(x) = \prod_{n\geq 1} a_n(x)$

при $x \to 0$: $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$

Лемма: Γ-ф-ия сходится

$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ – упражнение из прошлой лекции

$\boxed{\Gamma(x+1) = x! = \int_0^{+\infty} t^x \cdot e^{-t} dt}$ ← для $x > 0$

$x \geq 1 \Rightarrow$ особенность в 0 нет

$x \geq 0 \Rightarrow e^{-t} \sim 1 \Rightarrow$ сходится $\int_0^1$

при $t \to +\infty$: $e^{-t} = O(t^\alpha)$, $\alpha < 0$

$t^{x-1} \cdot e^{-t} = O(t^{-2}) \Rightarrow \int_1^\infty$ сходится ($\Leftarrow \overset{\shortparallel}{O}(t^{-x-1})$)

Th Формула понижения:

$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \Gamma(x+1) \Rightarrow$ работает для $\forall x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$

Док-во: интегрирование по частям.

$\Gamma(x+1) = \int_0^1 (-\ln t)^x dt$

Ф-ла дополнения

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}; \quad \Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$B(\frac{1}{2};\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(1)} \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\Gamma(\frac{1}{3})\cdot\Gamma(\frac{2}{3}) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

Значения: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \Rightarrow \Gamma(\frac{n}{2}),\ n \in \mathbb{Z}_{>0}$, остальные плохие

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Единственность $\Gamma(x)$:

(1) значение: $f(1) = 1$

(2) понижение: $f(x+1) = x \cdot f(x)$

(3) выпуклость: $\ln f(x)$

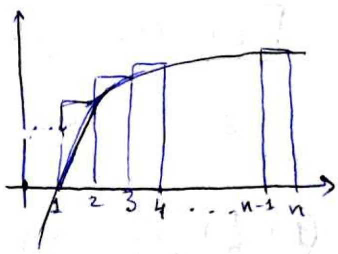
Формула Стирлинга (де Муавра)

$\Gamma(x+1) \sim 1$ при $x \to 0 \Rightarrow \Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$

При $x \to +\infty$? $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{x} \cdot x^x \cdot e^{-x}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \Rightarrow \ln n! = \sum\limits_{1 \le k \le n} \ln k$

$$\simeq \int_1^n \ln x\, dx = [x \ln x - x]_{x=1}^{x=n} = n \cdot \ln n - n + 1$$



$$\Rightarrow n! \simeq e \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

Пример: $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} dx = B(\tfrac{3}{2}; \tfrac{3}{2}) = \frac{\pi}{8}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} \underset{s = x^4}{=} \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{s^{-\frac{3}{4}} ds}{(1+s)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4} \cdot B(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{4}) \cdot \Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

7.3 Признаки сходимости числовых рядов

Терминология:

Числовым рядом называем формальную сумму:

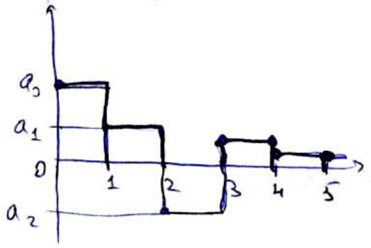
$$\sum_{n\geq 0} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_k + \ldots$$

Частичная сумма ряда: $S_k = \sum_{n\leq k} a_n = a_0 + \ldots + a_k$ и хвост, или остаток: $R_k = \sum_{n>k} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$

$S = \lim_{k\to+\infty} S_k$ — если $\neg\exists$, то . $\exists = \infty$, то } расходится

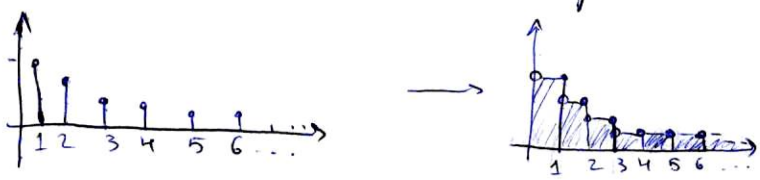
если $|S| < \infty$, то ряд сходится, а S — его сумма.

похож на несобственный интеграл, поэтому терминология похожа на ту, что применяется для несобств. интегралов.



$f(x) = a_{\lfloor x \rfloor}$

Всякий ряд $\sum a_n$ является несобственным интегралом по $[0, +\infty)$ от ступ. ф-ии $f(x) = a_{\lfloor x \rfloor}$.



Простейшие примеры, признаки и явления

Проверяя сходимость ряда, нужно установить выполнение условия:

Лемма (Необходимый признак)

Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $a_n \to 0$

Док-во: Если част. суммы S_k имеют конечный предел S, то так же $S_{k-1} \to S \Rightarrow a_k = S_k - S_{k-1} \to 0$.

Если $S_k \to S \Rightarrow S_{k-1} \to S$ конечный $\Rightarrow S_k - S_{k-1} = a_k \to S - S = 0$

Пример (геом. прогр.): $S_k = q^0 + q^1 + \ldots + q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$; $|q| < 1 \Rightarrow q^{k+1} \to 0 \Rightarrow S_k \to S = \frac{1}{1-q}$

Лемма (Критерий Коши): Если последов-ть сходится $\iff$ она фундаментальна.

Ряд $\sum a_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): m,n>N \Rightarrow |\underbrace{a_n+\ldots+a_m}_{S_m-S_{n-1}}|<\varepsilon$

Пример (Гармонический ряд): $\sum \frac{1}{n}=\infty$

$$S_k\to S \Rightarrow S_{2k}\to S \Rightarrow S_{2k}-S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}<\frac{1}{2k}+\ldots+\frac{1}{2k}=k\cdot\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}$$

S_{2k} - подпоследовательность S_k, а каждая подпосл-ть сходится к тому же, к чему и посл-ть

Пример (Телескопический ряд)

$$\sum_{n\geq1}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n\geq1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}$$

$$S_k\to 1$$

Работать надо с конечной суммой, если надо посчитать сумму.

Пример (надо знать)

$$\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}=1+\sum_{n\geq2}\frac{1}{n^2}=1+\sum_{m\geq1}\frac{1}{(m+1)^2}\leq1+\sum_{m\geq1}\frac{1}{m\cdot(m+1)}=2$$

$$1+\sum_{m\geq1}\frac{1}{(m+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$ — позже докажем

Пример (экспонента)

$$e=\sum_{n\geq0}\frac{1}{n!}$$

Знакопеременные ряды

Слагаемые чередуются знаком, записывается:

$$\sum(-1)^n a_n,\ \text{где } a_n>0.$$

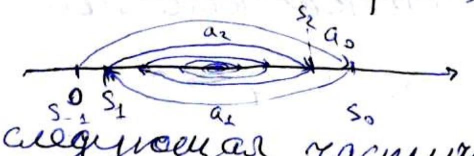
Пример: $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm\ldots=\ln 2$

Теорема — признак Лейбница

Простой признак сходимости знакоперем. рядов:

Если $a_n\searrow 0$ (монотонно строго 0) то $\sum(-1)^n\cdot a_n$ сходится.

Док-во:



Каждая следующая частичная сумма $S_{k+1}\in[S_{k-1};S]\Rightarrow$

$\Rightarrow a_k=|S_k-S_{k-1}|\to0.$

Следствие: Остаток ряда $\sum(-1)^n a_n$ с $a_n \geq 0$ не больше первого отброшенного a_k.

Сравнение положительных рядов

Лемма: Если $a_n > 0$, то $\sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть S_n ограничена сверху.

Теорема – Признак сравнения

При выполнении слагаемыми положит. рядов любого из 3 условий:

(1) $x_n \leq y_n$ для всех n $(n \gg 1)$

(2) $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{y_{n+1}}{y_n}$

(3) $\frac{x_n}{y_n} \to K < \infty$

можно сделать следующие выводы:

(A) сходимость $\sum y_n$ влечёт сходимость $\sum x_n$;

(B) расходимость $\sum x_n$ влечёт расходимость $\sum y_n$.

Док-во: (1) $X_n = \sum\limits_{k \leq n} x_k$; $Y_n = \sum\limits_{k \leq n} y_k$

$$\infty \overset{?}{=} \lim X_n = \sup X_n \leq \sup Y_n = \lim Y_n \overset{?}{<} \infty$$

(A) Если $\lim Y_n < \infty$, то $\lim X_n < \infty$;

(B) Если $\lim X_n = \infty$, то $\lim Y_n = \infty$.

(2) $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leqslant \frac{x_n}{y_n} \leqslant \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{x_1}{y_1} = c$ – c не зависит от $n \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \leq c y_n$ и применяя (1) к $\sum x_n$ и $\sum c y_n = c \sum y_n$

(3) Если не выполнено $x_n \leq K y_n$, но $\frac{x_n}{y_n} \to K \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \leq (K+1)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x_n \leq (K+1) y_n}_{\text{по (1) признаку}}$ $\square$

Признаки Даламбера и Коши

Из a_n делается другая последовательность (варианты):

Варианта Даламбера: $D_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ ratio test

Варианта Коши: $C_n = \sqrt[n]{|a_n|}$ root test

Теорема — признак Даламбера

Если D_n (C_n) для $\forall n >> 1$ удовлетворяет условию:

(1) D_n (C_n) $\leq q < 1$, то $\sum a_n$ сходится;

(2) D_n (C_n) ≥ 1, то $\sum a_n$ расходится.

Док-во:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \qquad x_n = a_n \quad y_n = q^n$$

По (2 пр.) $q < 1 \Rightarrow (A)$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \qquad y_n = a_n \quad x_n = q^n$$

Теорема — признак Коши

Всё тоже с точностью до замены букв $D_n \leftrightarrow C_n$.

Док-во:

Следствие — Предельный признак Даламбера и Коши

Если $D_n \to q$, то сравнивается с геом. прогрессией

(1) при $|q| < 1$ ряд $\sum a_n$ сходится;

(2) при $|q| > 1$ ряд $\sum a_n$ расходится;

(3) при $|q| = 1$ силы признака не хватает.

Если $C_n \to q$, то ... тоже самое

Пример: 1) $e^x = \sum \frac{x^n}{n!} \Rightarrow D_n = \frac{x}{n+1} \to 0 \ \forall x \Rightarrow$ ряд сходится $\forall x$.

2) $\sum n x^{n-1} \Rightarrow D_n = x \cdot \frac{n+1}{n} \to x \Rightarrow$ ряд сходится при $|x| < 1$.

Научиться применять признак Даламбера „одним взглядом".

3) $\sum (\ln n)^{-n} \Rightarrow C_n = \frac{1}{\ln n} \to 0 \Rightarrow$ ряд сходится.

4) $\sum \frac{1}{n} \Rightarrow D_n = \frac{n+1}{n} \to 1$

$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} \Rightarrow D_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \to 1$

Дзета-функция Римана

Интегральный признак Коши-Маклорен

$\sum a_n$

$a_n = f(n)$

Теорема - интегральный признак

Если $f(x) \searrow 0$, то $\sum a_n$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

$$\sum_{1<n\le k} f(n) \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{1\le n<k} f(n) = \sum a_n$$

7.4 Абсолютные и условные сходимости

Терминология

Теорема: Если ряд $\Sigma|a_n|$ сходится, то (1) ряд Σa_n тоже сходится.
(2) $|\Sigma a_n| \leq \Sigma|a_n|$ — для бесконечных сумм

Док-во: (1) Сходимость $\Leftrightarrow$ (равносильна) условию критерия Коши: $|S_{n+k} - S_n| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| \underset{\text{нер-во многоугольника}}{\leq} |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+k}|$$

(2) Нер-во $\triangle$ для S_n и $n \to +\infty$ (предельный переход уважает нер-ва)

Определение: Если $\Sigma|a_n|$ сходится, то говорят, что Σa_n сходится абсолютно,
иначе: Σa_n — сходится, но $\Sigma|a_n|$ — расходится, то говорят, что Σa_n сходится условно.

абсолютно $\Rightarrow$ хорошее
условно $\Rightarrow$ странное } поведение

Пример (ряд Лейбница): $\Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots = \ln 2$

$$\Sigma|a_n| = \Sigma \frac{1}{n} = \infty.$$

Признаки Д. и К.: $D_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $C_n = \sqrt[n]{|a_n|}$ — теперь можно $a_n \in \mathbb{C}$

Перестановка слагаемых $\leftarrow a_n \in \mathbb{R}$

Теорема: Следующие условия на сходящийся ряд Σa_n равносильны:
(1) ряд сходится абсолютно;
(2) сходится ряд из положительных: $S_n^+ = \sum_{k\leq n} \max\{a_n; 0\} < \infty$
(3) сходится ряд из отрицательных: $S_n^- = \sum_{k\leq n} \min\{a_n; 0\} > -\infty$

Док-во: Частичные суммы: $S_n = S_n^+ + S_n^- \to |\Sigma_0| < \infty$; $S_n^+ = \sum_{k\leq n} \max\{a_n; 0\} \to \Sigma_2$

$$\Sigma|a_n| = D_n = S_n^+ - S_n^- \to \Sigma_1 \quad ; \quad S_n^- = \sum_{k\leq n} \min\{a_n; 0\} \to \Sigma_3$$

$(1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S_n^+ - S_n^- \leftarrow \text{имеет конечный предел} \\ S_n^+ + S_n^- \leftarrow \text{тоже имеет кон. предел} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S_n^+ \leftarrow \text{имеет кон. пр.} \\ S_n^- \leftarrow \text{тоже имеет кон. пр.} \end{array}\right.$

<u>Пример</u> (Ряд Лейбница):

$$B = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{1} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} = \Big(\underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}\Big) - \frac{1}{4} + \Big(\underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8}\Big) + \Big(\underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{\frac{1}{10}} - \frac{1}{12}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots\right)$$

<u>Теорема</u> (Римана): Перестановкой слагаемых усл. сход. ряда его сумму можно сделать равной любому числу.

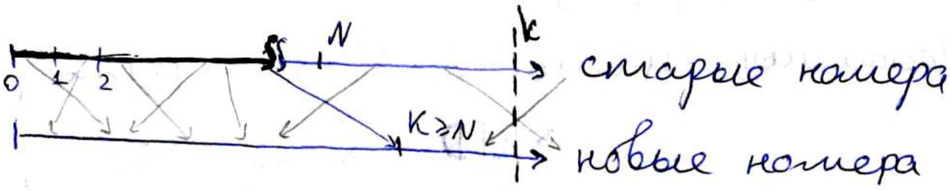
<u>Док-во</u>: Необх. признак $\Rightarrow a_n \to 0$. Поскольку ряд сходится, но сходится условно, то по предыдущей теореме, поскольку 3 высказывания равносильны, то если ряд <u>не</u> сходится абсолютно (то есть сход. условно), то <u>не</u> верно (2) и (3) условие: $\left.\begin{array}{l} \sum \max\{a_n, 0\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ \sum \min\{a_n, 0\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \end{array}\right\} S_n^+ + S_n^- = \infty - \infty =$

$=$ любое число. □

<u>Теорема</u> (Дирихле): Перестановка слагаемых абсолютного сходящегося ряда сохраняет его сумму.

<u>Док-во</u>: $\sum\limits_{k\le n} |a_k| = T_n$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): n \geqslant N \Rightarrow |T_n - T| < \varepsilon$



Выбираем самый большой новый номер K, причём $K \geqslant N$.

Продолжение Th Дирихле

$\forall k > K \geq N$ сравним част. суммы S_k (иск. ряда) и S'_k (нового): (51)

$$\underbrace{|S_k - S'_k|}_{\text{вычлись все те, которые повторились в голове}} \leq \underbrace{\sum_{n>N} |a_n|}_{|T_n - T|} < \varepsilon \quad , \varepsilon \to 0$$

Получим в итоге: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k : n > N \Rightarrow |S_k - S'_k| < \varepsilon$

Арифметические операции

Лемма: Сходящиеся ряды можно почленно складывать и умножать на число:

$$\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n)$$

$$\sum c a_n = c \sum a_n$$

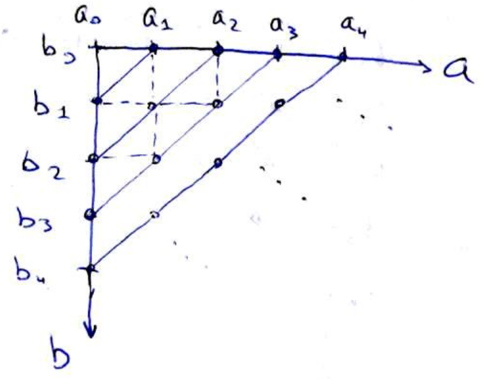
Док-во: Равенства верны для частичных сумм, а после совершаем предельный переход (он уважает равенство) □

Умножение $(\sum a_n)(\sum b_m)$?

Полиномы: $(\sum a_n x^n)(\sum b_m x^m) = \sum a_n b_m x^{n+m} = \sum c_k \cdot x^k$

$$\sum c_k x^k = \sum_k \Big(\sum_{n+m=k} a_n b_m\Big) x^k \Rightarrow c_k = \sum_{n+m=k} a_n b_m$$

k группируются, т.к. $n + m = 3$ $\begin{cases} n=1; m=2 \\ n=2; m=1 \\ n=0; m=3 \\ n=3; m=0 \end{cases}$



Один из способов получения c_k.

Пример: $\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\pm\right)^2$ – расходится

$$|c_k|=\left|\sum_{i+j=k}a_i b_j\right|=\underbrace{\sum_{i+j=k}\frac{1}{\sqrt{i}\cdot\sqrt{j}}\geq\sum_{i+j=k}\frac{2}{i+j}}=\frac{2}{k}\sum 1=2\frac{k-1}{k}\geq 2$$

$\frac{1}{\sqrt{i}\cdot\sqrt{j}}\geq\frac{2}{i+j}$ ← из $\frac{i+j}{2}\geq\sqrt{i}\cdot\sqrt{j}$

$\Downarrow$

$c_k\not\to 0 \Rightarrow \sum c_k$ – расходится

Теорема (Коши): Если ряды $A=\sum a_n$ и $B=\sum b_n$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum c_k$, где $c_k=\sum\limits_{n+m=k}a_n b_m$, сходится абсолютно$_{(1)}$ и его сумма $C=A\cdot B_{(2)}$.

Док-во:
$$\left.\begin{aligned}&A_n=\sum_{k\leq n}a_k\ ,\ A_n\to A\\ &A_n^*=\sum_{k\leq n}|a_n|\ ,\ A_n^*\to A^*\end{aligned}\right\}\text{ для } A, B \text{ и } C$$

(1). $\sum|c_k|$ положит ряд $\Rightarrow \{C_n^*\}\nearrow$.

Надо показать ограниченность $\{C_n^*\}$.

$$C_k^*=\sum_{h\leq k}|c_h|\overset{\triangle}{\leq}\underbrace{\sum_{i+j\leq k}|a_i|\,|b_j|}_{\text{треугольник I}}\leq\underbrace{\sum_{i\leq k}\sum_{j\leq k}|a_i|\cdot|b_j|}_{\text{прямоугольник II}}=\left(\sum_{i\leq k}|a_i|\right)\cdot\left(\sum_{j\leq k}|b_j|\right)=$$

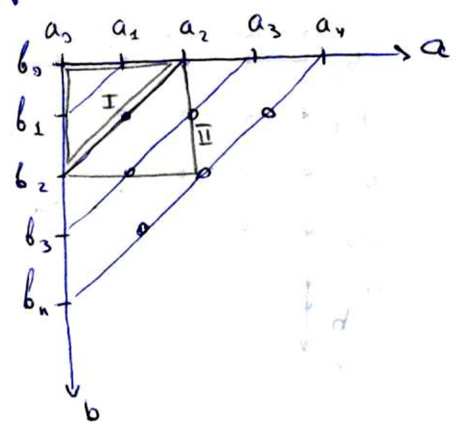
$$=A_k^*\cdot B_k^*\leq A^*B^*$$ ← т.к. монотонно возрастают

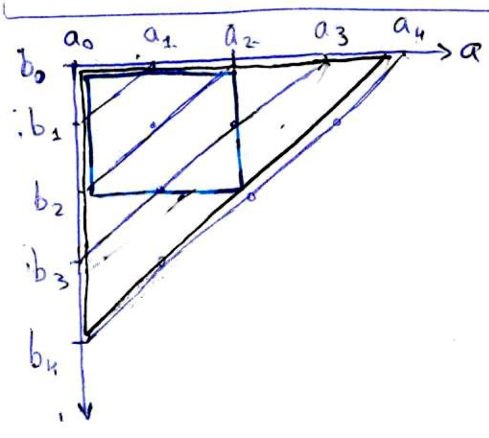
(2) $C_k\xrightarrow{?}AB$; $A_kB_k\to AB$

$$|C_{2k}-A_kB_k|\overset{\triangle}{\leq}\sum_{(i,j)\in\triangle}|a_ib_j|\leq$$

$$\leq\sum_{(i,j)\in\triangle}|a_i|\cdot|b_j|=A_k^*\left(\sum_{k<j\leq 2k}|b_j|\right)+B_k^*\left(\sum_{k<i\leq 2k}|a_i|\right)<$$

$$<(A^*+B^*)\varepsilon$$





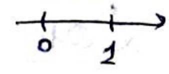
Часть 3. Многомерный анализ.

Функция от нескольких переменных.

ГЛАВА 8. Топология Эвклидова пр-ва.

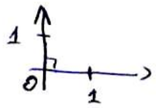
8.1 Эвклидово пр-во

Арифметическое пр-во: $\mathbb{R}^1 = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, \geqslant \rangle \leftrightarrow$ прямая



$\mathbb{R}^{2} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \langle \underbrace{(x_1, x_2)}_{\text{или } (x,y)} \mid x_\alpha \in \mathbb{R} \rangle \leftrightarrow$ плоскость

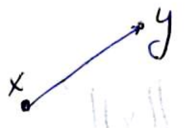
размерность



$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \langle (x_1, x_2, x_3) \mid x_\alpha \in \mathbb{R} \rangle \leftrightarrow$ 3-мерное пр-во

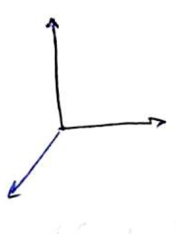
$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ штук}} = \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_\alpha \in \mathbb{R} \rangle$ – n-мерное пр-во

Векторы: приложенные и свободные



"направл. отрезок" "класс эквивалентности с равными координатами"

$\left.\begin{matrix} y = (y_1 \ldots y_n) \\ x = (x_1 \ldots x_n) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$



Базисные векторы: $\vec{e}_\alpha = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\alpha - 1}, \alpha, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-\alpha})$

Тогда: $\vec{u} = \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant n} u_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha = \sum_\alpha u_\alpha \vec{e}_\alpha = \sum u_\alpha \vec{e}_\alpha = u_\alpha \vec{e}_\alpha = u \cdot \vec{e}$

уровень: Эйнштейна

Эвклидова геометрия

Длина = норма вектора

Скалярное пр-ие: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u}, \vec{v}) = \sum_\alpha u_\alpha v_\alpha \leftarrow$ в $\mathbb{R}^n$.

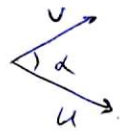
$\Rightarrow$ норма $\|u\| = \sqrt{(u,u)} \Rightarrow$ расст. между точками $\rho(x,y) = \|x - y\|$,

в $\mathbb{R}^n$: $\rho(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_\alpha (x_\alpha - y_\alpha)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ск. пр-ие билинейно: $(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \alpha_1 (\vec{u}_1, \vec{v}) + \alpha_2 (\vec{u}_2, \vec{v})$

и симметрично: $(u, v) = (v, u)$

Углы: $\cos\alpha = \dfrac{(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|}$



Теорема – Неравенство Коши

$$|(u,v)| \le \|u\|\cdot\|v\| \qquad |(u,v)| \le \|u\|\cdot\|v\|$$

$$\Updownarrow$$

$$(u;v)(v;u) \le (u;u)(v;v) \iff \det\begin{vmatrix} (u,u) & (v,u) \\ (u,v) & (v,v) \end{vmatrix} > 0$$

Док-во: $\forall t \in \mathbb{R}: \|t\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (tu+v; tu+v) =$

$$= t^2(u,u) + 2t(u,v) + (v,v) \ge 0$$

$$\tfrac{1}{4}D = (u,v)^2 - (u,u)(v,v) \le 0 \ \square$$

Теорема – Неравенство треугольника

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\| \qquad \|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

Док-во: $\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) =$

$$= (u,u) + 2(u,v) + (v,v) \le \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 =$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

Нормы и метрики

норма:
(1) $\|u\| \ge 0$
(2) $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$
(3) $\|\lambda u\| = |\lambda|\cdot\|u\|$
(4) $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$

метрика:
$\rho(x,y) \ge 0$
$\rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$

$\|u\|_2 =$ эвклидова $= (\sum u_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$

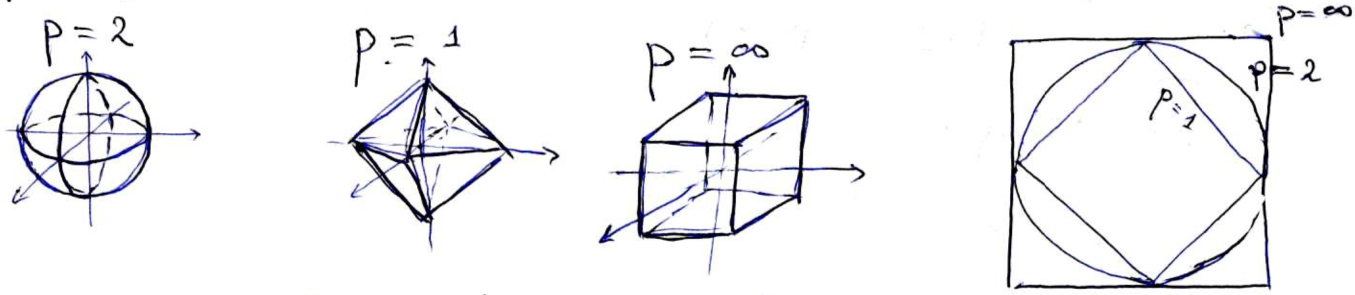
$\|u\|_1 = \sum |u_\alpha|$

$\|u\|_\infty = \max\{|u_\alpha|\}$

$\|u\|_p = (\sum |u_\alpha|^p)^{\frac{1}{p}}$

Шарики и кубики

Шар нормы = $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1 \}$



Ball: $B_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \rho_2(x,y) < \varepsilon \}$ $\qquad \sum (x_\alpha - y_\alpha)^2 < \varepsilon^2$

Cube: $C_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \rho_\infty(x,y) < \varepsilon \}$ $\qquad \max |x_\alpha - y_\alpha| < \varepsilon$

√Теорема – эквивалентность норм

$\forall$ положит. n $\exists M = M(n)$ такие что $\quad B_\varepsilon(x) \subseteq C_{M_\varepsilon}(x)$; $\quad C_\varepsilon(x) \subseteq B_{M_\varepsilon}(x)$.

Т-ма позволяет брать такую окр-ть, какую хочется.

8.2 Предел и непрерывность

(или наоборот: непрер. и предел)

Предел

$x_n \to x$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : n \ge N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$ всё, что добавилось к одномерному анализу

$\Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\alpha = N_\alpha(\varepsilon) : n \ge N_\alpha \Rightarrow |x_{n,\alpha} - x_\alpha| < \varepsilon$

$N = \max\{N_1 \dots N_k\} \qquad \Rightarrow x_n \in C_\varepsilon(x)$

непрерывность ф-ции

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad x \approx p \Rightarrow f(x) \approx f(p)$

для отображения

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \forall x \in X : \|x - p\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(p)\| < \varepsilon$ (если писать через шар:)

всё, что добавляется

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \forall x \in X : x \in B_\delta(p) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(p))$

По Гейне: $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

В одномерном анализе есть одностор. пределы:

$$f(p+0);\ f(p-0).$$

$$f(x_0+\varepsilon, y_0) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} ?$$

$$f(x_0, y_0+\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} ?$$

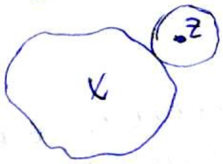
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – отображение

$f=(f_1,\dots,f_m)$, $f(\vec{x}) = (\underbrace{f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) + \dots + f_a(\vec{x})}_{\text{коорд. функции отображения}})$

Отображение непрерывно $\Leftrightarrow$ $\forall$ коор. функции непрерывны в точке.

8.3. Открытые и замкнутые множества

Различные типы точек: $\rho(x,y)$ – расстояние (эвклидово, если не уточняется) от x до y



$\rho(z,X) = \inf\{\rho(z,x) \mid x\in X\} \geq 0.$

$\rho(z,X)>0 \iff \exists\, \varepsilon>0: B_\varepsilon(z)\cap X = \varnothing$ ← z – отдаленная от X

$\rho(z,X)=0 \iff \forall\, \varepsilon>0: \underset{\text{шарик}}{B_\varepsilon(z)} \cap X \neq \varnothing$ ← z – точка прикосновения мн-ва X / предельная точка X.

Пример: $X=[0;1)$, тогда 0, $\frac{1}{2}$ и 1 – предельные точки, но $0\in X$, $1\notin X$

Разделение мн-ва X на „границу" и на то, что „внутри".

$\neg X = \mathbb{R}^k \setminus X$ – дополнение

$\rho(z,X)>0$ ← z – отдаленная точка X

$\rho(z,X)=0$, $\rho(z,\neg X)=0$ ← z – граничная точка X

$\rho(z,X)=0$, $\rho(z,\neg X)>0$ ← z – внутреняя точка X: $\exists\, \varepsilon>0: B_\varepsilon(z)\subseteq X$

$x\in X \,\&\, \rho(x, X\setminus\{x\})>0 \iff x$ изолированная т. X

Внутренность, граница, замыкание

Определение: Внутренность X = мн-во всех внутр. точек X

обознач. $X^\circ = \mathrm{Int}\, X$

Граница X = мн-во всех граничных точек X

обознач. ∂X

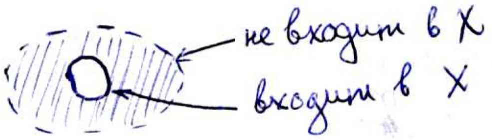
Замыкание X = мн-во всех предельных точек X

обознач $\overline{X} = \mathrm{Cl}\, X$

$\underline{x \in B_\varepsilon(x)} \Rightarrow X^\circ \subseteq X \subseteq \overline{X}$

центр шара всегда лежит в шаре

Упражнение: $X^\circ = X \setminus \partial X$; $\overline{X} = X \cup \partial X$; $\partial X = \overline{X} \setminus X^\circ$



Интересные случаи: $X^\circ = X \Rightarrow X$ – открытое мн-во

$X = \overline{X} \Rightarrow X$ – замкнутое мн-во

Множества, заданные неравенствами

$f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \Rightarrow$ рассматриваем мн-во $\{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) > c\} = \{f > c\}$, либо $\{f \geq c\}$, $\{f = c\}$, $\{f < c\}$, $\{f \leq c\}$ – Лебеговские мн-ва.

Следствие: Если f непрер., то $\{f \geq c\}$, $\{f \leq c\}$, $\{f = c\}$ – замкнуты, а $\{f > c\}$, $\{f < c\}$ – открыты.

$B_\varepsilon(z) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$

Пересечение, объединение, произведение

Эти свойства, как и св-ва нормы, становятся аксиомами.

Лемма: I) Всегда открыто:

(1) любое объединение семейства открытых мн-в;

бесконечное

(2) пересечение конечного набора открытых мн-в.

II) Всегда замкнуто:

(1) пересечение конечного набора замкнутых мн-в;

(2) объединение любого семейства замкнутых мн-в.

Упражнение: 1) X — открытое $\Leftrightarrow \neg X$ — замкнутое

2) X — замкнутое $\Leftrightarrow \neg X$ — открытое

$\neg(\cup X_n) = \cap(\neg X_n)$

$\neg(\cap X_n) = \cup(\neg X_n)$

и $\Lambda_I \Rightarrow \Lambda_{II}$

III) произведение:

(1) открытых множеств открыто;

(2) замкнутых множеств замкнуто.

X, Y — открыто $\Rightarrow X \times Y$ — открыто

$$\left.\begin{array}{l} X \subseteq \mathbb{R}^k \\ Y \subseteq \mathbb{R}^m \end{array}\right\} X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$$

Док-во: III)

(2) (a,b) - предельные $X \times Y$

$\exists (x_n, y_n) \to (a,b)$

$x_n \in X \quad y_n \in Y$

$x_n \to a \Rightarrow a \in X$

$y_n \to b \Rightarrow b \in Y$

$(a,b) \in X \times Y$

Непрерывность и прообразы

$f: (X \subseteq \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$

не надо, если X открыто

f непр. в $p \in X \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : x \in B_\delta(p) \cap X \Rightarrow \overset{f(x) \in B_\varepsilon}{f(x) \in B_\varepsilon(f(p))}$

$f(B_\delta(p) \cap X) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$

<u>Лемма</u>: даны мн-ва $X \subseteq \mathbb{R}^k$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ и непр. отображение $f: X \to \mathbb{R}^m$:

(1) если X и Y открыты, то $f^{-1}(Y)$ открыт (в X);

(2) если X и Y замкнуты, то $f^{-1}(Y)$ замкнут.

<u>Док-во</u>: (1) $x \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f(x) \in Y$

Y открыто $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$

$\exists \delta(\varepsilon) > 0 : f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subset Y \Rightarrow$

$\Rightarrow B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(Y)$

(2) Возьмём в $f^{-1}(Y)$ (прообраз) сход-ся последовательность $\{x_n\}$: $x_n \to x \in X$ (ибо X замкнуто)

$f(x_n) \to f(x)$ (ибо f непр.)

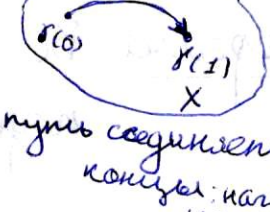
$f(x_n) \in Y \Rightarrow f(x) \in Y$ (ибо Y замкнуто)

$\Rightarrow x \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f^{-1}(Y)$ замкнуто. $\square$

Линейно связанные множества

Зафиксируем мн-во $X \subseteq \mathbb{R}^k$ (Эвклидово пр-во).
Непрерывным <u>путём</u> в X называют образ непрерывного отображения $\gamma: [0, 1] \to X$ (путь не покидает X).

$\underbrace{\gamma(0) - \text{начало},\ \gamma(1) - \text{конец}}_{\text{пути}}$.

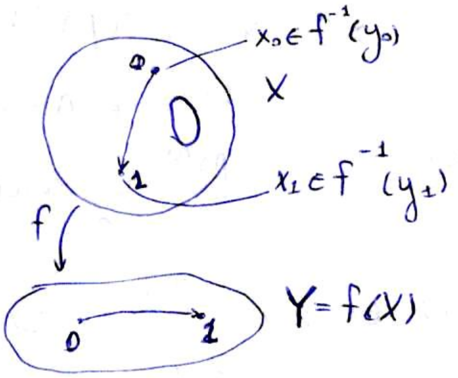


путь соединяет свои концы: начало и конец.

<u>Определение</u>: Мн-во $X \subseteq \mathbb{R}^k$ называют линейно связным, если любую пару точек можно соединить путём.

Лемма: Всякий непрер. образ линейно связанного мн-ва тоже линейно связан.

Док-во: Имеем X и $Y = f(X)$. X – лин. связно.



$f: X \to Y = f(X)$ непр.

$\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$

$\gamma \subseteq X$

Тогда $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$

$(f\circ\gamma)(0) = y_0$, $(f\circ\gamma)(1) = y_1$.

$f\circ\gamma \subseteq Y$.

Следствие: Если X – лин. связно и $f: X \to \mathbb{R}$ непр. функция, то $y_0, y_1 \in f(X) \Rightarrow [y_0, y_1] \subseteq f(X)$

8.4 Компактность множества

Ограниченные мн-ва

Определение: Мн-во $X \subset \mathbb{R}^k$ называют ограниченным, если $\exists$ число M, т. что $B_M(0) \supseteq X$.

Аналогично, последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^k$ ограниченная, если вся она лежит в некотором шарике.

Лемма: Всегда ограничено:

(1) подмн-во огран. мн-ва;

(2) пересечение любого семейства огран. мн-в;

(3) объединение конечного набора огран. мн-в;

(4) произведение огран. мн-в.

Теорема: Всякая огран. посл-ть в $\mathbb{R}^k$ имеет сходящуюся подпосл-ть, или точку сгущения (что тоже самое).

<u>1^е док-во:</u> Сначала $k = 2$.

$\{(x_n, y_n)\}$ — огран. $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ огран. в $\mathbb{R}^1$.

Выберем сход. подпоследовательность $\boxed{\{x'_n\} \subseteq \{x_n\}}$ и $\{y'_n\} \subseteq \{y_n\}$.

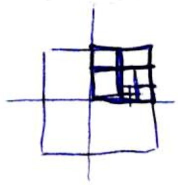
Выберем сход. подпоследовательность $\boxed{\{y''_n\} \subseteq \{y'_n\}}$ и $\{x''_n\} \subseteq \{x'_n\}$.

$\{x''_n\}$ сходится, т.к. $\{x'_n\}$ сходится и $\{x''_n\} \subseteq \{x'_n\}$.

$\{y''_n\}$ сходится, т.к. мы взяли так~~ое~~ую сход-юся подпосл-ть $\{y''_n\}$.

Теперь $\{(x''_n; y''_n)\}$ сходится. Далее $k > 2$ легко. □

<u>2^е док-во:</u> Сначала $k = 2$.



Метод деления начетверть. Получаем посл-ть вложенных квадратов: $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \ni p$.

$$\begin{array}{cccc} K_0 & K_1 & K_2 & \dots \\ \cup\!\!\!\!\shortmid & \cup\!\!\!\!\shortmid & \cup\!\!\!\!\shortmid & \\ z_0 & z_1 & z_2 & \dots \Rightarrow \{z_n\} \to p. \end{array}$$

При $k > 0$ делим на 2^k частей. □

<u>Компактные мн-ва</u>

<u>Теорема</u> (Критерий компактности): РСУ (равносильны следующие условия) на мн-ве $X \subseteq \mathbb{R}^k$:

(1) оно замкнуто и ограничено;

(2) из всякой посл-ти <u>его</u>(X) точек можно извлечь подпосл-ть, сход-ся к <u>его</u> точке;

(3) из всякого <u>его</u> открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

<u>Определение:</u> $X \subset \mathbb{R}^k$ <u>компактно</u>, если оно обладает этими св-ми.

Док-во: (1 => 2) $\{x_n\} \subseteq X$. X - ограничен. => $\{x_n\}$ огран.

По т-ме выше => $\{x'_n\} \to x$. X - замкнуто => $x \in X$.

(1 => 3) Дословно из одномерного. От противного, делением квадратика.

(2 => 1) z - пред. точка X. Значит $\exists \{x_n\} \to z$.

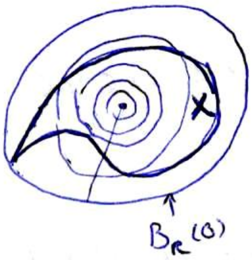
Если $x_n \to z$, то $x'_n \to z \in X$ => X - замкнуто.

Если X не ограничено, то $\exists x_n \in X \setminus B_n(0) \Rightarrow \|x_n\| > n \to \infty$.

=> X - ограничено.

(3 => 1) $\mathcal{U} = \{B_r(0) \mid r > 0\}$ - покрывает всё пр-во.

$\bigcup \mathcal{U} \supseteq X$



$\mathcal{U} \supseteq \{B_{r_1} \dots B_{r_s}\}$

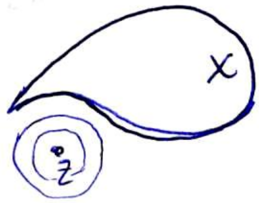
$R = \max\{r_1 \dots r_s\} \Rightarrow B_R(0) \supseteq X \Rightarrow$

=> X - ограничено.

---

z - не пред. для X

т.е. $\rho(z, X) = \tau > 0$. $\mathcal{U}_t = \mathbb{R}^k \setminus \overline{B_t(z)}$.



Открытое мн-во: $\mathcal{U}_t = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \rho(z, x) > t\}$

$\bigcup_{t>0} \mathcal{U}_t = \mathbb{R}^k \setminus \{z\} \supseteq X$

Лемма: Всегда компактны:

(1) замкнутое подмн-во компакта;

(2) пересечение любого семейства компактов;

(3) объединение конечного набора компактов;

(4) произведение компактов.

Непрерывные фун-ции на компакте

Теорема: Всякая непрер. функция на компакте ограничена и достигает min и max.

Док-во: $\beta = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$ — где K — компакт, $f: K \to \mathbb{R}$ непр.

$\exists \{x_n\} \subseteq X$ такие что $f(x_n) \to \beta$.

Извлечём сход. подпоследовательность $\{x'_n\}$.
Теперь $x'_n \to p \in X$, т.что $f(x'_n) \to \beta$.

f — непрер. $\Rightarrow f(p) = \beta$.

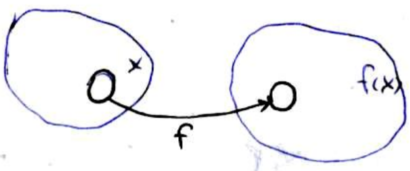
Следствие: В $\mathbb{R}^k$ все нормы эквивалентны.

Док-во: $B_1(0)$ = компакт, теперь оно достигает min и max.

норма $\|\cdot\|$ = непрер. фу-ия $\Leftarrow$ нер-во $\triangle$.

Теорема: Всякий непрерывный образ компакта компактен.

Док-во: $f: X \to f(X) = Y$



8.5 Принцип сжимающих отображений

Определение: Точку $c \in X$ называют <u>неподвижной</u> точкой отображения $f: X \to X$, если $f(c) = c$.

Отображение $f: X \to X$ называют <u>сжимающим</u>, если $\exists\, 0 < \lambda < 1 : \forall x_i \in X \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\|$

Th Всякое сжимающее отображение замкнутого мн-ва в себя имеет единственную неподвижную точку.

Док-во: $\lambda < 1 \Rightarrow$ единственная.

$g: X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|f(x) - x\| \Rightarrow g(f(x)) \leq \lambda g(X)$ для $\forall x \in X$.

Если X — компактно, то g достигает на X своего минимума в точке $c \in X$.

Не нарушается лишь при:

$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c$.

$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ итерация

Лемма: При итерациях сжимающего отображения последовательность образов любой точки сходится.

Док-во: $\|x_n - x_0\| \overset{\triangle}{\leq} \|x_n - x_{n-1}\| + \ldots + \|x_1 - x_0\| =$

$= g(x_{n-1}) + \ldots + g(x_1) + g(x_0)$

Т.к. $g(f(x)) \leq \lambda g(x) \Rightarrow g(x_i) \leq \lambda^i g(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x_n - x_0\| \leq \underbrace{(\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda + 1)}_{} \leq \frac{1}{1-\lambda} g(x_0) = r$

$\lambda < 1 \Rightarrow$ это геом. прогрессия.

$\|x_n - x_0\| < r \leftarrow$ радиус шара $B_r(x_0)$

$\Rightarrow$ Хвост x_n при $n > N$: $x_n \in B_{\lambda^N r}(x_N)$.

Т.к. $\lambda < 1 \Rightarrow \lambda^N r \to 0 \Rightarrow$ посл-ть фундаментальна. □

Глава 9 Гладкие функции

9.1 Дифференциал и градиент

Частные производные

Для $f(x,y)$:

Определение: Частной производной f по x в точке (x,y) называют: $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta,y)-f(x,y)}{\delta}$

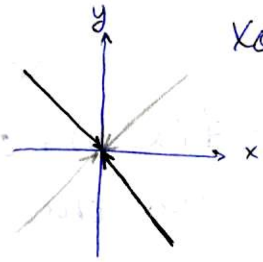
Обозначают: $\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x$

Пример: $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

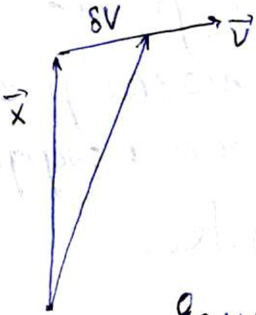
Хотя $f(x,y)$ разрывна в точке $(0,0)$.

$f(x,x)=1$

$f(x,-x)=-1$



Производная по вектору



Определение: Производная функции f по вектору $\vec{v}$ в точке $\vec{x}$ называется:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(\vec{x}+\delta\vec{v})-f(\vec{x})}{\delta}=\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x})$$

Если $\vec{v}=\vec{e}_\alpha$, то $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_\alpha}=\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ – по определению.

единичный вектор, задающий направление оси α.

Обозначение: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x})=D_{\vec{v}}f(\vec{x})=\partial_{\vec{v}}f(\vec{x})=f'_{\vec{v}}(\vec{x})$ точка приложения

Правила вычисления такие же, но появилось новое правило:

$$\boxed{\partial_{\vec{u}+\vec{v}}f=\partial_{\vec{u}}f+\partial_{\vec{v}}f,\ \partial_{\alpha\vec{u}}f=\alpha\cdot\partial_{\vec{u}}f}$$

2 аргумента:

1) функция – для неё верно правило Лейбница и линейность;
2) вектор – для него верна линейность.

Дифференциал и градиент

$\Delta f = \mathcal{A}(\Delta x) + o(|\Delta x|) \Rightarrow \boxed{\Delta f = \underbrace{\mathcal{A}(\overrightarrow{\Delta x})}_{} + o(\|\overrightarrow{\Delta x}\|)}$

когда переходим к векторам | линейна часть приращения, или дифференциал $= df_{\vec{p}}(\vec{V})$

существует св-во $df_{\vec{p}}(\vec{v}) = \partial_{\vec{v}} f(\vec{p})$

$$f(x) = f(p) + \mathcal{A}(\underbrace{x-p}_{v}) + o(\|x-p\|)$$

Линейная часть вектора: $\mathcal{A}(\vec{v}) = \vec{A}\cdot\vec{v} = (\dots)\cdot\left(\vdots\right) = \sum\limits_{1\le\alpha\le n} A_\alpha V_\alpha$

$$A_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(p)$$

Пример: $x_\alpha(V_1, V_2 \dots V_n) = x_\alpha$

координатная ф-ия $\longrightarrow$ $x_\alpha(\Delta x) = \Delta x_\alpha$

$dx_\alpha(\Delta x) = \Delta x_\alpha$

Лемма: функция, дифф-ма в точке, непрерывна в ней.

Док-во: функция, дифф-ма в точке p, имеет вид:

$$f(x) = f(p) + \mathcal{A}(x-p) + o(\|x-p\|)$$

Необходимо док-ть, что при $x \to p \Rightarrow f(x) \to f(p)$.

При $x \to p$: $\mathcal{A}(x-p) \to 0$ и $o(\|x-p\|) \to 0 \Rightarrow f(x) \to f(p)$. □

Теорема: Если ф-ия f дифф-ма в точке p, то:

(1) все её частные производные в точке p существуют и равны соответствующим коэфф-там её дифер-ла: $df_{\vec{p}}(\vec{v}) = \sum\limits_{1\le\alpha\le n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(p)\, dx_\alpha$.

(2) её производная по любому вектору в точке p существует и:

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{p}) = df_{\vec{p}}(\vec{V}) = \sum_{1\le\alpha\le n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(\vec{p})\, V_\alpha.$$

Пример: $f(x,y,z) = xy^2z^3$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3$ $\qquad df = f_x dx + f_y dy + f_z dz =$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3$ $\qquad = y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$ $\qquad df(1,1,1) = dx + 2dy + 3dz$

Док-во: (1) $df_p(\Delta x) = \sum A_\alpha \Delta x_\alpha$ – общий вид дифф-ла.

Если $\Delta x = (0, \ldots 0, \Delta x_\alpha, 0 \ldots 0)$, то: $\Delta f(\Delta x) = A_\alpha \Delta x_\alpha + o(\Delta x_\alpha)$

$$\lim_{\Delta x_\alpha \to 0} \frac{\Delta f(\Delta x) = A_\alpha \Delta x_\alpha + o(\Delta x_\alpha)}{\Delta x_\alpha} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(p) = A_\alpha.$$

(2) $\frac{1}{\delta}(f(p+\delta v) - f(p)) = \frac{1}{\delta}(df_p(\delta v) + o(\delta x)) = \frac{1}{\delta}(\delta \cdot df_p(v) + o(x)\delta)$

$\lim_{\delta \to 0}$ $\partial_v f(p) = df_p(v)$

$$\partial_v f(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) \underset{\text{по опр-ию}}{=} \lim_{\delta \to 0} \frac{f(p+\delta v) - f(p)}{\delta} \overset{\text{подставляем по опр-ию}}{=} \lim_{\delta \to 0} \frac{f(p) + df_p(\delta v) + o(\delta x) - f(p)}{\delta} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{df_p(\delta v) + o(\delta)}{\delta} = df_p(v) + o(1) = df_p(v)$$

Градиент

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, тогда: $df_{\vec{p}}(\vec{v}) = \overrightarrow{\nabla f(p)} \cdot \vec{v} = \partial_v f(\vec{p})$.

набла

Если $\nabla f(p) = 0$, то $\partial_v f(p) = 0$ для $\forall v$.

Теорема: Если $\nabla f(p) \neq 0$, то его направление совпадает с направлением скорейшего роста функции f вблизи точки p, а его (эвклидова) норма равна скорости этого роста.

Док-во: Направление = вектор длины 1.

$\partial_v f(p) = \overrightarrow{\nabla f(p)} \cdot \vec{v} = \|\overrightarrow{\nabla f(p)}\| \cdot \underbrace{\|\vec{v}\|}_{1} \cdot \cos\varphi$ ← где $\varphi = \angle(\nabla f(p), v)$,

то макс будет при совпадении направлений.

Гладкие функции

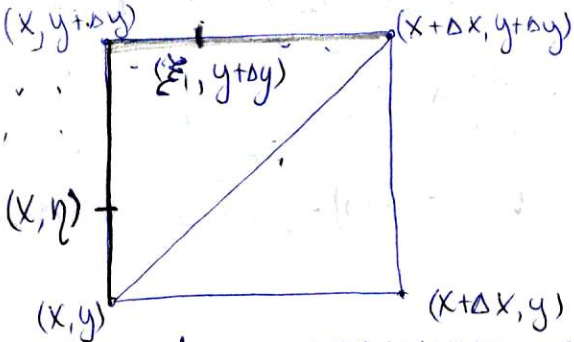
Определение:

Функцию на открытом мн-ве называют гладкой, если все её частные производные на нём непрерывные.

Теорема:

Всякая гладкая функция всюду дифф-ма.

Док-во для $f(x,y)$: $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) =$



$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+\Delta y)\cdot \Delta x + o(\Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)\cdot \Delta y + o(\Delta y) =$$

Формула конечных приращений

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot \Delta x + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|) + o(\Delta x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y + o(\Delta y) + o(\Delta y)$$

Для k координат разбивается на k шагов по каждой координате, где используется формула конечных приращений. $\square$

9.2 Дифференцирование композиции

Правило цепочки для функций

$y = y(x_1 \dots x_n)$, $x_\alpha = x_\alpha(t_1 \dots t_m)$

Теорема: Композиция дифф-мых функций является дифф-мая функция.

Композиция сохраняет дифф-ость.

Док-во: $\Delta y = \sum\limits_{1\le\alpha\le n} A_\alpha \Delta x_\alpha + o(\|\Delta x\|)$ $\qquad A_\alpha = \frac{\partial y}{\partial x_\alpha}$

$\Delta x_\alpha = \sum\limits_{1\le\beta\le m} B_{\alpha\beta} \Delta t_\beta + o(\|\Delta t\|)$ $\qquad B_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\beta}$

$$\Delta y = \sum_\alpha A_\alpha\Big(\sum_\beta B_{\alpha\beta}\Delta t_\beta + o(\|\Delta t\|)\Big) + o(\|\Delta t\|)$$

$o(\|\Delta x\|) \mapsto o(\|\Delta t\|)$

т.к. Δx линейно выражается через Δt

$$\Delta y = \sum_\beta \Big(\sum_\alpha A_\alpha \cdot B_{\alpha\beta}\Big)\Delta t_\beta + o(\|\Delta t\|). \qquad \square$$

Получена формула: $\Delta y = \sum\limits_\beta \frac{\partial y}{\partial t_\beta}\cdot \Delta t_\beta + o(\|\Delta t\|) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t_\beta} = \sum_\alpha \frac{\partial y}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\beta}$$

9.2 Правило дифф-ия композиции

Следствие: Композиция сохраняет гладкость (= непрерывное дифф-ие)

Полная производная

I. $f(x,y,z)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$

$\Downarrow$

$f(x(t),y(t),z(t))$ — то есть ф-ия f зависит только от t.

Тогда $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

II. $f(t,x)$, $x=x(t)$

$\Downarrow$

$f(t,x(t))$ — то есть ф-ия f напрямую зависит от t.

Тогда $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\underbrace{\dfrac{dt}{dt}}_{=1}+\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}$ — видно различие производной и частной производной.

!

Неявные функции

I. $F(x,y)=0 \leftarrow$ задаёт $y=y(x) \leftarrow$ y как ф-ю от x.

Пример: 1) $x^2+y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$ — не надо!

2) $x^3+y^3-3xy=0 \Rightarrow y=\,?\leftarrow$ а вот не надо :)

$F(x,y(x))=0 \Rightarrow dF=0$

$\dfrac{dF}{dx}=\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}} \leftarrow$ а дальше вообще чёрточек не будет! Внимание!

1) $2x\,dx+2y\,dy=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$

II. $F(x, y, z) = 0 \Rightarrow z = z(x, y)$

$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$ ← заметь, без чёрточек, но всё равно это производные!

$\Rightarrow dz = -\frac{F_x}{F_z} dx - \frac{F_y}{F_z} dy \Rightarrow dz = z_x dx + z_y dy$

Упражнение: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ ← задаёт линию $(x, y(x), z(x))$

Однородные функции

Определение: Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ однородная степени t, если $f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\lambda \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$.

$\lambda \in \mathbb{R}$

Пример: 1) $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ – однор. степени $\lambda = 1$.

2) $g = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ – однор. степени $\lambda = 0$.

1) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = f$.

2) $x \frac{\partial g}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

совпадение? не думаю.

Оператор Эйлера: $\sum x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$

Теорема: $\sum x_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \lambda f$ – для всех однородных ф-ций f степени λ.

Док-во: $n = 2 \Rightarrow f(x_1, x_2)$

$f(tx_1, tx_2) = t^\lambda \cdot f(x_1, x_2)$

1) $\frac{d}{dt}(f(tx_1, tx_2)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial (tx_1)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial (tx_2)}{\partial t} =$

$= \left(x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{(tx_1, tx_2)}$

обозначает производную по 1 и по 2 переменной.

2) $\frac{d}{dt}\left(t^{\lambda}\cdot f(x_1,x_2)\right)=\lambda\cdot t^{\lambda-1}\cdot f(x_1,x_2)$

Т.к. t может быть любое, то возьмём $t=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. 1) = 2), то получим искомую формулу. $\square$

Удобна замена: $\frac{d}{dt}f(tx_1,tx_2)=\sum\partial_\alpha f(tx_1,tx_2)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(tx_\alpha)$

оператор: производная по α-ой переменной

Необозначенные аргументы

$f(x+y,x-y) \longleftrightarrow f(u,v)$?

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x+y,x-y)=\partial_1 f\cdot\frac{\partial(x+y)}{\partial x}+\partial_2 f\cdot\frac{\partial(x-y)}{\partial y}=\partial_1 f+\partial_2 f$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x+y,x-y)=\partial_1 f\cdot\frac{\partial(x+y)}{\partial y}+\partial_2 f\cdot\frac{\partial(x-y)}{\partial y}=\partial_1 f-\partial_2 f$$

9.3 Высшие частные производные

Функции на открытом мн-ве $U\subseteq\mathbb{R}^n$

Перестановочность частных производных

$$f \rightsquigarrow \underset{f_x}{\frac{\partial f}{\partial x}},\ \underset{f_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\overset{f_{xx}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}},\quad \frac{\partial}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\overset{f_{yy}}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

$$\underset{f_{xy}}{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\underset{f_{yx}}{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

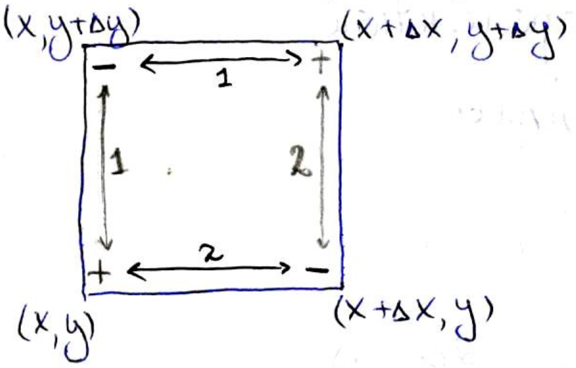
действительно равенство? если да, то: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

Чёрточки уже не пишем f — функция, f_x — производная, f_{xx} — вторая производная

Теорема: Равенство $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\right)$ верно, как только эти производные непрерывны.

Док-во: Для $f(x,y)$ — чтобы не загромождать док-во. Это нам не помешает, т.к. у нас частные производные.

$(f_x)_y$ и $(f_y)_x$ — непрерывные.



$$\Delta^2 f = \overset{1}{\left(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)\right)} - \left(f(x, y+\Delta y) \underset{2}{-} f(x,y)\right) =$$

$$= g(x+\Delta x) - g(x),$$

где $g(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$

Тогда: $\Delta^2 f = g(x+\Delta x) - g(x) = g'_x(\xi)\cdot\Delta x$

по формуле конечных приращений =

= по т-ме Лагранжа: $\xi \in (x, x+\Delta x)$, $\eta \in (y, y+\Delta y)$

$$\Delta^2 f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\right]\cdot\Delta x =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\xi,\eta)\cdot\Delta x\cdot\Delta y$$

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta x\cdot\Delta y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\xi,\eta) \xrightarrow[\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0]{} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$

Но можно провести все операции, но в самом начале взять:

$$\Delta^2 f = \left(f(x+\Delta x, y+\Delta y) \underset{1}{-} f(x, y+\Delta y)\right) - \left(f(x+\Delta x, y) \underset{2}{-} f(x,y)\right)$$

Тогда: $\frac{\Delta^2 f}{\Delta y\Delta x} \xrightarrow[\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}]{} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$

А т.к. $\frac{\Delta^2 f}{\Delta y\Delta x} = \frac{\Delta^2 f}{\Delta x\Delta y}$ (симметрично по x и y), то получим необходимую формулу. □

Класс гладкости

Появляется некая индуктивность.

Определение: Функцию называют m раз гладкой ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$):
- при $m = 0$, если она непрер.;
- при $m = 1$, если она гладкая;
- при $m > 1$, если все её (первые) частные производные $m-1$ раз гладкие.

Класс $C^m(U)$.

$$C^0(U) \supset C^1(U) \supset C^2(U) \supset C^3(U) \supset \ldots \supset \underbrace{C^\infty(U)}_{\text{бескон. гладкие}}$$

Следствие: Смешанные производные порядка m достаточно гладкой ф-ии не зависят от порядка выполнения дифференцирования?

9.4 Формула Тейлора и высшие дифференциалы

Многомерная формула Тейлора

$x \approx 0$, $y \approx 0$ ← вблизи нуля

Наивно: $f(x,y) = \left[f(0,y)\right] + \left[\frac{1}{1!} f_x(0,y) \cdot x\right] + \left[\frac{1}{2!} \cdot f_{xx}(0,y) x^2\right] + \ldots$

$$= \left[f(0,0) + \frac{1}{1!} f_y(0,0) \cdot y + \frac{1}{2!} \cdot f_{yy}(0,0) y^2 + \ldots\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{1!} f_x(0,0)\, x + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{1!} \cdot f_{xy}(0,0)\, xy + \ldots\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{2!} \cdot f_{xx}(0,0) x^2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{1!} \cdot f_{xxy}(0,0) \cdot x^2 y + \ldots\right] + \ldots$$

Бесконечно писать — ряд, конечно писать — разложение.

В конце для степени k: $o(\|(x,y)\|^k) = (x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}$

Но можно написать так: $O\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right) = [3]$.

для $k=2$

Второй дифференциал

$f(x,y)$ — дважды гладкая, т.к. из этого следует, что второй дифф-ал существует.

1) $df = f_x dx + f_y dy$

2) $d(df) = d(f_x)\cdot dx + f_x \cdot \underset{0}{d(dx)} + d(f_y)dy + f_y \cdot \underset{0}{d(dy)} =$

$= f_{xx}dx^2 + f_{xy}dy\,dx + f_{yy}dy^2 + f_{yx}\,dx\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}dy^2$

Пример: $f(x,y) = x^2 - y^2$
$df = 2x\,dx - 2y\,dy$
$d^2f = 2dx^2 - 2dy^2$

$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$
$df = f\cdot(-2x)dx + f(-2y)dy$
$d^2f = \ldots$
$d^2f(0,0) = -2(dx^2+dy^2)$

Маленький вектор перемещения: $V = (\Delta x, \Delta y) = (\Delta V_1, \Delta V_2)$

$dx(V) = \Delta x = \Delta V_1$

$dy(V) = \Delta y = \Delta V_2$

Первый дифф-ал — линейная форма приращения.

Второй дифф-ал — квадратичная форма приращения.

Третий дифф-ал — кубическая форма приращения.

Определение: форма - ненулевая линейная ф-ия ?

Матрица из функций: $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = H$ — гессиан функции f.

т.к. дважды гладкая

$H^T = H$ — гессиан симметричен.

Тогда: $d^2f = [dx\ dy]\cdot H \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = d\vec{x}_\alpha^{\,T}\cdot H(\vec{x}_\alpha)\,d\vec{x}_\alpha$

Индексные обозначения

1) $df = \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \cdot dx_\alpha$

2) $d^2 f = \sum_{\alpha} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\right) \cdot dx_\alpha = \overbrace{\sum_{\alpha} \sum_{\beta}}^{\sum_{\alpha,\beta}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \underbrace{dx_\alpha \cdot dx_\beta}$

коммутируют (то есть выполнено св-во коммутативности)

3) $d^3 f = \sum_{\alpha,\beta} d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) \cdot dx_\alpha \cdot dx_\beta = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^3 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \cdot dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma$

$\vdots$

k) $d^k f = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_k}} \cdot dx_{\alpha_1} \cdot dx_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot dx_{\alpha_k}$

Но иногда могут встречаться несколько раз. Пусть тогда ∂x_j встречается β_j раз, тогда:

$$d^k f = \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = k} A \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\beta_n}} \cdot dx_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot dx_n^{\beta_n}$$

A – был бы биномиальный коэффициент, если у нас всего 2 переменные ($n=2$).

$A = \frac{k!}{\beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!}$ – мультиномиальный коэффициент.

Аналогично: $(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum \frac{k!}{\beta_1! \ldots \beta_n!} x_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$.

$(x_1, \ldots, x_n) = \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

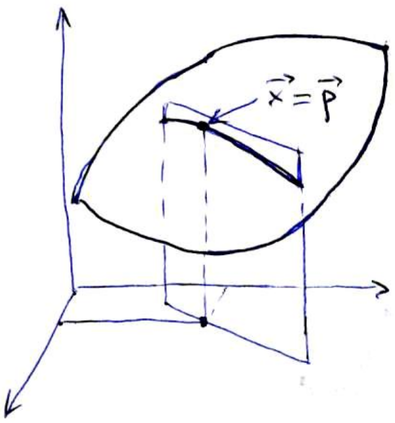
$(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \vec{\beta} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ – мультииндекс

$\beta_1 + \ldots + \beta_n = |\beta|$, $|\beta| = k \Leftrightarrow \beta \vdash k$ значок из комбинаторики

$$\boxed{d^k f = \sum_{|\beta| = k} \frac{k!}{\prod \beta_i!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial \vec{x}^{\vec{\beta}}} \cdot d\vec{x}^{\vec{\beta}}}$$

$\vec{x}^{\vec{\beta}} = (x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n})$

Лемма об одномерном сечении



Введём функцию:

$\varphi(t)=f(\vec{p}+t\vec{v})$ – V по смыслу Δx.

Л. При достаточной гладкости f имеем

$$\varphi^{(k)}(t)=\underbrace{d^k_{p+tv}\, f(\vec{v})}_{\text{форма степени } k}$$

$p+tv$ — точка приложения; $\vec{v}$ — аргумент

Док-во: $f^{(0)}=f$, $d^{(0)}_{p+tv} f(\vec{v})=f(\vec{p}+t\vec{v})$ ← исключительный случай ?

$$\varphi(t)=f(p_1+tv_1,\dots,p_n+tv_n)$$

1) $$\varphi'(t)=\sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(\vec{p}+t\vec{v})\cdot\frac{d(p_\alpha+tv_\alpha)}{dt}=$$

$$=\underbrace{\sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(\vec{p}+t\vec{v})\cdot v_\alpha}_{\text{знакомая вещь - это первый дифф-ал}}=d^1_{p+tv} f(\vec{v})$$

аргумент

2) $$\varphi''(t)=\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}(p+tv)\cdot\underbrace{\frac{d(p+tv)}{dt}}_{=v_\beta=dx_\beta(\vec{v})}\cdot \underbrace{v_\alpha}_{=dx_\alpha(\vec{v})}=$$

$$=\Big[\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}(p+tv)\cdot dx_\alpha\cdot dx_\beta\Big](v)=d^2_{p+tv}f(v)$$

3) $$\varphi'''(t)=\ldots=\Big[\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\partial^3 f}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_\gamma}(p+tv)\, dx_\alpha\, dx_\beta\, dx_\gamma\Big](v)=d^3_{p+tv}f(v)$$

Механизм для k-ой $\varphi^k(t)$ – аналогичен. Можно док-ть по ММИ. $\square$

Формула Тейлора в дифф-ах

Если $\forall \alpha: dx_\alpha(\Delta \vec{x}) = \Delta x_\alpha \Rightarrow d\vec{x}(\Delta\vec{x}) = \Delta x$

$$f(p+\Delta x) = d^0 f(p) + d_p^1 f(\Delta x) + \frac{1}{2!} d_p^2 f(\Delta x) + \frac{1}{3!} d_p^3 f(\Delta x) +$$

$$+ \underbrace{\ldots}_{\text{до } m} + [m] = \sum_{0 \le k \le m} \frac{1}{k!} d^k f_p(\Delta x) + o(\|\Delta x\|^m)$$

Теорема: Формула верна для всех $f \in C^m(U)$.

Док-во: $\varphi(t) = f(p + t\Delta x)$ и по лемме:

$\varphi(0) = f(p) = d_p^0 f(p)$

$\varphi'(0) = d_p^1 f(\Delta x)$

$\varphi''(0) = d_p^2 f(\Delta x)$

$\vdots$

$$\underset{f(p+\Delta x)}{\overset{\|}{\varphi(1)}} = \varphi(0) + \varphi'(0)\underset{1}{\overset{\|}{t}} + \frac{1}{2!}\varphi''(0)\underset{1}{\overset{\|}{t^2}} + \ldots ?$$

$\square$

Операторные обозначения

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)}_{\text{„ждёт функцию"}} f$$

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx \cdot dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2\right) f$$

$\vdots$

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f$$

Для многомерии:

$$d^k f = \Big(\underbrace{\sum \frac{\partial}{\partial x_\alpha} dx_\alpha}_{(\vec{\nabla} \cdot d\vec{x})}\Big)^k f$$

При этом градиент:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}) \\ d\vec{x} = (dx_1, \ldots, dx_n) \end{cases}$$

$$d^k f = (\nabla \cdot dx)^k f$$

$$f(p+\Delta x) = \boxed{\sum_{k \ge 0} \frac{1}{k!} d_p^k} f(\Delta x) = \underbrace{\exp(d)}_{}{}_p f(\Delta x)$$

кусок формулы Тейлора для exp

exp от оператора d

$d = \partial_x dx + \partial_y dy \Rightarrow \exp(\partial_x dx + \partial_y dy) =$
$= \exp(\partial_x dx) \cdot \exp(\partial\ldots$

9.5 Локальные экстремумы (на $U \subseteq \mathbb{R}^n$)

Определение: Точку $p \in U$ называют точкой локального максимума (минимума) функции f, если $f(x) \leq (f(x) \geq)\ f(p)$ вблизи точки p ($\equiv \exists\, \varepsilon > 0 : \forall x \in B_\varepsilon(p)$).

max } вместе - экстремум
min }

$\geq (\leq)$ - нестрогий

$> (<)$ - строгий

Необходимые условия

Теорема (1^e необходимое условие):

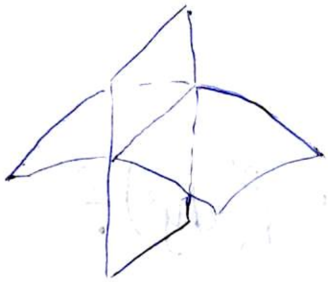
В каждой точке локального экстр. гладкой ф-ии равны нулю: (1) все частные производные;

(2) её производные по любому направлению;

(3) её дифференциал.

Док-во: (1) следует из (2)

(2) Вблизи p (экстр. f) по вектору V.



$\varphi(t) = f(p + tV)$, $t = 0$ - экстр. φ

Необходимое условие $\Rightarrow \varphi'(0) = 0$.

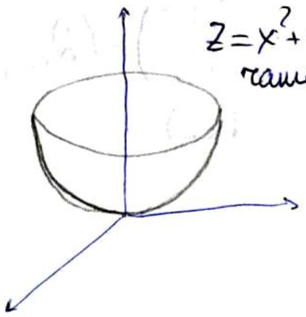
Лемма об одномерном сечении:

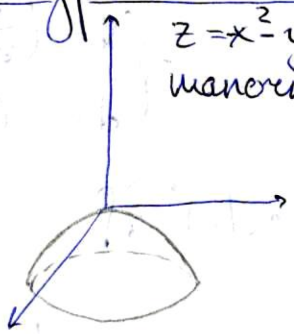
$$\varphi'(t) = df_{p+tV}(V)$$

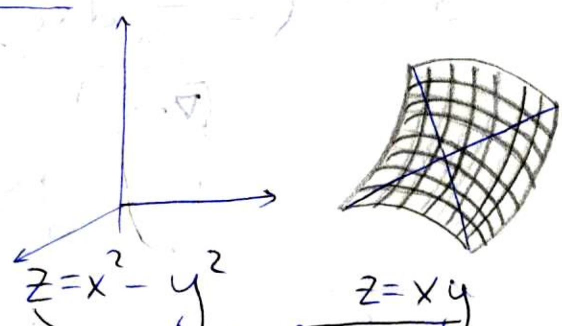
$$0 = \varphi'(0) = df_p(V) = \partial_V f(p)$$

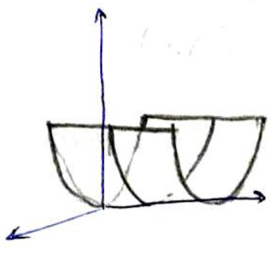
(3) Т.к. V - любой вектор, то $\Rightarrow df_p \equiv 0$. □

Квадратичные формы









Определение: Если $df_p=0$, то p = стационарная.

Также: если $df_p \neq 0$, то p = некритическая,

$\Leftrightarrow \nabla f_p \neq 0$ если $\nexists\, df_p$ или $df_p=0$, то p = критическая.

Теорема (2е необходимое условие)

Для всякой дважды гладкой функции f:

(1) в т. p локального макс. $d^2 f_p \le 0$;

(2) в т. p локального миним. $d^2 f_p \ge 0$.

Определение: Квадратичная форма Q называется неположительно полуопределённой, если $Q(v)\le 0\ \forall v$, неотрицательно полуопределённой, если $Q(v)\ge 0\ \forall v$.

$Q(v)>0\quad \forall v\neq 0 \Rightarrow Q$ — положит. определенной,

$Q(v)<0\quad \forall v\neq 0 \Rightarrow Q$ — отрицат. определенной.

Док-во: $\varphi''(t) = d^2 f_{p+tv}(v)$, $t=0 \Rightarrow d^2 f_p(v)$

p = макс $\Rightarrow \varphi''(0)\le 0$.

p = мин. $\Rightarrow \varphi''(0)\ge 0$.

□

Следствие: Если $d^2 f_p$ знакоперем. форма, то экстр. нет.

Достаточные условия

Теорема: В каждой стационарной точке p ф-ии f:

(1) если $d^2 f_p<0$, то p = строгий лок. максимум;

(2) если $d^2 f_p>0$, то p = строгий лок. минимум.

Лемма: $\forall$ положит. опред. квадратичные формы Q найдётся такое число $\mu>0$, что $\forall v: Q(v)\ge \mu\|v\|^2$

$(v\neq 0 \Rightarrow Q(v)\ge \mu\|v\|^2)$

Док-во: Сфера компактна, Q — непрерывная функция $\Rightarrow \exists\, m=\min Q$ на S — по т-ме Вейерштрасса ($\forall v\in S\ Q(v)\ge m$)

?

$\|v\|=1$

$Q>0 \Rightarrow m>0$

$\exists \mu>0,\ \mu<m \Rightarrow \mu$

однородная ф-ия степени 2 $\Rightarrow$ $Q(\lambda v)=|\lambda|^2\cdot Q(v)$ □

Док-во теоремы: (2)

стационарная точка

Приращение $\Delta f = f(p+\Delta x) - f(p) = \cancel{df_p(\Delta x)} + \frac{1}{2} d^2 f_p(\Delta x) + o(\|\Delta x\|^2)$

$\Delta f \geq \frac{1}{2}\mu\|\Delta x\|^2 + o(\|\Delta x\|^2) > 0 \Rightarrow f(p+\Delta x) > f(p)$

$\Rightarrow f(p)$ – строгий лок. минимум. $\square$

Другое док-во, алгебраическое:

$Q(v) = \sum q_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta$

линейные замены переменных

$Q(\tilde{v}) = \sum \lambda_\alpha \tilde{v}_\alpha^2$

если только повороты, то набор $\lambda_1 \dots \lambda_n$ зависит только от Q

Можно всегда линейной заменой переменных привести к сумме квадратов с коэфф-ами.

$\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ собственные числа кв формы (матрицы)

Примеры:

Критерий Сильвестра

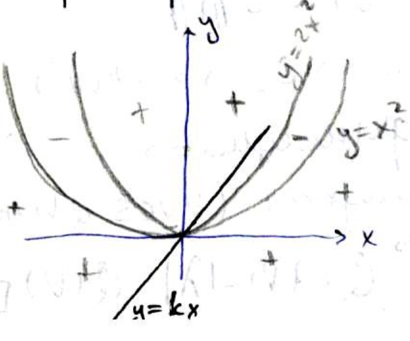
	x^2+y^2	x^2-y^2	$2xy$	$x^2+2xy+y^2$	x^2
	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$
Δ_0	$1>0$	1	1	1	1
Δ_1	$1>0$	1	0	1	1
Δ_2	$1>0$	-1	-1	0	0

$x^2+2y^2+3z^2$	$-x^2-2y^2-3z^2$
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$
$\underset{\Delta_0}{1}, \underset{\Delta_1}{1}, \underset{\Delta_2}{2}, \underset{\Delta_3}{6}$	$\underset{\Delta_0}{1}, \underset{\Delta_1}{-1}, \underset{\Delta_2}{2}, \underset{\Delta_3}{-6}$
положит. опр.	отриц. опр.

Пример (Пеано):

$z = (y-x^2)(y-2x^2) = y^2 + 2x^4 - 3x^2 y$

$d^2 z(0,0) = 2dy^2$



$(0,0)$ – стационарная точка, экстр. нет.

В каждом 1-мерном сечении экстр. есть.

9.6 Гладкие отображения

Функция $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Отображение $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — можно заменить: $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$x = (x_1 \dots x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

	в $\mathbb{R}^1$	в $\mathbb{R}^2$	в $\mathbb{R}^3$
из $\mathbb{R}^1$	фун-ия $f(x)$	параметризованная плоская линия	параметр. линия в пр-ве
из $\mathbb{R}^2$	плоское скалярное поле	плоское векторное поле	параметр. поверхность в пр-ве
из $\mathbb{R}^3$	скалярное поле	ничего интересного —	векторное поле

Отображение $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — совокупность координатных функций.

Итоговый вектор: $f = [f_1 \dots f_m]^T$,

начальный вектор: $x = [x_1 \dots x_n]^T$.

Определение: Отображение $f: U \to \mathbb{R}^m$ гладкое, если все f_p (частные производные) ~~гладкие~~ непрерывные фу-ии на U.

(все $\frac{\partial f_\beta}{\partial x_\alpha}$ непрер. на U).

Матрица Якоби

Дифференцируемое отображение:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = A(\Delta x) + O(\|\Delta x\|)$$

$A(\Delta x) = A \cdot \Delta x$ линейное отображение

Определение: матрица Якоби дифф-мого отображения называют $\frac{Df}{Dx}$.

$$\frac{Df}{Dx} = \frac{D(f_1 \ldots f_m)}{D(x_1 \ldots x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Следствие: отображение f гладкое $\Leftrightarrow \frac{Df}{Dx}$ – непрерывно.

Дифференцирование композиций

Было: $y(x_1 \ldots x_n)$, $x_i = x_i(t_1 \ldots t_m)$

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \leftarrow \text{в виде матриц:}$$

Стало: $y_k(x_1 \ldots x_n)$, $x_i = x_i(t_1 \ldots t_m)$

$$\frac{\partial y_k}{\partial t_j} = \sum_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \leftarrow \text{в виде матриц:}$$

$k \times n$ = $k \times m$ · $m \times n$

итак

$$\frac{Dy}{Dt} = \frac{Dy}{Dx} \cdot \frac{Dx}{Dt} \leftarrow \text{через матрицы Якоби}$$

$$\underset{\mathbb{R}^k}{y} \leftarrow \underset{\mathbb{R}^n}{x} \leftarrow \underset{\mathbb{R}^m}{t}; \quad y(t) = y(x(t))$$

Теорема: Композиция дифф. отображений является дифф. отображением.

или:

Композиция сохраняет дифф-ость.

Следствие: Композиция сохраняет гладкость.

гладкость: дифф-ость + непрер. производных

$$A = \frac{Dy}{Dx}, \quad B = \frac{Dx}{Dt}$$

Док-во: такое же, как раньше: $(t \in \mathbb{R}^m) \mapsto (x \in \mathbb{R}^n) \mapsto (y \in \mathbb{R}^k)$

условия, что отображения дифф-мы:

1) $\Delta x(\Delta t) = x(t+\Delta t) - x(t) = B \cdot \Delta t + o(\|\Delta t\|)$

2) $\Delta y(\Delta x) = y(x+\Delta x) - y(x) = A \cdot \Delta x + o(\|\Delta x\|)$

Тогда: $\Delta y(\Delta t) = A(B \cdot \Delta t + o(\|\Delta t\|)) + o(\|B\| \cdot \|\Delta t\|) = A \cdot B\Delta t + o(\|\Delta t\|)$

При композиции отображений матрицы Якоби перемножаются!

Дифференцирование обратного отображения

Лемма: Если матрицы A и B удовлетворяют

$$AB = E_m \quad \text{и} \quad BA = E_n \ (\text{един. мат-цы})$$

($\Rightarrow$ A это $m\times n$, B это $n\times m$), то они квадратные ($m=n$) и обратны друг другу ($A=B^{-1}$, $B=A^{-1}$)

Док-во: $\text{Ранг}(AB) \leq \text{Ранг}(A); \text{Ранг}(B)$

$\text{Ранг}(BA) \leq$ ——"—— ?

Если $m \neq n \Rightarrow$ введём к противоречию.

Теорема: Если два гладких отображения взаимно обратны, то их матрицы Якоби тоже взаимно обратны.

Док-во: $x \mapsto y(x)$, $y \mapsto x(y)$.

Взаимно-обр.: $y(x(y)) = y$ и $x(y(x)) = x$.

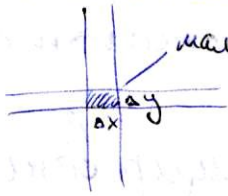
Дифф-ем: $E_m = \frac{Dy}{Dx} \cdot \frac{Dx}{Dy}$ и $E_n = \frac{Dx}{Dy} \cdot \frac{Dy}{Dx}$?

По лемме $m = n$ и $\frac{Dx}{Dy} = \left[\frac{Dy}{Dx}\right]^{-1}$

Следствие: Если два гладких взаимно-обратных отображения определены на открытых $U \subseteq \mathbb{R}^m$ и $V \subseteq \mathbb{R}^n$, то $m = n$.

Искажение объёма и Якобиана

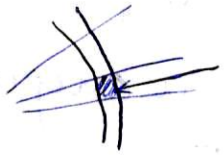
Пример: $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$



маленькая площадь $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y$

А если другие координаты:

$$\begin{cases} x = x(u,v) = a_{11} u + a_{12} v \\ y = y(u,v) = a_{21} u + a_{22} v \end{cases}$$



маленькая площадь

$$\Delta S = \left(\pi(\rho+\Delta\rho)^2 - \pi\rho^2\right)\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \cancel{2}\rho\Delta\rho\cdot\Delta\varphi + O(\Delta\rho\Delta\varphi)$$

Коэффициент искажения → в линейном случае

$$\Delta u \Delta v \mapsto \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Delta u \cdot \Delta v$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\partial x}{\partial u}\cdot u + \frac{\partial x}{\partial v} v + O(u^2+v^2) \\ y = y_0 + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot u + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot v + O(u^2+v^2) \end{cases}$$

Коэф. искажения: $\det\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \det \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

Якобиан

Если якобиан положительный, то ориентация право-лево сохраняется, если отрицательный, то не сохраняется.

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \end{cases} \qquad \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Якобиан для полярной с.к.:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \rho$$