

# 2 семестр

Александр  
Кемеров  
Гильманов ①

## ГЛАВА 10.

### Неявные функции и гладкие многообразия.

#### 10.1 Теорема о неявной ф-ции

Т.к.  $n$  большая, то будут следующие соображения:

1) Анализ.geom.:

ур-ие прямой на  $n$ -ни:  $Ax + By + C = 0$  - где  $A$  и  $B$  не могут одновременно  $= 0$ ;

ур-ие  $n$ -ни в  $n$ -ве:  $Ax + By + Cz + D = 0$  - где  $A, B$  и  $C$  одновременно не  $= 0$ ;

ур-ие прямой в  $n$ -ве:  $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

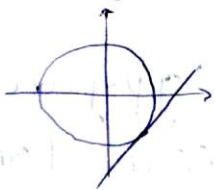
Вопрос: когда можно выразить одну переменную явно через остальные?

$F(x, y) = 0 \Rightarrow y = y(x) = ?$ ;  $F(x, y, z) = 0 \Rightarrow z = z(x, y) = ?$ ;  $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

Ответ:  $B \neq 0 \Rightarrow y = y(x)$ ;  $C \neq 0 \Rightarrow z = z(x, y)$ ;  $B \neq 0 \Rightarrow y = y(x, z)$ ;  $A \neq 0 \Rightarrow x = x(y, z)$

2) Теперь рассмотрим нелинейные, но гладкие функции (все функции гладкие).

Пример:  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  ← видно, что в отличие от линейного случая тут придется рассматривать локально. А у гладкой ф-ции, локально можно взять касательную.



$F(x, y) - F(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\cdot)$  - ур-ие касательной  
 $A = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ ;  $B = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$

Если  $B = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow y = y(x)$  вблизи  $(x_0, y_0)$ .

Для трёх переменных:

$$F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0)$$

Если  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \Rightarrow z = z(x, y)$  вблизи  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Если  $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y = y(x, z) \\ z = z(x, y) \end{cases}$

Надо доказать:

①  $z = z(x, y)$  и другие!

② непрерывна

③ имеет частные производные

④ гладкая

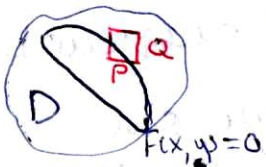
Случаи: а)  $F(x, y)$ ; б)  $F(x, y, z)$ ; в)  $\begin{cases} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \end{cases}$ ; г) Обобщенный  $\begin{cases} F_1(x_1, \dots) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots) \end{cases}$

Случай а)

Одна ф-ция двух переменных

$D \subset \mathbb{R}^2$  - открытое мн-во

и - гладкая ф-ия  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

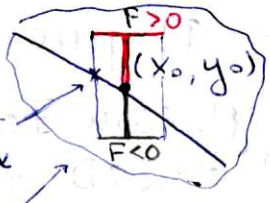


Определение: В окр-ти точки  $p$  уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет  $y$  как ф-ию от  $x$ , если  $\exists$  открытый прямоугольник  $P \times Q \subset D$  такой что:

$$\forall x \in P \exists! y = y(x) \in Q : F(x, y) = 0.$$

Th Если  $F(x_0, y_0) = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , то в окр-ти этой точки  $(x_0, y_0)$ :  $F=0$  определяет  $y(x)$  как гладкую ф-ию. ②

Док-во: ①



? по Т-ме о промежу. значениях

$F$  гладкая  $\Rightarrow F_y$  непрер.  
 Предположим  $F_y(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow F_y(x, y) > 0$  вблизи  $(x_0, y_0) \Rightarrow$  ф-ия монотонна вблизи  $(x_0, y_0) \Rightarrow$  получим единственность.

1.  $y \in B_\epsilon(y_0) \sim |y - y_0| < \epsilon;$
2.  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |y - y_0| < \epsilon.$

② Автоматически.

③, 4  $F$  гладкая  $\Rightarrow \Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + o(\Delta x^2 + \Delta y^2)$

$\Delta F = (A + \alpha) \Delta x + (B + \beta) \Delta y$ ,  $\alpha, \beta \rightarrow 0$  при  $\begin{matrix} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{matrix}$

На линии  $\Delta F = 0 \Rightarrow 0 = (A + \alpha) \Delta x + (B + \beta) \Delta y \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{A + \alpha}{B + \beta} \rightarrow -\frac{A}{B} = -\frac{F_x}{F_y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$  ← для гладкости  $y(x)$  должно  $\frac{F_x}{F_y}$  быть непрерывно.

Это выполняется вблизи  $(x_0, y_0) \Rightarrow y(x)$  - гладкая.

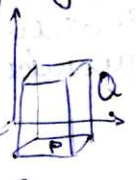
Случай 3)

Одна ф-ия трех переменных

$D \subset \mathbb{R}^3$  - открытое мн-во и гладкая ф-ия  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Определение: В окр-ти точки  $p$  г-и  $F(x, y, z) = 0$

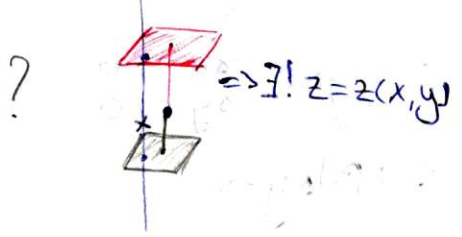
? определяет  $z$  как ф-ию от  $(x, y)$ , если  $\exists$  окр. параллелепипед (парг)  $P \times Q \subset D$  такой что  $\forall (x, y) \in P \exists! z = z(x, y) \in Q: F(x, y, z) = 0$ .



Th Если  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , то в окр-ти этой точки  $F = 0$  определяет  $z(x, y)$  как гладкую ф-ию.

Док-во: ①  $F_z(x_0, y_0, z_0) > 0 \Rightarrow$  на окр-ти точки  $(x_0, y_0, z_0)$

$F_z(x, y, z) > 0$ .



③, ④  $F$  - гладкая  $\Rightarrow \Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \Delta z + o(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta F = (A + \alpha) \Delta x + (B + \beta) \Delta y + (C + \gamma) \Delta z = 0, \alpha, \beta, \gamma \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ .

На поверхности  $\Delta F = 0 \Rightarrow$

$\Delta y = 0$	$\frac{dz}{dx} \leftarrow \frac{\Delta z}{\Delta x} = -\frac{A + \alpha}{C + \gamma} \rightarrow -\frac{A}{C} = -\frac{F_x}{F_z}$
$\Delta x \rightarrow 0$	
$\Delta x = 0$	$\frac{dz}{dy} \leftarrow \frac{\Delta z}{\Delta y} = -\frac{B + \beta}{C + \gamma} \rightarrow -\frac{B}{C} = -\frac{F_y}{F_z}$
$\Delta y \rightarrow 0$	

## Случай б)

3

Две ф-ии трёх переменных

Пример:  $\begin{cases} xz - y = 0 \\ x - yz = 0 \end{cases}$  ← сядна

Утверждение:  
Вблизи  $\Gamma(1,1,1)$  система  
ур-ий определяет  $y(x)$  и  $z(x)$   
как 2-х ф-ию.

$$\begin{cases} F_1 = xz - y = 0 \\ F_2 = x - yz = 0 \end{cases} \leftarrow F_{i,y} = \frac{\partial F_i}{\partial y} \text{ - частные производные} \\ \text{пишем так.}$$

- Из  $F_2 = 0$  выражаем  $z = \frac{x}{y}$  вблизи  $(1,1,1) = p$ , потому что  $F_{2,z}(p) = -1 \neq 0$  - используем доказанную т-му.
- Подставляем  $z = \frac{x}{y}$  в  $F_1(x,y,z)$ , получаем  $G(x,y) = F(x,y, \frac{x}{y})$   
 $\Rightarrow G(x,y) = \frac{x^2}{y} - y$ .

• Вблизи  $(1,1)$ :  $\frac{\partial G}{\partial y}(1,1) = \left(-\frac{x^2}{y^2} - 1\right)_{(1,1)} = -2 \neq 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  можно выразить  $y = y(x) = x$ .

• Все решения:

1.  $x = y = 0, z$  - любое
2.  $z = 1, x = y$
3.  $z = -1, x = -y$

Общее:

Т.к.  $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  - то один столб в матрице  
(якобиане) не равен нулю: допустим  
это  $(z)$   
: стоп!

Определение: В окр-ти точки  $p$  группа ур-ий  $F_1(x,y,z) = 0$  и  $F_2(x,y,z) = 0$  определяют  $y$  и  $z$  как ф-ии от  $x$ , если  $\exists$  парг  $P \times Q \subset D$  с точкой  $p$  внутри, что  $\forall x \in P \exists!$   $(y,z) \in Q : F(x,y,z) = 0$ .

Th Если  $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} \neq 0$ , то вблизи точки  $p$  ур-ния  $F_1=0, F_2=0$  определяются такие  $\varphi$ -ции  $y=y(x)$  и  $z=z(x)$ , т.е.  $\exists$  открытый парк  $P \times Q^2 \ni p: \forall x \in P \exists!(y, z) \in Q$  такие что  $x \mapsto (y, z)$  н. отображение

Док-во:  $J \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} F_{1,y} & F_{1,z} \\ F_{2,y} & F_{2,z} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$  можно сказать, что:  
 если  $z$ -я не равна 0, то  $F_{2,z}$ .

$$F_{2,z} = \frac{\partial F_2}{\partial z}(p) \neq 0 \Rightarrow \text{вблизи } (x_0, y_0) \forall (x, y) \exists z(x, y) \text{ как н. ф.}$$

$$G_i(x, y) = F_i(x, y, z(x, y)) - \text{используя Th выше}$$

$$\text{Если } G_2(x, y) \equiv 0 \Rightarrow G_{2,y} \equiv 0. \text{ Напо: } G_{1,y}(p) \neq 0 \Rightarrow y(x) \text{ н. ф. вблизи } x_0.$$

$$\text{Проверим: } \begin{vmatrix} F_{1,y} & F_{1,z} \\ F_{2,y} & F_{2,z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{1,y} & F_{1,z} \\ F_{2,y} & F_{2,z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z_y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{1,y} + F_{1,z} \cdot z_y & F_{1,z} \\ F_{2,y} + F_{2,z} \cdot z_y & F_{2,z} \end{vmatrix} =$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{используя св-во,} \\ \text{показанное выше} \end{array} \right] = \begin{vmatrix} G_{1,y} & * \\ 0 & F_{2,z} \end{vmatrix} = G_{1,y} \cdot F_{2,z} \neq 0 \Rightarrow G_{1,y}(p) \neq 0.$$

$$G_{i,y} = \frac{\partial G_i}{\partial y} = \frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\parallel F_{i,y} + F_{i,z} \cdot z_y$$

Задача 2)

Общая теорема о неявной ф-ции

Открытое мн-во:  $D \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k * \mathbb{R}^m$ ,  $F_1, \dots, F_m: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ )  
написанное отображение

разделяем переменные, потому что  $x_i$  не играют роли в рассуждении. Преобразования их не затрагивают.

Th (Дюни, 1876)

Если  $\frac{\partial(F_1 \dots F_m)}{\partial(y_1 \dots y_m)}(p) \neq 0$ , то вблизи точки  $p$  ур-ня связей

$F_1=0, \dots, F_m=0$  определяют м. ф-ии:  $y_1 = y_1(x_1 \dots x_k)$   
 $y_m = y_m(x_1 \dots x_k)$

Док-во:  $m=3$   $F_{3,3}(p) \neq 0 \Rightarrow y_3 = y_3(x_1 \dots x_k, y_1, y_2) \Rightarrow$

крайний правый нижний элемент в якобиане

$\Rightarrow G_{ij}(x_1 \dots x_k, y_1, y_2) = F_{ij}(y_1, y_2, y_3(y_1, y_2))$

$G_{ij} = F_{ij} + F_{im} \cdot Y_{mj}$ ,  $G_{3m} = 0 \Rightarrow G_{3j} = 0$ .

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} (p) \neq 0 = \begin{vmatrix} F_{11} + F_{13} \cdot Y_{31} & F_{12} + F_{13} \cdot Y_{32} & F_{13} \\ ? & ? & F_{23} \\ ? & ? & F_{33} \end{vmatrix}$$

умножая на "почти" единичную матрицу, как раньше

$$= \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & * \\ G_{21} & G_{22} & * \\ G_{31} & G_{32} & F_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} \cdot F_{33} \quad \square$$

# 10.2 Теорема об обратном отображении

Постановка вопроса: полярная с.к.  $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \end{cases}$   
 $(\rho, \varphi) \rightarrow (x, y)$

$$U = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$



Отрезок отображается в точку.

Вспомогательная в 1 сем.:  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho = 0$

Общая постановка:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2) \\ y_2 = f_2(x_2, x_3) \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{существует ли?} \\ \text{отображение} \end{array} \right. \text{ когда существует?} \\ f: U \rightarrow V \quad \exists f^{-1}?$$

Локальная обратимость

$$f^{-1}(f(x_1, x_2)) = (x_1, x_2)$$

$$J(f^{-1} \circ f) = J = J(f^{-1}) \cdot J(f)$$

Локальная - то есть в окр-ти какой-либо точки

Th Гладкое отображение является локальным диффеоморфизмом вблизи каждой точки, где его якобиан  $\neq 0$ .  
 имеет гладкое обратное

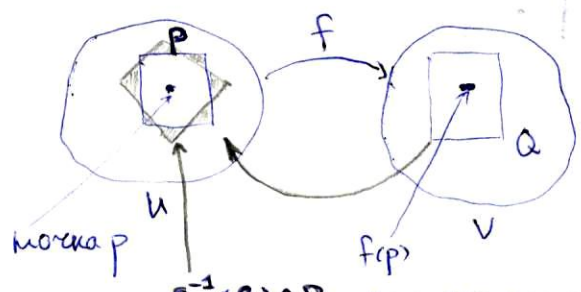
$U, V$  - открытые  $\subset \mathbb{R}^n$   
 ↖ подмнож-во

Дек-во: ( $n=2$ ) - используя Th о невып. ф-ции, поэтому:

$$\text{в четырёх-мерном } (y_1, y_2, x_1, x_2) \text{ пр-ве } \begin{cases} F_1 = f_1(x_1, x_2) - y_1 = 0 \\ F_2 = f_2(x_1, x_2) - y_2 = 0 \end{cases} \left| \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right. \text{ по THP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2) \\ x_2 = x_2(y_1, y_2) \end{cases} \left. \right\} \text{гладкие вблизи } p \quad ? J(p) \neq 0$$

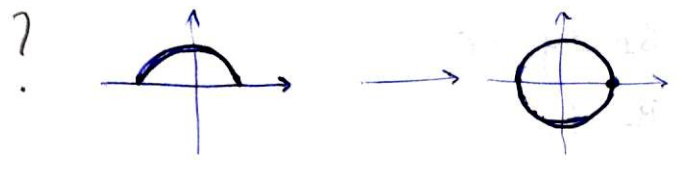




$f^{-1}(Q) \cap P$  — уменьшаем  
 окр-ть путём пересечения и добиваемся однозначности.

Кейдуга мобилизации

$f(z) = z^2, z = x + iy, z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$   
 $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$



10.3 Дифференцирование  
 нелинейной функции (применение ТНФ)

Первая пр-ая и дифф-лы.

Если  $F(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ .

Если  $F(x, y, z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$

Тн Матрица Якоби нелинейно заданных ф-ий  $y_i(x_i)$   
 по переменным  $x_i$  равна:

$\frac{Dy}{Dx} = -\left[\frac{DF}{Dy}\right]^{-1} \cdot \frac{DF}{Dx}$  — обратная, потому что  $\frac{DF}{Dy}$  — ф-ия.

Док-во:  $F=0 \Rightarrow dF=0$

$dF_i = \sum F_{i,x_j} dx_j + \sum F_{i,y_k} dy_k$

$dF = \frac{DF}{Dx} dx + \boxed{\frac{DF}{Dy}} dy = 0$  □

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}(\vec{x}) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \left[ \frac{DF}{Dy} \right]^{-1} \cdot \frac{DF}{Dx}$$

det  $\frac{DF}{Dy}(p) \neq 0$

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_i = y_i(x_1, x_2)$$

Th

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_i, y_2)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y_1, y_2)}}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y_1, x_i)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y_1, y_2)}}$$

Don-vo:  $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \quad B_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}$

$$\begin{aligned} dF_1 &= A_{11}dx_1 + A_{12}dx_2 + B_{11}dy_1 + B_{12}dy_2 = 0 \\ dF_2 &= A_{21}dx_1 + A_{22}dx_2 + B_{21}dy_1 + B_{22}dy_2 = 0 \end{aligned}$$

Тогда:  $B_{11}dy_1 + B_{12}dy_2 = -(A_{11}dx_1 + A_{12}dx_2) = C_1 \leftarrow$  линейная комбинация

$$J = \det(B_{ij}) = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y_1, y_2)} \neq 0$$

По правилу Крамера  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow dy_1 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_{12} \\ C_2 & B_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-1}{J} \left( \begin{vmatrix} A_{11} & B_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{vmatrix} dx_1 + \begin{vmatrix} A_{12} & B_{12} \\ A_{22} & B_{22} \end{vmatrix} dx_2 \right)$$

*аналог*

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} dx_2$$

$$F_i(x, y, z, w) = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial z}{\partial w} \right)_{x=\text{const}} = - \frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, w)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}}$$

чтобы показать, какая переменная не меняется в данной ф-ции. Допустим, y-можно меняться.

по Th выше

$$\left( \frac{\partial z}{\partial w} \right)_{y=\text{const}} = - \frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, w)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, z)}}$$

## Вторые производные и гессе-матрица

$$d^2 F = d(dF) = d(F_x dx + F_y dy) = F_{xx} dx^2 + 2F_{xy} dx dy + F_{yy} dy^2 + \underbrace{F_{yx} dx^2 + F_{yy} dy^2 + F_{xy} dy^2}_{=}$$

Если известна ф-ция  $y=y(x)$   
 $F(x, y) = 0$

$$\Rightarrow d^2 y = -[F_y]^{-1} \cdot (\dots)$$

Для ф-ций большего числа переменных:  
 $F_i(x, y, z) = 0 \Rightarrow y = y(x), z = z(x)$

$H_i =$  гессе-матрица  $F_i(x, y, z) =$  гессе-матрица ф-ции связи

$$H_i + F_{i,y} d^2 y + F_{i,z} d^2 z = 0$$

По правилу Крамера:  $d^2 y = -J^{-1} \cdot \begin{vmatrix} H_1 & F_{1,z} \\ H_2 & F_{2,z} \end{vmatrix}$

$$d^2 z = -J^{-1} \cdot \begin{vmatrix} F_{1,y} & H_1 \\ F_{2,y} & H_2 \end{vmatrix}$$

## 10.4 Особенности линий и поверхностей

При способе задания:

	Явно	Криво	Параметр.
Линия в $\mathbb{R}^2$	$y = y(x)$	$F(x, y) = 0$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
Поверхность в $\mathbb{R}^3$	$z = z(y, x)$	$F(x, y, z) = 0$	$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$
Линия в $\mathbb{R}^3$	$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$	$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ материальные	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Не изучать, но познакомиться:  
 когда будет шагкая, а когда - нет?

Но, это градиент не гарантирует шажкость. Но если градиент равен нулю - особенностей может не быть.

Примеры:

$$\begin{cases} F_1 = xz - y = 0 \\ F_2 = x - zy = 0 \end{cases}$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y, z)} = \begin{bmatrix} z & -1 & x \\ 1 & -z & -y \end{bmatrix}$$

В точках  $(0, 0, \pm 1) \rightarrow$  ранг уменьшился, но есть ли там особенность, возможно!

# 10.5 Гладкие линии, поверхности и многообразия

## Гладкие через элементарные

Определение: элементарной н. линией в  $\mathbb{R}^3$  назовем график н. функции на интервале.

элементарная н. поверхность в  $\mathbb{R}^3$  = график н. функции  $f(x, y)$  на открытой ин-ве в  $\mathbb{R}^2$ .

элементарная н. линия в  $\mathbb{R}^3$  = совместный график двух н. функций  $y(x)$  и  $z(x)$  на интервале.

Определение: Гладкая линия в  $\mathbb{R}^2$  = ин-во  $L$  такоюто многообразие раз-мерности 1  $\forall p \in L$   $\exists$  окр-ть  $U \ni p$ :  $U \cap L$  = элементарная н. линия.

$\dim = 1$

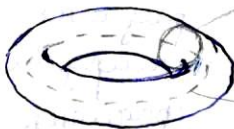
Гладкая линия в  $\mathbb{R}^3$  = аналогично.

$\dim S = 2$

Гладкая поверхность  $S$  в  $\mathbb{R}^3$  = ин-во  $S$ :  $\forall p \in S$   $\exists$   $U \ni p$ :  $U \cap S$  = элементарная н. поверхность.

Пример:

ТОР  
 $\dim = 2$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + w^2 = 1 \end{cases}$$

- ТОР задан в четырехмерном пр-ве

## Касательное пр-во



$$\vec{r} = (x, y, z), \quad p \in T_p S$$

$T_p S$  = касательная пл-ть в т.р. к  $S$ .

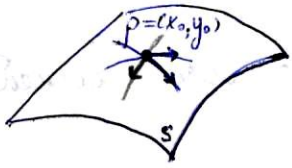
Определение: Касательный вектор к линии  $\vec{r}(t)$  в точке  $p = \vec{r}(t_0)$  это  $\vec{r}'(t_0)$  - вектор скорости.

Касательный вектор к поверхности = касательный вектор к линии на поверхности.

Касательное пр-во к поверхности в точке = линейная оболочка касат. векторов в этой точке.

Th Размерность касат. пр-ва гладкого многообразия  $k$ -мерного равна  $k$  (если не пусто:  $\geq 1$ )

Дек-во: ( $k=2$ -поверхность)



$\vec{r}(u, v)$  - параметризовано, но пусть  $\vec{r}(x, y)$ .  
Если можно явно, значит можно и параметрами задать, т.к. явно-частичный случай параметр.  
Две линии:  $z(x, y_0)$  и  $z(y_0, x)$ .

$$\vec{V}_{no_x} = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x})$$

$$\vec{V}_{no_y} = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y})$$

Теперь запустим линию на поверхности:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), \frac{\partial z}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} y'(t)) =$$

$$\text{@ } p \begin{cases} = x'(t_0) \cdot (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}) + y'(t_0) \cdot (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}) = \\ = x'(t_0) \cdot \vec{V}_x + y'(t_0) \cdot \vec{V}_y \end{cases}$$

Получается, что касательную к поверхности можно задать с помощью двух л. незав. векторов.  $\Rightarrow \dim T_p S = 2$  переход из алгебры.

Касательная плоскость

$F(x, y, z) = 0 \Rightarrow$  ур-ие касат. плоскости в точке  $p$ .

$dF = 0$  на фигуре

$$\rightarrow F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \Rightarrow (F_x, F_y, F_z) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

$$\boxed{\nabla F \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0}$$

# Градиенты связей

$\{\nabla F_i = 0\}$

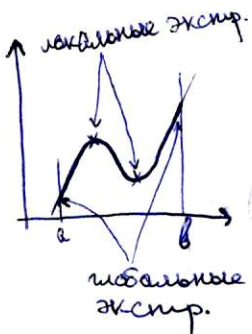
Определение: Ортогональное дополнение к  $T_p M =$  нормальное пр-во  $N_p M$ .

Лемма: Если  $\nabla F_i$  линейно независимы, то их линейная оболочка  $= N_p M$ .

Док-во:  $\mu^k \subset \mathbb{R}^{k+m}$ ,  $\dim T_p M = \dim_p M = k$ ,  $\dim N_p M = m$ .

Многообразие так задано: м-во линий, вдоль которых значение  $= \text{const}$ .

## 10.6 Условные экстремумы.



"  
многообразие

Определение: усл. экстр. — точка  $p$  на многообразии  $M$  (проще — на поверхности) называется точкой условного максимума (минимума), если для  $\forall$  точек  $x$  вблизи  $p$ :  $f(x) \leq f(p)$  ( $\geq$ ).  $f$ -ий  $F$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n, M^k \subset D$

$\exists$  окр  $\subset D, p \in M \forall x \in M \cap \text{окр}$

целевая ф-ия

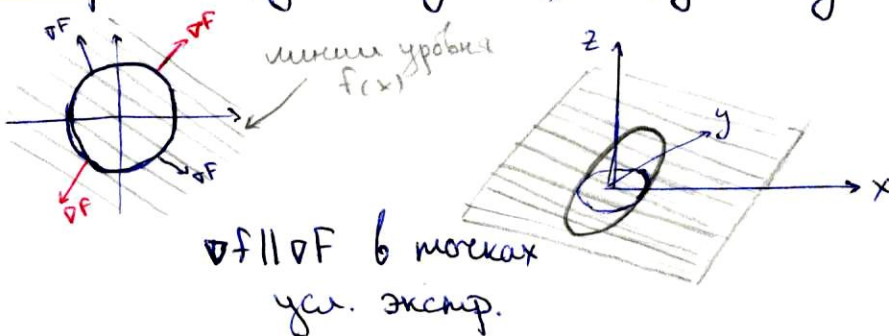
случаи:

I. Если  $M$  задано явно или параметрически, то легко? (лок. экстр.?)

$f(x, y, z), S(=M): z = z(x, y)$   
 $\rightarrow \hat{f}(x, y) = f(x, y, z(x, y))$

II. Иное: если  $M$  задано неявным виде:

Пример:  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, f(x, y) = x + y$



## Необходимое условие уст. экстр.

(8)

Th В каждой точке  $p$  уст. экстр.  $f$  на  $M = \{f_i = 0\}$  верно:

(1)  $\nabla f \perp T_p M$ ;

(2)  $\partial_{\vec{v}} f(p) = 0 \quad \forall \vec{v} \in T_p M$ .

Док-во:  $\partial_{\vec{v}} f(p) = df_p(\vec{v}) = \nabla f(p) \cdot \vec{v} \Rightarrow$  ортогональны.

$\forall \vec{v} \in T_p M$  - вектор скорости

$\vec{r}(t) \in M$

$\vec{r}(0) = p$

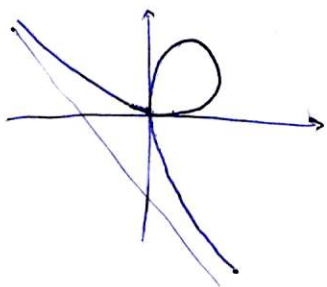
$\varphi(t) = f(\vec{r}(t))$  - одномерное сечение, из семейства об одной. сечении

$\varphi'(0) = df_p(\vec{v}) = 0$  по т-ме Ферма (подозрительные точки)

Для заданного  $M$ :

Зпр.:  $\nabla f(p)$  является лн. комб.  $\nabla f_i(p)$ .

Пример:  $F = x^3 + y^3 - 3xy$  - не задана, м.к. самопересечения  
целевая ср-ия  $f = x + y$



## Методы поиска уст. экстр.:

I. Метод исключения гирр-ов

$F_j(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m); \quad j = 1, \dots, m$   $y_j$  - функции

$$\begin{cases} dF_j = \sum \frac{\partial F_j}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial F_j}{\partial y_h} dy_h = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

↓ упр. мароб

Все  $dy_h$  выражены через  $dx_i$ . Подставим в

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial f}{\partial y_h} dy_h = \sum A_i(x_1, \dots, x_k) dx_i$$

Th В точке  $p$  уст. экстр. все  $A_i(x_1, \dots, x_k) = 0$ .

$k+m=n$

## II. Метод множителей Лагранжа

$$\nabla f = \sum \lambda_i \nabla F_i$$

Вводим  $\varphi$ -ую Лагранжа:

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f - \sum \lambda_i F_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = F_i$$

? Следствие: Точка экстр. удобн. ур-но  $\nabla L(\rho) = 0$ .  
по всем  $x_1 \dots x_n, \lambda_1 \dots \lambda_m$

### Достаточные условия

интерпрет на кв. форму  $d^2 f \gtrless 0$

По методу Лагранжа:  $d^2 L \gtrless 0$ .

$$d^2 L = d^2 f \text{ на } M \Rightarrow d^2 L = d(L_x dx + L_y dy) =$$

$$= L_{xx} d^2 x + 2L_{xy} dx dy + L_{yy} d^2 y + \underbrace{L_{yx} d^2 y + L_{yy} d^2 y}_{=0 \text{ - м.к. макс найдем точку}}$$

Пример (экстр. квадр. формы на сфере)

$$F = \sum x_i^2 - 1 \quad \left| \quad F = x^2 + y^2 - 1 \right.$$

$$f = \sum a_{ij} x_i x_j \quad \left| \quad f = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 \right.$$

По методу Лагранжа:

$\varphi$ -ую Лагранжа  $L = f - \lambda F \Rightarrow \nabla L = 0$ .

$$L_x = 2a_{11}x + 2a_{12}y - 2\lambda x = 0,$$

$$L_y = 2a_{12}x + 2a_{22}y - 2\lambda y = 0.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \lambda \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_E \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

!  $(A - \lambda E) \vec{V} = 0$  - когда есть ненулевые решения?

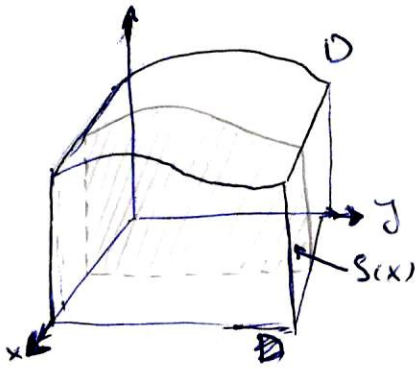
$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$  два корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

$\lambda$  = собственные числа

$\vec{V}$  = собственные векторы



# ГЛАВА 11. Интегрирование в пространстве.



$$D = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$$

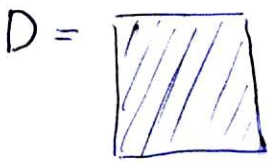
двойной интеграл: сведение к повторному  
замена переменных

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(x, y) dy \right) dx$$

для переменных

## 11.2 Сведение к повторному.

Интеграл по прямоугольнику.



$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \cdot \left( \int_c^d dy \cdot f(x, y) \right)$$

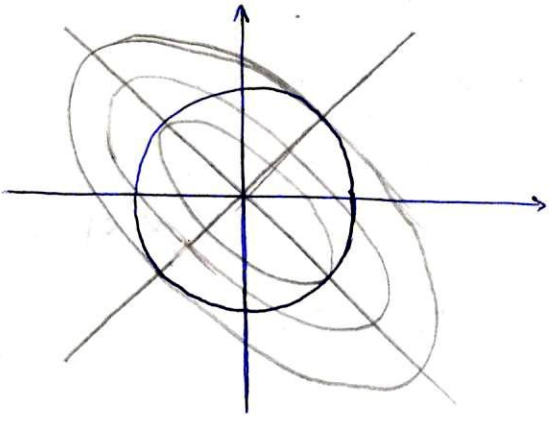
Пример: Объем подграфика:  $z = xy$  на  $[0, 1]^2$ .

$$\begin{aligned} V &= \iint_D xy dx dy = \int_0^1 dx \cdot \left( \int_0^1 dy \cdot y \right) = \int_0^1 dx \cdot x \cdot \left( \int_0^1 dy \right) = \\ &= \left[ \int_0^1 y dy \right] \cdot \left[ \int_0^1 x dx \right] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

можно сразу разбить на произведение интегралов, только если  
 $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$ .

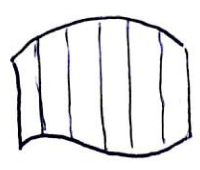
В главных осях  $f = \sum \lambda_i \tilde{x}_i^2$ .

③



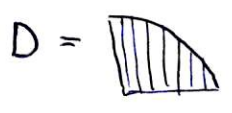
# Интеграл по криволинейной поверхности

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \underline{\alpha(x)} \leq y \leq \underline{\beta(x)} \}$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \cdot \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \cdot f(x, y) \right) - \text{записан от расщепленного шара}$$

Пример:  $z = xy$



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$$

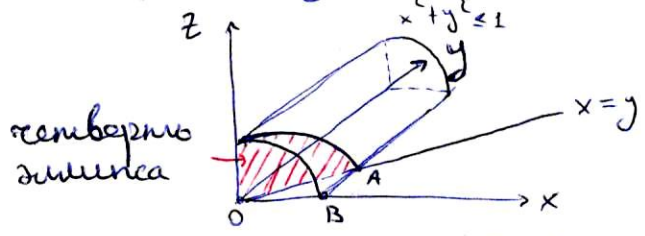
$$V = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \cdot x \cdot (1-x^2) = \dots = \frac{1}{8}$$

вносим как которманну отн. y

Можно:  $D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1 \}$  если  $D =$

Пример:  $D: x, y, z \geq 0$  - октант (восьмая часть пр-ва)

$$x = y, x^2 + z^2 \leq 1$$



сечение симметрично

$$V = \iint_D z dx dy$$

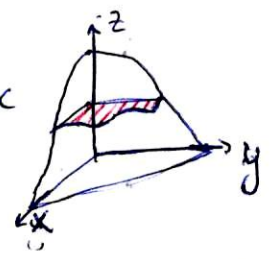
$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \}$$

$$V = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \sqrt{1-x^2} = \int_0^1 dx \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot x = \dots = \frac{1}{3}$$

## Разные сечения

$$I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \Rightarrow \text{первый макс}$$

$$I = \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} dx \cdot f(x, y, z)$$



# Вычисление некоторых многомерных объёмов.

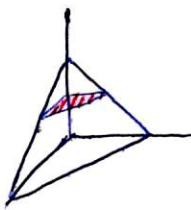
Пример (куб):  $[0, 1]^n$  = единичный  $n$ -мерный куб

$$C_n(a) = [0, a]^n \rightarrow \text{объём } V(C_n(a)) = a^n$$

симплекс: симп-кс = выпуклая оболочка  $n+1$  точки в  $\mathbb{R}^n$ , не лежащих в  $\sqrt[n]{n}$  гиперпл-ни.

станд. симплекс:  $x_0 = (0 \dots 0)$ ,  $x_k = (0 \dots \underset{\uparrow}{1} \dots 0)$ .

$$\{x_k \geq 0, \sum x_k \leq 1\} = T_n(1)$$



сечение при  $x_n = x_n^*$   $\{x_k \geq 0, x_1 + \dots + x_{n-1} = 1 - x_n^*\} = T_{n-1}(1 - x_n^*)$

$\Rightarrow$  То есть сечение симплекса - тоже симплекс.

$$V(T_n(1)) = \int_0^1 dx_n V(T_{n-1}(1-x_n)) = \int_0^1 dx_n \cdot (1-x_n)^{n-1} \cdot V(T_{n-1}(1)) \Rightarrow$$

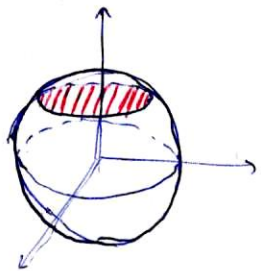
$$\Rightarrow V(T_n(1)) = V(T_{n-1}(1)) \cdot \frac{1}{n} \quad \text{— рекурсия } \Rightarrow \quad \text{т.к. не зависит от } x_n$$

$$\Rightarrow V(T_n(1)) = \frac{1}{n!}, \text{ т.к. } V_0 = 1, \text{ и } V_1 = 1, \text{ и } \dots V_n = \frac{1}{n} V_{n-1}$$

Пример (шар):  $n$ -мерный шар:  $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1 - x_n^2$$

$$a = \sqrt{1 - x_n^2}$$



$$V(B_n(1)) = \int_{-1}^1 dx_n \cdot V(B_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2})) =$$

$$= \int_{-1}^1 dx_n (1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot V(B_{n-1}(1)) \Rightarrow$$

не зависит от  $x_n$

$$\Rightarrow V(B_n) = V(B_{n-1}) \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = V(B_{n-2}) \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(B_n) = V(B_{n-2}) \cdot \frac{2\pi}{n}$$

$$V(B_0) = 1, \quad V(B_2) = \pi = \frac{2\pi}{2} \cdot V(B_0) = 2, \quad V(B_3) = \frac{4}{3}\pi \dots$$

$\dots k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, k+1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil \dots V(B_n) = \frac{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \pi^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n!}$  через 2 шага умножения

### 11.3 Замена переменных.

Выг элемент поверхности

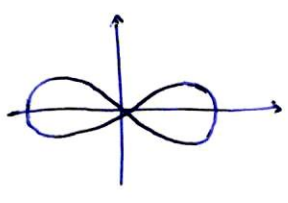
$$dS = ? \begin{cases} \text{в декартовой} & dS = dx \cdot dy \\ \text{в полярной} & dS = \rho d\rho d\varphi \end{cases} \begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

$$\rho = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} \right|$$

В общем случае:  $dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$

Пример (Лемниската Бернулли):

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, \quad m = \iint_D \sigma dS - \text{масса}$$



↙ в полярных

$$\rho^4 = \rho^2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \rho^2 \cdot \cos 2\varphi$$

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \cos 2\varphi \\ \rho &= \sqrt{\cos 2\varphi} \end{aligned}$$

$$m = 4 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \dots = 1$$

$$I_{xx} = \sigma \iint_D y^2 dS = 4 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^2 \sin^2\varphi \cdot \rho d\rho = \int_0^{\pi/4} d\varphi \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2 2\varphi = \dots = \frac{\pi}{8}$$

Выг элемент объёма

в обш. случае:  $dV = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du \cdot dv \cdot dw$

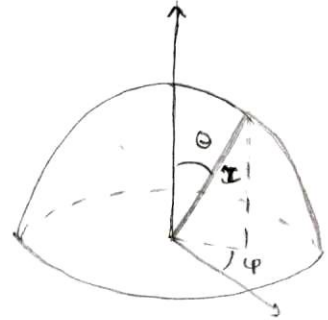
В цилиндрической системе  $(\rho, \varphi, z)$ :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = \rho$$

В сферической системе - варианты:

I) астрономическая:  $(r, \theta, \varphi)$  - радиус, зенитный угол, азимут  
 $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \Rightarrow y = r^2 \cdot \sin \theta \\ z &= r \cdot \cos \theta \end{aligned}$$



II) географическая:  $(r, \varphi, \theta)$  -  $\theta$  = широта  
 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \Rightarrow y = r^2 \cdot \cos \varphi \\ z &= r \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

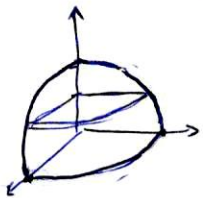
$$(x, y, z) \mapsto \begin{matrix} \text{цм.} \\ (r, \varphi, z) \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} \text{геогр. - сфер.} \\ (r, \varphi, \theta) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} r = r \cdot \cos \theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Пример:  $\frac{1}{8}$  шара - в первом октанте:

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

Объёмная плотность:  $\rho = 1$ .



Ц. масс:  $(x_0, y_0, z_0), x_0 = y_0 = z_0 = \frac{M_z}{M_0}$   
из симметрии

$$M = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = \frac{\pi}{6}$$

$$M_z = \iiint_T z dV = ? \text{ (в декарт.)} \Rightarrow T = \left\{ \begin{aligned} 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \right\}$$

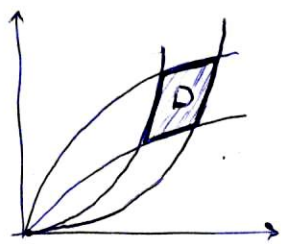
$$M_z = \iint_D \int_0^{\sqrt{1-r^2}} \rho dr d\varphi \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z dz = \int d\varphi \cdot \int dr \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-r^2) = ? \text{ (в цилиндрич. пр.)}$$

$$M_z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^1 dr \cdot \underbrace{r^2}_{|J|} \cdot \underbrace{\cos \theta \cdot r \cdot \sin \theta}_z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr = \dots = \frac{\pi}{16}$$

$$z_0 = \frac{3}{8}$$

Пример: Какхождение площади области

$$D = \{(x, y) \mid \underbrace{x^2/2 \leq y \leq x^2}_{u}, \underbrace{y^2/2 \leq x \leq y^2}_{v}\}$$



$$1 \leq \frac{x^2}{y} \leq 2$$

u

$$1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2$$

v

$$S(D) = \iint_D dx dy = \iint_D |J| du dv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^2 dv = \frac{1}{3}$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Rightarrow \frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{x^2}{y^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3$$

но у нас x и y не  
выражены через u и v -  
все наоборот

### 11.4 Интегралы по линиям и поверхностям

Параметризованная линия

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad a \leq t \leq b$$

длина дуги:  $L = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b |d\vec{r}|$

но  $d\vec{r}$  разное в разных системах координат.

(дек.):  $d\vec{r} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$

(цил.):  $d\vec{r} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2} dt$

(сфер.):  $d\vec{r} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \cos \theta)^2 \dot{\varphi}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2} dt$

Пример: (циклическая линия)



$$y = \cosh x \quad (x=t) \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt = \int_a^b \cosh t dt = \sinh b - \sinh a$$

(эллипс)



$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \Rightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \rightsquigarrow \text{эллиптическая} \\ \text{архивная E(k)}$$

Пример: (Клионанда)  $\begin{cases} x = c(t) \\ y = s(t) \end{cases} \leftarrow \text{где } c(t) = \int_0^t \cos(s^2) ds \right. \left. \begin{array}{l} \text{синус} \\ \text{косинус} \end{array} \right.$

Кривизна поверхности:  $k = \frac{|x' \cdot y'' - y' \cdot x''|}{(x' \cdot x' + y' \cdot y')^{3/2}}$

(Винтовая линия)



$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

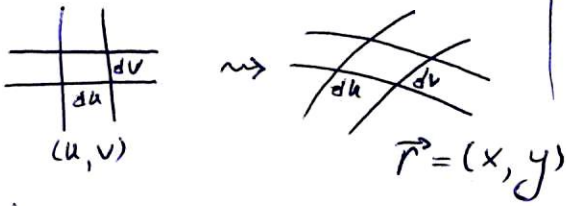


# Параметризованная поверхность

$D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $D =$  компактная обл; если не компакт - приходим к несобственному интегралу.

$$(u, v) \mapsto \vec{r} = (x, y, z)$$

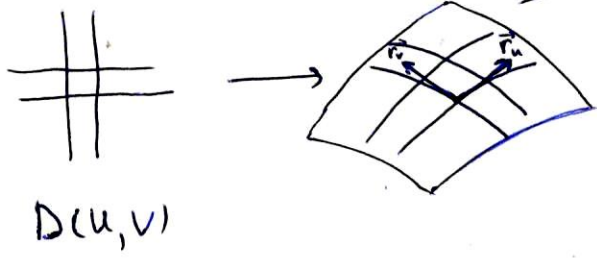
$\Sigma =$  поверхность в  $\mathbb{R}^3$



$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$$

$$dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv \Rightarrow$$

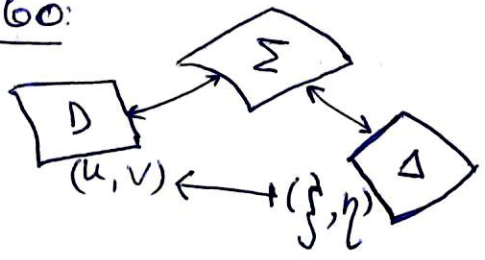
$$\Rightarrow S = \iint_{\Sigma} dS = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$



Важно:  $S = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$

Лемма: Элемент площади не зависит от параметризации.

Доказ-во:



$u(\xi, \eta)$  и  $v(\xi, \eta)$  - взаимное отображение

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\xi} \times \vec{r}_{\eta} &= (\vec{r}_u u_{\xi} + \vec{r}_v v_{\xi}) \times (\vec{r}_u u_{\eta} + \vec{r}_v v_{\eta}) = \\ &= \vec{r}_u \times \vec{r}_v (u_{\xi} v_{\eta} - u_{\eta} v_{\xi}) = \\ &= (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \begin{vmatrix} u_{\xi} & u_{\eta} \\ v_{\xi} & v_{\eta} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Из того, что доказана ранее:

$$du dv = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta$$

Терминологическая особенность:  $\begin{vmatrix} u_{\xi} & u_{\eta} \\ v_{\xi} & v_{\eta} \end{vmatrix}$  - якобиан.

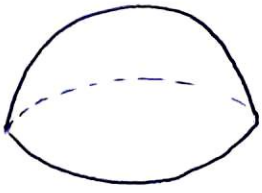
$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = |\vec{r}_{\xi} \times \vec{r}_{\eta}| d\xi d\eta$$

□

## Вид элемента

Примеры (полусфера):

$$(\varphi, \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi \\ \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ \sin\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta \cdot \cos\varphi & \cos\theta \cdot \cos\varphi & 0 \\ -\cos\theta \cdot \sin\varphi & -\sin\theta \cdot \sin\varphi & \cos\theta \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi \\ \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ \cos\theta \cdot \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \cos\theta \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta| = \cos\theta \Rightarrow S = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \boxed{\cos\theta} = 2\pi$$

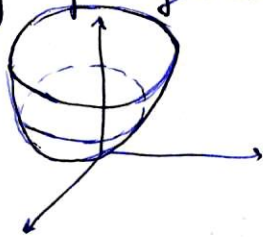
При общем задании:  $z = z(x, y)$

$$V_x \times V_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \iint_D \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy$$

Пример (параболическая поверхность):

$$z = x^2 + y^2$$

$$z \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$



$$\Rightarrow S = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dp \cdot p \cdot \sqrt{1 + 4p^2} = \dots = \text{число}$$

$\leftarrow t = 1 + 4p^2$

Еще две параметризации:

Если  $a, b$  - векторы, то:  $(a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2 + (a \times b)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow dS = \sqrt{EG - F^2} du \cdot dv \leftarrow \text{где}$$

$$E = r_u \cdot r_u$$

$$G = r_v \cdot r_v$$

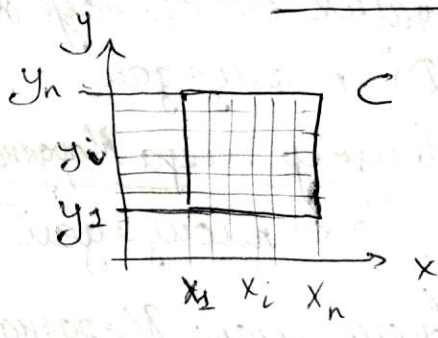
$$F = r_u \cdot r_v$$

$\leftarrow \text{примеры}$

$$u \quad EG - F^2 = \det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

# 11.5 Почти формальное построение интеграла

## Двойной интеграл по квадрату



Квадрат  $C$  и орг. функция  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 Разбиение: набор  $P$  замкнутых прямоугольников  $p_{ij}$  таких, что  $\cup p_{ij} = C$ .

$$\begin{cases} m_{ij} = \inf \{ f(x,y) \mid (x,y) \in p_{ij} \} \\ M_{ij} = \sup \{ f(x,y) \mid (x,y) \in p_{ij} \} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(P, f) = \sum m_{ij} S_{ij} & \text{— нижняя сумма Дарбу} \\ U(P, f) = \sum M_{ij} S_{ij} & \text{— верхняя сумма Дарбу} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \sup \{ L(P, f) \} \\ U = \inf \{ U(P, f) \} \end{cases}$$

Если  $L = U$ , то это искомый интеграл:

$$L = U = \iint_C f(x,y) dx dy.$$

## Характеристическая функция и требования к $D$

Орг. мн-во  $D$  лежит в кв-те  $C$ . Обращаясь к ф-ии  $f_D: D \rightarrow \mathbb{R}$ , то неосуществимо равно  $\pm 1$ , совм. при  $D \subset C$ :  
 $u=0$  вне  $D$ .

$$\iint_D dx dy = \iint_C \chi_D(x,y) dx dy \quad \text{— это число и есть площадь } D.$$

Определение: I) Назовем указанные наборы прямоугольников внутренними и внешними замощениями множества  $D$ ,

а площадью конечного замощения — сумму площадей всех составляющих его прямоуг-ов.

II) Мочная верхняя грань  $S_*(D)$  площадей конечных внутренних замощений  $D$  — внутр. мера Жордана.

Мочная нижняя грань  $S^*(D)$  площадей конечных внешних замощений  $D$  — внеш. мера Жордана.

III) Огр. плоское мн-во  $D$  называется измеримым по Жордану, или квадратуемым, если  $S_*(D) = S^*(D) = S(D)$  — это и есть площадь  $D$ .

### Интегрирование почти непр. функций

Определение: Колебанием ф-ии  $f$  на мн-ве  $X$  называется  $\omega(X, f) = \sup_X f - \inf_X f \geq 0$ .

Th Всякая непр. ф-ия на квадрате интегрируема по Риману.

Док-во: Непр. ф-ия  $f$  на компакте огр. и равн. непр  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ : если во внешней замощении  $P$  диаметры всех прямоуг.  $p \in P$  меньше  $\delta$ , то  $\omega(p, f) < \epsilon \Rightarrow$   
 $\Rightarrow U(P, f) - L(P, f) = \sum \omega(p, f) S(p) < \epsilon \sum S(p) = \epsilon S(P)$  — сходится к нулю.  $\square$

Th Всякая непрерывная ф-ия на измеримом компакте (в том числе с кусочно-гладкой границей) интегрируема по Риману.

Док-во: Полагаем  $f(x,y) = 0$  для всех точек  $(x,y) \in C \setminus D$ , где  $C$  - квадрат, покрывающий весь компакт  $D$ .  
 $D$  измеримо  $\Leftrightarrow S(\partial D) = 0$ .

Th Если мн-во точек разрыва ограниченной ф-ии  $f$  на измеримом компакте  $D$  имеет нулевую мощность, то  $f$  интегрируема на  $D$ .  
Эти ф-ии "почти непрерывны".

Док-во: Продолжим  $f$  нулем вне  $D$  на квадрат  $C$ .  
Мн-во точек разрыва новой ф-ии, состоящее из точек разрыва исходной функции +  $\partial D$  (граница  $D$ ), обозначим за  $X$ .

П.к.  $S(X) = 0$ , для  $\forall \epsilon > 0$  мн-во  $X$  имеет конечное внешнее замощение  $A_\epsilon$ , такое, что  $S(A_\epsilon) < \epsilon$ .

$$U(A_\epsilon) - L(A_\epsilon) < \underbrace{\omega(C, f)}_{\text{кон-те на всем квадрате}} \cdot \epsilon = K \cdot \epsilon$$

Дополним  $A_\epsilon$  до такого замощения  $P_\epsilon$  всего  $C$ , чтобы колебания  $f$  на промежут. внутри  $D_\epsilon$  не превышали  $\epsilon$ .

$$U(P_\epsilon \setminus A_\epsilon) - L(P_\epsilon \setminus A_\epsilon) < \epsilon \cdot S(D) = \epsilon \cdot S$$

Поэтому  $U(P_\epsilon) - L(P_\epsilon) < (K + S) \cdot \epsilon \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Th Двойной интеграл аддитивен по мн-ам, мн-ам и монотонен по  $\varphi$ -ям.

Док-во: для аддитивности разбиваем на 2 мн-ва:

$$D = D_1 + D_2.$$

$$\text{Тогда } U(D, f) = U(D_1, f) + U(D_2, f) + \cancel{U(\Gamma, f)}$$

граница

$$L(D, f) = L(D_1, f) + L(D_2, f) + \cancel{L(\Gamma, f)}.$$

Пример (Гемисфера):  $0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 1$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} v \cdot \cos u \\ v \cdot \sin u \\ u \end{bmatrix}, \vec{r}_u = \begin{bmatrix} -v \cdot \sin u \\ v \cdot \cos u \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{r}_v = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E = 1 + v^2, F = 0, G = 1.$$

$$S = \int_0^{2\pi} du \cdot \int_{-1}^1 dv \cdot \sqrt{1+v^2} = \dots$$

Еще формулы:

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \leftarrow \text{где } A = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, B = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, C = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

Сопровождающей поверхности

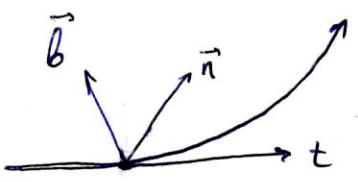
$\vec{r}(u)$  - кривая в  $\mathbb{R}^3$ ;  $\vec{e}(\vec{v} \neq 0) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$  - ед. вектор, у которого направление совпадает с  $\vec{v}$

$\vec{t} = \vec{e}(\vec{r}')$  - ед. касат. вектор

$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$  - вектор нормал

$\vec{b} = \vec{e}(\vec{r}' \times \vec{r}'')$  - вектор биномаль

ОНБ при условии:  $\vec{r}' \times \vec{r}'' \neq 0$ .



$\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle \perp \tau$  - нормальная плоскость

$\langle \vec{b}, \vec{t} \rangle$  - спрямляющая плоскость

$\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle$  - соприкасающаяся плоскость

Движение репер Френе

$$t^2 = t \cdot t = 1, t \cdot n = 0 \Leftrightarrow \text{ОНБ}$$

$$\text{Дифф-ем: } \vec{t} \cdot \vec{t}' = 0, t' \cdot n + t \cdot n' = 0$$

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(u) & k_2(u) \\ -k_1(u) & 0 & k_3(u) \\ -k_2(u) & -k_3(u) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \leftarrow \text{м.к. } t' = \left(\frac{r'}{|r'|}\right)' = \alpha r' + \beta r'' \perp b \Rightarrow k_2(u) = 0$$

## 11.6 Обоснование основных свойств

АЛМ: очевидны для сумм Римана/Дарбу, а затем предельный переход.  
 $\int |f| dV \leq \int |f| dV$

Сведение кратного интеграла к повторному

Th Для каждой непрерывной ф-ии  $f$  на  $C = [a, b] \times [c, d]$  повторный интеграл  $\exists$  и равен двойному:

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_C f(x, y) dx dy$$

Th Если для интегрируемой ф-ии  $f$  на  $C = [a, b] \times [c, d]$  интеграл  $J(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  существует для всех  $x \in [a, b]$ , то повторный интеграл существует и равен двойному:

$$\int_a^b J(x) dx = \iint_C f(x, y) dx dy$$

Док-во: Возьмем разбиение  $P \times Q = \{p_i\} \cdot \{q_j\}$  — две суммы Дарбу. Необходимо для сумм Дарбу:  $L(f, P \times Q) \leq L(J, P) \leq U(J, P) \leq U(f, P \times Q)$   
↑  
мало отличий при доказательстве

Докажем, что  $L(f, P \times Q) \leq L(J, P)$ :

$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \inf \{ f(x, y) \mid x \in p_i, y \in q_j \} \\ n_j &= \inf \{ f(x, y) \mid y \in q_j \} \end{aligned} \right\} \text{ тогда } m_{ij} = \inf \{ n_j \mid x \in p_i \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in p_i \quad m_{ij} \leq n_j(x) \quad \left( \underbrace{N_j(x)}_{\text{где sup}} \leq M_{ij} \right)$$

$$\sum_i \sum_j m_{ij} |\Delta y_j| \cdot |\Delta x_i| \leq \sum_i \sum_j n_j(x) \cdot |\Delta y_j| \cdot |\Delta x_i|$$

$$\sum m_{ij} \Delta y_j \leq \inf \{ J(x) \mid x \in p_i \} \Rightarrow L(f, P \times Q) = \sum (\sum m_{ij} \Delta y_j) \Delta x_i \leq \sum (\inf \{ J(x) \mid x \in p_i \}) \Delta x_i = L(J, P) \quad \square$$



# Криволинейная трапеция

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \text{ для } \forall x \in [a, b]$$

Th Если для интегрируемой ф-ии  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , имеем:  $\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dx dy$  и равен двойному:

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dx dy$$

Док-во:  $D \subset C = [a, b] \times [c, d]$  где  $c \leq \inf y_1(x)$  и  $d \geq \sup y_2(x)$

Продолжим  $f(x, y)$  на  $C \setminus D$ . Применим предыдущее:

$$\iint_C = \iint_D + \iint_{C \setminus D} \quad \text{и} \quad \int_c^d = \int_{y_1}^{y_2}$$

## Сетка координат:



$$\begin{cases} u = \text{const} \\ v = \text{const} \end{cases} \quad dS = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Формула замены:  $\Delta(u, v) \rightarrow D(x, y)$

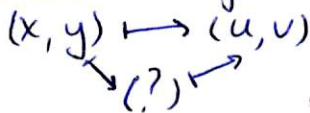
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Доказательство формулы замены: (Замена гладкая!)

Определение: Замена примитивна, если меняется только одна переменная:  $(x, y) \mapsto (x, t) \quad y = y(x, t)$   
 $(x, y) \mapsto (t, y) \quad x = x(t, y)$

Лемма: Всякая гладкая замена в окр-ти каждой точки представима композицией примитивных.

Док-во: Выберем точку  $p: J \neq 0 \Rightarrow \boxed{x_u \neq 0} \vee x_v \neq 0$ .

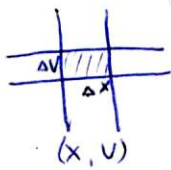


По ТНФ  $\Rightarrow$  в окр-ти  $p: u = u(x, v)$

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad \begin{cases} x = x \\ y = y(u(x, v), v) \end{cases} \quad \begin{cases} u = u(x, v) \\ v = v \end{cases} \quad (x, y) \mapsto (x, v) \mapsto (u, v)$$

Для примитивных замков:  $\gamma = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial y}{\partial v} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x, y(x, v)) \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| dx dv$$



$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} (y(x, v+\Delta v) - y(x, v)) dx$$

Используем: интегр. теор. о среднем  $\Rightarrow (y(x_*, v+\Delta v) - y(x_*, v)) \Delta x$

Ф-ла конечных приращений  $\Rightarrow \Delta S = \frac{\partial y}{\partial v}(x_*, v_*) \Delta x \Delta v$  ?  
(теор. Лагранжа)

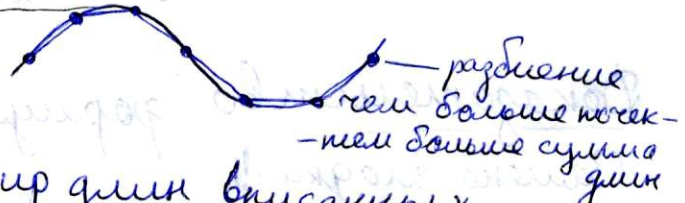
$$x < x_* < x + \Delta x$$

$$v < v_* < v + \Delta v$$

## 11.9 Метрики приближений

линий и поверхностей

Спрямление линии  
 $\vec{r}(t)$  гладкая  $\Rightarrow \vec{r}'(t)$ .



Кривая:

Определение: Длина куска линии =  $\sup$  длин вписанных ломанных.

Если  $\sup =$  конечен  $\Rightarrow$  линия спрямляемая.

$\sup$  может быть бесконечным, пример - периметр фрактала.

# 11.7 Интегралы, зависящие от параметра

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad f(x, y) \xrightarrow{\text{оператор интегрирования по } x} L_x f \xrightarrow{\text{оператор дифференцирования по } y} D_y L_x f \stackrel{?}{=} L_x D_y f$$

$$L_y L_x f \stackrel{?}{=} L_x L_y f$$

Предельный переход (L), интеграл (L), производная (D) - по сути все является пределом.

Вопросы: можно ли менять местами?

$$L_y L_x f \stackrel{?}{=} L_x L_y f: \int dy \int dx \cdot f \stackrel{?}{=} \int dx \int dy \cdot f$$

$$D_y L_x f = \dots D_y f: \frac{d}{dy} I(y) \stackrel{?}{=} \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx - \text{важно, потому что используем в малой мере}$$

$$L_y L_x f = L_x L_y f: \lim \int f dx \stackrel{?}{=} \int \lim f dx$$

## Формула Лейбница

$$I(y, \alpha, \beta) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

$$\alpha = \alpha(y), \beta = \beta(y)$$

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial I}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dy} \Rightarrow \frac{dI}{dy} = \beta'(y) \cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y), y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx$$

Когда формула верна? Когда все члены в ней - непрерывны.

## Интегралы по постоянному отрезку

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx - \text{когда можно интегрировать?}$$

Следствие: Если  $f(x, y)$  непрер. на  $C = [a, b] \times [c, d]$ , то "ничего делать".

Пример (Остроградского):

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{4} \end{cases} \leftarrow \text{Разрыв в } (0, 0)$$

Следует заметить, что:

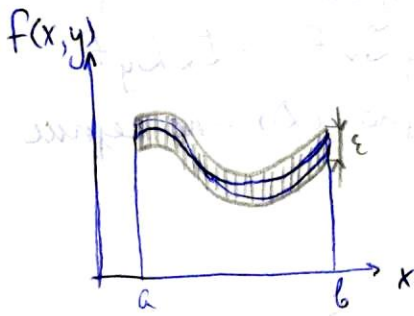
$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

кососимметрия

$$\iint \dots = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy = \left( \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{или} \quad \iint \dots = \int_0^1 dy \int_0^1 \left( - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right) dx = \dots = \left( - \frac{\pi}{4} \right)$$

Теорема: Если  $f(x, y)$  непрерывна на  $C = [a, b] \times [c, d]$ , то  $I(y)$  непрерывна на  $[c, d]$  постоянно

Док-во:  $f$  непрерывна,  $C$ -компакт  $\Rightarrow f$ -равномерно непрерывна на  $C$ :  
 $\forall \epsilon \exists \delta(\epsilon) > 0$  такое что  $|\Delta y| < \delta \Rightarrow |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \epsilon$



$\Rightarrow |I(y + \Delta y) - I(y)| < \epsilon$  - как совершить этот переход?

$$|I(y + \Delta y) - I(y)| = \left| \int_a^b f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y) dx \right| = \left| \int_a^b (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) dx \right| \leq$$

$$\int_a^b (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) dx < \int_a^b \epsilon dx = \epsilon(b-a) - \text{используем "маленькие хитрости"}$$

$$\Rightarrow |I(y + \Delta y) - I(y)| < \epsilon$$

Теорема: Если  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывны на  $C = [a, b] \times [c, d]$ , то  $I(y)$ -заданная ф-ла по  $y$  и  $\frac{dI}{dy} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx$

Док-во:  $\frac{dI}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta y} = \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx =$   
 (согласно ф-ле конечных приращений):  $= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta(x, y) \Delta y) dx$   $0 \leq \theta \leq 1$

Равномерная непрерывность производной:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0: |\Delta y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \epsilon$$

Тогда:  $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta(x, y) \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \epsilon$   
 $\left| \frac{\Delta f}{\Delta y} - \frac{\partial f}{\partial y} \right| < \epsilon$

Аналогично окончание предыд. док-ва:

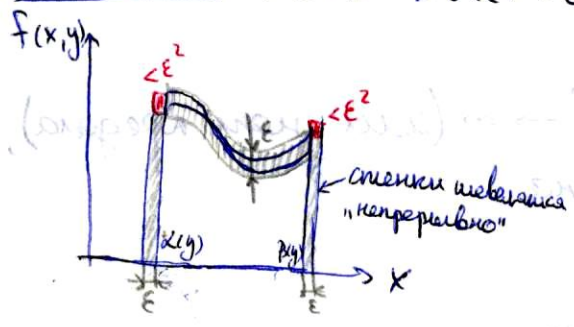
$$\frac{\Delta I}{\Delta y} \neq \left| \int_a^b \frac{\Delta f}{\Delta y} dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx \right| < \epsilon(b-a)$$

Интегралы по переменному срезу

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

Теорема: Если  $\alpha(y)$  и  $\beta(y)$  непрерывны на  $[c, d]$ , а  $f$  непрер. на  $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$  - то  $I(y)$  непрер. на  $[c, d]$

Док-во:  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : |\Delta y| < \delta \Rightarrow |\alpha(y + \Delta y) - \alpha(y)| < \epsilon$



$$|\beta(y + \Delta y) - \beta(y)| < \epsilon$$

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |I(y + \Delta y) - I(y)| < \epsilon (f(\beta(y), y) + f(\alpha(y), y) + (\beta(y) - \alpha(y))) \rightarrow 0$$

аналогично вместе с  $\epsilon \rightarrow 0$   
прошному док-ву  $\square$

Теорема: Если  $\alpha(y)$  и  $\beta(y)$  гладкие на  $[c, d]$ ,  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрер. на  $D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$ , то  $I$  гладкая ф-ия на  $[c, d]$  и её производная вычисляется по ф-ле Лейбница.

Док-во: повторение всего.

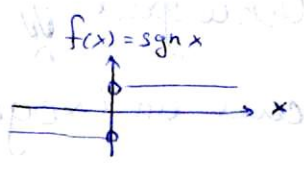
$$\left| \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} \right| \leq \underbrace{|\dots|}_{(f)} + \underbrace{|\dots|}_{(\alpha)} + \underbrace{|\dots|}_{(\beta)}$$

$$\frac{|\alpha(y + \Delta y) - \alpha(y)|}{\Delta y}$$

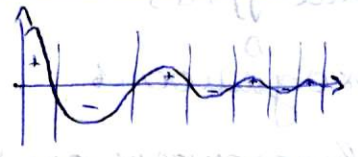
Интеграл Дирихле

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xy)}{x} dx ; I(y > 0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = I(1)$$

$I(0) = 0$   
 $y > 0 \Rightarrow z = xy, dz = y dx$  - подстановка  
 $y < 0 \Rightarrow I(y) = -I(1)$



Соответственно:  $I(y) = c \cdot \text{sgn } x$



$$\Delta_k = [\pi k, \pi(k+1)]$$

$$\int_{\Delta_k} \dots = a_k, \begin{cases} \sum a_k = \sum (-1)^k |a_k| - \text{знакопеременный ряд} \\ |a_k| \searrow 0 - \text{убывает к нулю} \end{cases}$$

По признаку Лейбница ряд сходится.

$$F(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \cdot \frac{\sin x}{x} dx \Rightarrow F'(y) = - \int_0^{\infty} e^{-xy} \cdot \sin x dx$$

$$\Rightarrow F''(y) = - \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow F(y) = c - \arctg y$$

$$F(\infty) = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F(0) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

### 11.8. Несобственные краевые интегралы.

Две проблемы: в конечной точке  $f \rightarrow \infty$  (или нет предела), область не ограничена.

#### Ограничение области

Определение:  $D > D_\epsilon$  ← параметр

$$\iint_D f dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\epsilon} f dS \leftarrow D_\epsilon \nearrow \text{при } \epsilon \searrow 0$$

если предел существует и не зависит от способа ограничения области.

Сходится, если предел конечен. В остальных случаях — расходится.

Теорема: Для интеграла верны свойства АЛМ:

однотонность, линейность, монотонность.

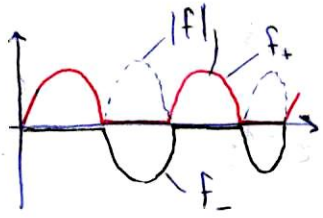
#### Сходимость и абсолютная сходимость

Определение: Интеграл  $\iint_D f dS$  сходится абсолютно, если он сходится и также сходится  $\iint_D |f| dS$ .

Теорема: Если сходится  $\iint_D |f| dS$ , то сходится  $\iint_D f dS$ : абсолютная сходимость влечет сходимость.

Теорема: Если  $f \geq 0$  на  $D$ , то  $\iint_D f dS$  монотонно возрастает от  $\epsilon \Rightarrow \Rightarrow$  сходимость равносильна ограниченности:  $\exists K: \forall \epsilon > 0 \iint_D f dS < K$ .

Док-во: Введем  $f_{\pm} = \frac{f \pm |f|}{2}$  - где  $f_{+} = \max\{f, 0\}$   
 $f_{-} = \min\{f, 0\}$



Тогда  $\iint_{D_{\epsilon}} f_{+} dS \leq \iint_{D_{\epsilon}} |f| dS \leq K = \iint_D |f| dS$

$\Rightarrow \iint_D f_{+} dS$  - сходится  $\Rightarrow \iint_D f dS$  - тоже сходится:  
 $f = f_{+} + f_{-}$   $\square$

Шаг: разделение на положительные и отрицательные функции - один из основных св-в при построении интеграла Лебега.

Теорема: В размерности  $> 1$  наоборот, из  $\iint_D f dS$  - сходится  $\Rightarrow \iint_D |f| dS$  - сходится.

То есть есть полная равносильность:

$\iint_D f dS$  - сходится  $\Leftrightarrow \iint_D |f| dS$  - сходится.

Интеграл Гаусса - Пуассона:

$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ;  $I_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} r dr d\varphi = \pi$

$I_n = I_1^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2}$  - сферически-симметричная ф-ия  
 $e^{-z^2} = f(z), z = |z|$

Объём шара и площадь поверхности сферы:

Шар =  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \rightarrow V_n(r) = r^n \cdot V_n(1)$

Сфера =  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\} \rightarrow S_n(r) = r^{n-1} \cdot S_n(1)$

$\frac{d}{dr} V_n(r) = S_n(r) = n \cdot r^{n-1} \cdot V_n(1) = r^{n-1} \cdot S_n(1) \Rightarrow S_n(1) = n \cdot V_n(1)$

В  $\mathbb{R}^n$  интегрируем по сферическим слоям:

$I_n = \int_0^{+\infty} d\tau \int_{S_n(\tau)} e^{-\tau^2} = S_n \int_0^{+\infty} \tau^{n-1} \cdot e^{-\tau^2} d\tau = S_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2}) \Rightarrow S_n = 2\pi^{n/2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}$   
 $\pi^{n/2}$   
↑  
 $S_n(\tau)$   
↑  
поверхность сферы

# Многомерные степенные особенности

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{\sum x_i^2} : f(r) \Rightarrow \text{сферич. симметр. ф-ия}$$

Теорема: Несобственный интеграл от  $g(r) = r^{-\lambda}$ :  
особенности в 0 и на  $+\infty$ :

(1) по единичному шару  $B \subset \mathbb{R}^n$  сходится  $\Leftrightarrow \lambda \neq n$ ;

(2) по внешности шара  $= \mathbb{R}^n \setminus B$  сходится  $\Leftrightarrow \lambda > n$ .

Док-во: Сферическая симметрия  $\Rightarrow$  интегрируем по сферам.

По сфере радиуса  $r$ :  $\iint_{S_n(r)} r^{-\lambda} dS = r^{-\lambda} S_n(r) = r^{-\lambda} \cdot r^{n-1} \cdot S_n(1)$ .

По шаровому слою  $= \{r \in \mathbb{R}^n \mid a \leq \|r\| \leq b\}$ :  $\int_a^b dr \cdot \int_{S_n(r)} r^{-\lambda} dS = S_n(1) \cdot \int_a^b r^{n-\lambda-1} dr$

(1)  $a \rightarrow 0, b = 1 \Rightarrow$  сходится при  $-(n-\lambda-1) < 1$

$$\lambda < n$$

(2)  $a = 1, b \rightarrow +\infty \Rightarrow$  сходится при  $-(n-\lambda-1) > 1$

$$\lambda > n$$

Легко обобщить на ф-ции  $f \sim r^{-\lambda}$ :

$$\exists M \geq m > 0 : m f(r) \leq g(r) \leq M f(r)$$

## Связь между ф-ями $B$ и $\Gamma$

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) = B(a, b) \cdot \Gamma(a+b) = \text{доказательство}$$

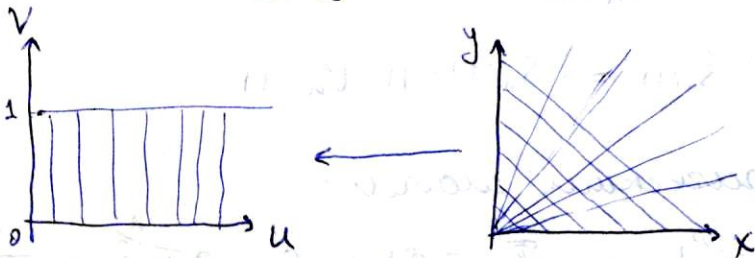
$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx, \quad \Gamma(b) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{b-1} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma(a) \cdot \Gamma(b) = \iint_{\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}} e^{-(x+y)} x^{a-1} y^{b-1} dx dy \equiv$$

замена

$$\begin{aligned} u &= x+y & \Leftrightarrow & x = u(1-v) \\ v &= \frac{y}{x+y} & \Leftrightarrow & y = u \cdot v \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = u$$

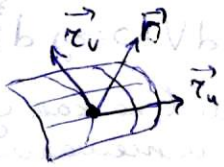


$$\equiv \int_0^1 dv \int_0^{+\infty} du \cdot e^{-u} \cdot u^{a-1} \cdot (1-v)^{b-1} \cdot u^{b-1} \cdot v^{b-1} \cdot u =$$

$$= \int_0^1 (1-v)^{b-1} \cdot v^{b-1} dv \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{a+b-1} du = B(a, b) \cdot \Gamma(a+b). \quad \square$$



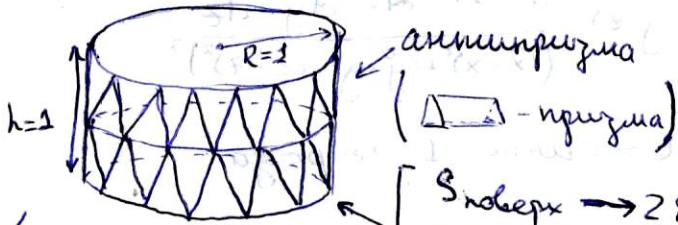
Если поверхность параметризованная:



$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \Rightarrow \vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$  - всё не так сложно.

А если не параметризована?

Сфера Шварца:



Параметры:

$n$  и  $N$  кол-во разделений по высоте  
 $n$  и  $N$  кол-во разделений на окружности

$S_{\text{поверх}} \rightarrow 2\pi R h$  - если  $n \uparrow$   
 $S_{\text{поверх}} \rightarrow +\infty$  - если  $N \uparrow$  и  $n \rightarrow 1$

Утверждение:  
 Далее для плоских поверхностей сделать приближение сложно.

Глава 12. Векторный анализ на поверхности.

$\vec{r} = (x, y)$  и  $\vec{F}(\vec{r}) =$  плоское векторное поле.

Вектор в данном случае не свободный, а прикрепленный.

Фазовые портреты:

$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$

все  $q$ -и гладкие

Пример: Векторное поле - поле скоростей (?)  
 Векторное поле на  $D \subset \mathbb{R}^{2(3)}$ ,  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^{2(3)}$   
 $F(\vec{r}) = (P, Q)$  или  $(P, Q, R)$  - гладкие.

Операции: сумма:  $(f_1 + f_2)(\vec{r}) = f_1(\vec{r}) + f_2(\vec{r})$

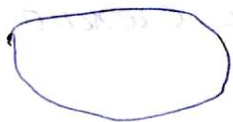
Умножение на скаляр:  $(\alpha f)(\vec{r}) = \alpha \cdot f(\vec{r})$ ; векторное:  $(f_1 \times f_2)(\vec{r}) = f_1(\vec{r}) \times f_2(\vec{r})$ ;  
 скалярное:  $(f_1 \cdot f_2)(\vec{r}) = f_1(\vec{r}) \cdot f_2(\vec{r})$ .

Дифференцирование:  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \left( \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \dots \right)$  или  $\vec{F}_x (P_x, Q_x, \dots)$

Производная по вектору:  $D_{\vec{v}} \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r} + \delta \vec{v}) - \vec{F}(\vec{r})}{\delta}$

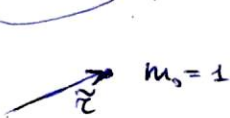
# Иммерирование

линейное поле векторного источника.



$$\vec{F}_i(\vec{r}) = -G dm_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \quad dm_i = \rho(\vec{r}_i) dV_i = \rho(\vec{r}_i) d^3r_i$$

как у физиков, но как у математиков



$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

$$P(x, y, z) = -G \iiint_V \rho(x, y, z) \frac{(\tilde{x} - x) \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{((\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{y} - y)^2 + (\tilde{z} - z)^2)^{3/2}}$$

$dm = \sigma \cdot dS$  или  $dm = \lambda dl \Rightarrow$  или 1-го рода

## 12.2. Работа и поток на плоскости.

### Логвицкий базис вдоль линии.



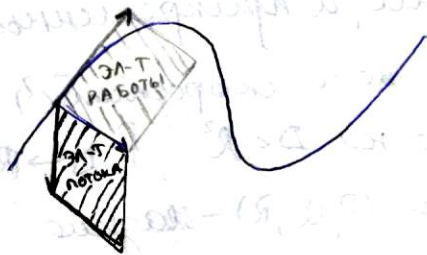
$r = \vec{r}(s)$   
естественный параметр = длина дуги  
 $\Rightarrow |r'| = 1$  - всегда.

$$\vec{t} \perp \vec{n} \text{ и } \vec{t} = \frac{\vec{r}'(s)}{|\vec{r}'(s)|} \Rightarrow \langle n, t \rangle - \text{правый базис.}$$

$$\vec{f} = pr_n f + pr_t f = (f \cdot n) \vec{n} + (f \cdot t) \vec{t}$$

Управление:  $f \times t = (0, 0, f \cdot n)$ ,  $f \times n = (0, 0, -f \cdot t)$

### элемент работы и потока.



Определение: элемент работы:

$$dA = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{t} \cdot ds$$

элемент потока:

В координатах:  $d\vec{r} = (dx, dy) = t \cdot ds$   
 $(dy, -dx) = n \cdot ds$

$f = (P, Q) \Rightarrow f \cdot t \cdot ds = Pdx + Qdy$  } формула работы и  
 $f \cdot n \cdot ds = Pdy - Qdx$  } формула потока поля f

### Криволинейный интеграл второго рода

Работа поля f вдоль линии  $\gamma$ :  $W(f, \gamma) = \int_{\gamma} f \cdot t \cdot ds = \int (Pdx + Qdy)$

Поток поля f через линию  $\gamma$ :  $\Phi(f, \gamma) = \int_{\gamma} f \cdot n \cdot ds = \int (Pdy - Qdx)$

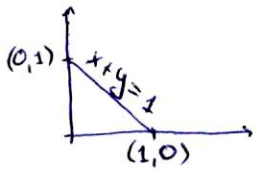
Определение: 2n-м работа  $\vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{t} \cdot ds$ .  
2n-м потока  $= \vec{f} \cdot \vec{n} \cdot ds$ .

## Несколько примеров вычисления

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \Rightarrow \int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \int_{t_0}^{t_1} (P \dot{x} + Q \dot{y}) dt$$

φ-каонт

Пример:  $f(x, y) = (x, y)$ ,  $f(\vec{r}) = \vec{r}$



$$\int_{\gamma} (x dx + y dy) = \int_1^0 x dx + \int_0^1 y dy = 0 \quad \text{— работа} = 0$$

$$\int_{\gamma} (x dy - y dx) = \int_{y=0}^{y=1} x dy - \int_{x=1}^{x=0} y dx = \int_0^1 (1-y) dy - \int_1^0 (1-x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

### Круги неледи

Ограниченное:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \text{const}$$

0

0

↑  
но экв.  
акр/фук.

Центр. поле:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \frac{(x, y)}{r} \cdot f(\vec{r}); \vec{f}(\vec{r}) \parallel \vec{r}$$

0

$$2\pi r \cdot f$$

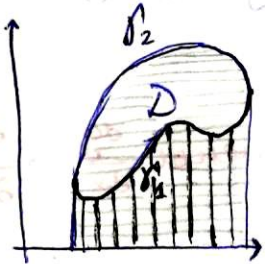
Вращательное поле

$$\vec{f}(\vec{r}) = \frac{(y, -x)}{r} \cdot f(\vec{r}), \vec{f} \perp \vec{r}$$

$$2\pi \cdot f$$

0

### 12.3. Ориентированные многоугольники формула Грина.



$$\partial D = \gamma, \quad \oint_{\gamma} y dx = \oint_{\gamma_1 + \gamma_2} y dx = \int_{\gamma_1} y dx + \int_{\gamma_2} y dx \Rightarrow S(D) = -\oint_{\gamma} y dx$$

↑ граница

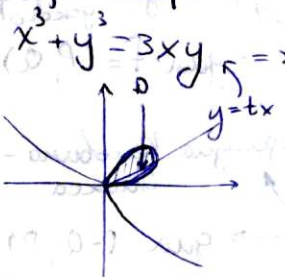
1 формула:  $S(D) = -\oint_{\gamma} y dx$

2 формула:  $S(D) = \oint_{\gamma} x dy$  — можно без минусов

3 формула:  $S(D) = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (x dy - y dx)$

4 формула:  $S(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D = \gamma} \rho^2 d\varphi$

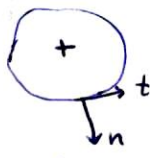
Пример:



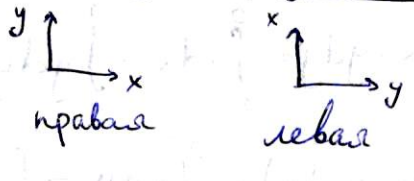
$$x^3 + y^3 = 3xy \Rightarrow x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

$$\Rightarrow S(D) = \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{9 t^2 dt}{1+t^3} = \dots = \frac{3}{2}$$

x dy - y dx = x^2 dt

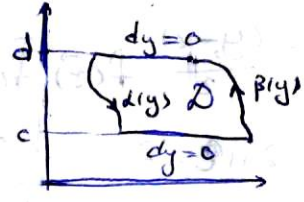
$\oint_{\partial D} x dy = \iint_D dx dy$  
 $-\oint_{\partial D} x dy = ?$  - как понять, что должен стоять минус справа?

Придумали знак  $\wedge$ :  $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

$\oint_{\partial D} x dy = \iint_D dx \wedge dy$ 


Формула Грина (на самом деле не только Грина)

Вместо  $x \mapsto g(x) \Rightarrow \oint_{\partial D} g dy = \iint_D dg \wedge dy = \iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy$



$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$

$\Rightarrow \oint_{\partial D} g dy = \int_c^d g(\beta(y)) dy - \int_c^d g(\alpha(y)) dy = \int_c^d [g(\beta(y)) - g(\alpha(y))] dy$

Теперь проинтегрируем (2) при фиксированном  $y$ :

$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial g}{\partial x} dx \stackrel{\text{Ф-ла Ньютона-Лейбница}}{=} g(\beta(y)) - g(\alpha(y)) \int_c^d [g(\beta(y)) - g(\alpha(y))] dy$

А если не  $g(x)$ , а  $g(x, y)$ ? Просто красные замены:  $\frac{dg}{dx} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}$ .

Тогда:  $\oint_{\partial D} g(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy$ .

$\oint_{\partial D} h(x, y) dx = \iint_D \frac{\partial h}{\partial y} dy \wedge dx = - \iint_D \frac{\partial h}{\partial y} dx \wedge dy$ .

Соответственно:
 

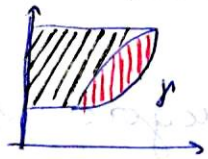
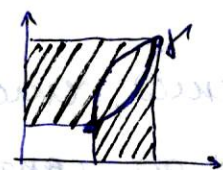
$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx \wedge dy$ <small>Работа</small>	Формула Грина-Остроградского $\rightarrow$ для $F = (P, Q)$
$\oint_{\partial D} P dy - Q dx = \iint_D (P_x - Q_y) dx \wedge dy$ <small>Помех</small>	Формула Кельвина-Стокса $\rightarrow$ для $(-Q, P)$

Теорема: Если <sup>(двигая мажор)</sup> диффеоморфизм (мажор замена переменных) связных ограниченных областей:  $\Delta \rightarrow D$   $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$ , с кусочно-мажорными границами имеет ограниченный якобиан, то  $\iint_D dx \wedge dy = \iint_{\Delta} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi \wedge d\eta$ .

Док-во:  $\oint_{\partial D} x dy = \oint_{\partial D} \boxed{xy_1} d\xi + \boxed{xy_2} d\eta = \iint_{\Delta} ((xy_2)_1 - (xy_1)_2) d\xi \wedge d\eta \ominus$   
 $dy = y_1 d\xi + y_2 d\eta$   $\uparrow$  Ф-ла Грина  
 $\ominus \iint_{\Delta} (x_1 y_2 + y_2 y_1 \cdot x - x_2 y_1 - x \cdot y_1 y_2) d\xi \wedge d\eta = \iint_{\Delta} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} d\xi \wedge d\eta$   
 Если двигаться и:  $y_2$

## 12.4. Зависимость интеграла от пути.

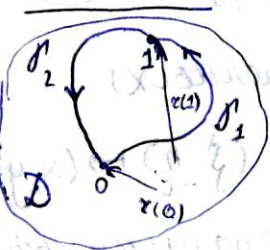
### Консервативные поля и ф-ла Ньютона-Лейбница

Пример:  $\int_{\gamma} x dy$    $\int_{\gamma} x dy + y dx$    
 видно, что зависит только от крайних точек, но не зависит от траектории

Теорема: Для каждого непрерывного векторного поля  $\vec{F}$  в области  $D \subset \mathbb{R}^2$  (равносильно следующие условия):  
 (1) циркуляция  $\vec{F}$  по любому контуру  $\gamma$  в области  $D = 0$ ;  
 (2) работа  $\vec{F}$  зависит не от пути, а лишь от крайних точек пути;  
 (3) найдётся такое скалярное поле (функция)  $U$  на области  $D$ , что  $\vec{F} = \text{grad } U = \nabla U$ .

Тогда  $U$  называют (скалярным) потенциалом поля  $\vec{F}$ , а само  $\vec{F}$  называют потенциальным, или консервативным.

Док-во: (1  $\Leftrightarrow$  2)  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$



$$0 = \int_{\gamma} f \cdot dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_2} - \int_{-\gamma_1} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_2} = \int_{-\gamma_1}$$

(3  $\Rightarrow$  2)  $f = \nabla u \Rightarrow \vec{f} \cdot d\vec{z} = \nabla u \cdot d\vec{z} = \nabla u \cdot \vec{z}' \cdot ds = (D_{\vec{z}} u) ds = du$

$$\int_{\gamma} du = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{z} = \int_{\gamma_1} (D_{\vec{z}} u) ds = u(z(1)) - u(z(0))$$



(2  $\Rightarrow$  3) Выберем любые  $z_0$  и  $u(z_0)$ .

Положим  $u(z) = u(z_0) + \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{z}$   
 пишем крайние точки, а не путь, неважно так как мы ищем потенциал.

$$u(\vec{z} + \delta \vec{v}) - u(\vec{z}) = u(z_0) + \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{z} - u(z_0) - \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{z} = \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{z}$$

Возьмём  $\vec{f}(z + \delta v) = \vec{f}(z) + \vec{o}(\delta)$

$$u(\vec{z} + \delta \vec{v}) - u(\vec{z}) = \vec{f}(\vec{z}) \cdot \vec{v} \delta + \vec{o}(\delta) \Big| \cdot \frac{1}{\delta}, \delta \rightarrow 0$$

$\forall v: \nabla u \cdot \vec{v} = D_{\vec{v}} u = \vec{f}(\vec{z}) \cdot \vec{v}$

$\Downarrow \nabla u = \vec{f}(\vec{z}). \quad \square$

Получаемся, что потенциал каждого поля определен с точностью до const, являющийся начальным значением при  $z_0$ .

Условие потенциальности

$Pdx + Qdy \stackrel{?}{=} du$   $\leftarrow$  вопрос состоит в том, является ли эта форма дифференциалом чего-либо?

Если да, то  $Pdx + Qdy =$  точный дифф-ал = точная форма.

Теорема (необходимое условие): Если гладкая форма  $Pdx + Qdy$  точна, то  $P_y = Q_x$  (всякая точная форма замкн.).

Док-во: Если  $Pdx + Qdy = du$ , то  $P = u_x$  и  $Q = u_y \Rightarrow \Rightarrow P_y = u_{xy}$  и  $Q_x = u_{yx} \Rightarrow u_{xy} = u_{yx}$  - по м-ме. Соответственно  $P_y = Q_x$ . Вопрос: достаточно ли это условие?  $\square$

$$Pdx + Qdy = du$$

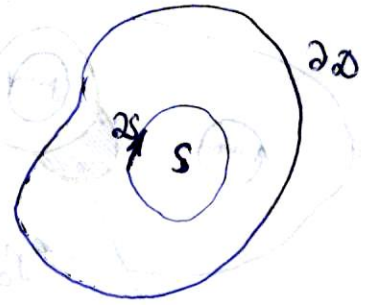
- Определение:
- I) Если  $Pdx + Qdy = du$ , то точная форма;
  - II) Если  $P_y = Q_x$ , то замкнутая форма;
  - III) Связная плоская область, внутри которой всякий контур является границей подобласти, называется односвязной.

Контур = замкн. линия без самопересечений = гомеоморфна окружности.

Теорема: В односвязной области всякая замкнутая форма точна.

Док-во: Замкнутая форма  $\Rightarrow P_y - Q_x = 0$ .

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = 0$$



Используем формулу Грина:

интеграл по любому контуру = 0  $\Rightarrow$  форма точна.

### 12.5 Несколько дополнений.

#### Преобразование угла и инт-л Гаусса

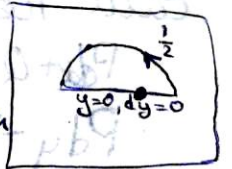
$(r, \varphi)$  = полярные коорд.

$$r^2 d\varphi = xdy - ydx \Rightarrow d\varphi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$



$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d\varphi$  - интеграл считает кол-во оборотов вокруг выбранного начала координат.

Если контур проходит через начало координат, но интеграл  $\int d\varphi$  - считает угол, под которым контур виден из этой точки.



не простой контур.

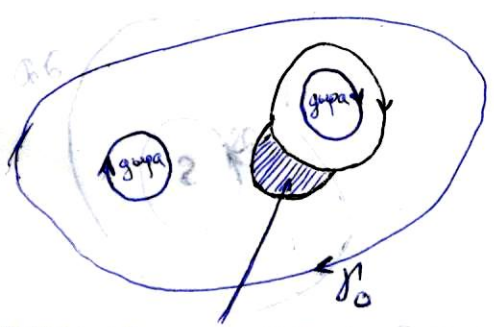
Поток:  $Pdy - Qdx$   
 $P=x, Q=y$  }  $\Rightarrow \vec{F} = \frac{(x, y)}{x^2+y^2} = \frac{\vec{z}}{z^2}$  - центральное поле

$\oint \vec{F} \cdot \vec{n} ds$  - ?  
 $\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{z} \cdot \vec{n}}{z^2} = \frac{z \cdot n'' \cdot \cos(\alpha, n)}{z^2} = \frac{\cos(\alpha, n)}{z}$

$\Rightarrow \oint d\varphi = \oint \frac{\cos(\alpha, n)}{z} ds$

Циркуляция дуг

Циркуляция.  $\partial D = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$



$\oint \omega = d\kappa$  - циркуляция вокруг дырки = период  
 Теорема:  
 Тогда  $\oint \omega = \sum \kappa d\kappa$   
 количество оборотов  
 вокруг k-ой дырки.

раньше мы поняли,  
 что интеграл по этой  
 части = 0.

Потенциал скорости и функции тока

$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dx \wedge dy$

$\int_{\partial D} Pdy - Qdx = \iint_D (P_x + Q_y) dx \wedge dy$

$P_x + Q_y =$  плотность источников } пример для  
 $Q_x - P_y =$  плотность завихрений } жидкости

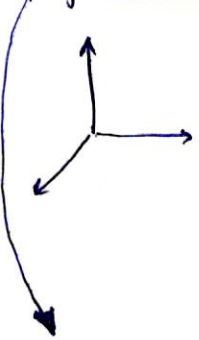
Если нет источников и нет завихрений, то:

$Pdx + Qdy = d\phi \Rightarrow P = \phi_x = -\psi_y$   
 $Pdy - Qdx = -d\psi \Rightarrow Q = \phi_y = \psi_x$   
 Условия Коши-Римана:  $x+iy = z \Rightarrow \psi + i\phi = w(z)$   
 $P_x + Q_y = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$   
 $Q_x - P_y = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$   
 $u_{xx} + u_{yy} = 0$



## 13.1 Интегралы 2-го рода

Принципы выбора ориентации для интегрирования



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - наш выбор: правая тройка векторов (многообразия)  $M =$  поверхность или линия.



(1) Параметризация:  $\Delta \rightarrow D, (\xi, \eta) \mapsto (x, y): \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} > 0 \Rightarrow$  ориентация сохраняется

$< 0 \Rightarrow$  меняется на противоположную

(2) Индуцирование: ориентация  $D$  определяет ориентацию  $\partial D$ .

$D = 3\text{-м}, 2\text{-м}, 1\text{-м}, 0\text{-м}$   
 поле внешних касательных



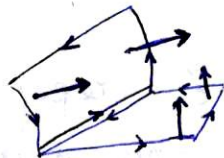
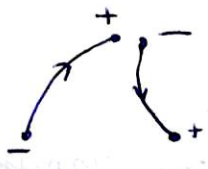
Ориентация линии = поле единичных касат. векторов (есть всегда)

Ориентация поверхности = поле единичных нормалей. (не всегда есть) линия Лейбница

ориентирована

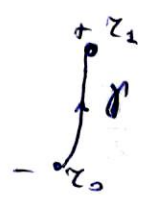
не ориентирована

(3) Склеивка.



- при склеивании уже нельзя

$\Phi$ -ла Кирхгофа - Лейбница для криволинейных интегралов:



$$\int_{\gamma} du = u(z_1) - u(z_0) = \int_{\partial D} u \Rightarrow \boxed{\int_D \text{grad } u = \int_{\partial D} u}$$

верно и для формулы Грина:  $\int_M du = \int_{\partial M} u$

для потенциальной силы

На параметризованной поверхности  $\vec{r}(u, v)$ ,  $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ .

Работа вдоль линии  $\vec{F} = (P, Q, R)$

$\vec{r}(s)$  - линия  $\Rightarrow \vec{t} = \vec{r}'(s)$

Элемент работы:  $\vec{F} \cdot \vec{t} dS = P dx + Q dy + R dz$

$W(F, \gamma) = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$

Заготовка элемента потока

$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

Объем:  $(\vec{F}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) du dv = \vec{F} \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv = \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \vec{F} \cdot \vec{dS}$

Тогда поток  $\Phi(F, \Sigma) = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} P & x_u & x_v \\ Q & y_u & y_v \\ R & z_u & z_v \end{vmatrix} du dv$

В двумерном случае:  $\Phi(F, \gamma) = \int_{\gamma} P dy - Q dx = \int_{\gamma} (P(x, y) \cdot y'(s) - Q(x, y) \cdot x'(s)) ds = \int_{\gamma} \begin{vmatrix} P & x_s \\ Q & y_s \end{vmatrix} ds$

Примеры: 1) По единичной сфере:

$\iint_{\Sigma} z dx dy$

$\iint_{\Sigma} z^2 dx dy$

Если 1-го рода: 0

$z^2 > 0 \Rightarrow \iint > 0$

Если 2-го рода:  $z \vec{k} > 0$

поток  $\rightarrow z^2 \vec{k} > 0$

2) Поток поля  $\vec{F} = (x, y, z) = \vec{r}$  через кусок

параболоида  $z = x^2 + y^2$  ниже  $z = 1$ , ориентированного наружу.

В цилиндрич. коорд.:  $z = \rho^2$



$\vec{F} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho^2)$

$D = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \begin{vmatrix} \rho \cos \varphi & \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \rho \sin \varphi & \sin \varphi & \rho \cos \varphi \\ \rho^2 & 2\rho & 0 \end{vmatrix} = - \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 (-\rho^3) d\rho = \frac{\pi}{2}$

### Уз 13.7 - дополнение.

Электрическое поле точечного заряда.

$$\vec{E} = kq \cdot r^{-3} \cdot \vec{r} \quad | \quad \text{Плотность потока через сферу радиуса } r \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{n} = r^{-1} \cdot \vec{r}$$

$$\text{Тогда } \Phi = \iint_{\Sigma} (kq \cdot r^{-3} \vec{r}) \cdot (r^{-1} \vec{r}) dS = kq \iint_{\Sigma} r^{-2} dS = kq r^{-2} \iint_{\Sigma} dS = 4\pi kq$$

$|r|^2 = r^2$   
 просто площадь сферы  
 не зависит от радиуса

### 2-форма потока

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$(\vec{F}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} P & a_1 & b_1 \\ Q & a_2 & b_2 \\ R & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = P \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{P dy_1 dz + Q dz_1 dx + R dx_1 dy = \omega^2}$$

Поток поля  $\vec{F}$  через параметр. поверхность  $\Sigma$ :  $\Phi = \iint_{\Sigma} \omega^2$

Работа поля  $\vec{F} \leftrightarrow$  1-форма  $\omega^1 = P dx + Q dy + R dz$

### 3-форма объёма

$$(dx_1 dy_1 dz) \cdot (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

ориентированного

### Уз 13.9. Дифференциальная форма (на $\mathbb{R}^3$ )

Д.ф. зависит от приложенного вектора (= вект. поля).

Кол-во аргументов = степень формы.

Базисные формы - не зависят от точки приложения:

- Базисная 0-форма: просто число = 1.
- Базисная 1-форма:  $dx, dy, dz$ :  $dx(v) = v_1 = v^x \dots$
- Базисная 2-форма:  $dx_1 dy_1, dy_1 dz_1, dz_1 dx_1$ :  $dx_1 dy_1(u, v) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$
- Базисная 3-форма:  $dx_1 dy_1 dz_1$ .

$\omega^k$  -  $k$ -форма

Базисные формы умножаются на  $\varphi$ -ш и складываются  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  получаем лин. пр-ва  $k$ -форм.

Общий вид  $k$ -форм на  $\mathbb{R}^3$ :

$k$	Вид формы	Размерность/ранг
0	$F(x, y, z)$	1
1	$Pdx + Qdy + Rdz$	3
2	$Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$	3
3	$F(x, y, z) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$	1

### Уп 13.7. Математический угол и магнитосила

$$\Omega = \iint_Z \frac{\cos \angle(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \iint_Z \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} dS = \langle \text{вместо } r \text{ ставим } r - \tilde{z} \rangle \Rightarrow \Omega(\tilde{z}) = \iint_Z \frac{(r - \tilde{z}) \cdot \vec{n}}{(r - \tilde{z})^3} dS$$

где  $\tilde{z}$  - точка наблюдения

Найдём  $\Omega(\tilde{z} + \delta \vec{v}) - \Omega(\tilde{z}) = \iint_Z \frac{(r - \tilde{z}) \cdot (\delta \vec{v}, t)}{|r - \tilde{z}|^3} dS = -(\tilde{z} - \tilde{z}') \times t \cdot \nu$

Край = лемма с вект.  $\vec{n} = \delta \vec{v} \times \vec{t}$

$$D\Omega \cdot \vec{v} = D_v \Omega(\tilde{z}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\dots}{\delta} \Rightarrow \nabla \Omega = \oint \frac{(r - \tilde{z}) \times t}{|r - \tilde{z}|^3} dS$$

Закон Био-Савара-Лапласа

### 13.2. Дивергенция и ф-ла Гаусса-Остроградского

#### Выражения в дек. координатах

$$\iint_{\partial T} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_T (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz$$

Теорема: Ф-ла верна для всех гладких ф-ий  $P, Q, R$  на  
прямой области  $T$ .

Док-во: Аналогично ф-ле Грина. Достаточно сделать для

$\vec{F} = (0, 0, R) = R\vec{k}$ . Заменим  $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow P$  и  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$   
и симметрично.

$$\iint_{\partial T} R dx \wedge dy = \iiint_T R_z dx \wedge dy \wedge dz. \text{ Возьмем } T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \\ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

? Оба интеграла сводятся к  $\iint_D (R(x, y, \beta(x, y)) - R(x, y, \alpha(x, y))) dx \wedge dy$ . □

Слева вект. поле  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} =$

Определение: Дивергенцией векторного поля называется  $\text{Div } \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$ .

(плотность источников поля)

Лемма: Для достаточно хороших полей предел:

(поле должно быть)

- (1) существует;
- (2) не зависит от формы марша.

# Бескоординатные выражения

$$\boxed{\iint_{\partial T} \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec{f} \cdot dV}$$

Определение: Дивергенцией векторного поля  $\vec{f}$  в точке  $p$  называется предел  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(\vec{f}, \partial B_\epsilon(p))}{V(B_\epsilon)}$  — если он существует.

Дивергенция = линейный оператор, действующий из векторного поля скалярное поле.

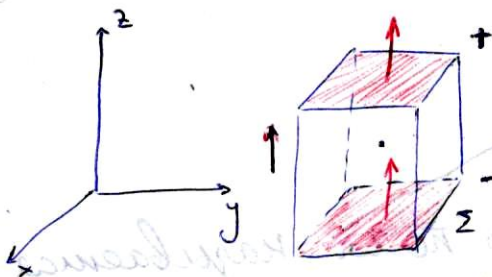
Свойства:

$$\operatorname{div}(c_1 \vec{f}_1 + c_2 \vec{f}_2) = c_1 \operatorname{div} \vec{f}_1 + c_2 \operatorname{div} \vec{f}_2, \quad \forall c_i = \text{const.}$$

Теорема: В декартовых координатах получим:

$$\operatorname{div}(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = P_x + Q_y + R_z.$$

Доказ-во:  $\operatorname{div}(R\vec{k}) = R_z$ ?



$p = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  в центре  $C_\epsilon$  стороны  $2\epsilon$ .

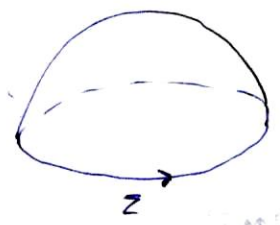
$$\begin{aligned} \Phi(f, \partial C_\epsilon) &= \iint_{z^+ + z^-} R dx \wedge dy = \int_{z^+} R dx \wedge dy - \int_{z^-} R dx \wedge dy = \\ &= \iint_z (R(x, y, \tilde{z} + \epsilon) - R(x, y, \tilde{z} - \epsilon)) dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_\epsilon &= 2\epsilon (R_z(p) + o(\epsilon)) \cdot 4\epsilon^2 \\ V_\epsilon &= 8\epsilon^3 \end{aligned} \right\} \frac{\Phi_\epsilon}{V_\epsilon} \rightarrow R_z(p)$$

□

13.3. Поток и формула Стокса

Выражение в дек. координатах

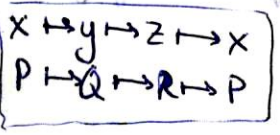


$$\oint_{\partial \Sigma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} (Q_x - P_y) dx \wedge dy + (R_y - Q_z) dy \wedge dz + (P_z - R_x) dz \wedge dx$$

Теорема: Формула верна для всех векторных ф-ий P, Q, R на простой области T.

Док-во: Надо  $\oint_{\partial \Sigma} R dz = \iint_{\Sigma} R_y dy \wedge dz - R_x dz \wedge dx$ .

$\Delta \mapsto \Sigma, (\xi, \eta) \mapsto (x, y, z)$



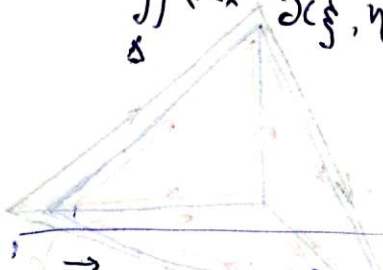
Ф-ла Грина

$$\oint_{\partial \Sigma} R dz = \oint_{\partial \Delta} R z_{\xi} d\xi + R z_{\eta} d\eta \stackrel{!}{=} \iint_{\Delta} ((R z_{\eta})_{\xi} - (R z_{\xi})_{\eta}) d\xi \wedge d\eta$$

Преобразования:  $(R z_{\eta})_{\xi} - (R z_{\xi})_{\eta} = R_{\xi} z_{\eta} + R z_{\eta \xi} - R_{\eta} z_{\xi} - R z_{\xi \eta} =$   
 $= R_{\xi} z_{\eta} - R_{\eta} z_{\xi} = (R_x x_{\xi} + R_y y_{\xi} + R_z z_{\xi}) z_{\eta} - (R_x x_{\eta} + R_y y_{\eta} + R_z z_{\eta}) z_{\xi} =$   
 $= R_x (x_{\xi} z_{\eta} - x_{\eta} z_{\xi}) + R_y (y_{\xi} z_{\eta} - y_{\eta} z_{\xi}) = R_x \frac{\partial(x, z)}{\partial(\xi, \eta)} + R_y \frac{\partial(y, z)}{\partial(\xi, \eta)}$   
 б (\*):

(\*)  $\iint_{\Delta} (R_x \frac{\partial(x, z)}{\partial(\xi, \eta)} + R_y \frac{\partial(y, z)}{\partial(\xi, \eta)}) d\xi \wedge d\eta \stackrel{!}{=} \iint_{\Sigma} R_x dx \wedge dz + R_y dy \wedge dz$  □

используя формулу преобразования координат:  $\frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} \cdot du \wedge dv = dp \wedge dq$



$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  - слева циркулирующее  $\vec{F}$ .

Справа поток потока:  $\text{rot } \vec{F} = (R_y - Q_z)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$

определение ротора в дек. координатах - очень похоже на какой-то определитель

Формальное же определение ротора:  $\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & Q \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & R \end{vmatrix}$

# Бескоординатные выражения

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{F} \cdot \vec{t} ds = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

Пример: поле скоростей  $\vec{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$   $\oint \vec{\omega} = \vec{k}$

В  $Oxy: \frac{2\pi \epsilon^2}{\pi \epsilon^2}$   
 $Oxz: 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{V} = 2\vec{k} = 2\vec{\omega}$   
 $Oyx: 0$

Определение: Завихренностью в поле  $\vec{F}$  в точке  $p$  вокруг направления  $\vec{n}$  называют предел

$$\omega_p(\vec{F}, \vec{n}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W(\vec{F}, \partial C_\epsilon)}{S(C_\epsilon)}$$

Лемма: Предел для достаточно хороших полей:

- (1) существует;
- (2) не зависит от формы шарика.

Направляющие косинусы:  $\vec{i} = e_1 = e_x; \vec{j} = e_2 = e_y; \vec{k} = e_3 = e_z$   
 $\vec{n} \cdot \vec{e}_i = \cos \alpha_i \Rightarrow \vec{n} = \sum (\cos \alpha_i) \vec{e}_i$

Лемма: Если  $\omega_p(\vec{F}, \vec{n}) = \sum \omega_p(\vec{F}, \vec{e}_i) \cdot \cos \alpha_i$

Док-во:

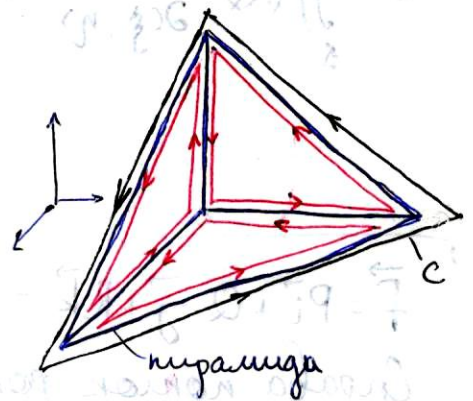
$C$  имеет нормаль  $\vec{n}$ .  
 $C_i$  имеет нормаль  $\vec{e}_i$ .

Тогда  $W(\vec{F}, \partial C) = \sum_i W(\vec{F}, \partial C_i); S(C) = \frac{S(C_i)}{\cos \alpha_i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{W(\vec{F}, \partial C)}{S(C)} = \sum_i \frac{W(\vec{F}, \partial C_i)}{S(C_i)} \cos \alpha_i \quad \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \right.$$

$$\omega_p(\vec{F}, \vec{n}) = \sum_i \omega_p(\vec{F}, \vec{e}_i) \cos \alpha_i \quad \left. \vphantom{\omega_p(\vec{F}, \vec{n})} \right\} \omega_p(\vec{F}, \vec{n}) = \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \quad \square$$

Аналогия:  $D_{\vec{n}} u = \sum_i (D_{\vec{e}_i} u) \cos \alpha_i$   
 $\hookrightarrow D_{\vec{n}} u = \nabla u \cdot \vec{n}$





### 13.3 Ротор...

Определение: 1) Завихренность  $\omega_p(\vec{f}, \vec{n}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W(f, \partial C_\epsilon)}{S(C_\epsilon)}$



2) Ротор  $F = \text{вектор } \text{rot } f$  такой что

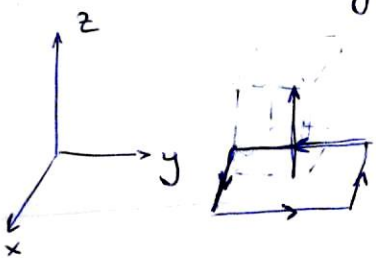
$$\omega_p(\vec{f}, \vec{n}) = (\text{rot } \vec{f}) \cdot \vec{n}$$

$$\text{rot } \vec{f} = \begin{vmatrix} e_x & \partial_x & f^x \\ e_y & \partial_y & f^y \\ e_z & \partial_z & f^z \end{vmatrix} = (f_x^z - f_z^x) e_x + (f_z^y - f_y^z) e_y + (f_y^x - f_x^y) e_z \quad (*)$$

по этому следствию ставит  $\nabla$ !

Теорема: Эта ф-ла следует из определения через завихренность.

Док-во: получим одну компоненту, остальные - по кругу.



Считаем  $(\text{rot } \vec{f}) \cdot \vec{e}_z$ : т.к. теперь задана плоская, но применяем ф-лу Грина:

$$W(f, \partial C_\epsilon) = \oint_{\partial C_\epsilon} \vec{f} \cdot \vec{t} \, dS = \oint_{\partial C_\epsilon} (f^x e_x + f^y e_y) \cdot \vec{t} \, dS = \oint_{\partial C_\epsilon} (P_i + Q_j) \, dS$$

Вот здесь она стала плоской

$$= \iint_{C_\epsilon} (f_x^y - f_y^x) \, dS = (f_x^y(p) - f_y^x(p) + o(\epsilon)) \iint_{C_\epsilon} dS = \dots \cdot S(C_\epsilon)$$

сверху - компоненты, снизу - производная  
важно только, что в 1 равно 0.  
просто площадь круга

### 13.4 Набла и операторы второго порядка

#### Ротор градиента и дивергенция ротора.

Func(T) = { скалярные поля на T }

Vect(T) = { векторные поля на T }

Func(T)  $\xrightarrow{\text{grad}}$  Vect(T)  $\xrightarrow{\text{rot}}$  Vect(T)  $\xrightarrow{\text{div}}$  Func(T)

$$\text{grad } \phi = \phi_x e_x + \phi_y e_y + \phi_z e_z$$

$$\text{rot}(\text{grad } \phi) = ((\phi_z)_y - (\phi_y)_z) e_x + \dots = 0 - \text{т.к. дважды гладкая}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{f}) = f_{yx}^z - f_{zx}^y + f_{zy}^x - f_{xy}^z + f_{xz}^y - f_{yz}^x = 0 - \text{т.к. дважды гладкая}$$

Тем самым мы доказали 2 теоремы:

Теорема 1: Для любого 2-м. скаль. поля  $\phi$ :  $\text{rot}(\text{grad } \phi) = \vec{0}$ .

Теорема 2: Для любого 2-м. вект. поля  $f$ :  $\text{div}(\text{rot } f) = 0$ .

### Оператор Гамильтона

$\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  - дифф. оператор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \phi_x \vec{e}_x + \phi_y \vec{e}_y + \phi_z \vec{e}_z$ ;  $\text{rot } \vec{f} = \nabla \times f$  - символы определяются

$$\text{div } \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \partial_x f^x + \partial_y f^y + \partial_z f^z$$

Запись тех 2 теорем:

$$1) \nabla \times (\nabla \phi) = \vec{0} \quad 2) \nabla \cdot (\nabla \times f) = 0.$$

### Произведение:

$$\begin{aligned} \text{I) } \nabla(\phi\psi) &= \nabla(\phi\psi) + \nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi(\nabla\psi) = \text{grad}(\phi\psi) \\ \nabla \times (\phi \vec{f}) &= (\nabla\phi) \times \vec{f} + \phi(\nabla \times \vec{f}) = \text{rot}(\phi \cdot \vec{f}) \\ \nabla \cdot (\phi \vec{f}) &= (\nabla\phi) \cdot \vec{f} + \phi(\nabla \cdot \vec{f}) = \text{div}(\phi \cdot \vec{f}) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{глобально} \\ \text{просто} \end{array}$$

II) остальные сложнее, т.к. просто использовать старые формулы:  
нельзя!

$$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\nabla \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g}) \quad (\text{CAB-BAC}) = \text{div}(\vec{f} \times \vec{g})$$

$$\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}) = f \times (\nabla \times g) + g \times (\nabla \times f) + (f \cdot \nabla)g + (g \cdot \nabla)f = \text{grad}(\vec{f} \cdot \vec{g})$$

$$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = f(\nabla \cdot g) - g(\nabla \cdot f) + (g \cdot \nabla)f - (f \cdot \nabla)g = \text{rot}(\vec{f} \times \vec{g})$$

$$\vec{f} \cdot \vec{\nabla} = f^x$$

# Оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta = \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

Позволим определить:

- $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \text{div}(\text{grad } \phi) = ?$
- $\nabla (\nabla \cdot f) = \text{grad}(\text{div } f) = ?$
- $\nabla \times (\nabla \times f) = \text{rot}(\text{rot } f) = ?$

А также вспомнить из мат. физики:

$\Delta u = 0$  - ур-е Лапласа ;  $\Delta u = u_{tt}$  - ур-е теплопроводности (II закон Фурье)

$\Delta u = u_{ttt}$  - волновое ур-е ;  $\Delta u = g$  - ур-е Пуассона

$\Delta u = k \cdot u$  - ур-е Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{f} = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{f})$$

## 13.9 Дифференциальные формы

### Внешнее произведение

$$(dx \wedge dy)(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} dx(u) & dx(v) \\ dy(u) & dy(v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^x & v^x \\ u^y & v^y \end{vmatrix}$$

$$(w_1^1 \wedge w_2^1)(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} w_1(u_1) & w_1(u_2) \\ w_2(u_1) & w_2(u_2) \end{vmatrix}$$

### Внешнее дифференцирование

$\omega^0 = f(x)$ , н.к.  $f \mapsto df \Rightarrow df = \omega^1 = 1\text{-форма}$   
 $f_x dx + f_y dy + f_z dz$

$$d(Pdx + Qdy + Rdz) = (R_y - Q_z) dy \wedge dz + (P_z - R_x) dz \wedge dx + (Q_x - P_y) dx \wedge dy$$

$$d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) = (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz$$

Вершина вект. анализа:  $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$

Уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} (\dot{\vec{E}} + 4\pi \vec{I}) \end{cases}$$

$B$  - магн. поле  
 $E$  - электр. поле  
 $I$  - ток  
 Вдаль от зарядов:  $\rho = 0, \vec{I} = 0!$

Используем формулу  $\nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \Delta \vec{f}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \times \left( \frac{1}{c} \dot{B} \right) = \frac{1}{c} \nabla \times \dot{B} = -\frac{1}{c} (\nabla \times B) = -\frac{1}{c} \dot{E}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{c^2} E_{ttt} - E_{xx} - E_{yy} - E_{zz} = 0 \\ \frac{1}{c^2} B_{ttt} - B_{xx} - B_{yy} - E_{zz} = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{волновые уравнения для света!} \\ \text{- но есть свет-э.м. волна.} \end{array} \right\}$$

13.5. Ортогональные криволинейные координаты

Ортогональные координаты и параметры Ламе'

$$\vec{r} = (x, y, z); \quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) \Rightarrow J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0; \quad \begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

Столбцы  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$

Определение: Система координат  $(q_1, q_2, q_3)$  ортогональна  $\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$  - ортогональны в каждой точке.

$$H_i = \left| \frac{d\vec{r}}{dq_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} \Rightarrow H_i \cdot \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

↑  
Параметр Ламе

↑  
Базисный вектор, переменный (сегментный)

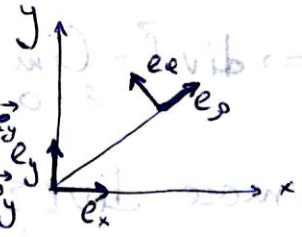
$$H_1 H_2 H_3 = J, \quad dl^2 = \sum H_i^2 dq_i^2$$

# Смена базиса

$\vec{a} = \sum A_i \vec{e}_i$  - поле

Как связаны  $\vec{e}_i$  с  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ?

В полярных:  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi = (x, y) \Rightarrow \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = (\cos\varphi)\vec{e}_x + (\sin\varphi)\vec{e}_y$   
 $\vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_r = -(\sin\varphi)\vec{e}_x + (\cos\varphi)\vec{e}_y$



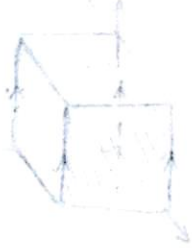
Поэтому:  $[\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi] = [\vec{e}_x, \vec{e}_y] \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$

В цилиндрических:  $[\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z] = [\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z] \cdot \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

В сферических (физических):  $[\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi] = [\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z] \cdot \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$

В общем виде:  $h_i \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i}$

$[h_1 \vec{e}_1, h_2 \vec{e}_2, h_3 \vec{e}_3] = [\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z] \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)}$



## Градиент

$u \mapsto \nabla u = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$

$\nabla u \cdot \vec{e}_i = A_i = \frac{\partial u}{\partial e_i}$  - по определению, производная по направлению

$\frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} \Rightarrow \nabla u = \sum \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} \vec{e}_i$

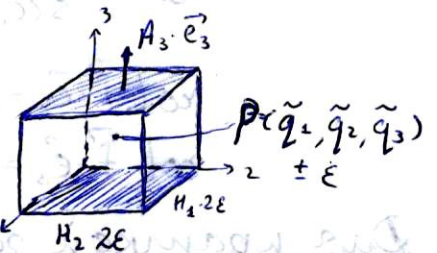
В полярных:  $\nabla u = u_r \vec{e}_r + \frac{1}{r} u_\varphi \vec{e}_\varphi$

В сферических:  $\nabla u = u_r \vec{e}_r + \frac{1}{r} u_\theta \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} u_\varphi \vec{e}_\varphi$

## Дивергенция

$\vec{f} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$  - для простоты считаем только эту компоненту

Считаем по определению: поток через кубик делим на объем кубика.



$\text{div } \vec{f} = \lim \frac{\Phi(\vec{f}, \partial C_\epsilon)}{V(C_\epsilon)}$ ;  $V(C_\epsilon) = h_1 h_2 h_3 \cdot 8\epsilon^3$ ;  $\Phi = \iint \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \iint A_3 \cdot h_1 \cdot h_2 dq_1 dq_2$

Введем функцию  $a = h_2 h_3 A_3 \Rightarrow \Phi(\vec{f}, \partial C_\epsilon) = \iint (a_+ - a_-) dq_1 dq_2$

$$a_+ - a_- = \dots$$

$$\Phi_\varepsilon = 4\varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_3) \right) \cdot 2\varepsilon + O(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{f} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi_\varepsilon}{V_\varepsilon} = \frac{1}{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3} \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_3) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{\partial A_3}{H_3} \right)$$

$$\text{В уморе: } \operatorname{div} \left( \sum_i A_i \vec{e}_i \right) = \frac{1}{J} \cdot \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{\partial A_i}{H_i} \right)$$

### Лапласиан

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$$

↑  
координатами

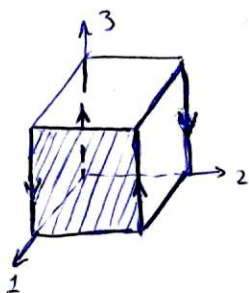
↘ в криволинейных

### Ротор

$$\vec{f} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + \boxed{A_3 \vec{e}_3} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{f} = B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3$$

↖ для простоты считаем только эту компоненту

$$\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{e}_i = \lim \frac{W(f, C_{i,\varepsilon})}{S(C_{i,\varepsilon})} \text{ — но определению это}$$



Только на верт. ребрах:  $dl = H_3 \cdot dq_3$

$$S(C_i) = 4\varepsilon^2 \cdot H_3 \cdot H_2$$

$$W(C_i) = \int (a_+ - a_-) dq_3 \text{ — введём } a = H_3 A_3$$

По формуле конечных приращений:

$$a_+ - a_- = \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 A_3) \cdot 2\varepsilon + O(\varepsilon)$$

Совместивем:

$$\lim \frac{W(C_i)}{S(C_i)} = \frac{1}{H_2 H_3} \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 A_3) = \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{e}_1 = \operatorname{rot} (A_3 \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_1$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{e}_2 = \operatorname{rot} (A_3 \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{H_1 H_3} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 A_3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{e}_3 = \operatorname{rot} (A_3 \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

Для краткой записи используем:

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \frac{\partial}{\partial x} & f^x \\ \vec{e}_2 & \frac{\partial}{\partial y} & f^y \\ \vec{e}_3 & \frac{\partial}{\partial z} & f^z \end{vmatrix} (=)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{f} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} H_1 \vec{e}_1 & \frac{\partial}{\partial q_1} & H_1 A_1 \\ H_2 \vec{e}_2 & \frac{\partial}{\partial q_2} & H_2 A_2 \\ H_3 \vec{e}_3 & \frac{\partial}{\partial q_3} & H_3 A_3 \end{vmatrix} \text{ — символический определитель.}$$

### 13.6 Важнейшие классы

30

векторных полей.

#### Потенциальные и безвихревое поле.

Потенциальное поле  $\vec{F} = \nabla\phi$

Определение: Векторное поле  $\vec{F}$  безвихревое, если  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ .

Следствие: Всякое потенциальное поле безвихревое.

Пример (вихревой илир):

$$\vec{F} = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2} = \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho}, \quad \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$$

Определение: I) Контур  $\gamma'$  области  $D$  называют стягиваемыми, если  $\exists$  крив  $K \subset D$ , такой что  $\partial K = \gamma'$ .

II) Если в  $D$  все контуры стягиваемы, то  $D$  односвязная область.

Теорема: В односвязной области все безвихревые поля потенциальны.

Док-во: Циркуляция поля  $F$  через  $\gamma'$ :  $W(\vec{F}, \gamma')$  равна по формуле Стокса  $\iint_{\gamma'=\partial K} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$ .  $\square$

#### Соленоидальные и бездивергентные поля

Определение: Поле  $\vec{F}$  бездивергентное, если  $\text{div } \vec{F} = 0$

Теорема: Для гладкого векторного поля  $\vec{F}$  РСУ:

- (1) поток через любую замкнутую поверхность = 0;
- (2) поток через незамкнутую поверхность  $\Sigma$  зависит только от  $\partial\Sigma$ ;
- (3) существует векторное поле  $\vec{a}$  такое что  $\vec{F} = \text{rot } \vec{a}$ .

Тогда  $\vec{a}$  = векторный потенциал для  $\vec{F}$ .

Док-во: (1 $\Leftrightarrow$ 2)



(2)

$\partial \Sigma = \emptyset$ .  $\Phi(f, \Sigma) = \Phi(f, \Sigma_1) - \Phi(f, \Sigma_2)$  — м.к.  $\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2$ .

(3 $\Rightarrow$ 2) Пусть  $\Phi(\text{rot } a, \Sigma) = W(a, \partial \Sigma)$  — по ф-ле Стокса.

(1 $\Rightarrow$ 3)

Определение: Поле  $\vec{F}$  соленоидаьно, если  $\vec{F} = \text{rot } \vec{a}$ .

Следствие: Всякое соленоидальное поле бездивергентно.

Док-во:  $\text{div } \text{rot } \vec{a} = 0$



Лемма: Если в области D все поверхности стягиваемы в точку, то в D каждое бездивергентное поле соленоидально.

Пример:  $\vec{F}(\vec{r}) = k r^{-3} \vec{r}$

$\text{div } \vec{F} = 0$  на  $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$



пусть  $\vec{a}$  — малый шар, все радиусы которых  $\vec{r}$  — векторы, которые мы вычисляем.

Док-во:  $\Phi(\vec{F}, \Sigma) \stackrel{\Gamma\text{-отр.}}{=} \iiint_{\Sigma} \text{div } \vec{F} dV = 0$   $\square$   
 $\text{div } \vec{F} = 0$ ,  $\partial \Sigma = \emptyset$ ,  $\Sigma = \partial \Gamma$   
сфер.

Попробуем векторный потенциал:

$\vec{F} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$  ( $\text{div } \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 0$ )

$\text{rot } (Q \vec{i} - P \vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ Q & -P & 0 \end{vmatrix} = P_z \vec{i} + Q_z \vec{j} - (P_x + Q_y) \vec{k} = (P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k})_z = \vec{F}_z$

$\Rightarrow \vec{a} = \int_{t=z_0}^{t=z} (Q(x,y,t) \vec{i} - P(x,y,t) \vec{j}) dt \Rightarrow \vec{F} = \text{rot } \vec{a}$



Теорема: В связываемой области векторное дважды гладкое векторное поле представляется суммой потенциального и соленоидального.

$$\vec{f} = -\nabla\phi + \text{rot } \vec{a}$$

Идея док-ва:  $\text{div } \vec{f} = -\Delta\phi + \text{div } \text{rot } \vec{a}$

или:  $\vec{f} = \vec{p}_1 + \vec{s}_1 \xrightarrow{\text{смен.}} \vec{p}_2 + \vec{s}_2$   
 уравнение Пуассона  
 $\text{div}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = \text{div}(\vec{s}_2 - \vec{s}_1) \Rightarrow \Delta \vec{h} = 0$  - гармоническое поле.

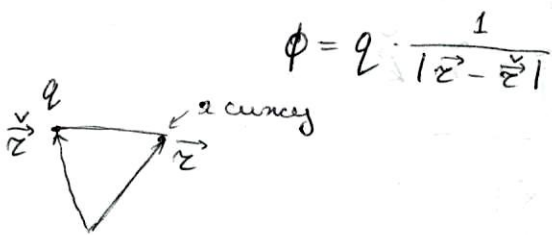
13.7 Потенциалы в эл-стике.

Сферич. симметр. поле  $u(\vec{r}) = u(r)$ .  $\nabla u(\vec{r}) = u'(r) \nabla r = u'(r) \frac{\vec{r}}{r}$

Важный:  $u(r) = r^{-1} \Rightarrow \nabla u = -r^{-2} \vec{r}$

$\vec{E} = -\nabla\phi$ ,  $\phi = \frac{q}{r} = r^{-1} \cdot q$ . Заряд в точке  $\vec{r}$ .

$$\begin{aligned} u(r) &= r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \nabla r &= \vec{e}_r = r^{-1} \cdot \vec{r} \end{aligned}$$



$$\phi = q \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Если размазать заряд, то будет конечная сумма, но есть интеграл:

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_T \frac{\rho(\vec{r}') \cdot d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Для  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  - ищем  $\vec{A}$ :

закон Био-Савара-Лапласа  $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \iiint_T \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'$

Используем формулу:  $\nabla \times (\phi \vec{j}) = (\nabla\phi) \times \vec{j} + \phi(\nabla \times \vec{j})$

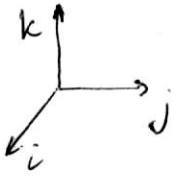
$$(1) = \vec{j} \times \nabla (|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}) = \nabla \times \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \underbrace{\frac{1}{c} \iiint_T \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\vec{A}(\vec{r})}$$

## 13.8. Инвариантность при смене базиса.

### Смена ортонормированного базиса.

Декартова система:



Ортогональные преобразования — сохраняют начало и угол:  $C$  — орт. матрица  $\Leftrightarrow C^T \cdot C = E$ . и угол.

Старый:  $\langle i, j, k \rangle \rightarrow$  новый:  $\langle \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k} \rangle$

Поможем на матрицу перехода  $C$  (по определению):

$$(*) [\tilde{i} \ \tilde{j} \ \tilde{k}] = [i \ j \ k] \cdot C^T$$

$$(*) [\tilde{i} \ \tilde{j} \ \tilde{k}]^T = C \cdot [i \ j \ k]^T$$

Теорема: Координаты векторов преобразуются

$$[\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z}]^T = C \cdot [x \ y \ z]^T, \text{ или } (C^T)^{-1}$$

(если  $C$  — орт.-ая матрица)

Док-во:  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \tilde{x}\tilde{i} + \tilde{y}\tilde{j} + \tilde{z}\tilde{k}$

$$[i \ j \ k] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [i \ j \ k] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$$

(Note: The diagram shows the matrix  $[i \ j \ k]$  being multiplied by the vector  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  to equal  $[i \ j \ k]$  multiplied by the vector  $\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$ . The matrix  $[i \ j \ k]$  is circled in red and labeled  $C^T$ . The vector  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  is circled in blue and labeled  $\vec{r}$ . The vector  $\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$  is circled in blue and labeled  $\vec{r}$ . Arrows point from the labels  $C^T$  and  $\vec{r}$  to their respective parts in the equation.)

$$[i \ j \ k] \cdot [x \ y \ z]^T = [i \ j \ k] \cdot [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z}]^T$$

$$[\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z}]^T = C \cdot [x \ y \ z]^T \quad \square$$

### Инвариантность дивергенции

$$\vec{f} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = [i \ j \ k] \cdot [P \ Q \ R]^T = [\tilde{i} \ \tilde{j} \ \tilde{k}] \cdot [\tilde{P} \ \tilde{Q} \ \tilde{R}]^T$$

Аналогично координатам:  $\Rightarrow [\tilde{P} \ \tilde{Q} \ \tilde{R}]^T = C \cdot [P \ Q \ R]^T$

$$J = \frac{D(P, Q, R)}{D(x, y, z)}$$

$$\tilde{J} = \frac{D(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})}{D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}$$

$$\frac{D(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})}{D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = \frac{D(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})}{D(P, Q, R)} \cdot \frac{D(P, Q, R)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}$$

$$\tilde{J} = C \cdot J \cdot C^T$$

$$\tilde{J} = C \cdot J \cdot C^T$$

След-оператор, не зависящий от базиса; является суммой диагональных элементов матрицы.

Тогда  $\text{div } \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = \text{tr } J \text{ "след"} = \tilde{P}_{\tilde{x}} + \tilde{Q}_{\tilde{y}} + \tilde{R}_{\tilde{z}} = \text{tr } \tilde{J}$ .

$$\text{tr } \tilde{J} = \text{tr}(C \cdot J \cdot C^T) \underset{\substack{\text{по св-ву} \\ \text{следа:}}}{=} \text{tr } J$$

$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

### Псевдовекторы

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & u_1 & v_1 \\ j & u_2 & v_2 \\ k & u_3 & v_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \tilde{i} & \tilde{u}_1 & \tilde{v}_1 \\ \tilde{j} & \tilde{u}_2 & \tilde{v}_2 \\ \tilde{k} & \tilde{u}_3 & \tilde{v}_3 \end{vmatrix} = \det C \cdot \begin{vmatrix} i & u_1 & v_1 \\ j & u_2 & v_2 \\ k & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

Каждый столбец этого определителя получается умножением столбца начального на матрицу с лева.

Т.к.  $C^T \cdot C = E \Rightarrow$  либо  $\det C = 1$  (поворот), либо  $\det C = -1$  (инверсия и отражение).

Возникает деление всех векторов  $u$  и  $v$  на два сорта:

Если  $u, v$  — полярные вектора, то  $u \times v$  — псевдовекторы.

Пример: Полярные: перемещение  $\vec{r}$ , скорость  $\vec{v}$ , ускорение  $\vec{a}$ , сила  $\vec{F}$ , электр. поле  $\vec{E}$ .

Аксиальные: угловая скорость  $\vec{\omega}$ , момент импульса  $\vec{L}$ , момент сил  $\vec{M}$ , магнитное поле  $\vec{B}$ .

# Инвариантность ротора

$$\text{rot}(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial_x & P \\ \vec{j} & \partial_y & Q \\ \vec{k} & \partial_z & R \end{vmatrix}$$

Понятно, как преобразуется столбец:  $[\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}]^T = C \cdot [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]^T$   
и столбец:  $[\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}]^T = C \cdot [P, Q, R]^T$ .

Оказывается, что столбец:  $[\partial_{\tilde{x}}, \partial_{\tilde{y}}, \partial_{\tilde{z}}]^T = C \cdot [\partial_x, \partial_y, \partial_z]^T$ .

Закон преобразования тот же самый:

$$\text{rot}(\tilde{P}\tilde{i} + \tilde{Q}\tilde{j} + \tilde{R}\tilde{k}) = \det C \cdot \text{rot}(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) =$$

$\Rightarrow \text{rot}(\text{ист. вектор}) = \text{псевдо вект. поле}$   
: псевдо истин.

## Девятимеры на плоскости

$$\vec{f} = P\vec{i} + Q\vec{j}, \quad \begin{bmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

$$P_x + Q_y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_x - P_y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

① ② кососимметр.

симметричные ⊕ кососимметричные  
размерность: 3 ⊕ 1

скалярные ⊕ бесследовые (со следом = 0)

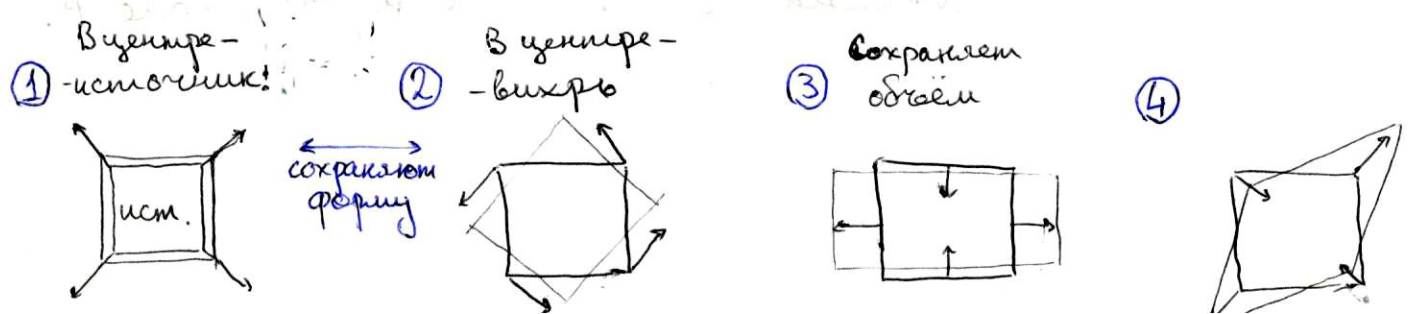
размерность: 1 ⊕ 3 =  $\overset{\text{симм.}}{1} \oplus \overset{\text{бесслед.}}{2} \oplus 1$  девятимеры  
тензорное умножение  $2 \otimes 2$

Какие все симметричные и бесследовые:

$$P_y + Q_x \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_x - Q_y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

③ ④

линейные:  $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$



# Тензоры в пространстве

$$\begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}$$

$$\text{div} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ - скалярная симм. м-ца}$$

$$\text{rot} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ - кососимм. м-ца}$$

глубокая вещь: тензорное умножение

симметричные  $\oplus$  кососимметричные  
 размерность:  $6 \oplus 3$

скалярные  $\oplus$  бесследовые  
 размерность:  $1 \oplus 8$

симм. и бесслед.

Базисные тензоры:  $P_y + Q_x, P_z + R_x, Q_z + R_y$   
 $P_x - Q_y, Q_y - R_z, R_z - P_x$

только 2 линейно независимы

Тензоры бывают разные.

## ГЛАВА 14. Функциональные

последовательности и ~~функции~~ <sup>ряды.</sup>

### 14.1 Равномерная сходимость.

Пример:  $f_n(x) = x^n$  на  $[0, 1]$ . |  $f_n(x) = \arctg nx$   
 $f_n(x) \rightarrow$  разрыв |  $f_n(x) \rightarrow \frac{2}{\pi} \text{sgn } x$  (разрыв)

Помогая сходимость:  $\forall x \in X, f_n(x) \rightarrow f(x)$ :

$$\forall x \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(x, \epsilon) : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

как-нибудь можно избавиться от  $x$ ?

Можно попробовать:  $N^*(\epsilon) = \sup \{N(x, \epsilon) | x \in X\}$  - но тогда надо различать бесконечный и конечный супремумы

Определение: Последовательность  $f_n(x)$  сходится равномерно к  $f(x)$  на  $X$ , если  $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \forall x \in X : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

II) Равномерная норма ф-ии  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ):

$$\|g\|_X = \sup \{|g(x)|, x \in X\} = \sup_{x \in X} |g(x)|.$$

Это правда норма.

# Девятиаторы в пространстве

(33)

$$\begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}$$

$$\text{div} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{array}{l} \text{скалярная} \\ \text{симм.} \\ \text{м-ца} \end{array} \quad \text{rot} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{array}{l} \text{кососимм.} \\ \text{м-ца} \end{array}$$

любая база:  $1 \oplus 3 \oplus 5 = 3 \otimes 3$   
 тензорное умножение  
 симметричные  $\oplus$  кососимметричные  
 размерность:  $6 \oplus 3$   
 скалярные  $\oplus$  бесследовые  
 размерность:  $1 \oplus 8$   
 симм. и бесслед.

Базисные девятиаторы:  $P_y + Q_x, P_z + R_x, Q_z + R_y$   
 $P_x - Q_y, Q_y - R_z, R_z - P_x$  } только 2 линейно независимы

Тензоры бывают разные.

## ГЛАВА 14. Функциональные

последовательности и ~~функции~~ <sup>ряды.</sup>

### 14.1 Равномерная сходимость.

Пример:  $f_n(x) = x^n$  на  $[0, 1]$ . |  $f_n(x) = \arctg nx$   
 $f_n(x) \rightarrow$  разрыв |  $f_n(x) \rightarrow \frac{2}{\pi} \text{sgn } x$  (разрыв)

Помощная сходимость:  $\forall x \in X, f_n(x) \rightarrow f(x)$ :

$$\forall x \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(x, \epsilon) : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

как-нибудь можно избавиться от  $x$ ?

Можно попробовать:  $N^*(\epsilon) = \sup \{N(x, \epsilon) | x \in X\}$  - но тогда надо различать бесконечный и конечный супремумы

Определение: Последовательность  $f_n(x)$  сходится равномерно

к  $f(x)$  на  $X$ , если  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \quad \forall x \in X : n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ .

II) Равномерная норма ф-ии  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ):

$$\|g\|_X = \sup \{|g(x)|, x \in X\} = \sup_{x \in X} |g(x)|.$$

Это правда норма.

Тогда:  $f_n \rightarrow f$  равнон. на  $X \Leftrightarrow \|f_n - f\|_X \rightarrow 0$ .

Пишемся:  $f_n \rightrightarrows f$

Теорема: (Критерий Коши) РСУ на попарно функций  $f_n$  на  $X$ :

(1)  $f_n \rightrightarrows f$  на  $X$ ;

(2)  $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \left( \forall x \in X: m, n > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \right)$   
 $\Downarrow$   
 $\|f_n - f_m\|_X < \epsilon$

Дек-во: (1  $\Rightarrow$  2)

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\|$$

(2  $\Rightarrow$  1)

$\forall x \in X \{f_n(x)\}$  фундаментальна  $\Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x)$  попарно.

Теперь надо показать, что равномерно:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| \\ \sup_x (f_n(x) - f_m(x)) &\rightarrow \sup_x (f_n(x) - f(x)) \\ &\Downarrow \\ \|f_n - f_m\|_X &\rightarrow \|f_n - f\|_X \text{ при } n \geq N \text{ слева } < \epsilon, \text{ тогда и справа } < \epsilon. \end{aligned}$$

Равномерная сходимость ряда.

Ряд  $\sum_{n \geq n_0} \varphi_n(x) \Rightarrow$  частичная сумма:  $f_k(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}, n \leq k} \varphi_n(x)$ .

Функция ряд может сходиться в некоторых  $x$ , а в других расходиться.

Определение: Ряд  $\sum \varphi_n(x)$  сходится равномерно к  $f(x)$ , если  $f_k(x) \rightrightarrows f(x)$  - на  $X$  везде.

Мажорантный признак Вейерштрасса

Теорема: Если для функций  $\varphi_n(x)$  найдутся числа  $\gamma_n \geq 0$  такие что ряд  $\sum \gamma_n$  сходится, то ряд  $\sum \varphi_n(x)$  сходится равномерно и  $\sum \varphi_n(x) \leq \sum \gamma_n$ . (и  $\|\varphi_n\|_X \leq \gamma_n$  - т.е.  $\forall x \in X |\varphi_n(x)| \leq \gamma_n$ )

Дек-во:  $\forall x \in X \sum_{k \in \mathbb{N}} |\varphi_k(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \gamma_n \uparrow \sum \gamma_n$  - ограничены сверху числом  $\sum \gamma_n < +\infty$ , т.е. ряд  $\sum \varphi_n(x)$  с.с. абсолютно. Обозначим сумму  $f(x)$ , част. суммы  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k(x) \leq f_n(x)$ .

Док-во:  $|f_n(x) - f(x)| = |\sum_{k>n} \varphi_k(x)| \leq \sum_{k>n} |\varphi_k(x)| \leq \sum_{k>n} \gamma_k \rightarrow 0$ . (34)

$\|f_n - f\| \leq \sum_{k>n} \gamma_k \rightarrow 0$  - т.е. равномерно.  $\square$

Пример:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin nx$  - пример Абеля, ряд Фурье тригонометрич.

$\max \sum \frac{1}{n}$  - расходящаяся

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \sin nx$ :  $\max \sum \frac{1}{n^2}$  сходится  $\Rightarrow$  иск. ряд сч. равномерно

Ряды Фурье  $\begin{cases} \sum a_n \cdot \cos nx \\ \sum b_n \cdot \sin nx \end{cases}$   $\max \begin{cases} \sum |a_n| \\ \sum |b_n| \end{cases}$

Лема Зеленая (сохранение непрерывности)

Теорема (Вейерштрасс): Если посл-ть непрер. функций сходится равномерно, то предельная функция непрер.

Док-во: Сначала  $X$  - компакт. Тогда  $f_n$  непрер.  $\Rightarrow$  равном. непр.

$\forall x \in X$   $\boxed{\forall \epsilon > 0} \exists \delta(x, \epsilon) > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow \boxed{|f_n(x) - f_n(y)|} < \epsilon$   
 хотим:  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

$|f(x) - f(y)| \leq \boxed{|f_n(x) - f(x)|} + \boxed{|f_n(x) - f_n(y)|} + \boxed{|f_n(y) - f(y)|} < 3\epsilon$

$\exists N(\epsilon)$ :

значит можем, т.к.  $3\epsilon$  уменьшим до  $\epsilon$ .  $\square$

Предположение о компактности не особо нужна!  
 $\delta(x, \epsilon)$  работает.

Следствие: Если  $\varphi_n(x)$  непрерывна на  $X$  и  $\sum \varphi_n(x) \Rightarrow f(x)$ , то  $f(x)$  непрер. на  $X$ .

Пример:  $\sum \frac{x^n}{n!} = e^x$  - чтобы док-ть, что непрер., возьмем мажоранту.

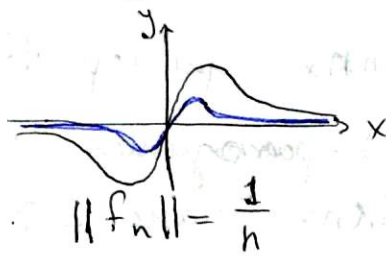
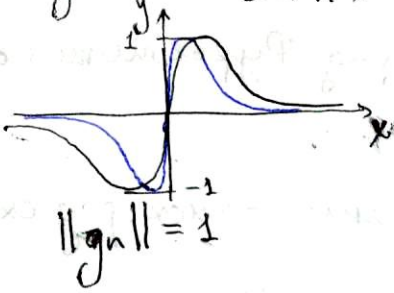
На отрез.  $[-b, b]$ :  $|x^n| \leq b^n$  и  $\sum \frac{b^n}{n!}$  сходится  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!} \Rightarrow f(x) = e^x$  - непрер. на  $[-b, b] \Rightarrow$  непрер. на  $\mathbb{R}$ .



Пример (Движущийся горб):

$$g_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$$



$$\forall x \quad g_n(x) \rightarrow 0, \quad g_n \not\equiv 0 \quad \forall x \quad f_n(x) \rightarrow 0, \quad f_n \not\equiv 0$$

Теорема (Дини): Если монот. посл-ть непрер. функций на компакте сх-ся к непрер. функции пунктуально, то она сх-ся равномерно.

Док-во:  $f_n \rightarrow f$  на компакте  $X$ . Возьмем  $\epsilon > 0$ .

$$\text{Введем } E_n = E_n(\epsilon) = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon\}$$

$E_n$  откр.

Монотонность  $\Rightarrow \{E_n\}$  расширяя.

$$\forall x \in X \quad \exists N(\epsilon) \quad E_N(\epsilon) \ni x, \text{ т.е. } X \subseteq \bigcup_n E_n(\epsilon).$$

Извлекаем конечное покрытие.

С одной стороны:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{непр. ф-ия}$$

параметр  $n$  - дискретный.  
 \* если непрерывный?

С другой стороны:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, b) = f(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} f(a, y) = f(a, b)$$

- Когда можно переставлять пределы в предельном переходе по непр. переменной.

Если  $f(x, y)$  непр. внутри  $(a, b)$ , то можно так делать.

Перестановка пределов

Можно так писать:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a)$$

Или:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, b) = f(a, b)$$

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} f(a, y) = f(a, b)$$

Достаточное условие для такой перестановки:  $f(x, y) \rightarrow f(x, b)$   
или  $f(x, y) \rightarrow f(a, y)$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) \forall x \in X (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(a, y)| < \epsilon)$$

Интегрирование и дифференцирование

Эти операции основаны на предельном переходе  $\Rightarrow$  равномерная сходимость функц. посл-ти существенна для инт. и диф. предельной функции.  $f_n \rightarrow f$  недостаточно.

Теорема: Если на отрезке  $X$  последовательность интегрируемых функций  $f_n$  сходится равномерно к  $f$ , то: 1) предельная ф-ия  $f$  интегрируема на  $X$ ;

$$2) \int_X f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dx < \int_X f_n dx \rightarrow \int_X f dx >$$

Док-во: 2) Предположим, что  $f$  интегрируема (это 1)).

$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon): n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ . Оценим разность инт-ов:

$$\text{разность } R_n = \left| \int_X f_n dx - \int_X f dx \right| = \left| \int_X (f_n - f) dx \right| \leq \int_X \underbrace{|f_n - f|}_{< \epsilon} dx \leq \underbrace{M(X)}_{\text{мера}} \cdot \epsilon$$

Если  $M(X) < \infty$ , то  $R_n \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

$$(1) |f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(x) - f(x)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Используя лемму, данную ранее:

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \omega(f, A) \cdot \mu(A) \leq \omega(f_n, A) \cdot \mu(A) + 2\epsilon \cdot \mu(A)$$

Для разности сумм Дарбу:  $\omega(f, \rho) \leq \omega(f_n, \rho) + 2\epsilon \mu(X)$

$$\omega(f, \rho) \leq \omega(f_n, \rho) + 2\epsilon \mu(X)$$

$\downarrow$  при  $\delta \rightarrow 0$   $\Rightarrow \omega(f, \rho) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , т.е.  $f$  интегрируема на  $X$ .

Теорема: Предыдущая теорема работает на любом измеримом множестве  $X$  конечной меры.

Теорема: Если на промежутке  $\Delta$  функциями  $F_n$  заданы,  
 $F_n \rightarrow f$  и  $F_n' \rightarrow g$ , то  $f$  задана и  $f' = g$ .

Док-во: Возьмем  $a \in \Delta$ . По ф-ле Ньютона-Лейбница:

$\forall x \in \Delta: f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t) dt$ . — далее переходим к пределу при  $n \rightarrow \infty$ :

$f(x) = f(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n'(t) dt$  — согласно предыдущей теореме и тому, что  $f_n' \rightarrow g$ :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt \Big| \frac{\partial}{\partial x}$$

$f'(x) = 1 \cdot g(x)$  и  $g$  — непрерывна на  $\Delta$  как предел непрерывных функций.  $\square$

Пример: когда первая т-на раздела нарушается, если м-во  $X$  бесконечной меры:

$$f^*(x) = e^{-x} \text{ на } \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1,$$



$$f_n(x) = \frac{1}{n} f^*\left(\frac{x}{n}\right) \Rightarrow f(x) \equiv 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} f_n(x) dx = 1 \not\rightarrow 0.$$

Для функций нескольких переменных обобщается на дифф-ие по вектору. А далее используем лемму об одномерном сечении  $f_n(p+tv) = \varphi_n(t)$  — сводим к ~~пред.~~ теореме.

Колебание ф-ии на  $X$ :  $\omega(f, X) = \sup f(x) - \inf f(x) = \sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in X\}$

Лемма: Для любых двух функций  $f, g$  на  $A$ :  $\|f_n - f\|_A \leq \|f_n - f\|_X \leq \epsilon$   
 $\omega(f, A) \leq \omega(g, A) + 2\|f - g\|_A \Rightarrow \omega(f, A) \leq \omega(f_n, A) + 2\epsilon$  для  $\forall A \in \mathcal{X}$ .

Для теоремы.

# Следствия для рядов

Следствие: Если на мн-ве  $X$  конечной меры функции  $f_n$  интегрируемы и  $\sum f_n \Rightarrow f$ , то  $f$  интегрируема на  $X$  и  $\sum \int_X f_n \rightarrow \int \sum f_n = \int f$ .

Следствие: Если на промежутке  $\Delta$  функции  $f_n$  гладкие,  $\sum f_n \rightarrow f$ ,  $\sum f_n' \Rightarrow g$ , то  $f$  гладкая и  $f' = g$ .

Пример:  $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n \geq 1} n^{-n}$   
 $x^{-x} = e^{-x \ln x} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-x \ln x)^n}{n!} \Rightarrow M = \sup\{-x \ln x, x \in [0, 1]\} = \dots = \frac{1}{e}$

Ряд мажорируется  $\sum \frac{M^n}{n!}$  - сходится  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \int_0^1 x^{-x} dx = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{(-x \ln x)^n}{n!} dx = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 (x \ln x)^n dx = \dots$  по частям

Пример:  $\text{ctg } x = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n} \right)$  - как получить?

Исходим из:  $\sin x = x \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x}{\pi n}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi n}\right)$  - логарифмируем:  
 $\ln |\sin x| = \ln |x| + \sum_{n \geq 1} \ln \left|1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right| \Big| \cdot \frac{\partial}{\partial x}$  - почему можно дифф. почленно? Только если ряд сходится.

$$\text{ctg } x = \frac{1}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}$$

$$\frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2} \leq \frac{2k}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 - k^2} \sim \frac{1}{n^2} \leftarrow \text{ряд } \sum \frac{1}{n^2} \text{ - сходится.}$$

$n > k, |x| \leq k\pi$

### 14.3 Круг сходимости степенного ряда.

Самый важный тип функции ряда — степенной:

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n, \text{ проще } \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

Пример:  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} (= e^x)$  сходится на  $(-\infty, +\infty)$  — везде.

$\sum_{n \geq 0} x^n$  сходится на  $(-1, 1)$ , иначе расходится.

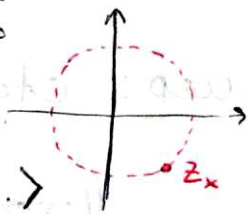
$\sum_{n \geq 0} n! x^n$  сходится только при  $x = 0$ .

Лучше брать:  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  — где  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $z, z_0 \in \mathbb{C}$ .

#### Круговая теорема Абеля

Теорема: Если ряд  $\sum a_n z^n$  сходится при  $z = z_*$ , то он сходится при  $|z| < |z_*|$  (открытый круг с центром в 0, радиуса  $|z_*|$ ).

⟨Каждый ряд сходится внутри круга.⟩



Док-во: Слагаемые ряда  $\sum a_n z_*^n$  ограничены:

$$\exists c > 0 : |a_n z_*^n| < c.$$

$$\text{Тогда } |a_n z^n| = |a_n z_*^n| \cdot \left| \left( \frac{z}{z_*} \right)^n \right| < c q^n, \text{ где } q = \left| \frac{z}{z_*} \right| < 1$$

$$\forall z : |z| < |z_*|$$

Ряд  $\sum c q^n$  сходится  $\Rightarrow$  по признаку сравнения  $\sum |a_n z^n|$  сходится.  $\square$

Определение: Радиусом сходимости ряда  $\sum a_n z^n$  называется  $R = \sup \{ |z|, \sum a_n z^n \text{ — сходится} \}$ .

Следствие: С этими определениями имеем:

- (1) при  $|z| < R$  ряд абсолютно сходится;
- (2) при  $|z| = R$  требуется дополнительное исследование;
- (3) при  $|z| > R$  ряд расходится.

Док-во:

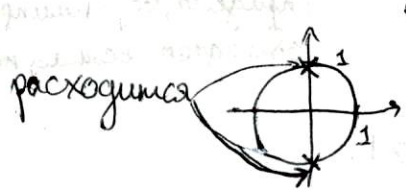
(1) Найдётся такое  $z_*$ , что  $|z| < |z_*| < R \Rightarrow$  ряд сходится по теореме в  $z$ .

(3) Если ряд сходится при  $z$  и  $|z| > R$ , то противоречие с определением  $R$  как  $\sup$ .  $\square$

Пример:  $\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  - почему сходится при  $x \in (-1, 1)$ , а дальше - расходится?

Посмотрим в комплексной  $z$ -пл-ти:

$\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \quad t = \pm i$



расходится  $\leftarrow$  внутри круга сходится.

Теорема (Вейерштрасс)

Для каждого  $r < R$  степенной ряд сходится равномерно на круге  $|z| \leq r$ . (Если  $r < R = R(\sum a_n z^n)$ , то в круге  $|z| \leq r$  ряд  $\sum a_n z^n$  сх-тся равн-но)

Док-во: В точке  $z_* = r$  ряд сходится абсолютно, а при  $|z| \leq r$  имеем:  $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$ . Сходящийся ряд

$\sum |a_n| r^n$  является мажорантой, так что равном. сходимость следует из признака Вейерштрасса.  $\square$

Но есть степенной ряд сходится равн-но на любой компакте внутри своего (открытого) круга сходимости.

Следствие (Абель): Сумма степенного ряда непрерывна внутри своего круга сходимости.

## Формулы Даламбера и Коши - Адамара

Теорема: Если  $a_n \neq 0$  и существует

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

то радиус сходимости ряда  $\sum a_n z^n$  равен  $\frac{1}{L}$ .

Док-во: Находим:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot z^{n+1}}{a_n \cdot z^n} \right| = L |z|$ .

По признаку Даламбера <sup>для  $\sum a_n z^n$</sup>  сходимости числовых рядов, при  $|z| < \frac{1}{L}$  - сходится, при  $|z| > \frac{1}{L}$  - расходится.  $\square$

Теорема: Радиус сходимости степенного ряда  $\sum a_n z^n$  равен  $\frac{1}{L}$ , где

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$$

[В отличие от просто предела, верхним пределом обладает всякая последовательность.]

Док-во: Находим:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = L \cdot |z|$ .

По признаку Коши сходимости числовых рядов, при  $|z| < \frac{1}{L}$  - сходится, при  $|z| > \frac{1}{L}$  - расходится.  $\square$

При  $L = \infty$  - нет точек  $z \neq 0$ , для которых можно установить сходимости;

$L = 0$  - нет точек, для которых можно установить расходимости.

Пример:  $\sin z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$  - просто признак Даламбера вроде не применим, но можно схитрить, взяв через один:

$$\left| \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} \right| = \frac{1}{(2n+1) \cdot 2n} \rightarrow 0 \Rightarrow R = \infty$$

Лемма: Радиус сходимости степенного ряда  $\sum a_n z^n$  сохраняется при следующих преобразованиях ряда:

- (1) умножение/деление на  $z$ ;
- (2) умножение/деление **всех** коэффициентов  $a_n$  на  $n$ .

Важно: деление не затрагивает слагаемые с  $n=0$ , хотя одно слагаемое не влияет на сходимость ряда.

Док-во: (1) Для  $\forall z_*$  ряды:  $\sum a_n z_*^n$  и  $z_* \sum a_n z_*^n$  либо оба сходятся, либо оба расходятся. Поэтому радиусы должны совпасть.

(2) Найдем радиус сходимости  $R$  ряда  $\sum n a_n z^n$ :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n a_n|} = \underbrace{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)}_1 \cdot \underbrace{\left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)}_{\frac{1}{L}} = \frac{1}{L}.$$

Радиус сходимости тот же.

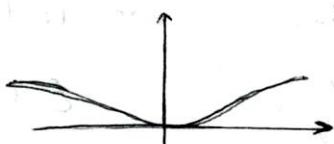
Теорема: Интегрирование и дифференцирование суммы степенного ряда выполняются почленно и это сохраняет круг сходимости.

Док-во: Если  $f(z) = \sum a_n z^n \Rightarrow f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$  — из леммы совершили умножение на  $n$  и деление на  $z$ .

$F(z) = F(0) + \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$  — из леммы совершили деление на  $n+1$  и умножение на  $z$ .

Следствие: Сумма степенного ряда внутри круга сходимости является бесконечно малой функцией (акаппитическая ф-ия).

Пример (коши): Не всякая ф-ия раскладывается в сумму степенного ряда.



$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$



Следствие (ряд Тейлора):

Если  $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$  в круге сходимости, то  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ .

Док-во: Дифф-ем и раз: ушли  $a_k < n$ .

Подставим  $z = z_0$ : ушли  $a_k > n$ . □

Поведение на границе круга

Примеры:  $\sum z^n$  расходится при  $|z| = 1$ ;

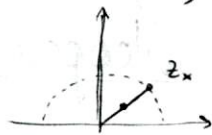
$\sum \frac{z^n}{n}$  расходится при  $z = 1$ , уст. сх-тся при  $z = -1$ ;

$\sum \frac{z^n}{n^2}$  сходится при  $|z| = 1$ , ибо  $\sum n^{-2}$ .

Дифференцирование может ухудшить сходимость на границе,  
интегрирование может улучшить сходимость на границе.

Теорема (Радиальная т-ма Абеля):

Если степенной ряд  $\sum c_n z^n$  сходится при  $z = z_*$ , то его сумма непрерывна на отрезке от 0 до  $z_*$ .



Док-во (1<sup>е</sup>): По критерию Коши для числового ряда:

$$b_n = c_n \cdot z_*^n$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$\psi(t) = \sum_{t \in [0,1]} b_n t^n$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \left| \sum_{k=N}^m b_k \right| = S_{n,m}(1) < \epsilon$$

лемма Абеля

$$S_{n,m}(t) = \left| \sum_{k=N}^m b_k t^k \right| < \epsilon$$

Вроде  $t \leq 1$ , поэтому сумма уменьшается. Но если условие на  $b_k$ . □

$\psi(1)$  - сх-ся по условию

Док-во (2<sup>е</sup>): Выбором  $b_n$  добиваемся  $B_n \rightarrow 0$ , т.е.  $\psi(1) = 0$  и

каждо  $\psi(1-0) = 0$ .

$\psi(t) = (1-t) \sum B_n t^n$  - ключевая формула!

Как он получается:

$$\frac{1}{1-t} \sum b_n t^n = \sum B_n t^n$$

	$b_0$	$b_1$	$b_2$	...
1	$b_0$	$b_1$	$b_2$	
1	$b_0$	$b_1$		
1	$b_0$			
...				

$$|\psi(t)| \leq (1-t) \sum |B_n| t^n$$

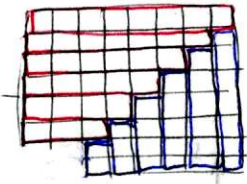
$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : n \geq N \Rightarrow |B_n| < \epsilon$$

$t \rightarrow 1-0$ :  $\sum_{n < N} + \sum_{n \geq N}$   
 ибо  $1-t \rightarrow 0$   $\downarrow$   $0$

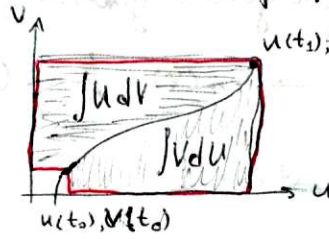
ибо  $(1-t) \sum_{n \geq N} |B_n| t^n < (1-t) \sum_{n \geq N} \epsilon t^n$   
 $\epsilon (1-t) t^n \sum \dots$  □

# 14.4 Суммирование по частям

Суть приёма:



Аналог с интегрированием по частям:



$$\int_{t=t_0}^{t=t_1} u dv = [uv]_{t=t_0}^{t=t_1} - \int_{t=t_0}^{t=t_1} v du$$

Формальность: Две оси-ми:  $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ ,  $\{B_0, B_1, \dots, B_n\}$

$$\Delta A_k = A_k - A_{k-1} = a_k \Rightarrow A_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k \text{ и } A_k - A_0 = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

$$A_1 B_1 - A_0 B_0 = A_1 (B_1 - B_0) + (A_1 - A_0) B_0$$

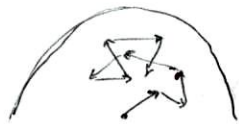
$$A_m B_m - A_n B_n = \sum_{n < k < m} A_k \Delta B_k + \sum_{n < k < m} \Delta A_k \cdot B_{k-1} \text{ — преобразование Абеля.}$$

Лемма: Даны два набора:

1.  $a_n, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  и  $a_n \geq \dots \geq a_m \geq 0$

2.  $b_n, \dots, b_m \in \mathbb{C}$

Тогда:  $|a_n b_n + \dots + a_m b_m| \leq a_n \max_{n < k < m} |b_n + \dots + b_k|$



ломанная  $B_k$  не покидает окр-ть радиуса  $M$  с центром в  $0$ .

Док-во:  $S = a_n b_n + \dots + a_m b_m = a_n (B_n - B_{n-1}) + \dots + a_m (B_m - B_{m-1}) =$

$$= (a_n - a_{n+1}) B_n + \dots + (a_m - a_{m+1}) B_m =$$

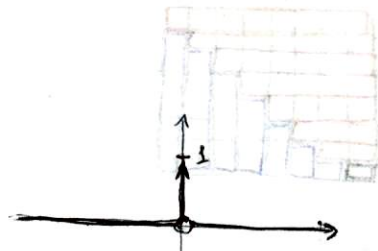
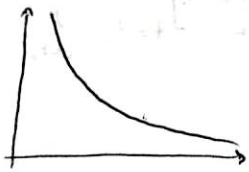
$$\Rightarrow |S| \leq \sum_{n < k < m} |a_k - a_{k+1}| \cdot |B_k| \leq \sum_{n < k < m} (a_k - a_{k+1}) \cdot M = M(a_n - a_{m+1})$$

# 14.5. Дельта - функция.

## Выведение дельта - функции

$$f_\varepsilon(x) = e^{-x/\varepsilon} \rightarrow f_n(x) = \frac{1}{n} f\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 1$$



$$\varepsilon \rightarrow 0: f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\text{почти}} \delta(x)$$

$$\text{Исходно: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Характеризующие свойства

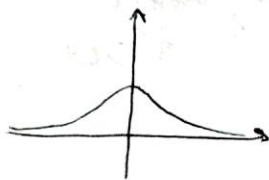
$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Противоречивые свойства, то есть такой  $\delta(x)$  нет.

Уже из теории обобщенных функций (Шварц, Соболев).

Примеры  $\delta$ -образных последовательностей.

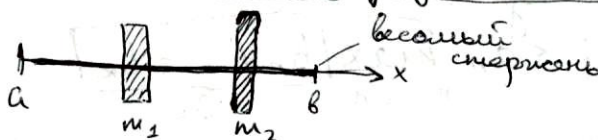
$$\frac{1}{1+x^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} = \pi \right) \rightarrow \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\pi} \Rightarrow f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$$



$$e^{-x^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} = \sqrt{\pi} \right) \Rightarrow f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$

## Почечные заряды, массы, импульсы

Пример:



$$\sigma(x) = \underbrace{\sigma_0(x)}_{\text{плотность стержня}} + \sum_k m_k \cdot \delta(x-x_k) \Rightarrow M = \int_a^b \sigma(x) dx.$$

$\delta$ -функции будут давать массы  $m_k$  в точках  $x_k$ .

Пример (эл. заряд):  $\vec{E}(\vec{r}) = -kq \cdot r^{-3} \vec{r}$

$\text{div } \vec{E} = 0$  вне начала

$$\Phi(\vec{E}, \Sigma) = \underbrace{4\pi}_{\text{телесный угол}} \cdot kq = \iiint \text{div } \vec{E} \cdot dV \Rightarrow \text{div } \vec{E} \sim \delta(\vec{r})$$

Пример:



Конечный импульс шарика задан за короткое время (удар)  $\Rightarrow F(t) \sim \delta(t-t_0)$ .

время удара

Зельдович: „Какие ф-ии кинематические?”

# Функциональные свойства

(40)

1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$  - для хорошей  $f$  (непрерывной):  $|f(x) - f(0)| < \lambda$  около  $0$   
используя кар. д.в.б.  $\Rightarrow \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(x) f(x) dx = f(0)$

2) Максимум:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t) f(x) dx = f(t)$ .

3) Дискретная аналогия: символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \Rightarrow \sum_j \delta_{ij} \cdot a_j = a_i$$

4)  $\delta(cx) = \frac{\delta(x)}{|c|}$  - видно из интегралов.

## Производные функций (с скачками)

$$\int_{-\infty}^x \delta(t) dt = \Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{Ф-ия Хэвисайда}$$

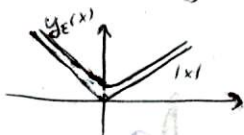


$$\Rightarrow \text{Тогда } \Theta'(x) = \delta(x).$$

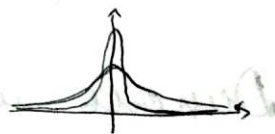
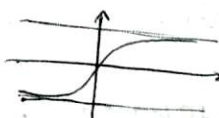
1)  $\text{sgn } x = \Theta(x) - \Theta(-x) \Rightarrow (\text{sgn } x)' = 2\delta(x)$

2)  $|x|' = \text{sgn } x$

$|x|'' = 2\delta(x)$



$$y_\epsilon(x) = \sqrt{x^2 + \epsilon^2}, \quad \epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow |x|$$
$$y'_\epsilon(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \epsilon^2}}, \quad y''_\epsilon(x) = \epsilon^2 (x^2 + \epsilon^2)^{-3/2}$$



## Дифференциальные уравнения

$\ddot{y} + y = \delta(t)$  - колебание с единичным ударом

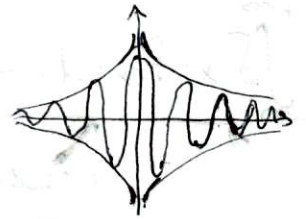
Допустим  $\forall f(t)$  можно сразу записать решение:

$$\ddot{y} + y = f(t)$$

в виде:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x) g(x) dx = (f * g)(t)$

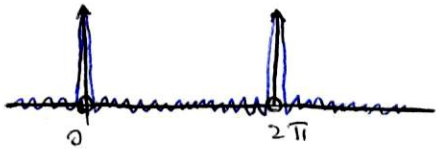
## Еще примеры зарождения

Из волнового уравнения:  $\rho_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin nx}{nx}$   
 $x \rightarrow 0 \rightarrow 1$



Дискретный вариант:

$$\rho_n(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{-n \leq k \leq n} \cos kx \quad - \text{Ядро Дирихле}$$



Предельная ср-ная =  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n\pi)$  - Гребенка Дирака

Если  $f(x)$  не гладкая, а хотим приблизить ее гладкой.  
 Берём  $\delta$ -образную  $\rho_\epsilon(x)$  и  $f_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\epsilon(x-t) f(t) dt$

приближается к  $f(x)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Примеры:  $\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} (1-x^2)^n$



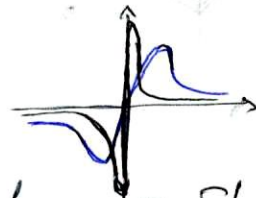
$\rho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} (\cos(\frac{\pi}{2}x))^n$



## Производная $\delta'(x)$

Возьмём  $\frac{1}{1+x^2}$  - просто по хронологии.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$



Диполь моделируется производной  $\delta'(x)$ :

$$\frac{\delta(x+a) - \delta(x-a)}{2a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \delta'(x)$$

## 14.6 Приближение ф-ий полиномами

(41)

Теорема (Вейерштрасса):

Всякая непрерывная функция на отрезке (компакт) есть предел равномерно с-ся поли-ми полиномов.

Док-во: отрезок  $[a, b]$  превращаем в  $[0, 1]$ . Нам надо построить полином  $p_n(x)$  такой, что:

$$\forall \epsilon > 0 \exists p_n(x) : |p_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Выберем  $p_n(t) = \int_0^1 f(x) \underbrace{p_n(x-t)}_{\text{полином от } t} dx$

$$p_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot (1-x)^n$$

Полиномы Бернштейна на  $[0, 1]$ :

$$b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

$$\int_0^1 b_{n,k} dx = \frac{1}{n+1} \quad \cdot \quad \sum_{0 \leq k \leq n} b_{n,k}(x) = (x + (1-x))^n = 1.$$

$$f_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} b_{n,k}(x) \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

## 14.7 Ортогональные ряды.

Ортогональные системы

$f, g$ -функции:  $X - \mathbb{C}$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_x \overline{f(x)} \cdot g(x) dx$

скалярное пр-ие на пр-ве функций

Определение: Ортогональная система = набор (семейство?)  $\{\varphi_n\}$  таких, что  $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0$  при  $n \neq m$ .

Ортонорм. система:  $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \|\varphi_n\|^2 = 1$ .

Пример:

?

## Разложение функций

$\{\varphi_n\}$  - есть! ;  $f(x) = \sum c_n \cdot \varphi_n(x)$ ,  $c_n = ?$

$$\langle \varphi_n, f \rangle \stackrel{?}{=} \sum c_m \cdot \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \stackrel{?}{=} c_n \|\varphi_n\|^2 \Rightarrow \text{находим } c_n.$$

можно ли менять  
суммирование и интегриро-  
вание

остальные = 0

Для тригоном. системы  $\{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$  это ряд Фурье,

$c_n$  = коэфф-ты Фурье-Фурье.

Пример:  $f(x) = x$ ,  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx = 0$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin nx \, dx = \dots = -\frac{2}{\pi} \cos \pi n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow x = 2 \cdot \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

## Решение дифф. ур-ий

Как решить:  $\ddot{y} + y = f(t)$  - ?

Можем решить  $\ddot{y} + y = 0$  и  $\ddot{y} + y = \sin nt$ . А если  $f(t)$  - сложное?

$f(t) = \sum c_n \cdot \varphi_n(t) \Rightarrow$  тогда для  $\ddot{y} + y = f(t)$  решение  $\sum c_n g_n(t) \rightarrow$   
 $\rightarrow$  метод Фурье.

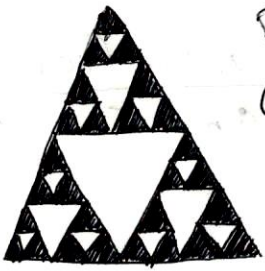
## Равенство Парсеваля

$\{\varphi_n\}$  - ортонорм.,  $\langle f, f \rangle \stackrel{?}{=} \sum_{n,m} \bar{c}_n \cdot c_m \cdot \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \stackrel{?}{=} \sum_n \bar{c}_n \cdot c_n \cdot \|\varphi_n\|^2 = \sum_n |c_n|^2 \cdot \|\varphi_n\|^2$   
после сокращения  
нулевых

Пример:  $\sum \frac{1}{n^2} = ?$

Дзета-функция Римана:  $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$

Треугольные образы



Треугольник  
Серпинского  
Воспроизведение - итерация,  
результат - самоподобие.

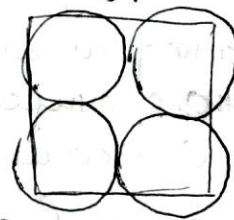
Фрактальная размерность

$N(\tau)$  - число кругов радиуса  $\tau$ ,  
для покрытия фигуры.

для квадрата  $N(\tau) \propto \tau^{-2} \Rightarrow$  размерность:  $-\frac{\ln N(\tau)}{\ln \tau} = 2$

некая эквивалентность

Квадрат



размерность квадрата ?

Фр-ая размерность тр-ка Серпинского =  $\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,58$

Нигде не дифференцируемая ф-ия

Риман:  $\sum n^{-2} \cdot \sin(n^2 x)$   
сумма - непр. ф-ия

Вейерштрасс:  $\sum 2^{-n} \cdot \cos(2^n x)$

Таксис: вместо  $\cos x$  берем  $z(x)$ :

$$z(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ z(x \pm 1) & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 1 \end{cases}$$

Иудит Таксис:

$$\sum 2^{-n} z(2^n x)$$

Теорема: Функция "иудит" Таксис не диф-ма ни в одной точке.

Дек-во:  $c \in [0, 1]$ ,  $[a_n, b_n] \ni c$  - шлем противоречие с её дифф-тью.  
послед-ть вложенных отрезков, содержащих  $c$ .  
в произвольной точке  $c$ .

$$[a_0, b_0] = [0, 1]$$

$$[a_n, b_n] = \left[ \frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n} \right] - \text{потому что из-за деления пополам каждый отрезок вкоре на 2 предидущий}$$

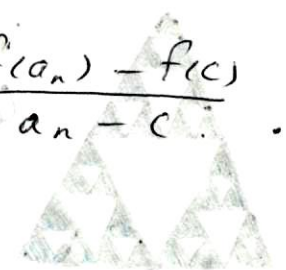
для некоторой целочисленной посл-ти  $\{k_n\}$ .

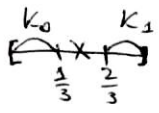


Введём угол наклона  $\tau_n = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ : ряды, определяющие  $f(b_n)$  и  $f(a_n)$  в таких точках конечны и на каждом шаге к ним прибавляется одно слагаемое. Поэтому попарно  $\{\tau_n\}$  "соседни" между  $\pm 1 \Rightarrow$  не  $\alpha$ -хотя  $a_n \rightarrow c$  и  $b_n \rightarrow c$ .

Корректней:  $\tau_n = \frac{b_n - c}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} + \frac{a_n - c}{a_n - b_n} \cdot \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c}$ .

### Канторово множество и дробь



$C_0 = [0, 1]$ :  - делим на 3 и выкидываем среднего отрезка, получаем последовательность:  $C_1 = K_0 \cup K_1$

На каждом шаге у нас остаются отрезки, то есть  $C$  - компакт.  
 $C_2 = K_{00} \cup K_{01} \cup K_{10} \cup K_{11}$   
 $\vdots$   
 $C_n$

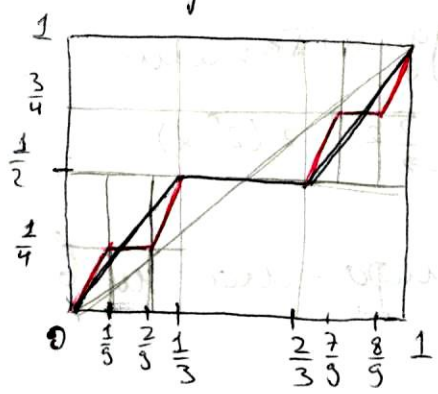
$\bigcap C_n$  - пересечение всех отрезков.

Сумма длин выбранных отрезков:  $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1$ .

Но! количество оставшихся точек - Канторово мн-во - несчётное, пренебрежимое (меры 0), компактное.

можно покрыть сколь угодно малыми отрезками

### Канторова лестница:



$f_n \Rightarrow$  непр. функция, почти всюду постоянна  $\Rightarrow$  почти всюду  $f' = 0$ .

в точках Канторова мн-ва  $f' = \infty$  (на  $C$ ).  
 Тогда:  $\int_0^1 f'(x) dx = 0 \neq f(1) - f(0)$

не применима ф-ла Н.-Л., хотя все условия есть.  
 Где противоречие?