Вопросы к экзамену по “Основам функционального анализа”
Физический факультет НГУ, январская сессия 2015 года

1. Ряды Фурье.

1.1. Задача о разложении 2π-периодической функции в ряд Фурье.

1.2. Разложение функции с произвольным периодом в ряд Фурье.

1.3. Разложение на интервале.

1.4. Разложения только по синусам или только по косинусам.

1.5. Комплексная форма ряда Фурье.

1.6. Лемма Римана — Лебега.

1.7. Ядра Дирихле.

1.8. Теорема о представимости функции в точке своим рядом Фурье.

1.9. Разложение функции $f(x) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign} x$, $x \in (-\pi, \pi)$ в ряд Фурье и применение получившегося ряда Фурье к суммированию числового ряда.

1.10. Теоремы о дифференцировании и интегрировании рядов Фурье.

1.11. Задача о наилучшем приближении, теорема о наилучшем приближении и неравенство Бесселя для тригонометрических рядов.

1.12. Равномерная сходимость рядов Фурье.

1.13. Явление Гиббса: определение и рассмотрение его для функции $f(x) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign} x$, $x \in (-\pi, \pi)$.

1.14. Теорема о гладкости функции и скорости сходимости её ряда Фурье.

1.15. Равенство Ляпунова, обобщённое равенство Ляпунова и равенство Ляпунова в комплексной форме.

1.16. Суммирование рядов Фурье методом Чезаро–Фейера.

1.17. Применение рядов Фурье к нахождению функции, гармонической в круге, по её значениям на границе.

1.18. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции тригонометрическими (с доказательством) и алгебраическими (схема доказательства) многочленами.

2. Преобразование Фурье.

2.1. Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье.

2.2. Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье.

2.3. Представление функции интегралом Фурье на полупрямой. Прямое и обратное синус- и косинус-преобразования Фурье.

2.4. Вычисление синус- и косинус-преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-ax}$, $x > 0$, $a > 0$. Представление функции $f(x) = e^{-ax}$ её интегралом Фурье и вычисление интегралов Лапласа.

2.5. Комплексная форма интеграла Фурье. Прямое и обратное преобразование Фурье. Формула обращения.

2.6. Вычисление прямого и обратного преобразования Фурье от функции e^{-ax^2}, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

2.7. Быстро убывающие функции: определение, примеры и основные свойства.

2.8. Преобразование Фурье быстро убывающих функций: определение и основные свойства.

2.9. Равенство Парсеваля.

2.10. Свёртка быстро убывающих функций: определение и свойства.

2.11. Формула Пуассона.

2.12. Теорема Котельникова — Шеннона и её применение в теории цифровой передачи информации.

2.13. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности.

3. Преобразование Лапласа.

3.1. Оригиналы и изображения. Связь с преобразованием Фурье.

3.2. Простейшие свойства: линейность, подобие, смещение изображения и запаздывание оригинала.

3.3. Аналитичность изображения и формула обращения.

3.4. Преобразование Лапласа производных и интегралов.

3.5. Дифференцирование и интегрирование изображений.

3.6. Свертка оригиналов и теорема Бореля.

3.7. Применение преобразования Лапласа для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений, содержащих свертки (на примере RC-контура).

4. Обобщенные функции.

4.1. Пространства основных и обобщённых функций. Примеры обобщённых функций: регулярные обобщённые функции, δ-функция, $P\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x \pm i0}$. Формулы Сохоцкого.

4.2. Сходимость обобщённых функций: наводящие соображения и определение. Дельта-образные последовательности. Теорема о пределе дельта-образных последовательностей. Плотность тела, вся масса которого сосредоточена в одной точке.

4.3. Линейная замена переменной в обобщённой функции: наводящие соображения, определение, вычисление выражений $\delta(-x)$ и $\delta(x - x_0)$.

4.4. Нелинейная замена переменной в одномерной дельта-функции: определение и теорема (доказательство только для случая единственного нуля).

4.5. Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые: наводящие соображения, определение, вычисление выражений $a(x)\delta(x)$ и $xP\frac{1}{x}$. Невозможность умножения произвольных обобщённых функций.

4.6. Дифференцирование обобщённых функций: наводящие соображения, определение, примеры. Теорема о связи классической и обобщённой производных для кусочно-гладкой функции. Плотность заряда электрического диполя.

4.7. Свёртка обобщённых функций: наводящие соображения, определение, свойства, примеры вычисления. Теорема о фундаментальном решении линейного обыкновенного дифференциального оператора.

4.8. Вычисление фундаментального решения трёхмерного оператора Лапласа.

4.9. Пространство Соболева. Формулировка простейшего варианта теоремы вложения Соболева.

4.10. Пространство обобщённых функций медленного роста. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста: наводящие соображения, определение, свойства, примеры вычисления.

5. Геометрия пространств со скалярным произведением.

5.1. Линейные пространства: определение, линейная зависимость векторов, размерность пространства, подпространство. Примеры линейных пространств и подпространств.

5.2. Нормированные линейные пространства: определение нормы, открытые и замкнутые множества, сходимость последовательности, замыкание множества, фундаментальная последовательность, полнота и сепарабельность пространства. Пример незамкнутого подпространства.

5.3. Лебеговские функциональные пространства $L_p(G)$: определение и интегральные неравенства Гёльдера и Минковского. Полнота и сепарабельность лебеговских пространств, плотность множества гладких функций в них.

5.4. Линейные пространства со скалярным произведением (евклидовы и унитарные): определение и примеры. Неравенство Коши — Буняковского в пространстве со скалярным произведением. Норма, порождённая скалярным произведением.

5.5. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма. Гильбертово пространство. Угол между векторами. Ортогональность векторов.

5.6. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта.

5.7. Ортогональное проектирование. Задача о наилучшем приближении — проектирование на конечномерные подпространства. Ортогональное дополнение.

5.8. Гильбертов базис. Теорема о существовании гильбертова базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве (схема доказательства). Ряд Фурье элемента гильбертова пространства. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Замкнутость ортонормированной системы.

5.9. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тригонометрическая система функций как пример полной ортогональной системы.

5.10. Изоморфизм гильбертовых пространств. Теорема Рисса — Фишера и теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств

Вопросы составил к.ф.-м.н.,
доцент И. В. Подвигин
12 января 2015 года