Вопросы к экзамену по “Основам функционального анализа”
Лектор – И. В. Подвигин
Физический факультет НГУ, июньская сессия 2017 года

5. Пространства со скалярным произведением: продолжение.

5.1. Ортогональное проектирование. Ортогональное дополнение. Теорема о связи ортогональной проекции и ближайшего вектора.

5.2. Гильбертов базис. Ряд Фурье элемента гильбертова пространства. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Замкнутость и полнота ортонормированной системы.

5.3. Критерий полноты ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тригонометрическая система функций как пример полной ортонормированной системы.

5.4. Изоморфизм гильбертовых пространств. Теорема Рисса — Фишера и теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств

6. Ортогональные многочлены.

6.1. Ортогональные многочлены как результат ортогонализации последовательности мономов. Элементарные свойства ортогональных многочленов (среди которых однозначность определения весовой функцией и трехчленная рекуррентная формула).

6.2. Свойства нулей ортогональных многочленов.

6.3. Классические ортогональные многочлены (вес и промежуток ортогональности). Способы стандартизации. Определение производящей функции. Уравнение Пирсона. Дополнительные свойства классических ортогональных многочленов (без доказательства).

6.4. Многочлены Лежандра: производящая функция и рекуррентные соотношения.

6.5. Многочлены Лежандра: дифференциальное уравнение и соотношения ортогональности.

6.6. Многочлены Лежандра: формула Родрига и теорема о разложении функций в ряды по многочленам Лежандра (без доказательства).

6.7. Мультипольное разложение кулонова потенциала.

6.8. Применение многочленов Лежандра при решении уравнения Лапласа в шаре при заданных симметричных условиях на границе шара.

6.9. Поле точечного заряда, помещённого внутри полой проводящей сферы.

7. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

7.1. Линейные операторы: определение и примеры.

7.2. Непрерывные и ограниченные операторы. Теорема о связи этих понятий.

7.3. Норма оператора: определение и теорема о свойствах нормы оператора. Пример оценивания нормы конечномерного оператора.

7.4. Сходимость операторов: определение и свойства предела (сильного и равномерного) последовательности операторов. Теорема о полноте пространства ограниченных операторов.

7.5. Обратимый оператор. Обратный оператор: определение и свойства. Теорема Банаха об обратном операторе (формулировка).

7.6. Операторный ряд: определение и свойства. Теорема Неймана.

7.7. Спектр оператора. Резольвента. Теорема о компактности спектра ограниченного оператора.

7.8. Линейные функционалы. Ядро функционала: свойства. Бра и кет векторы.

7.9. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

7.10. Оператор, сопряжённый ограниченному: определение, примеры, простейшие свойства.

7.11. Применение сопряжённого оператора при нахождении спектра.

7.12. Ограниченные самосопряжённые операторы: теоремы о спектре, норме и инвариантном подпространстве.

7.13. Компактные операторы: определения и простейшие свойства. Теорема о равномерном пределе компактных операторов. Теорема об эквивалентном определении компактного оператора как предела операторов конечного ранга (формулировка).

7.14. Компактные операторы: теорема о спектре компактного оператора (без доказательства). Компактные самосопряжённые операторы: теорема о не пустоте точечного спектра и теорема Гильберта — Шмидта о спектральном разложении.

7.15. Приближённый способ отыскания простых изолированных собственных значений возмущённого самосопряженного оператора.

8. Неограниченные операторы

8.1. Неограниченные линейные операторы: определение и примеры.

8.2 Расширение оператора. Симметричность, замкнутость, самосопряженность. Критерий самосопряженности. Примеры операторов импульса и координаты.

9. Интегральные уравнения

9.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и примеры задач, к ним приводящих.

9.2. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта: определение и свойства (оценка нормы, компактность, вид сопряженного оператора).

9.3. Решение уравнений Фредгольма 2 рода с вырожденным ядром.

9.4. Альтернатива Фредгольма.

9.5. Уравнения с малым параметром. Повторные ядра и резольвентное ядро.

9.6. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра.

9.7. Теорема о разложении повторных ядер интегрального оператора по его собственным функциям. Теорема Мерсера (без доказательства).

Вопросы составил к.ф.-м.н.,
доцент И. В. Подвигин
18 мая 2017 года