В. В. Иванов

Задачи и упражнения для семинаров и домашних заданий по курсу «Математический анализ»

4. Интегрирование функций одной переменной

Как вы уже знаете, если функция $f(x)$ определена и непрерывна в каждой точке отрезка $a \le x \le b$, ее интегральные суммы — при неограниченных измельчениях разбиения отрезка — стремятся к определенному конечному пределу, который называют интегралом этой функции «от a до b» и обозначают символом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, если нам нужно проинтегрировать конкретную непрерывную функцию в заданных пределах, и мы намерены выполнить это, непосредственно опираясь на определение интеграла, мы вовсе не обязаны рассматривать все интегральные суммы, какие только можно построить. Нам достаточно будет посчитать предел какой-нибудь одной, удобной для нас, последовательности интегральных сумм, следя лишь за тем, чтобы максимальные длины отрезков, участвующих в построении этих сумм, стремились к нулю.

4.1. Вычислите следующие интегралы, представляя их как пределы последовательностей подходящих интегральных сумм, построенных по разбиениям промежутка интегрирования на равные части:

$$\text{(а)} \int\limits_a^b x\,dx; \quad \text{(б)} \int\limits_a^b x^2\,dx; \quad \text{(в)} \int\limits_a^b e^x\,dx.$$

4.2. Поступая, как в предыдущих примерах, посчитайте еще два интеграла:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx; \qquad \text{(б)} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx.$$

Привлекая на помощь комплексную экспоненту, вы существенно облегчите себе работу. В результате вы узнаете, какая площадь заключена под одной аркой синусоиды. Дайте геометрическое объяснение равенству изученных вами интегралов.

4.3. В предыдущих примерах удобно было выбрать равноотстоящие узлы x_i разбиения области интегрирования, а в качестве промежуточных точек взять левые или правые концы отрезков $[x_i, x_{i+1}]$.

Однако далеко не всегда такой выбор интегральных сумм оптимален. Убедитесь в этом, попытавшись тем же способом посчитать сдедующие два интеграла:

$$\text{(а)} \int\limits_a^b \frac{dx}{x}; \qquad \text{(б)} \int\limits_a^b \frac{dx}{x^2},$$

где $b > a > 0$. Так и хочется спросить: «Ну и как? Получилось?» А теперь попробуйте для первого из этих примеров построить интегральные суммы, выбрав для них точки деления так, чтобы их координаты x_i составили геометрическую прогрессию. В качестве промежуточных точек стоит взять, скажем, правые концы соответствующих отрезков. Во втором примере можно, напротив, выбрать произвольные узлы разбиения, но в качестве «представителя» отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ целесообразно взять точку $\sqrt{x_i\, x_{i+1}}$. Руководствуясь этими советами, посчитайте предложенные вам интегралы.

В следующих трех задачах, отражающих основные свойства определенного интеграла, для простоты мы будем считать, что речь идет о непрерывных функциях. Таким образом, все указанные в этих задачах интегралы заведомо существуют, и вам остается только установить нужные соотношения между ними.

4.4. Линейность интеграла. Пусть $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ всюду на отрезке $a \le x \le b$, причем коэффициенты c_1 и c_2 постоянны. Докажите, что тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = c_1 \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

4.5. Аддитивность интеграла. Пусть $a < c < b$. Докажите, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

4.6. Монотонность интеграла. Пусть $f(x) \le g(x)$ для всех точек x из отрезка $a \le x \le b$. Докажите, что в таком случае

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

4.7. Опираясь на только что доказанные теоремы, сведите следующие два интеграла к уже известным и посчитайте их:

$$\text{(а)} \int\limits_{-1}^{1} (|1+2x| - |1-2x|)\, dx; \quad \text{(б)} \int\limits_{-1}^{1} ||1+2x| - |1-2x||\, dx.$$

Нарисуйте графики подынтегральных функций.

4.8. Не вычисляя указанных ниже интегралов, выясните какой из них больше:

(а) $\int\limits_0^1 e^{-x}\, dx$ или $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx$;

(б) $\int\limits_0^\pi e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$ или $\int\limits_\pi^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$;

(в) $\int\limits_0^\pi \sin x\, dx$ или $\int\limits_0^{3\pi/2} \sin x\, dx$.

4.9. Определите знаки следующих интегралов:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{2\pi} x \sin x\, dx; \quad \text{(б)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx; \quad \text{(в)} \int\limits_{-2}^{2} x^3 e^x\, dx.$$

Ответы: **4.1.** (а) $(b^2 - a^2)/2$; (б) $(b^3 - a^3)/3$; (в) $e^b - e^a$. **4.2.** (а) 2; (б) 2. **4.3.** (а) $\ln b - \ln a$; (б) $1/a - 1/b$. **4.7.** (а) 0; (б) 3. **4.8.** (а) второй; (б) первый; (в) первый. **4.9.** (а) минус; (б) плюс; (в) плюс.

Формула Ньютона — Лейбница

Примеры непосредственного вычисления интегралов, рассмотренные в предыдущем разделе, производят двоякое впечатление. С одной стороны, вызывает восхищение догадливость тех, кто предложил привлечь геометрическую прогрессию для разделения отрезка интегрирования или взять в качестве промежуточных точек средние геометрические соседних узлов. С другой же стороны, возникает резонный и тревожный вопрос — если даже в таких простых случаях требуются столь хитроумные находки, то на что же можно надеяться в более сложных задачах?

Разумеется, никто так не считает интегралы. Разве что компьютер, которому ничего не стоит, не мудрствуя лукаво, перелопатить груду

чисел. Он легко и мгновенно проинтегрирует «от» и «до» всякую явно заданную ему функцию, причем с любой точностью, какая только может потребоваться на практике. Но если он способен порой дать абсолютно точный ответ, то лишь потому, что его научили применять одну из самых великих теорем математического анализа, связывающую воедино две его важнейшие ветви — дифференциальное и интегральное исчисления. Содержание этой теоремы выражает знаменитая формула Ньютона — Лейбница: интеграл функции равен приращению ее первообразной. Точнее, если функция $f(x)$, интегрируемая на отрезке $a \le x \le b$, имеет на нем первообразную $F(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a).$$

4.10. Пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, заново пересчитайте все интегралы, указанные в задачах 4.1 — 4.3. Если раньше вы действительно посчитали эти интегралы «прямым способом», то теперь охотно согласитесь, что на фоне прежних мук новый метод воспринимается не иначе как избавление.

4.11. Посчитайте еще несколько простых интегралов и нарисуйте выражаемые ими «криволинейные площади»:

$$\text{(а)} \int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}; \quad \text{(б)} \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{(в)} \int\limits_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4.12. Вычислите три симпатичных интеграла, содержащих числовые параметры:

$$\text{(а)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < \pi;$$

$$\text{(б)} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon\cos x}, \quad \text{где} \quad 0 \le \varepsilon < 1;$$

$$\text{(в)} \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}, \quad \text{где} \quad ab \ne 0.$$

4.13. С помощью определенных интегралов найдите пределы следующих сумм, угадав в них интегральные суммы Римана подходящих функций:

$$\text{(а)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)/n^4;$$

$$\text{(б)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right);$$

$$\text{(в)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

Ответы: **4.10.** Прежние. **4.11.** (а) $\pi/6$; (б) $\pi/3$; (в) 1. **4.12.** (а) $\pi/2\sin\alpha$; (б) $2\pi/\sqrt{1-\varepsilon^2}$; (в) $\pi/2|ab|$. **4.13.** (а) $1/4$; (б) $\ln 2$; (в) $\pi/4$.

Переменные пределы интегрирования

4.14. Пусть функции $a(x)$ и $b(x)$ определены и дифференцируемы в каждой точке x промежутка Δ. Рассмотрим еще непрерывную функцию f, чья область определения тоже представляет собой промежуток и, кроме того, заключает в себе области значений предыдущих двух функций. Наконец, для каждого $x\in\Delta$ посчитаем интеграл

$$I(x)=\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt.$$

Применяя формулу Ньютона — Лейбница, докажите, что построенная нами функция $I(x)$ дифференцируема в каждой точке $x\in\Delta$ и ее производная равна $I'(x)=b'(x)\,f(b(x))-a'(x)\,f(a(x))$.

4.15. Найдите значения выражений:

$$\text{(а)}\ \frac{d}{da}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx;\quad \text{(б)}\ \frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx;\quad \text{(в)}\ \frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx.$$

4.16. Как вы уже знаете, интегралы Френеля

$$C(x)=\int\limits_0^x \cos t^2\,dt\quad \text{и}\quad S(x)=\int\limits_0^x \sin t^2\,dt$$

не вычисляются «в конечном виде», представляя собой неэлементарные функции. Вычислите пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{C(x)}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x^3},$$

и вы узнаете асимптотику этих важных функций в нуле.

4.17. Полагая, что $x \to +\infty$, докажите асимптотические формулы

$$\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^x e^{t^3}\,dt \sim \frac{e^{x^3}}{3x^2}.$$

Обобщите эти результаты, заменяя частные показатели 2 и 3 произвольным натуральным числом n.

4.18. Сравните асимптотику при $x \to +0$ следующих интегралов:

$$\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt.$$

4.19. Пусть $\varphi(x)$ означает взвешенное среднее координаты точки t, пробегающей отрезок $0 \le t \le x$, причем роль веса выполняет непрерывная положительная функция. Докажите, что функция $\varphi(x)$ строго возрастает при $x > 0$.

Ответы: **4.15.** (а) $-\sin a^2$; (б) $\sin b^2$; (в) 0. **4.16.** $C(x) \sim x; S(x) \sim x^3/3$. **4.17.** e^{x^n}/nx^{n-1}. **4.18.** Интегралы эквивалентны.

Замена переменной

4.20. Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $\alpha \le t \le \beta$ и отображает его на отрезок, в каждой точке x которого определена и непрерывна функция $f(x)$. Полагая $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, докажите, опираясь на формулу Ньютона — Лейбница, что в таком случае справедливо следующее равенство, которое называют формулой замены переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

4.21. Применяя подходящую замену переменной, посчитайте определенные интегралы:

$$\text{(а)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}\,dx; \qquad \text{(в)} \int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx;$$

$$\text{(б)} \int\limits_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx; \qquad \text{(г)} \int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x\,(1-x)}}\,dx.$$

4.22. Пусть функция $f\,(x)$ непрерывна на отрезке $a \le x \le b$. Докажите равенство

$$\int\limits_{a}^{b} f\,(x)\,dx = (b-a)\int\limits_{0}^{1} f\,(a+(b-a)\,x)\,dx.$$

4.23. Пусть функция $f\,(x)$ непрерывна на отрезке $0 \le x \le a$, где $a > 0$. Докажите равенство

$$\int\limits_{0}^{a} x^3\,f\,(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{a^2} x\,f\,(x)\,dx.$$

4.24. Пусть функция $f\,(x)$ непрерывна на отрезке $0 \le x \le 1$. Докажите равенство

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} f\,(\sin x)\,dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} f\,(\cos x)\,dx.$$

Опираясь на это наблюдение, вычислите следующие два интеграла, рассмотрев их сумму:

$$\text{(а)} \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx \qquad \text{(б)} \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx.$$

4.25. Пусть функция $f\,(x)$ снова непрерывна на отрезке $0 \le x \le 1$. Докажите равенство

$$\int\limits_{0}^{\pi} x\,f\,(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi} f\,(\sin x)\,dx.$$

Опираясь на это замечательное соотношение, посчитайте следующие два интеграла:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{\pi} \frac{x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx; \quad \text{(б)} \int\limits_0^{\pi} \frac{x\,\sin x\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

4.26. Пусть функция f непрерывна и имеет период T. Докажите, что в таком случае

$$\int\limits_a^{a+T} f\,(x)\,dx = \int\limits_0^{T} f\,(x)\,dx,$$

для любого числа a. Выясните, при каких условиях первообразная периодической функции также будет периодической.

Ответы: **4.21.** (а) $1/6$; (б) $\pi a^4/16$; (в) $2-\pi/2$; (г) $\pi^2/4$. **4.24.** (а) $\pi/4$; (б) $\pi/4$. **4.25.** (а) $\pi^2/4$; (б) $\pi-\pi^2/4$. **4.26.** Интеграл функции в пределах периода должен быть равен нулю.

Интегрирование по частям

4.27. Пусть функции $u\,(x)$ и $v\,(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $a \le x \le b$. Докажите формулу

$$\int\limits_a^b u\,(x)v'(x)\,dx = u\,(x)v\,(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int\limits_a^b v\,(x)u'(x)\,dx.$$

4.28. Применяя только что установленную вами формулу интегрирования по частям, посчитайте интегралы:

$$\text{(а)} \int\limits_0^1 x\,e^x\,dx; \qquad \text{(в)} \int\limits_0^{\pi} x\,\sin x\,dx; \qquad \text{(д)} \int\limits_0^1 \arccos x\,dx;$$

$$\text{(б)} \int\limits_1^e \ln x\,dx; \qquad \text{(г)} \int\limits_0^{2\pi} x^2\,\cos x\,dx; \qquad \text{(е)} \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Выясните, случайно ли совпали ответы в примерах (а) и (б).

4.29. Интегрируя по частям, найдите рекуррентные соотношения для следующих трех последовательностей интегралов:

$$\text{(а) } I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx; \quad \text{(б) } I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx; \quad \text{(в) } I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Посчитайте все указанные интегралы. Объясните результаты.

4.30. Считая m и n неотрицательными целыми числами, посчитайте еще два интеграла:

$$\text{(а) } \int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx; \qquad \text{(б) } \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx.$$

Ответы: **4.28.** (а) 1; (б) 1; (в) π; (г) 4π; (д) 1; (е) $(\pi - 2\ln 2)/4$. **4.29.** Во всех примерах ответы одинаковы:

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}; \qquad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

4.30. Интегралы выражаются формулами

$$\text{(а) } 2^{2n}\,\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}; \qquad \text{(б) } \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Среднее значение функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \le x \le b$. Ее средним значением на этом отрезке считают отношение

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

4.31. Найдите среднее значение
(а) функции $f(x) = x^2$ на отрезке $0 \le x \le 1$;
(б) функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $0 \le x \le 100$;
(в) функции $f(x) = 2\cos x + 3\sin x$ на отрезке $0 \le x \le 2\pi$;

(г) функции $f(x) = 2\sin x\,\sin(x+\varphi)$ на отрезке $0 \le x \le 2\pi$.

4.32. Найдите среднюю скорость свободно падающего тела, если его начальная и конечная скорости соответственно равны v_0 и v_1.

4.33. Выясните, чему равна средняя длина хорды, стягивающей две наугад выбранные точки окружности радиуса R.

В следующих задачах вам будет полезна интегральная теорема о среднем: если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $a \le x \le b$, причем вторая из них не меняет знака, то строго между a и b непременно найдется такая точка c, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Если интеграл слева поделить на интеграл из правой части формулы, предполагая, что последний отличен от нуля, мы получим так называемое взвешенное среднее функции $f(x)$ на отрезке $a \le x \le b$ относительно «веса» $g(x)$. Таким образом, при указанных только что условиях взвешенное среднее функции реализуется как настоящее ее значение в подходящей промежуточной точке. Заметим, что взвешенное среднее с весом, тождественно равным единице, совпадает с определенным выше понятием среднего значения.

4.34. Пользуясь интегральной теоремой о среднем, оцените, в каких пределах заключены значения следующих интегралов:

$$\text{(а)}\ \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\,\cos x};\quad \text{(б)}\ \int\limits_0^{1} \frac{x^9\,dx}{\sqrt{1+x}};\quad \text{(в)}\ \int\limits_0^{100} \frac{e^{-x}\,dx}{x+100}.$$

4.35. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $0 \le x \le 1$. Найдите пределы:

$$\text{(а)}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\varepsilon\,f(x)+1};\qquad \text{(б)}\ \lim_{\varepsilon\to +0}\int\limits_\varepsilon^{2\varepsilon} f(x)\,\frac{dx}{x}.$$

4.36. Убедитесь в том, что для каждого $x > 0$ формула

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^x e^t\,dt = e^c$$

справедлива лишь при одном значении c. Выясните характер асимптотики относительного расположения точки c на интервале от 0 до x, когда длина интервала стремится к нулю или, напротив, становится бесконечно большой. Иначе говоря, посчитайте пределы

$$\text{(а)} \lim_{x\to+0} \frac{c}{x} \quad \text{и} \quad \text{(б)} \lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x}.$$

4.37. Рассмотрим функцию, определенную и непрерывную при всех $x \geq 0$, и предположим, что при $x \to +\infty$ она имеет предел. Докажите, что в таком случае и среднее значение этой функции на отрезке от 0 до x при $x \to +\infty$ стремится к тому же самому пределу.

Ответы: **4.31.** (а) 1/3; (б) 20/3; (в) 0; (г) $\cos\varphi$. **4.32.** $(v_0 + v_1)/2$. **4.33.** $4R/\pi$. **4.34.** (а) между $4\pi/3$ и 4π; (б) между $1/10\sqrt{2}$ и $1/10$; (в) между 0,005 и 0,015. **4.35.** (а) 1; (б) $f(0)\ln 2$. **4.36.** (а) 1/2; (б) 1.

Вычисление несобственных интегралов

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $a \leq x < \omega$, где a означает конечное число, а ω может быть и бесконечным. Несобственным интегралом этой функции на указанном промежутке называют предел

$$\int_a^\omega f(x)\,dx := \lim_{b\to\omega-0} \int_a^b f(x)\,dx,$$

если, разумеется, таковой существует. Если предел существует и конечен, несобственный интеграл считают сходящимся. Если же этот предел бесконечен, либо его вовсе нет, говорят, что несобственный интеграл расходится. Аналогично определяются и несобственные интегралы для того случая, когда «особой точкой» служит левый конец промежутка интегрирования. К этим двум вариантам сводятся и более общие конструкции несобственных интегралов, у которых может быть несколько «особенностей», расположенных внутри или на границе промежутка интегрирования.

Как мы видим, несобственный интеграл отличается от обычного дополнительным предельным переходом. Эту конструкцию применяют в тех случаях, когда промежуток интегрирования неограничен, либо функция вблизи какой-либо точки принимает сколь угодно большие

значения. В первом случае у нас просто нет возможности разбить промежуток на конечное число ограниченных частей, чтобы составить интегральную сумму, во втором — такая возможность, разумеется, есть, но интегральные суммы, как нетрудно понять, в этом случае никогда не имеют определенного конечного предела.

4.38. Докажите, что для непрерывной на отрезке функции понятие несобственного интеграла — какую бы точку в качестве «особой» ни взять — совпадает с обычным определенным ее интегралом.

Таким образом, нет ничего предосудительного в том, что мы обозначаем несобственный интеграл прежним символом, который теперь обретает лишь более широкое значение.

4.39. Распространите на несобственные интегралы формулу Ньютона — Лейбница, теорему о замене переменной и метод интегрирования по частям.

4.40. Посчитайте несколько совсем простых интегралов:

$$\text{(а)} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}; \qquad \text{(б)} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \qquad \text{(в)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x};$$

$$\text{(г)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \qquad \text{(д)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Нарисуйте области на плоскости, чьи площади выражаются этими интегралами. Сравните геометрически ответы в примерах (а) и (б).

4.41. Посчитайте интегралы от рациональных функций:

$$\text{(а)} \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}; \qquad \text{(б)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}; \qquad \text{(в)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

4.42. Применяя разные приемы, посчитайте интегралы:

$$\text{(а)} \int\limits_0^1 \ln x\, dx; \quad \text{(б)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\, \ln x\, dx}{(1+x^2)^2}; \quad \text{(в)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

4.43. Докажите, что для всех $a > 0$ и любого вещественного b справедливы следующие две красивые формулы:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

4.44. Понижая степень, посчитайте несобственные интегралы:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx; \quad \text{(б)} \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^n dx.$$

Объясните совпадение результатов.

4.45. Вернитесь на минутку к задачам 4.29 и 4.30. Не затерялась ли там среди обычных интегралов парочка несобственных? Возможно, вы еще тогда, и глазом не моргнув, посчитали эти интегралы. Судя по всему, вы просто предвидели конструкцию несобственного интеграла, и теперь она для вас совершенно естественна. Если же вы обратили внимание на неограниченность некоторых функций, и это обстоятельство не позволило вам применить единственный имевшийся у вас подход к интегрированию, то вы проявили похвальную проницательность, характерную для острого критического ума. Теперь вы с удовлетворением обнаружите, что оставленные вами интегралы имеют смысл, и легко посчитаете их.

Ответы: **4.39.** См. лекции. **4.40.** (а) 1; (б) 2; (в) 1; (г) π; (д) π. **4.41.** (а) $(2\ln 2)/3$; (б) $4\pi/3\sqrt{3}$; (в) $2\pi/3\sqrt{3}$. **4.42.** (а) -1; (б) 0; (в) $\pi/2-1$. **4.44.** (а) $n!$; (б) $n!$

Сходимость несобственных интегралов

Прежде чем приступить к вычислению того или иного несобственного интеграла, часто бывает необходимо выяснить, сходится ли он. Разумеется, если в вашем распоряжении имеется первообразная, то достаточно исследовать ее поведение в особых точках промежутка интегрирования. Но такие случаи встречаются редко, особенно в задачах прикладного характера, и для вычисления интеграла приходится привлекать какие-либо технические средства. В этих условиях предварительный анализ сходимости интеграла становится принципиально важным. Здесь наша задача — научиться по виду подынтегральной функции узнавать, интегрируема она или нет.

Пусть, как и в предыдущем разделе, функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $a \le x < \omega$. Изучим прежде наиболее простой и важный случай, когда функция не меняет знака, оставаясь, например, неотрицательной. У такой функции интеграл всегда существует, и весь вопрос

лишь в том — конечен этот интеграл или же бесконечен. Рассмотрим на том же промежутке еще две непрерывные неотрицательные функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$. Если $f_0(x) \leq f(x) \leq f_1(x)$ для всех x, то

$$\int\limits_a^\omega f_0(x)\,dx \leq \int\limits_a^\omega f(x)\,dx \leq \int\limits_a^\omega f_1(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что если мы смогли построить для нашей функции неинтегрируемую «подпорку» снизу, то тем самым доказали расходимость ее интеграла. Если же, напротив, функция оценивается сверху некоторой интегрируемой функцией, ее интеграл сходится.

Полезно подчекрнуть, что указанные «подпорки» изучаемой функции достаточно построить лишь в некоторой левой полуокрестности особой точки — результаты останутся прежними. Из этого замечания вытекает полезный вывод: если непрерывные на промежутке $a \leq x < \omega$ функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to +\omega$ не меняют знака и эквивалентны, то интегралы

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^\omega g(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно. Таким образом, изучая вопрос о сходимости интеграла знакопостоянной функции, мы вправе заменить ее более простой асимптотически эквивалентной функцией.

Чаще всего асимптотика функции вблизи ее особой точки имеет степенной характер. Здесь нужно различать два случая.

1-й случай: $\omega = +\infty$. Пусть

$$f(x) \sim \frac{A}{x^\lambda} \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

где $A \neq 0$. Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \leq 1$.

2-й случай: $\omega < +\infty$. Пусть

$$f(x) \sim \frac{A}{(\omega - x)^\lambda} \quad \text{при} \quad x \to \omega - 0,$$

где $A \neq 0$. Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$$

сходится, если $\lambda < 1$, и расходится, если $\lambda \geq 1$.

4.46. Исследуйте сходимость несобственных интегралов:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 - x^2 + 1}; \quad \text{(в)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}; \quad \text{(д)} \int\limits_0^{2} \frac{dx}{\ln x};$$

$$\text{(б)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{x^4 - x^2 + 1}; \quad \text{(г)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x^3 + x}}; \quad \text{(е)} \int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{1 - x^2}\,dx.$$

4.47. Выясните, при каких значениях соответствующих параметров сходятся интегралы:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n}\,dx; \quad \text{(в)} \int\limits_0^{1} x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx; \quad \text{(д)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{1 + x^\beta}\,dx;$$

$$\text{(б)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^m + x^n}; \quad \text{(г)} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}; \quad \text{(е)} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^\alpha x\, \cos^\beta x}.$$

4.48. Докажите сходимость двух любопытных интегралов:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x\,dx; \qquad \text{(б)} \int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos x\,dx.$$

А теперь, когда вы уже знаете, что интегралы сходятся, вы сможете и посчитать их. Разумеется, попытки «найти» первообразную ни к чему хорошему вас не приведут. Зато имеет смысл заметить, что интегралы равны между собой, и рассмотреть их сумму...

4.49. Как вы думаете, если функция интегрируема на промежутке, скажем, от нуля до бесконечности, обязана ли она стремиться к нулю, когда ее аргумент стремится к бесконечности? А если заранее известно, что на бесконечности функция имеет предел?

Ответы: **4.46.** (а) сходится; (б) расходится; (в) сходится; (г) расходится; (д) расходится; (е) сходится. **4.47.** (а) сходится в двух случаях: при $n > m+1 > 0$ и при $n < m+1 < 0$; (б) сходится, если одновременно $\min(m, n) < 1$ и $\max(m, n) > 1$; (в) сходится, если $p > -1$ и $q > -1$; (г) сходится, если $q < 1 < p$; (д) сходится в двух случаях: если $\beta > \alpha + 1$ и $\alpha > -2$ или если $\beta < \alpha + 2$ и $\alpha < -1$; (е) сходится, если одновременно $\alpha < 1$ и $\beta < 1$. **4.48.** (а) $-(\pi \ln 2)/2$; (б) $-(\pi \ln 2)/2$. **4.49.** нет; да.

Сходимость абсолютная и условная

Несобственный интеграл от знакопеременной функции заведомо сходится, если модуль функции имеет конечный интеграл. В этом случае исходный интеграл считают абсолютно сходящимся. Такая сильная сходимость означает, что «положительные» и «отрицательные» области, определяемые графиком функции и осью абсцисс, имеют конечную суммарную площадь. Однако для сходимости интеграла знакопеременной функции это условие вовсе не является обязательным — интеграл иногда может сходиться и в том случае, когда указанная площадь бесконечна. Ясно, что сходимость в такой ситуации достигается засчет взаимного погашения вкладов чередующихся между собой положительных и отрицательных участков интегрирования. Иначе говоря, несобственный интеграл может быть сходящимся, но не абсолютно. Иногда такие интегралы называют условно сходящимися.

Исследование условно сходящихся интегралов — довольно тонкая задача. Здесь нередко помогает так называемый признак Дирихле. А именно, представим себе, что функцию $f(x)$, заданную на промежутке $a \le x < \omega$, мы разложили в произведение двух непрерывных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые удовлетворяют следующим условиям: функция $\varphi(x)$ монотонна и стремится к нулю, когда $x \to \omega - 0$, а функция $\psi(x)$ имеет ограниченную первообразную. Тогда несобственный интеграл функции $f(x)$ от a до ω сходится.

4.50. Исследуйте сходимость несобственных интегралов знакопеременных функций:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx; \quad \text{(б)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx; \quad \text{(в)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2}\,dx;$$

Не забудьте указать, в каких случаях сходимость абсолютная, а в каких — условная.

4.51. Изучите в том же плане еще несколько примеров:

$$\text{(а)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\, dx; \quad \text{(в)} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1}\, dx; \quad \text{(д)} \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin(\sec x)\, dx;$$

$$\text{(б)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx; \quad \text{(г)} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{2x-\pi}\, dx; \quad \text{(е)} \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \cos(e^x)\, dx.$$

4.52. Исследуйте, как параметры p и q влияют на характер сходимости следующих несобственных интегралов:

$$\text{(а)} \int\limits_{0}^{+\infty} x^p \sin(x^q)\, dx; \qquad \text{(б)} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\, dx.$$

Чтобы не запутаться, нарисуйте соответствующие области на плоскости с координатами (p, q).

В некоторых случаях можно придать своеобразный смысл и расходящемуся интегралу. Хотя и редко, но встречаются ситуации, когда это полезно. Пусть в некоторой внутренней точке c промежутка Δ функция $f(x)$ имеет неинтегрируемую особенность. Удалим из промежутка маленький интервал $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, симметричный относительно точки c. Пусть $\Delta(\varepsilon)$ означает оставшуюся часть промежутка. Если окажется, что функция $f(x)$ интегрируема на каждом таком множестве $\Delta(\varepsilon)$ и существует предел

$$\text{v.p.} \int\limits_{\Delta} f(x)\, dx := \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\Delta(\varepsilon)} f(x)\, dx,$$

мы назовем этот предел интегралом нашей функции в смысле «главного значения» по Коши. Здесь v.p. = valeur principale. Особая точка в обозначении интеграла не участвует, но подразумевается. Ясно, как распространить эту конструкцию на случай, когда промежуток интегрирования содержит несколько особых точек. Если же областью определения функции служит вся числовая прямая, то ее интеграл в смысле главного значения определяют как предел ее интегралов по

расширяющимся отрезкам, симметричным относительно нуля:

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

4.53. Убедившись в расходимости следующих интегралов, укажите их «главные значения»:

$$\text{(а)} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}; \quad \text{(б)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx; \quad \text{(в)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x+a)\,dx.$$

Ответы: **4.50.** (а) сходится условно; (б) расходится; (в) сходится абсолютно. **4.51.** все интегралы сходятся; абсолютная сходимость наблюдается только в примере (д). **4.52.** (а) абсолютная сходимость при $-1 < (p+1)/q < 0$, условная сходимость при $0 \le (p+1)/q < 1$, в остальных случаях интеграл расходится; (б) если $q \ge 0$, то интеграл: сходится условно, когда $-2 < p < q \le p+1$, сходится абсолютно, когда $q > p+1 > -1$; если же $q < 0$, то интеграл: сходится условно, когда $q < p+2$, причем $-1 \le p < 0$, и сходится абсолютно, когда снова $q < p+2$, но при этом $p < -1$. **4.53.** (а) $-\ln 2$; (б) π; (в) πa.

Эйлеровы интегралы

Так называют следующие замечательные интегралы:

$$\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, \qquad \mathrm{B}(x,y) = \int\limits_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

4.54. Интеграл $\Gamma(x)$ называют гамма-функцией. Докажите, что он сходится при $x > 0$.

4.55. Интеграл $\mathrm{B}(x,y)$ называют бета-функцией. Докажите, что он сходится, когда $x > 0$ и $y > 0$.

4.56. Основное свойство гамма-функции выражается «формулой понижения»:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

Докажите эту формулу.

4.57. Опираясь на формулу понижения, докажите, что

$$\Gamma(n+1) = n!$$

для произвольного целого $n \geq 0$. Таким образом, гамма-функция служит обобщением понятия факториала неотрицательного целого числа.

В пределах интервала $0 < x < 1$ справедливо еще одно важное соотношение, которое называют формулой дополнения:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Голыми руками эту формулу не доказать. Но придет счастливое время, и вы познакомитесь с фантастическими методами одной из наиболее глубоких и красивых областей математики, которую называют теорией функций комплексной переменной. И не только познакомитесь, но овладеете ими. Тогда вы сможете легко доказать и эту формулу, и многое другое.

4.58. Опираясь на формулы дополнения и понижения, посчитайте значения гамма-функции для полуцелых значений ее аргумента:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \quad \text{и т. д.}$$

Интегралы $\Gamma(x)$ и $\mathrm{B}(x,y)$ не выражаются в элементарных функциях, но второй из них совершенно потрясающим образом выражается через первый:

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

4.59. Докажите, что всюду, где $x > 0$ и $y > 0$, бета-функция может быть представлена следующим интегралом:

$$\mathrm{B}(x,y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}\,ds}{(1+s)^{x+y}}.$$

Чтобы убедиться в этом, замените переменную t в первоначальном интеграле новой переменной s по формуле $t = s/(1+s)$. Разумеется, следует проверить, допустима ли такая замена.

4.60. С помощью функций B и Γ посчитайте несколько интегралов:

$$\text{(а)} \int\limits_0^1 \sqrt{x - x^2}\,dx; \qquad \text{(в)} \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}; \qquad \text{(д)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3};$$

$$\text{(б)} \int\limits_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx; \quad \text{(г)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\, dx; \quad \text{(е)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{1+x^4}.$$

4.61. Выясните, при каких значениях соответствующих параметров сходятся следующие интегралы:

$$\text{(а)} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n\, dx; \qquad \text{(б)} \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^m x\, dx;$$

$$\text{(в)} \int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\, dx; \qquad \text{(г)} \int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^n dx.$$

«Посчитайте» эти интегралы, выразив их через интегралы Эйлера.

4.62. Для вычисления следующих двух интересных интегралов, которые связывают с именем Раабе, вам потребуется почти все существенное, что вы узнали о гамма-функции:

$$\text{(а)} \int\limits_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx; \quad \text{(б)} \int\limits_c^{c+1} \ln \Gamma(x)\, dx \quad (c > 0).$$

Кроме того, здесь как нельзя ксати окажутся уже знакомые вам интегралы из задачи 4.48.

4.63. Докажите равенства:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}; \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\, dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4}\, dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

4.64. Пользуясь непрерывностью гамма-функции, устоновите асимптотическую формулу

$$\Gamma(x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \to +0.$$

Асимптотика гамма-функции на бесконечности будет нами изучена, когда для этого у нас появятся необходимые средства. Но результат вполне можно привести уже сейчас:

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\, e^{-x}\, x^x \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Заменяя здесь переменную x натуральным числом n, мы приходим к одному из наиболее полезных асимптотических равенств, которое называют формулой Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

4.65. Применяя только что указанные асимптотические формулы, найдите пределы:

$$\text{(а)} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}; \quad \text{(б)} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}; \quad \text{(в)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{x^a\,\Gamma(x)}.$$

Ответы: **4.60.** (а) $\pi/8$; (б) $\pi/16$; (в) $32/15$; (г) $\pi/2\sqrt{2}$; (д) $2\pi/3\sqrt{3}$; (е) $\pi/2\sqrt{2}$. **4.61.** (а) $\mathrm{B}\,((m+1)/2, (n+1)/2)/2$, где $m > -1$ и $n > -1$; (б) $\pi/2\cos(m\pi/2)$, где $|m| < 1$; (в) $\Gamma\,((m+1)/n)/|n|$, где $n \neq 0$ и $(m+1)/n > 0$. (г) $\Gamma\,(p+1)$, где $p > -1$. **4.62.** (а) $\ln\sqrt{2\pi}$; (б) $\ln\sqrt{2\pi} + c\,(\ln c - 1)$. **4.65.** (а) 0; (б) 0; (в) 1.

Длина гладкой линии

Представим себе, что точка движется в пространстве. Интересно выяснить, какой путь она пройдет за данный отрезок времени. К подобным вопросам следует относиться либо очень серьезно, либо — с чувством юмора. В самом деле, прежде чем спросить, чему равен путь, неплохо бы ответить на вопрос — а что такое путь? Если серьезно, то ответ на последний вопрос в полном объеме неизвестен никому. Если же оставаться в пределах «здравого смысла», то на поставленный вопрос можно получить вполне приемлемый ответ. Прежде всего выберем в пространстве «начало отсчета». Тогда положение движущейся точки в каждый момент времени t можно описать, указывая ее радиус-вектор $\vec{r}\,(t)$, идущий из «начала» в то место, где сейчас находится точка. Кроме того, мы ограничимся такими движениями, которые в каждый момент происходят с определенной скоростью. Более того, мы будем считать, что скорость непрерывно меняется с течением времени. Это значит, что вектор-функция $\vec{r}\,(t)$ непрерывно дифференцируема. В этих условиях «естественно» считать, что путь ds, пройденный точкой за очень малый отрезок времени от момента t до момента $t + d\,t$, равен $|\vec{r}\,'(t)|\,dt$. Ясно, что тогда весь путь s, пройденный точкой за

отрезок времени от t_0 до t_1, следует определить как интеграл

$$s = \int\limits_{t_0}^{t_1} |\vec{r}\,'(t)|\, dt.$$

Наши рассуждения, возможно, были не совсем корректны или, лучше сказать, не совсем убедительны. Но теперь, когда у нас уже есть красивая формула, мы можем договориться принять ее за определение. Весь вопрос лишь в том, полезно ли это определение. Многочисленные примеры и жизненный опыт целого ряда поколений показывают, что это действительно так. Как мы видим, интеграл служит одновременно и средством определения пути, и средством его вычисления.

Если в пространстве выбраны прямоугольные координаты (x, y, z), то закон движения точки может быть задан уравнениями

$$x = x\,(t), \quad y = y\,(t), \quad z = z\,(t).$$

Тогда вектор скорости движения, как мы знаем, будет иметь координаты $(x'(t), y'(t), z'(t))$, а значит, путь на участке $t_0 \le t \le t_1$ выразится интегралом

$$s = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

Если движение происходит, например, в плоскости (x, y), где $z \equiv 0$, то предыдущая формула заметно укорачивается:

$$s = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Точка в процессе своего движения описывает некоторую траекторию. Если скорость движения непрерывно меняется со временем и всегда отлична от нуля, траектория представляет собой «гладкую линию». Если, кроме того, никакой участок этой линии не проходится дважды, то путь, пройденный точкой, можно считать длиной ее траектории. Замечательно, что — при указанных обстоятельствах — длина траектории не зависит от способа движения по ней. Так мы приходим к понятию длины гладкой линии.

4.66. Пусть скорость движения по величине постоянна и равна v. Докажите, что путь, пройденный точкой за промежуток времени от момента t_0 до момента t_1, равен $v\,(t_1 - t_0)$.

4.67. Применяя предыдущий результат, найдите длину одного витка спирали $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$.

4.68. Найдите длину участка линии $x = 3t, \quad y = 3t^2, \quad z = 2t^3$, соединяющего точки $(0, 0, 0)$ и $(3, 3, 2)$. И пусть ваш ответ будет символом вашей оценки на экзамене, который уже приближается со скоростью, превосходящей всякое воображение...

4.69. Представьте себе движение в пространстве, которое описывается уравнениями

$$x = e^{-t}\,\cos t, \quad y = e^{-t}\,\sin t, \quad z = e^{-t},$$

где t означает время, «текущее» от нуля до плюс бесконечности. Представили? А теперь нарисуйте то, что увидели, а главное — выясните, чему равна длина траектории этого бесконечно долгого движения.

4.70. Пусть t меняется от 0 до 2π. Считая параметр a положительным, найдите длины плоских дуг:

(а) $x = a\,(t - \sin t), \quad y = a\,(1 - \cos t)$;

(б) $x = a\,(\cos t + t\,\sin t), \quad y = a\,(\sin t - t\,\cos t)$.

Было бы совсем неплохо, если бы вы еще нарисовали эти линии, хотя бы с помощью компьютера.

4.71. Параметризуя абсциссой x график непрерывно дифференцируемой функции $y = y\,(x)$, где $a \le x \le b$, докажите, что его длина s выражается формулой

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx.$$

Дайте наглядно-геометрическое объяснение этой формулы.

4.72. Посчитайте длины графиков следующих функций на указанных для них участках:

(а) $y = x^{3/2}, \quad 0 \le x \le 4/3$;

(б) $y = \operatorname{ch} x, \quad -\ln 2 \le x \le \ln 2$;

(в) $x = (y^2 - 2\ln y)/4, \quad 1 \le y \le e$.

4.73. Если в полярных координатах (ϱ, φ) плоская линия задается уравнением $\varrho = \varrho(\varphi)$, то в соответствующих декартовых координатах (x, y) ее уравнения имеют вид

$$x = \varrho(\varphi)\cos(\varphi), \qquad y = \varrho(\varphi)\sin(\varphi).$$

Докажите, что на участке $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$ длина s этой линии может быть посчитана по формуле

$$s = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\varrho(\varphi)^2 + \varrho'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Объясните эту формулу «наглядно-геометрически».

4.74. Укажите длины следующих линий:

$$\text{(а) } \varrho = 1 + \cos\varphi; \qquad \text{(б) } \varrho = \sin^3(\varphi/3).$$

Если у вас нет времени, попросите компьютер нарисовать эти линии. Все-таки, негоже не знать, чью длину вы посчитали.

4.75. Найдите длину линии, которая задана в полярных координатах следующим, не совсем обычным, уравнением

$$\varphi = \int\limits_0^{\varrho} \frac{\operatorname{sh} r}{r}\, dr,$$

если известно, что полярный радиус ее точек принимает все значения между нулем и $\ln 2$.

4.76. Найдите длину траектории точки, у которой полярные координаты меняются с течением времени t по закону

$$\varrho = 1 + \cos t, \quad \varphi = t - \operatorname{tg}\frac{t}{2},$$

а «время» t пробегает отрезок от нуля до π.

4.77. Переходя к «обобщенным полярным координатам», найдите длину астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$. Решите ту же задачу «непосредственно», применяя формулу длины графика. Какой метод лучше?

Ответы: **4.67.** $2\sqrt{2}\,\pi$. **4.68.** 5. **4.69.** $\sqrt{3}$. **4.70.** (а) $8a$; (б) $2\pi^2 a$. **4.72.** (а) $56/27$; (б) $3/2$; (в) $(e^2+1)/4$. **4.74.** (а) 8; (б) $3\pi/2$. **4.75.** $3/4$. **4.76.** π. **4.77.** 48.

Пусть фигура на координатной плоскости заключена между графиками двух непрерывных на отрезке $a \le x \le b$ функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, из которых первый располагается ниже второго. Площадь S такой фигуры считают по формуле

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\, dx.$$

4.78. Найдите площади фигур, ограниченных линиями, заданными в прямоугольных координатах (x, y) следующими уравнениями:
(а) $x = y^2,\ y = x^2$;
(б) $y = x^2,\ x + y = 2$;
(в) $y = 1/(1 + x^2),\ y = 0$;
(г) $x^2 + 4y^2 = 1$.

Площадь S «криволинейного» сектора, ограниченного линией

$$\varrho = \varrho(\varphi), \quad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1,$$

и двумя лучами с «наклонами» φ_0 и φ_1, определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \varrho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

4.79. Найдите площадь криволинейного сектора, ограниченного параболой и двумя лучами:

$$\varrho = \frac{1}{1 - \cos\varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

4.80. Найдите площади фигур, ограниченных следующими линиями, заданными в полярных координатах:
(а) лемниската: $\varrho^2 = \cos 2\varphi$;
(б) кардиоида: $\varrho = (1 + \cos\varphi)$;
(в) трилистник: $\varrho = \sin 3\varphi$.

4.81. Найдите площадь неограниченной фигуры, заключенной между линиями $\varrho\,\varphi = 1,\ \varrho \sin\varphi = 1$ и лучом $\varphi = \pi/2$.

4.82. Линия $x^3 + y^3 = 3xy$ имеет симпатичную петельку, которую называют листом Декарта. Переходя к полярным координатам, найдите площадь этого листа.

Рассмотрим на плоскости (x, y) гладкую линию

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \le t \le t_1,$$

расположенную, скажем, выше оси абсцисс. Площадь S гладкой поверхности, заметаемой этой линией при вращении ее в пространстве вокруг указанной оси, можно вычислить по формуле:

$$S = 2\pi \int\limits_{t_0}^{t_1} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

4.83. Найдите площадь поверхности, образуемой при вращении астроиды $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$.

4.84. Найдите площадь поверхности, образуемой при вращении одной арки циклоиды $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$.

4.85. Пусть плоская линия, лежащая выше оси абсцисс, задана в полярных координатах уравнением $\varrho = \varrho(\varphi)$, где φ пробегает отрезок от φ_0 до φ_1. Докажите, что площадь S соответствующей поверхности вращения выражается формулой

$$S = 2\pi \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \varrho(\varphi) \sin\varphi \sqrt{\varrho(\varphi)^2 + \varrho'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

4.86. Найдите площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\varrho = 1 + \cos\varphi$ вокруг полярной оси.

4.87. Тоже самое задание выполните для лемнискаты, чье уравнение в полярных координатах имеет вид $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi$.

4.88. Пусть линия на плоскости (x, y) задана уравнением $y = y(x)$, где $y(x)$ представляет собой неотрицательную непрерывно дифференцируемую функцию на отрезке $a \le x \le b$. Докажите, что поверхность, которую образует эта линия при вращении вокруг оси абсцисс, равна

$$S = 2\pi \int\limits_{a}^{b} y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

4.89. Сферическим слоем называют часть сферы, заключенную между двумя пересекающими ее параллельными плоскостями. Расстояние между плоскостями считают высотой пояса. Интересно, что для заданной сферы площадь ее сферического слоя зависит лишь от его высоты. А именно, докажите, что эта площадь равна произведению длины экватора сферы на высоту слоя.

Если график неотрицательной гладкой функции $y(x)$, заданной на отрезке $a \leq x \leq b$, вращать вокруг оси абсцисс вместе с лежащей под ним криволинейной трапецией, мы получим тело вращения, чей объем V можно найти по формуле

$$V = \pi \int\limits_a^b y(x)^2 \, dx.$$

4.91. Найдите объем кругового конуса, если радиус его круглого основания равен r, а высота равна h.

4.92. Пусть эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вращается вокруг: (а) оси абсцисс; (б) оси ординат. Найдите объемы эллипсоидов вращения.

4.93. Выясните, какой объем заключен внутри поверхности, полученной вращением вокруг оси абсцисс:

(а) знакомой вам астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$;

(б) одной арки циклоиды $x = t - \sin t, \ y = 1 - \cos t$.

4.94. Найдите объем той части пространства, которая заключена одновременно внутри:

(а) параболоида $2z = x^2 + y^2$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3$;

(б) сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и конуса $x^2 = y^2 + z^2$.

Рассмотрим снова подграфик неотрицательной гладкой функции $y(x)$, заданной на отрезке $a \leq x \leq b$, но только теперь будем вращать его вокруг оси ординат, предполагая, что $a \geq 0$. Тело вращения, которое у нас получится, имеет объем

$$V = 2\pi \int\limits_a^b x \, y(x)^2 \, dx.$$

4.95. Выясните, как изменятся ответы в задаче 4.93, если указанные в ней линии вращать вокруг оси ординат.

4.96. Если вы нарисуете линию на плоскости (x, y), заданную уравнениями

$$x = 2t - t^2, \quad y = 4t - t^3,$$

то обнаружите, что она имеет петельку, расположенную в первой четверти плоскости. Повращайте эту петельку вокруг: (а) оси абсцисс; (б) оси ординат. Какие объемы окажутся внутри построенных вами замкнутых поверхностей?

Ответы: **4.78.** (а) $1/3$; (б) $9/2$; (в) π; (г) $\pi/2$. **4.79.** $(3+4\sqrt{2})/6$. **4.80.** (а) 1; (б) $3\pi/2$; (в) $\pi/4$. **4.81.** $1/\pi$. **4.82.** $3/2$. **4.83.** $12\pi/5$. **4.84.** $64\pi/3$. **4.86.** $32\pi/5$. **4.87.** $4\pi\,(2-\sqrt{2})$. **4.91.** $\pi r^2 h/3$. **4.92.** (а) $4\pi ab^2/3$; (б) $4\pi a^2 b/3$. **4.93.** (а) $32\pi/105$; (б) $5\pi^2$. **4.94.** (а) $\pi\,(6\sqrt{3}-5)/3$; (б) $\pi\,(2-\sqrt{2})/3$. **4.95.** (а) Не изменится; (б) $6\pi^3$. **4.96.** (а) $64\pi/35$; (б) $64\pi/105$.

Механические иллюстрации

Отрезок $a \le x \le b$ становится символом «материального» прямолинейного стержня, когда на нем задана неотрицательная неубывающая функция $m\,(x)$, равная нулю при $x = a$. Значение $m\,(x)$ интерпретируется как масса части стержня, расположенной между точками a и x. Естественно считать, что масса на участке от x до $x + \Delta x$, где $\Delta x > 0$, равна $\Delta m = m\,(x + \Delta x) - m\,(x)$. Тогда отношение Δm к Δx выражает «среднюю» плотность стержня на этом участке. Если же средняя плотность при $\Delta x \to 0$ стремится к определенному конечному пределу $\varrho\,(x)$, мы скажем, что в точке x стержень имеет линейную плотность $\varrho\,(x)$. Таким образом, говорить о плотности $\varrho\,(x)$ можно в том случае, если масса $m\,(x)$ представляет собой дифференцируемую функцию точки x, и тогда

$$\varrho\,(x) = m'(x) = \frac{dm}{dx}, \quad \text{или} \quad dm = \varrho\,(x)\,dx.$$

Если плотность непрерывно зависит от точки, масса $m = m\,(b) - m\,(a)$ всего стержня, согласно Ньютону — Лейбницу, выражается формулой

$$m = \int\limits_a^b \varrho\,(x)\,dx.$$

4.97. Определите массу стержня длины 10 *м*, если его линейная плотность $\varrho(x)$ меняется по закону $\varrho(x) = 6{+}0,3\,x$ *кг/м*, где x означает расстояние до одного из концов стержня.

Статическим моментом стержня относительно точки x_0 называют интеграл

$$M(x_0) = \int\limits_a^b (x - x_0)\,\varrho(x)\,dx.$$

Точку c называют центром массы стержня, если $M(c) = 0$.

4.98. Докажите, что центр массы стержня определен однозначно и может быть найден по формуле:

$$c = \frac{\int\limits_a^b x\,\varrho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \varrho(x)\,dx}.$$

4.99. Возвращаясь к стержню из задачи 4.97, выясните, на каком расстоянии от прежнего конца стержня находится центр его массы.

4.100. Стержень, плотность которого меняется монотонно, распилили ровно по центру его массы. Какая часть стержня окажется массивней — длинная или короткая?

Моментом инерции стержня относительно точки x_0 называют интеграл

$$I(x_0) = \int\limits_a^b (x - x_0)^2\,\varrho(x)\,dx.$$

4.101. Еще раз уделите внимание стержню из задачи 4.97 и посчитайте его момент инерции относительно того из его концов, где плотность: (а) меньше; (б) больше.

4.102. Предыдущие результаты вызывают естественный вопрос: всегда ли у стержня, чья плотность меняется монотонно, момент инерции относительно легкого конца будет больше чем относительно тяжелого?

4.103. Относительно какой точки момент инерции стержня будет наименьшим?

4.104. Стержень вращается с угловой скоростью ω вокруг точки, относительно которой его момент инерции равен I. Найдите кинетическую энергию стержня.

4.105. Однородный шар, имеющий радиус R и объемную плотность ϱ, вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω. Дайте разумное определение кинетической энергии шара, выразите ее одномерным интегралом и посчитайте ее.

Вещественную функцию $F(x)$, определенную на отрезке $a \le x \le b$, можно понимать как силовое поле на этом отрезке, направленное вдоль него. Тогда работа, совершаемая полем по перемещению материальной точки от левого конца отрезка до правого, выражается интегралом:

$$A = \int\limits_a^b F(x)\,dx.$$

4.106. Выясните, какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину Гука на 10 *см*, если сила в 1 *кГ* растягивает ее на 1 *см*.

4.107. Земля имеет радиус R и всем телам вблизи ее поверхности создает ускорение g. Выясните, какую работу нужно совершить, чтобы тело массы m поднять на высоту h над поверхностью Земли. Какой должна быть эта работа, чтобы тело удалилось в бесконечность?

Предположим, что «стержень» $a \le x \le b$, имеющий линейную плотность $\varrho(x)$, помещен в трехмерное евклидово пространство. Пусть в некоторой точке пространства сосредоточена масса M. Проведем из нее векторы $\vec{r}(x)$, ведущие в точки x нашего стержня. Тогда, при подходящем выборе единиц измерения, сила $\vec{F}$, с которой стержень притягивает массу M, выражается векторным интегралом:

$$\vec{F} = \int\limits_a^b \frac{M\varrho(x)\vec{r}(x)\,dx}{|\vec{r}(x)|^3}.$$

4.108. Найдите силу, с которой однородный стержень $0 \le x \le 1$ единичной плотности притягивает единичную массу, расположенную в точке с координатами $x = 0,\ y = 0,\ z = 1$.

4.109. С какой по величине силой материальная прямая с постоянной линейной плотностью ϱ притягивает материальную точку массы m, расположенную на расстоянии l от этой прямой?

Ответы: **4.97.** 75 *кг*. **4.99.** 16/3 *м*. **4.100.** Короткая. **4.101.** (а) 2750 *кг·м*^{2}; (б) 2250 *кг·м*^{2}. **4.102.** Всегда. **4.103.** Относительно центра массы стержня. **4.104.** $2\pi^2\omega^2 I$. **4.105.** $4\pi\varrho\omega^2R^5/15$. **4.106.** 0,5 *кГм*. **4.107.** $mgRh/(R+h)$; mgR. **4.108.** $F_x = 1-1/\sqrt{2}$; $F_y = 0$; $F_z = -1/\sqrt{2}$. **4.109.** $2m\varrho/l$.

Как известно, необъятное не объять. Тем более — невозможно объять математический анализ, даже одномерный. Какими бы ни были учебные планы, всегда приходит момент, когда

Если раньше вы действительно посчитали эти интегралы «прямым способом», то теперь охотно согласитесь, что на фоне прежних мук новый метод воспринимается не иначе как избавление. Теперь вы можете представить, какие чувства должны были переполнять Ньютона, открывшего для себя такое чудо. Возможно, потирая ладони, он восклицал, подобно Пушкину, но только более чем веком раньше: «Ай-да Ньютон...» Не знаю, найдется ли английская фраза, адекватная нашей русской, но Ньютон, безусловно, был в полном восторге и похвалялся перед коллегами, что площади любых двух фигур он способен теперь сравнить за «половину четверти часа»... Впрочем, правда здесь изрядно замешана на фантазии. У великих тоже были свои учителя. Были и предшественники. А еще были и сверстники, и тоже — не лыком шиты. Например, «биномиальную формулу Ньютона» знал еще Виета, который завершил свой земной путь прежде, чем родился Ньютон. Закон обратных квадратов, представляющий собой главный элемент в законе всемирного тяготения, Ньютон узнал из переписки с Гуком. Тот же Гук утверждал, что орбиты планет имеют форму «эллиптоидов». Ньютон же, полагая, что физики склонны говорить больше, чем знают, доказал, что эллиптоиды Гука — это известные еще древним грекам эллипсы. Что же касается формулы Ньютона — Лейбница, то Арнольд — наш выдающийся современник — называет ее именем Исаака Барроу, учителя Ньютона...

Прошлое — как и будущее — нелинейно и неоднозначно. Можно понять историка, которому небезразлично, кто первый, а кто — потом. Но истина превыше тщеславия и честолюбия. Решив, что настала пора открыться смертным, она выбирает наиболее достойного из них и уже его устами провозглашается миру. А мир — превозносит его. Ибо вместивший истину есть гений. Он — Учитель, который несет Свет. И благодарное человечество, отдавая последнюю дань титану, украшает его надгробье пронзительными словами: «Здесь покоится то, что было смертного у Исаака Ньютона»...

Если раньше вы действительно посчитали эти интегралы «прямым способом», то теперь охотно согласитесь, что на фоне прежних мук новый метод воспринимается не иначе как избавление. Теперь вы можете представить, какие чувства должны были переполнять Ньютона, открывшего для себя такое чудо. Возможно, потирая ладони, он восклицал, подобно Пушкину, но только более чем веком раньше: «Ай-да Ньютон...» Не знаю, найдется ли английская фраза, адекватная нашей русской, но Ньютон, безусловно, был в полном восторге и похвалялся перед коллегами, что площади любых двух фигур он способен теперь сравнить за «половину четверти часа»...

Оставим на совести классика его уверенность, а на нашей — легковесные фантазии и художественные искажения. Не будем забывать, что у великих тоже есть учителя. Есть и предшественники. Есть и современники... И кто знает, не их ли напряженная мысль, достигая точки кипения и вырываясь на свободу, создает ту предгрозовую атмосферу, когда пространство, наэлектризованное до предела, начинает звенеть подобно натянутой струне, а идеи мечутся в оцепеневшем воздухе с невыносимой жаждой воплощения? И уже ничто не в силах остановить их в этом стремлении...

***

Прошлое — как и будущее — нелинейно и неоднозначно. Можно понять историка, которому небезразлично, кто первый, а кто — потом. Но истина превыше тщеславия и честолюбия. Решив, что настала пора открыться смертным, она выбирает наиболее достойного из них и уже его устами провозглашается миру. А мир — превозносит его. Ибо вместивший истину есть гений. Он — Учитель, который несет Свет. И благодарное человечество, отдавая последнюю дань титану, украшает его надгробье пронзительными словами: «Здесь покоится то, что было смертного у Исаака Ньютона»...

***

4.68. Неизвестный объект движется в «рене-декартовом» пространстве (x, y, z) от точки $(0, 0, 0)$ до точки $(3, 3, 2)$ по закону

$$x = 3t, \quad y = 3t^2, \quad z = 2t^3.$$

Ваша задача — пользуясь мощными средствами компьютерной графики, изобразить траекторию объекта. Покрутите «стерео-рисунок», полюбуйтесь на него с разных сторон. Например, фиксируйте точку на

кривой и подберите такой ракурс, чтобы эта точка оказалась концом клювика — так выглядит порой абсолютно гладкая линия. А теперь, опираясь на еще более мощные методы математического анализа, докажите, что точка траектории, отвечающая параметру $t = 1/2$, будет таким «клювиком», если посмотреть на нее, например, из точки $(0, -3/4, -1/2)$. Наконец, укажите точную длину траектории. И пусть ваш ответ будет символом вашей оценки на экзамене, который уже приближается со скоростью, превосходящей всякое воображение...