Задания по обыкновенным дифференциальным уравнениям

с многочисленными замечаниями и комментариями

Составил Е. П. Волокитин

Новосибирский государственный университет
Кафедра высшей математики физического факультета

2008

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 191.

УРАВНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ

Термин впервые употребил Лейбниц в письме к Ньютону (1676), а затем — в печати (с 1684 г.). После того, как Ньютон открыл биномиальное разложение, а с его помощью — ряды для элементарных функций, он мог найти решение любого дифференциального уравнения. Приёмы решения уравнений в квадратурах Ньютон почти не развил. При этом Ньютон имел чёткое представление о том, что можно получить бесконечно много решений одного и того же дифференциального уравнения, но запись общего решения с произвольной постоянной впервые встречается у И. Бернулли. В руководстве на русском языке от 1869 г. *уравнениям в частных дифференциалах* противопоставляются *обыкновенные*. По-видимому, термин *обыкновенное уравнение* становится привычным только в конце XIX в.

Первым общим приёмом интегрирования дифференциальных уравнений явилось, естественно, разделение переменных. Такие уравнения исследовал Лейбниц и его ученики. Название aequatio separata, а также разделение переменных — separatio variabilium — по-видимому, ввёл Эйлер, ему же принадлежит термин «порядок уравнения», который он ввёл словами aequationis primi gradus, т. е. «уравнение первой ступени (или степени)» в 1763 г. Метод решения *однородных уравнений* (первого порядка) подстановкой $y = ux$ открыл Иоганн Бернулли (1695), хотя эта подстановка была известна Лейбницу. Однако опубликовал этот метод впервые профессор в Болонье Г. Манфреди (1714). Метод решения *линейных уравнений* заменой $y = uv$ изобрёл Якоб Бернулли (1695), он же решил *уравнение Бернулли*, сведя его к линейному. Последний метод открыли также Лейбниц (1696) и И. Бернулли (1697). Я. Бернулли принадлежит также идея *понижения порядка* уравнения введением параметра p. Его работа не была опубликована своевременно, и этот же приём для случая $F(y, y', y'') = 0$ открыл и первым опубликовал Джакопо Рикатти (1712).

Относительно *уравнений в полных дифференциалах* можно сказать, что они полностью исследованы Эйлером и Клеро. *Интегрирующий множитель* в отдельных случаях применил И. Бернулли (1691); метод вновь открыли одновременно Клеро и Эйлер (1739–1740). Эйлер установил классы дифференциальных уравнений, обладающих интегрирующим множителем и распространил понятие на уравнения n-го порядка. Клеро дал определение *полного дифференциала* и ввёл этот термин. Эйлер опубликовал условие, при котором выражение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

является полным дифференциалом (1740).

Уравнение Рикатти. Самое раннее упоминание уравнения типа Рикатти встречается в статье И. Бернулли (1694), который привёл это уравнение, признав, что не решил его. В течение нескольких лет (1697–1704) Я. Бернулли упоминает о попытках решить уравнение $dy = yydx + xxdx$. В конце концов он нашёл решение в виде ряда.

В 1724 г. граф Дж. Рикатти решил уравнение $y' + ay^2 = bx^m$ и опубликовал анаграмму «Решение проблемы, предложенное Рикатти, записанное тайными знаками:...» ("Solutio problematis ab Ill. Ricato proposito characteribus occultis involuta $24a, 6b, 6c, 8d, ..., +, -, \underline{\hspace{2em}}, \pm, =, 4, 2, 1$"). Статья Рикатти была сопровождена заметкой Даниила Бернулли, который подтверждал, что до сих пор задача считалась неразрешимой. Через год Д. Бернулли опубликовал найденное им решение, доказав тем самым, что это более лёгкая задача, чем разгадка анаграммы. Уже в переписке Бернулли употреблялось название *уравнение Рикатти.* Большое значение, которое Д. Бернулли придавал работе Рикатти, привело к тому, что имя Рикатти было присвоено уравнениям более общего вида. Это название окончательно узаконено по предложени. Д'Аламбера (1763). Лиувилль доказал невозможность общего решения уравнения Рикатти в квадратурах.

С уравнения Рикатти начинается методическая разработка теории дифференциальных уравнений.

Геометрическая теория дифференциальных уравнений получила развитие главным образом в трудах Монжа.

Эйлер обладал методом решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (*методом Эйлера*) в 1739 г., а опубликовал его в 1743 г.; здесь он впервые ввёл понятия *частного* и *общего интегралов.* Лагаранж доказал, что $\sum C_i y_i$ — общее решение линейного однородного уравнения. Д'Аламбер установил, что общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и некоторого частного неоднородного (1766).

Интегрируя линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, Эйлер пришёл к мысли искать решение в виде определённого интеграла

$\int_a^b e^{xt} f(t)dt$, развивая эту идею, Лаплас пришёл к одному из первых примеров *преобразования Лапласа* (1782).

Метод вариации произвольных постоянных разработан Эйлером (1739) и Лагранжем (1775). В 1768 г. Эйлер опубликовал *метод ломаных Эйлера*, придуманный им пятью годами раньше.

В 1885 г. Владимир Павлович Максимович, первый ректор Киевского университета, доказал невозможность решения в квадратурах общего дифференциального уравнения 2-го порядка.

Метод интегрирования систем уравнений (линейных однородных с постоянными коэффициентами) начали создавать Д'Аламбер (1743), Эйлер (1743), Лагранж (1762). Уже Д'Аламбер заметил структуру общего решения уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами; при этом упор был на число произвольных постоянных, понятия о линейной независимости частных решений не было до середины XIX в. К тому же изложение этого раздела оставалось довольно долго невразумительным. Так, в «Лекциях» Н. И. Алексеева, читанных в Варшавском университете в 1873/74 гг. (изданных в 1878 г.), в одном абзаце приведены все необходимые понятия, теоремы в терминах различных теорий. *Метод последовательных приближений* Коши употребил лишь как вспомогательное средство приближенного представления решений, а не для доказательства существования его (1835).

Либри (известный замечательными авантюрами) впервые указал на аналогию между алгебраическимии дифференциальными линейными уравнениями: подобно тому как коэффициенты алгебраического уравнения могут быть выражены через его корни симметричными функциями, коэффициенты дифференциального уравнения являются симметричными функциями его частных решений. Эта аналогия играла важную роль в развитии теории в течение всего XIX в. Лагранж, Д'Аламбер, Либри, Лиувилль, Брассин развили теорию дифференциальных уравнений. Это направление было продолжено Фробениусом и Томе. Мемуар берлинского математика Лазара Фукса "Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit verandertischen Coefficienten"(1866, 1868) стал основой теории линейных дифференциальных уравнений с перемеными коэффициентами. С лёгкой руки Пикара эта статья упоминается не иначе как с определением «классическая». В русской литературе употреблялись до конца XIX в. термины «основная система интегралов», «основное уравнение» (т. е. точный перевод выражений Фукса fundamental Systeme, Fundamentale

Gleichung, от которых в нашей терминологии осталась *фундаментальная система решений*).

Отличительная черта теории дифференциальных уравнений первой половины XIX в. — решение начальной задачи и доказательство существования частного решения — такая постановка задачи принадлежит Коши. Отсюда — возросшая роль приближённых методов и представления решения степенным рядом (что связано также с интересом Коши к ТФКП — к 1835 г. относится выход теории дифференциальных уравнений в комплексную область).

В конце XIX в. появились качественные исследования решений дифференциальных уравнений. Теория создана в основном Пуанкаре (с 1878 г.) и Ляпуновым (первая статья по теории устойчивости - 1888).

Задание 1

1. Выучить греческий алфавит

A α	альфа	1	I ι	йота	10	P ρ ϱ	ро	100
B β	бэта	2	K κ $\varkappa$	каппа	20	Σ σ ς	сигма	200
Γ γ	гамма	3	Λ λ	лямбда	30	O o	омикрон	300
Δ δ	дельта	4	M μ	мю	40	Π π	пи	400
E ϵ ε	эпсилон	5	N ν	ню	50	Φ ϕ φ	фи	500
Z ζ	дзета	7	Ξ ξ	кси	60	X χ	хи	600
H η	эта	8	T τ	тау	70	Ψ ψ	пси	700
Θ θ ϑ	тэта	9	$\Upsilon\upsilon$	ипсилон	80	Ω ω	омега	800

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 215

... В греческой математике роль цифр играли буквы алфавита, т. е. α означала 1, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ и т.д. до $\vartheta = 9$ (для цифры 6 использовалась старинная греческая буква "вау"). Следующие буквы $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi$ означали $10, 20, ..., 80$, для 90 использовалась старинная буква "коппа"; $\rho, \sigma, ..., \omega$ представляли соответственно $100, ..., 800$, для 900 использовалась старинная буква "сампи". Чтобы в тексте не спутать число со словом, числа надчеркивали; например 742 записывалось как $\overline{\psi\mu\beta}$...

2. С помощью изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$y' = x - y^2.$$

Доказать, что интегральная кривая $\gamma_{(0,2)}$, проходящая через точку $(x_0, y_0) = (0, 2)$ имеет левую вертикальную асимптоту.
Указание: сравнить поведение этой интегральной кривой с интегральной кривой $y = 1/(x+1)$ поля направлений $y' = -y^2$.

Показать, что интегральная кривая $\gamma_{(0,2)}$ продолжается вправо до $+\infty$.

Замечание. Рассмотренное уравнение является уравнением Рикатти и примечательно тем, что оно не может быть решено в квадратурах, то есть несмотря на то, что через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая, ни одна из этих кривых не может быть задана как график функции, заданной «обычной» формулой.

Для сравнения отметим, что «похожее» уравнение $y' = y - x^2$ (задача №1 из задачника А. Ф. Филиппова) решается в явном виде: $y = Ce^x + x^2 + 2x + 2$ — общее решение. Поле направлений и интегральные линии этого уравнения изображены на рисунке

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 155.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Эйлер ввёл понятия общего и частного решений дифференциального уравнения и термины *общий и частный интегралы* (1743). В русском языке «частные интегралы» продержались до конца XIX в.

Эйлер изложил метод интегрирования линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в мемуаре

1743 г. (а нашёл его не позднее 1739 г.). Одновременно к методу пришёл Д. Бернулли (его работа была опубликована лишь в 1751 г.).

Лагаранж доказал, что общее решение линейного однородного уравнения имеет форму $\sum_i C_i y_i$ (1762-1765). Лагаранж, как и Д'Аламбер, не делал никаких оговорок относительно линейной независимости частных решений. После работ Гессе и Кристофеля (соответственно 1857 и 1858 гг.) условия линейной независимости были выражены через определитель Вронского.

До Коши центральным понятием теории было общее решение. Коши поставил во главу угла частное. Критерием того, что некоторое решение является общим, была возможность получить решение задачи Коши с произвольными начальными условиями.

С особым решением впервые встретился Тейлор (1715). Оборот «некоторое особое решение» (singularis quadem solutio problematis) означал у Тейлора только то, что решение найдено необычным путём.

Затем Клеро нашёл особое решение, решив уравнение, носящее его имя (1734). Он установил, что особое решение не содержится в общем. Эйлер предложил систематическое изучение особых решений дифференциального уравнения первого порядка. Он пытался установить априори правило для определения, является ли решение особым. Эйлер рассмотрел ряд дифференциальных уравнений с особыми решениями (1736), но не заметил, что последние представляют собой огибающую семейства интегральных кривых. Эйлер не имел специального названия для этих решений. Его работы возбудили интерес математиков к этой проблеме — последовали статьи Лапласа (1772), Лагаранжа (1774). Употреблялись названия integrale particuliere (Лагранж), équation singuliere (Курно в 1841 г. и Муаньо в 1844 г.). Лагранж открыл метод нахождения особого решения — исключением C из уравнений $F(x, y, C) =), F'_C(x, y, C) = 0$ — и установил, таким образом, связь с уже развитой теорией огибающих семейства кривых. Затем он пришёл ко второму методу — нахождения особого решения без знания общего: исключением y' из уравнений $f(x, y, y') = 0, f_{y'}(x, y, y') = 0$. Он не заметил, что попутно у него встречается и третий метод, переоткрытый Дарбу в 1873 г.

Первый пример, когда решение, найденное как особое, оказывается частным, дал Коши (1844), именно, уравнение $(y')^3 = 8y^2 - 4xyy'$ имеет общее решение $Y = C(x+C)^2$ и особое $y = 0$. После этого было осознано, что в точках особого решения нарушается единственность.

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 161.

... когда Коши обнаружил «патологическую» функцию $y = \exp(-1/x^2)$, то возникла и проблема существования и единственности решения дифференциального уравнения (1823).

3. Решить уравнение
$$y' = \frac{\sin y}{\sin x}$$
и построить его интегральные кривые.

4. Решить уравнение

$$e^x \sin^3 y\, dx + (1 + e^{2x}) \cos y\, dy = 0$$

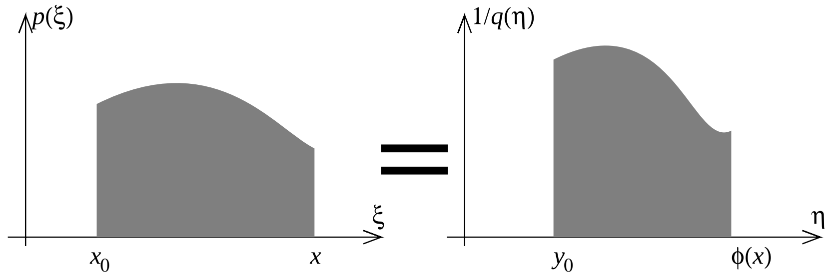
и построить его интегральные кривые. Найти решения с начальными данными $y(0) = \pi/6$, $y(0) = \pi/4$ и построить соответствующие интегральные кривые.

Замечание. Решение $y = \phi(x)$ уравнения с разделяющимися переменными $y' = p(x)q(y)$ с начальными данными $\phi(x_0) = y_0$ задаётся формулой

$$\int_{x_0}^{x} p(\xi) d\xi = \int_{y_0}^{\phi(x)} \frac{d\eta}{q(\eta)} \qquad (*)$$

Однако зачастую даже в том случае, когда интегралы могут быть выражены в явном виде, и тем самым может быть получено решение в явном виде, целесообразно ограничиться рассмотрением соотношения (*), поскольку полученные явные формулы могут оказаться громоздкими. При этом анализе очень полезно вспомнить геометрический смысл понятия определённого интеграла как площади соответствующей криволинейной трапеции. В данном случае это означает, что мы должны выбирать значения величин x и $\phi(x)$ так, чтобы уравнивать площади криволинейных трапеций (с учётом знака), расположенных между осью абсцисс и графиками функций $p(\xi)$ и $1/q(\eta)$ при условии, что одна из вертикальных сторон задаётся величиной x_0 и y_0 (см. рисунок). Этот приём особенно полезен для изучения поведения решений (интегральных кривых) при приближении их к границе области определения, то есть при

$x \to \alpha, \ x \to \omega$, в частности и в том случае, когда $\alpha = -\infty, \ \omega = +\infty$.



Отметим, что такой анализ может быть проведён и в том случае, когда интегралы, фигурирующие в выражении (*) не могут быть выражены в явном виде.

5. Решить уравнение

$$y' = \frac{x+y}{x}$$

и построить его интегральные кривые.

6. Решить уравнение

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x} - 1} + \frac{y}{x}$$

и построить его интегральные кривые.

7. Перейдя к полярным координатам, решить уравнение

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

и построить его интегральные кривые.

Замечание. Последние три уравнения являются однородными уравнениями. Поле направлений постоянно вдоль лучей, идущих из начала координат — они являются изоклинами. Поэтому интегральные линии гомотетичны с центром гомотетии в точке $(0, 0)$: получаются друг из друга растяжением или сжатием в любое число раз (в том числе отрицательное). Это свойство является характеристическим для однородных уравнений.

Обычный способ решения — переход к однородным кооординатам u, v, $x = u, y = uv$ (раздутие). Однако переход к полярным координатам $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ также превращает однородное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными, иногда более простое, чем уравнение полученное с помощью раздутия. Это имеет место, например, в задаче №7.

8. Решить уравнение

$$2xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$$

и построить его интегральные кривые.

Указание. Подобрать замену переменных $x = u, y = vu^\alpha$, которая приводит данное уравнение к уравнению с разделяющиися переменными.

9. Рассмотрим уравнение

$$(1 + (y')^2)y = 1. \qquad (*)$$

а) Построить отдельно поле направлений для каждого из уравнений

$$y' = \sqrt{\frac{1-y}{y}} \quad (**), \qquad y' = -\sqrt{\frac{1-y}{y}} \quad (***)$$

и качественно изобразить интегральные кривые этих уравнений.

Проверить, что кривая

$$x = \frac{t - \sin t}{2}, \quad y = \frac{1 - \cos t}{2}, \quad t \in (0, \pi]$$

является интегральной кривой уравнения (**);
проверить, что кривая

$$x = \frac{t - \sin t}{2}, \quad y = \frac{1 - \cos t}{2}, \quad t \in [\pi, 2\pi)$$

является интегральной кривой уравнения (***).

б) Построить поле направлений уравнения (*). Проверить, что кривая

$$x = \frac{t - \sin t}{2}, \quad y = \frac{1 - \cos t}{2}, \quad t \in (0, 2\pi)$$

является его интегральной кривой. Начертить эту кривую. (Она называется циклоидой, или рулеттой, или трохоидой и появляется также при решении задач о кривой наискорейшего спуска (брахистохрона) и о движении маятника с периодом, не зависящим от амплитуды (таутохрона). С ней связаны имена Галилея, Декарта, Ферма, Паскаля, И. Бернулли, Я. Бернулли, Лейбница, Лопиталя, Ньютона, Гюйгенса и других известных математиков.)

в) Проверить, что кривая

$$x = \frac{t - \sin t}{2} + C, \quad y = \frac{1 - \cos t}{2}, \quad t \in (0, 2\pi)$$

является интегральной кривой уравнения (*) при всех $C \in R$. Начертить эту кривую для $C = 0, C = \pm\pi, C = \pm 2\pi, C = \pm 4\pi$.

г) Проверить, что кривая

$$x = k\frac{t - \sin t}{2}, \quad y = k\frac{1 - \cos t}{2}, \quad t \in (0, 2\pi)$$

является интегральной кривой уравнения

$$(1 + (y')^2)y = k$$

при любых $k > 0$. Начертить эту кривую при $k = 1, k = 2$.

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 21.

БРАХИСТОХРОНА

Слово составлено из греческих $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ (очень короткий) и $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ (время). Термин введён Иоганном Бернулли, который поставил задачу о брахистохроне в 1696 г. В следующем году задачу решили Лейбниц, Якоб Бернулли, Лопиталь и английский аноним, в котором И. Бернулли узнал Ньютона: «Tanquam ex ungue leonem (Льва узнают по когтям)» — сказал он.

Задание 2

1. Найти ограниченное решение уравнения

$$y' = (-4\sin^2 x)y + e^{-\sin(2x)}$$

и показать, что оно будет периодической функцией; построить интегральные кривые.

Пусть $Y(x; y_0)$ — решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным данным $y(0) = y_0$. Построить отображение $\Phi : R^1 \to R^1$ $\Phi(y_0) = Y(\pi; y_0)$ («отображение за период») и найти его неподвижную точку, то есть решение y_0^* уравнения $\Phi(y_0) = y_0$. Показать, что $Y(x; y_0^*)$ есть найденное выше периодическое решение.

Замечание. Предложенная задача иллюстрирует проблему отыскания периодических решений дифференциальных уравнений с периодической правой частью. В данном случае (линейное неоднородное уравнение) проблема исчерпывается следующим утверждением (см. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. третье. М.: «Наука», 1984)

Т е о р е м а. *Если в уравнении*

$$dy/dx = f(x)y + g(x)$$

с периодической (периода $T > 0$) по x правой частью среднее по периоду значение f отлично от нуля, то уравнение имет T-периодическое решение, и притом ровно одно (устойчивое, если среднее значение отрицательно, и неустойчивое, если оно положительно).

2. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{4}{x}y + 2x\sqrt{|y|}.$$

а) Дать картину решений; показать, что она симметрична относительно оси Oy.

б) Написать непродолжаемое решение и указать интервал его существования для задачи Коши $y(1) = 1$.

в) Сколько непродолжаемых решений имеет задача Коши $y(1) = -1$?

Замечание. «Половина» этой задачи, а именно уравнение Бернулли

$$y' = \frac{4}{x}y + 2x\sqrt{y},$$

рассматривается в задачнике А. Ф. Филиппова (№156). Примечательно, что приведённый в конце задачника ответ $y = x^4 \ln^2 Cx, y = 0$ является, строго говоря, неверным: это выражение задаёт решение лишь на промежутке $Cx > 1$.

3. Найти интегрирующий множитель для уравнения Дарбу

$$(2x^2y^2 + y)dx + (x^3y - x)dy = 0,$$

решить уравнение и построить его интегральные кривые.

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 106.

МНОЖИТЕЛЬ ИНТЕГРИРУЮЩИЙ

Впервые его применил И. Бернулли (ок. 1700 г.). Этот метод вновь открыл Клеро (1739), он сформулировал условие, при котором выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ есть полный дифференциал. Полная теория интегрирующего множителя создана Эйлером (1760, 1762).

4. Методом последовательных приближений решить задачи Коши

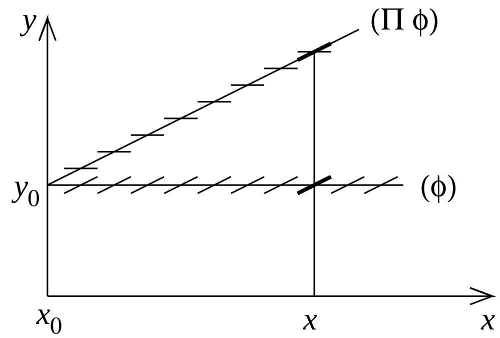
$$\begin{aligned} y' = 2x, \quad y(0) = 1; \\ y' = y, \quad y(0) = 1. \end{aligned}$$

Проверить, что полученные решения являются неподвижными точками отображения Пикара.

Замечание (см. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. третье. М.: «Наука», 1984). Отображение Пикара П, отвечающее задаче Коши $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ — это отображение, которое переводит функцию $\varphi : x \mapsto y$ в функцию $\Pi\varphi : x \mapsto y$, где

$$(\Pi\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds.$$

Геометрически переход от φ к $\Pi\varphi$ означает построение по кривой (φ) новой кривой $(\Pi\varphi)$, касательная к которой при каждом x параллельна данному полю направлений, но не самой кривой $(\Pi\varphi)$ — тогда $\Pi\varphi$ было бы решением, — а в соответствующей точке кривой (φ) (см. рисунок).



Имеем

$$\begin{array}{c} \varphi\text{— \textit{решение}} \\ \text{\textit{с начальным условием}} \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi = \Pi\varphi)$$

5. Построить последовательные приближения $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ к решению уравнения

$$y' = x - y^2$$

с начальным условием $y(0) = 2$. Оценить промежуток, на котором существует это решение. Результат сравнить с результатом задачи 2 из Задания 1.

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 102.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Этот метод испокон веков применялся в астрономии для численного решения уравнений. С большой общностью он был сформулирован Коши для дифференциальных уравнений в частных производных (1840) и примерно в то же время применён к обыкновенным диференциальным уравнениям Лиувиллем, который доказал сходимость ряда приближений для некоторых специальных случаев в 1838 г.

Аналогичные приёмы изобрели также Лазар Фукс (1870), Джузеппе Пеано (1887) для линейного дифференциального уравнения произвольного порядка. Пеано полагал, что он был первым изобретателем метода и несколько раз пытался доказать свой приоритет перед Пикаром, что, вообще говоря, было совершенно несвойственно Пеано. Использование метода для доказательства существования решения восходит к Шварцу.

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 182.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Проблемы существования возникли уже в греческой математике. Считается, что древнейшее доказательство существования математического объекта принадлежит Гиппократу. Аристотель считал таким доказательством построение. Выдающимися достижениями Пифагорейской школы считались доказательства существования несоизмеримых отрезков и правильного додекаэдра. В дальнейшем проблемы существования присутствовали в математике. Вот несколько примеров.

Шараф ад-Дин ад-Туси (конец XII в.) систематически исследовал существование положительных корней уравнения.

Эйлер ставил вопрос о существовании интегрирующего множителя.

Однако появление в математике теорем существования связывают с именем Коши.

Метод последовательных приближений использовали при доказательстве этой теоремы Фукс (1870), позднее Пикар и Пеано (1877), последний ослабил требования Коши и упростил доказательство.

Рисс полагал, что доказательство существования решения важнее, чем аппарат его нахождения (в теории интегральных уравнений).

6. Выяснить, сколько непродолжаемых решений имеют следующие задачи

$$\begin{array}{ll}
\text{1а)} & y' = \ln(x^2 + y^2), \quad y''(0) = 2; \\
\text{1б)} & y' = \ln(x^2 + y^2), \quad y''(0) = 1/2; \\
\text{1в)} & y' = \ln(x^2 + y^2), \quad y''(0) = 0; \\
\text{2а)} & y' = 2x + x^2y^2, \quad y''(0) = 2; \\
\text{2б)} & y' = 2x + x^2y^2, \quad y''(0) = 1/2; \\
\text{2в)} & y' = 2x + x^2y^2, \quad y''(0) = 0.
\end{array}$$

Построить интегральные кривые, отвечающие исследуемым решениям.

Замечание. Поле направлений в пунктах 1а,б,в) симметрично относительно начала координат. Поэтому интегральные линии переходят друг в друга при преобразовании симметрии: $(x, y) \to (-x, -y)$; в частности интегральные линии, проходящие через начало координат, симметричны относительно точки $(0, 0)$.

7. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + f(t)x^3 = 0,$$

где f — непрерывная на R чётная функция. Доказать, что каждое непродолжаемое решение $x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее условию $x(0) = 0$, определено на симметричном относительно 0 интервале и является нечётной функцией.

Задание 3

1. Найти общее решение систем

$$\begin{array}{lllll} \dot x = 3x - y, & \dot x = -x + 2y, & \dot x = -x - 4y, & \dot x = x, & \dot x = x - y, \\ \dot y = x + y, & \dot y = x + y, & \dot y = x + y, & \dot y = x + y, & \dot y = x + y \end{array}$$

и начертить их траектории. (Сравнить последние две задачи с задачами 5, 7 Задания 1.)

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 185.

ТРАЕКТОРИЯ

Термин образован от латинского traectorius — «то, что относится к перемещению». Слово появилось у Гюйгенса, а также в письмах И. Бернулли к Лейбницу (1698), где обсуждалось нахождение ортогональных траекторий на плоскости.

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 184.

... Классификация *особых точек дифференциального уравнения* введена Пуанкаре (статьи 1881–1886 гг.), мы следуем его терминологии: узел (noeud), центр (centre), фокус (foyer) и седло (col — «горное седло, перевал»).

2. Построить фундаментальную систему решений для системы

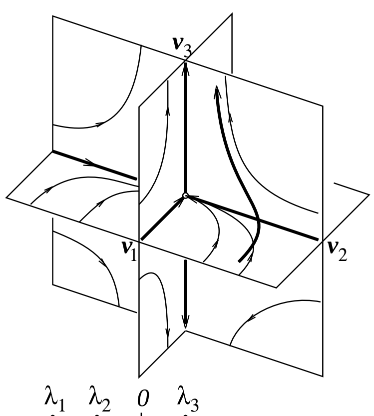
$$\dot x = 5x - y - 4z, \quad \dot y = -12x + 5y + 12z, \quad \dot z = 10x - 3y - 9z.$$

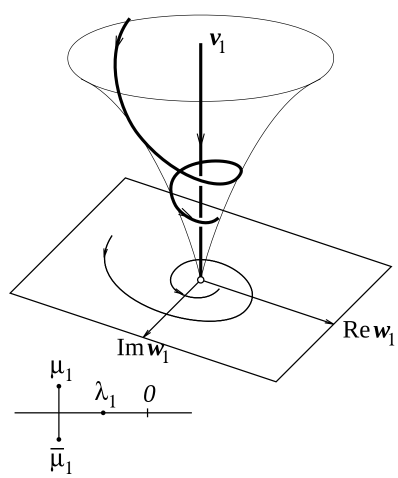
Замечание. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами n-го порядка

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},$$

где $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, A — вещественная матрица размера $n\times n$. Пусть для простоты матрица A имеет только простые корни, среди которых k действительных $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, и $2l$ комплексных $\mu_1, \bar\mu_1, \dots, \mu_l, \bar\mu_l$, $k + 2l = n$. Тогда пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму k одномерных и l двумерных инвариантных подпространств матрицы A. Если точка $\boldsymbol{x}$ принадлежит какому-либо из этих подпространств, то и вектор скорости $A\boldsymbol{x}$ тоже принадлежит этому же подпространству. Поэтому эти подпространства будут инвариантными для движений системы. Инвариантными подмножествами фазового пространства будут также линейные подпростанства, являющиеся прямой суммой любого набора указанных одно- и двумерных инвариантных подпространств.

В качестве базиса в каждом одномерном подпространстве может быть взят действительный собственный вектор $\boldsymbol{v}_i$ матрицы A, отвечающий действительному собственному числу λ_i, $i = 1, \ldots, k$. Движение в этом инвариантном подпространстве описывается скалярным линейным однородным уравнением вида $\dot{x} = \lambda_i x$, каждая траектория представляет собой либо точку покоя, либо луч, с началом в точке 0. Базисом в каждой из инвариантных двумерных плоскостей может служить пара $\mathrm{Re}\boldsymbol{w}_i, \mathrm{Im}\boldsymbol{w}_i$, где $\boldsymbol{w}_i$ — комплексный собственный вектор матрицы A, отвечающий комплексному собственному числу $\mu_i = \alpha_i + i\beta_i$, $i = 1, \ldots, l$. Движение здесь описывается плоской линейной однородной системой с постоянными коэффициентами вида $\dot{x} = \alpha_i x - \beta_i y, \dot{y} = \beta_i x + \alpha_i y$, если x, y — координаты в подходящем базисе. В этом случае траектории могут быть либо точкой покоя, либо спиралями, либо эллипсами. Результирующее движение является суммой движений, происходящих в инвариантных подпространствах.





Для примера на рисунке изображены траектории систем третьего порядка для случая, когда матрица A имеет три действительных собственных числа, причём $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ (слева), и для случая, когда матрица

A имеет одно действительное и два комплексно-сопряжённых собственных числа, причём $\mathrm{Re}\mu_1 = \mathrm{Re}\bar{\mu}_1 < \lambda_1 < 0$ (справа).

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 108.

НЕЗАВИСИМОСТЬ ЛИНЕЙНАЯ

Очень нескоро было замечено, что в далёких друг от друга областях математики используется одно и то же понятие. Оно появилось в середине XIX в., но со страниц научных журналов перешло в учебники в промежуток 1880-1901 гг. Последняя дата — год публикации Максима Бохера «The Theory of Linear Dependence».

В векторном исчислении теории кватернионов Гамильтона строгого определения линейной зависимости не имелось, но стандартной была фраза: раз α, β, γ лежат в одной плоскости, один из этих векторов можно выразить через остальные... (аналогичное утверждение для четырёх векторов в пространстве). Более строгое и общее определение (для n-мерного пространства) было дано Германом Грассманом во втором варианте его «Ausdehnungslehre...» («Линейном учении о протяжённости...», 1861). Джузеппе Пеано сформулировал аксиомы линейного векторного пространства (1888) и привёл примеры, которые продемонстрировали, что самые разные теории допускают единое изложение, единый метод.

При решении линейных дифференциальных уравнений (начиная с мемуара Эйлера 1743 г.) за неимением этого необходимого понятия в центре внимания находилось не свойство частных решений, а требование n произвольных постоянных. Современные традиции в теории дифференциальных уравнений утвердились гораздо позже, чем было определено понятие «линейной зависимости функций одной переменной» в статье Кристофеля с именно таким названием (1893). Например, в «Курсе анализа» Жордана (1893) «функции, не связанные никаким соотношением», называются «различными» (как и у Коши за 70 лет до того). Первым учебником, где «фундаментальная система решений...», «линейная независимость...» встречаются на каждой странице, является «Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen» (1895) австрийского математика Людвига Шлезингера.

Якоби оказал существенное влияние на развитие теории определителей: 30 статей по этой тематике завершала статья «О функциональных детерминантах» (1841). Здесь говорилось о зависимости, а не о *линейной* зависимости (независимости) функций. В «Лекциях» Кронекера (опубликованных только в 1901 г.) сделан последний шаг к современному изложению, здесь он ввёл «линейно независимую систему s решений».

Пусть дана линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{Y} = A(t)Y, Y \in R^n$$

Линейное пространство L решений этой системы изоморфно пространству R^n.

Фундаментальной системой решений (ФСР) называется базис пространства L. Матрица, столбцами которой являются базисные решения, называется матрицей Вронского. Определитель этой матрицы $W(t)$ называется определителем Вронского, или вронскианом. Имеет место соотношение

$$\dot{W} = aW,\ a(t) = TrA(t),\ (\text{след } A(t))$$

(теорема Лиувилля-Остроградского).

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 26.

ВРОНСКИАН

Это название определителю дал Мюир (1882) в честь польского учёного Йозефа (Гоёне) Вронского (латинский суффикс -an означает родительный падеж). Вронский в 16 лет поступил на военную службу в артиллерию. После очередного раздела Польши он перешёл в русскую армию и, послужив в штабе Суворова, решил в 20 лет выйти в отставку и посвятить себя науке. Император Павел назначил ему пенсию! и Вронский поехал учиться в Германию, после чего оставшуюся часть жизни прожил в Париже. В "Refutation de la Théorie de Fonctions analitiques de Lagrange"(«Опровержение теории аналитических функций Лагранжа», 1812) Вронский рассматривал определитель, составленный из конечных разностей различных порядков (не обязательно последовательных) функций $f, g, ...$, имеющих некоторое отношение к определителю, названному его именем. Интересно, что Бобынин, составивший биографический очерк «Гоёне Вронский» (1894) не отметил этого обстоятельства.

К исследованию линейной линейной зависимости системы функций вронскиан привлекли Гессе (1857) и Кристофель (1858). В течение нескольких десятилетий во все учебные курсы включалась теорема: обращение в нуль определителя Вронского является необходимым и достаточным условием линейной зависимости функций. Но в 1889 г. в заметке "Sur les wronskiens" Пеано представил контрпример. Именно, функции $y = x^2$ и $y = x|x|$ непрерывны и дифференцируемы всюду, определитель Вронского, составленный из нах, тождественно равен нулю, а функции линейно независимы. С тех пор условия формулируются лишь для решений дифференциального уравнения, а не для произвольных функций.

3. Применяя метод вариации произвольных постоянных, найти общее решение системы

$$\dot{x} = x + y - \frac{1}{t}, \quad \dot{y} = -x - y + \frac{1}{1+t}.$$

Из кн.: Н. В. Александрова. История математических терминов, понятий, обозначений. М., Издательство ЛКИ, 2008. С. 100.

МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Метод детально разработан Ж.Л. Лагранжем при решении дифференциальных уравнений (публикации 1762, 1765, 1775 гг.). Вообще говоря, метод был известен раньше Эйлеру (сочинение о приливах и отливах). Этот же приём независимо придумал Д. Бернулли (1740). Однако Эйлер варьировал не все величины, кроме того он допустил некоторые ошибки в вычислениях; получившиеся результаты настолько огорчили его, что он перестал заниматься дальнейшим развитием метода. Название дал Лагранж.

4. Применяя метод вариации произвольных постоянных, найти общее решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \frac{1}{e^t \sin t}.$$

5. Применяя метод комплексных амплитуд, найти общее решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = e^t \sin t, \quad \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \frac{\sin t}{e^t}.$$

6. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} &m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0,\\ &M\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1 - x_3) = 0,\\ &m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0, \qquad\qquad k, m, M > 0. \end{aligned}$$