ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

(от 07.06.2015)

Примечание. Подразумевается, если не оговорено противное, что теорему из билета нужно рассказывать с доказательством, если оно было разобрано на лекциях или если оно было оставлено в качестве упражнения.

1. Простейшая задача вариационного исчисления: постановка задачи, определение локального и глобального экстремума. Необходимое условие локального экстремума (уравнение Эйлера).

2. Три случая понижения порядка в уравнении Эйлера.

3.Постановка (физическая и аналитическая) и решение задачи о брахистохроне.

4. Постановка (геометрическая и аналитическая) и решение задачи о поверхности вращения наименьшей площади.

5. Вариационная задача с несколькими независимыми функциями. Вариационная задача с несколькими независимыми переменными.

6. Вариационная задача с несколькими независимыми функциями. Вариационная задача с высшими производными.

7. Изопериметрическая задача: постановка классической изопериметрической задачи; постановка простейшей изопериметрической задачи; теорема Эйлера; принцип взаимности; решение классической изопериметрической задачи.

8. Постановка краевой задачи. Условия однозначной разрешимости (с доказательством).

9. $A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=f(x)$. Сведение задачи (α,β,f) к задаче $(0,0,\tilde{f})$.

10. $A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=f(x)$. Решение задачи $(0,0,f)$ в случае однозначной разрешимости. Функция Грина. Четыре ее свойства.

11. Собственные значения и собственные функции дифференциального оператора. Размерность пространства собственных функций, соответствующих одному λ. Существование действительной собственной функции, соответствующей действительному λ. Ортогональность с весом собственных функций.

12. Задача Штурма-Лиувилля. Теорема об односторонней ограниченности множества действительных собственных значений (доказательство для случая $y(a)=y(b)=0$).

13. Задача Штурма-Лиувилля: количество собственных значений, собственных функций, разложение по собственным функциям.

14. Система $\dot{X}=F(t,X)$. Устойчивость по Ляпунову, неустойчивость, асимптотическая устойчивость: примеры. Сведение задачи об устойчивости любого решения к исследованию устойчивости нулевого решения.

15. $\dot{X}=A(t)X+F(t)$ — устойчивость в линейных системах (связь с ограниченностью решений, стремлением их к нулю).

16. $\dot{X} = AX, \quad A = \text{const}$ матрица $n \times n$ — устойчивость в линейных системах с постоянными коэффициентами (зависимость от собственных значений матрицы A).

17. Устойчивость решений автономных систем: идея метода функций Ляпунова, теорема об устойчивости по Ляпунову (с доказательством), теорема об асимптотической устойчивости в терминах функции Ляпунова, теорема о неустойчивости, теорема Четаева.

18. Свойство решений линейных систем с постоянными коэффициентами: существование квадратичной функции Ляпунова для системы $\dot{X} = AX$ в случае $Re\lambda(A) < 0$.

19. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению (с доказательством).

20. Устойчивость по первому приближению положений равновесия автономных систем.

21. Основное свойство решений автономных систем. Фазовое пространство, траектории. Пересечение траекторий. Три типа движений автономных систем.

22. Классификация фазовых портретов линейных систем на плоскости: узел, седло, фокус, центр, вырожденный узел. Линеаризация нелинейных систем в окрестности положения равновесия — сохранение типов особых точек.

23. Предельные циклы. Поведение траекторий в окрестности предельного цикла. Устойчивые, неустойчивые, полуустойчивые предельные циклы.

24. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о числе функционально независимых первых интегралов.

25. Связь первого интеграла с решением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.