

Версия от 03.05.2017

ОСНОВЫ функционального анализа

И. В. Подвигин

Новосибирский государственный университет
физический факультет
кафедра высшей математики

Классический идеал атомистического изложения математики требует, чтобы материал был сгущен в форме постулатов, теорем и доказательств. В противовес этому математическую дисциплину можно рассматривать как непрерывную ткань взаимных связей, при изложении которых метод и мотивировка вступают на передний план

Р. Курант

- © Новосибирский государственный университет, 2014–2017
- © И. В. Подвигин, 2014–2017
- © $i^{\pi}\sqrt{a_n}$, 2014–2017

Глава 1

Ряды Фурье

Одно из преимуществ представления рядом Фурье по сравнению с другими (например, по сравнению с представлением в виде ряда Тейлора) заключается в том, что его можно применять к разрывным функциям

Г. Арфкен

Введение

Представление функций в виде функциональных рядов в математике и ее приложениях играют не маловажную роль. К примеру, в курсе математического анализа была изучена тема рядов Тейлора (и Маклорена), из которой известно, что всякая бесконечно дифференцируемая функция $f \in C^\infty(a, b)$ может быть представлена в виде специального степенного ряда

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

в каждой точке $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$, где $\delta = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f^{(n)}(x_0)|}}$. Зная поведение коэффициентов этого ряда можно судить о некоторых свойствах самой функции. Кроме того, использование степенных рядов было полезно при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В комплексном анализе важную роль играют ряды Лорана, частным случаем которых являются ряды Тейлора. В нашем же курсе центральную роль в первой главе будут играть специальные тригонометрические ряды — ряды Фурье. Они также как и степенные ряды будут использоваться нами при решении имеющих физический смысл дифференциальных уравнений, только уже в частных производных. Отметим также простую связь между рядами Фурье и рядами Лорана. Имея для некоторой функции $f(z)$ разло-

Л
е
к
ц
и
я
1

жение в ряд Лорана в кольце $r < |z| < R$ комплексной плоскости

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

и рассматривая его на любой окружности $|z| = \rho$ внутри кольца сходимости, мы получаем ряд Фурье в комплексной форме для функции $g(\varphi) = f(\rho e^{i\varphi})$:

$$g(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n e^{in\varphi}.$$

1.1 Задача о разложении 2π -периодической функции в ряд Фурье

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и предположим, что она представляется в виде ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1.1.1)$$

Нас будут интересовать два вопроса об этом разложении:

1) Какими свойствами должна обладать функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, чтобы разложение (1.1.1) было справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$? Другими словами это означает, определить класс функций, для которых функциональный ряд из правой части равенства (1.1.1) с некоторыми определенными коэффициентами a_n и b_n сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, и его сумма равна левой части равенства (1.1.1), т.е. значению в той же точке $x \in \mathbb{R}$ функции f .

На этот вопрос мы уже можем частично дать ответ: функция f должна быть 2π -периодической, поскольку правая часть равенства (1.1.1) такова и есть.

2) Как найти коэффициенты a_n, b_n ?

Эти два вопроса и есть для нас задача о разложении 2π -периодической функции в ряд Фурье. Начнем мы со второго вопроса, т.е. с нахождения выражений для коэффициентов a_n и b_n .

Итак, пусть наша функция 2π -периодична и настолько замечательная (т.е. обладает всеми свойствами, необходимыми для строгости рассуждений), что справедливо равенство (1.1.1), которое к тому же мы можем интегрировать (для левой части нет никаких проблем, а вот для правой возникают вопросы о перестановки предельных переходов: бесконечного суммирования и интегрирования).

1.1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ 5

Проинтегрируем равенство (1.1.1) на периоде, например, на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx dx \\ &= a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \\ &= a_0\pi,\end{aligned}$$

откуда находим формулу для коэффициента a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \quad (1.1.2)$$

Домножим теперь равенство (1.1.1) на $\cos mx, m \geq 1$, и снова проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(n+m)x + \cos(n-m)x) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{nm} = a_m \pi.\end{aligned}$$

Отсюда находим формулу для коэффициентов a_m :

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad m \geq 1. \quad (1.1.3)$$

Умножая равенство (1.1.1) на $\sin mx, m \geq 1$, интегрируя его и проделывая аналогичные выкладки, получаем формулу и для коэффициентов b_m :

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad m \geq 1. \quad (1.1.4)$$

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция. Коэффициенты a_n, b_n , найденные по формулам (1.1.2), (1.1.3) и (1.1.4), называются *коэффициентами Фурье* функции f , а сами формулы — *формулы Эйлера-Фурье*¹.

¹Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцарский математик, один из самых известных членов Российской Академии Наук; Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) — французский математик и физик, основоположник теории тригонометрических рядов.

Заметим, что в формулах Эйлера–Фурье можно заменить интегрирование на любой отрезок длиной в период функции f .

Определение 2. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция. Говорят, что ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

с коэффициентами Фурье a_n и b_n есть [формальный] ряд Фурье функции f . При этом пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Из формул (1.1.2) и (1.1.3) видно, что первая является частным случаем второй при $m = 1$. Этим объясняется исторически сложившееся написание ряда Фурье с выделенным нулевым коэффициентом $a_0/2$.

Отметим, что все выкладки этого параграфа (перестановка предельных переходов) были справедливы, например, если ряд Фурье сходилась равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. О том, для каких функций имеет место такая сходимость ряда Фурье, и ответ на первый сформулированный вначале вопрос, мы будем обсуждать чуть позднее, в следующих параграфах. Отметим лишь, что для равенства (1.1.1) необходимо существование коэффициентов Фурье (1.1.2)–(1.1.4), для чего достаточно потребовать абсолютную интегрируемость функции f на своем периоде. Действительно, если $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$, то

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| |\cos nx| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

Аналогично показывается ограниченность коэффициентов b_n . Везде в дальнейшем, если это особо не оговорено, мы будем молчаливо предполагать, что коэффициенты Фурье существуют (читай f — абсолютно интегрируема на промежутке).

1.2 Ряд Фурье для функций с произвольным периодом

Аналогично рассуждениям предыдущего параграфа можно получить ряд Фурье и формулы коэффициентов Фурье для функций с произвольным периодом. Мы получим эти результаты, опираясь на уже имеющиеся формулы. Покажем, как это сделать. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — $2l$ -периодическая (и абсолютно интегрируемая на своем периоде) функция, т.е. $f(x) = f(x + 2l)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Определим 2π -периодическую функцию $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$g(y) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right).$$

Проверим, что g действительно периода 2π :

$$g(y + 2\pi) = f\left(\frac{l(y + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{ly}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right) = g(y).$$

Для 2π -периодической функции g мы можем записать (формальный) ряд Фурье:

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny + b_n \sin ny$$

с коэффициентами Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny dy, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny dy, \quad n \geq 1.$$

Сделав во всех выражениях замену переменной $x = \frac{ly}{\pi}$, получим (формальный) ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \quad (1.2.1)$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n \geq 0, \quad (1.2.2)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \quad n \geq 1. \quad (1.2.3)$$

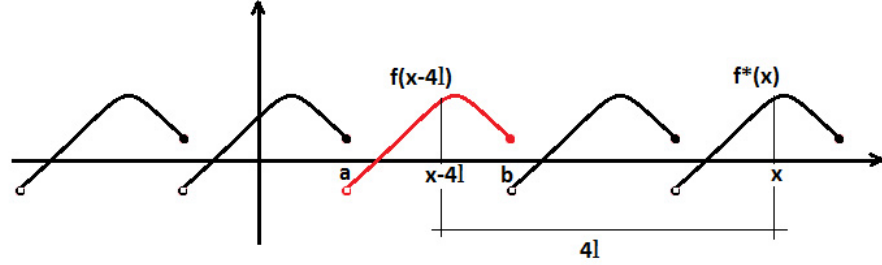
Определение 3. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — $2l$ -периодическая функция. Коэффициенты a_n, b_n , найденные по формулам (1.2.2) и (1.2.3) называются *коэффициентами Фурье* функции f . При этом ряд (1.2.1) с коэффициентами Фурье a_n и b_n есть *[формальный] ряд Фурье* функции f .

1.3 Разложение в ряд Фурье на интервале

1.3.1. Пусть $[a, b]$ — отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}$ и $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, абсолютно интегрируемая на нем. Положим $2l = b - a$. Функцию f можно продолжить на всю числовую прямую $\mathbb{R}$ до $2l$ -периодической функции f^* . Для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется такое единственное число $k_x \in \mathbb{Z}$, что $x + 2lk_x \in (a, b]$ (можно также брать полуоткрытый интервал $[a, b)$) тогда функция f^* определяется равенством

$$f^*(x) = f(x + 2lk_x).$$

Вся эта конструкция изображена на рис. 1.1.

Рис. 1.1: Периодическое продолжение функции f на $\mathbb{R}$

Определение 4. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция. Разложить в [формальный] ряд Фурье функцию f на отрезке $[a, b]$ означает разложить в [формальный] ряд Фурье $2l$ -периодической функции f^* , $2l = b - a$.

При этом формулы (1.2.1)–(1.2.3) переписываются следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nx}{b-a} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{b-a} \quad (1.3.1)$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi nx}{b-a} dx, \quad n \geq 0, \quad (1.3.2)$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi nx}{b-a} dx, \quad n \geq 1. \quad (1.3.3)$$

Отметим, что разница в построении периодической функции f^* заключается в определении ее значений на концах отрезка $[a, b]$ (в описанном выше случае мы брали $f^*(a) = f^*(b) = f(b)$); поскольку интегрирование (по мере Лебега) не зависит от значений в одной точке, то формулы (1.3.1)–(1.3.3) не изменятся при рассмотрении f^* с какими-нибудь другими значениями в этих точках.

1.3.2. Рассмотрим теперь симметричный относительно нуля отрезок $[-a, a]$ и функцию $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Ряд Фурье (1.3.1) может выглядеть проще, если функция f обладает дополнительными свойствами четности или нечетности. Предположим, что f — четная функция, т.е. $f(x) = f(-x)$ для любого $x \in [-a, a]$. Тогда для всех $n \geq 1$ коэффициенты $b_n = 0$. Действительно,

записывая формулу (1.3.3) (или (1.2.3)), получаем

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-a}^0 f(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx \\
 &= -\frac{1}{a} \int_a^0 f(-y) \sin \frac{\pi n (-y)}{a} dy + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx = 0.
 \end{aligned}$$

Для коэффициентов a_n , $n \geq 0$ в этом случае справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos \frac{\pi n x}{a} dx \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-a}^0 f(x) \cos \frac{\pi n x}{a} dx + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{\pi n x}{a} dx \\
 &= -\frac{1}{a} \int_a^0 f(-y) \cos \frac{\pi n (-y)}{a} dy + \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{\pi n x}{a} dx \\
 &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{\pi n x}{a} dx.
 \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье четной функции $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{a} \quad (1.3.4)$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{\pi n x}{a} dx, \quad n \geq 0. \quad (1.3.5)$$

Аналогичным образом показывается, что для нечетной функции $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е. $f(x) = -f(-x)$ для любого $x \in [-a, a]$) ее ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{a} \quad (1.3.6)$$

с коэффициентами

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx, \quad n \geq 1. \quad (1.3.7)$$

1.3.3. Рассмотрим теперь отрезок $[0, a]$ и функцию $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$. Помимо разложения в ряд Фурье вида (1.3.1) для этой функции можно получить еще два разложения. Продолжим функцию f на отрезок $[-a, a]$ двумя способами: четным и нечетным. Обозначим эти продолжения соответственно f_{even} и f_{odd} ; смотрите пример на рис. 2 и 3.

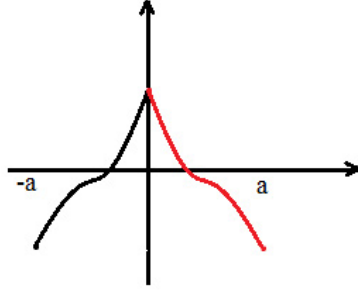


Рис. 1.2: Четное продолжение: $f_{\text{even}}(x) = f(-x)$ для любого $x \in [-a, 0]$

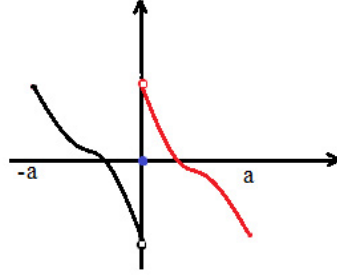


Рис. 1.3: Нечетное продолжение: $f_{\text{odd}}(x) = -f(-x)$ для любого $x \in [-a, 0]$

Определение 5. Разложение в ряд Фурье функций f_{even} и f_{odd} на отрезке $[-a, a]$ называется *разложением в ряд Фурье функции f по косинусам и по синусам* соответственно на отрезке $[0, a]$.

Принимая во внимание, что $f_{\text{even}}(x) = f_{\text{odd}}(x) = f(x)$ для любого $x \in (0, a]$, получаем, что непосредственно формулы этих разложений есть (1.3.4), (1.3.5) — по косинусам; (1.3.6), (1.3.7) — по синусам.

1.4 Комплексная форма ряда Фурье

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция. Запишем ее (формальный) ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Используя формулы Эйлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$

перепишем этот ряд в виде

$$\begin{aligned}
 f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) - \frac{ib_n}{2} (e^{inx} - e^{-inx}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},
 \end{aligned}$$

где

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, & n < 0, \\ \frac{a_0}{2}, & n = 0, \\ \frac{a_n - ib_n}{2}, & n > 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.4.1)$$

К примеру, для $n < 0$ имеем

$$c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos(-n)x + i \sin(-n)x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nx} dx.$$

Ясно, что формулу (1.4.1) можно применять и для комплекснозначных функций, поэтому введем следующее

Определение 6. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — 2π -периодическая функция. Рядом Фурье в комплексной форме для этой функции называется ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1.4.2)$$

с коэффициентами Фурье c_n , найденным по формуле (1.4.1).

По аналогии с предыдущими рассуждениями ряд Фурье в комплексной форме для $2l$ -периодической функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ находится по формуле

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}} \quad (1.4.3)$$

с коэффициентами Фурье

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\frac{-i\pi nx}{l}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.4.4)$$

1.5 Теорема о представимости функции в точке своим рядом Фурье

1.5.1. Лемма Римана–Лебега

Начнем отвечать на первый вопрос, сформулированный в §1. Для этого докажем одно полезное вспомогательное утверждение — лемму Римана–Лебега², которую будем использовать в дальнейшем не один раз.

Лемма 1. Пусть $[a, b]$ — отрезок вещественной прямой и $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно интегрируемая функция, т.е. $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, тогда $\int_a^b f(x) \cos px dx \rightarrow 0$ при $p \rightarrow +\infty$.

Доказательство леммы 1. Предположим сначала, что f — гладкая на $[a, b]$ функция (обозначаем $f \in C^1[a, b]$), т.е. у нее существует непрерывная на $[a, b]$ производная f' (иногда так и говорят, f — непрерывно дифференцируема), причем производная на концах интервала понимается как односторонняя производная, и непрерывность в этих точках также односторонняя. Выпишем неравенства

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_a^b f(x) \cos px dx \right| &= \left| \frac{1}{p} \int_a^b f(x) d \sin px \right| \\ &= \frac{1}{p} \left| f(b) \sin pb - f(a) \sin pa - \int_a^b \sin px f'(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{p} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right). \end{aligned}$$

Поскольку выражение в скобках конечно, то по лемме о двух милиционерах заключаем, что лемма верна для гладкой функции f .

Для любой функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется гладкая функция f_ε такая, что $\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$. Мы не будем доказывать этот факт, но будем на него ссылаться (в дальнейшем) как о всюду плотности множества гладких функций в функциональном пространстве Лебега $L_1[a, b]$ (см. 5.3). Тогда получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_a^b f(x) \cos px dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x)) \cos px dx + \int_a^b f_\varepsilon(x) \cos px dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x) \cos px dx \right| \\ &\leq \varepsilon + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x) \cos px dx \right|. \end{aligned}$$

²Эта лемма названа в честь выдающихся немецкого и французского математиков Георга Римана (1826–1886) и Анри Лебега (1875–1941), и была доказана сначала для интеграла в смысле Римана, а потом в смысле Лебега.

По уже доказанному второе слагаемое стремится к нулю при $p \rightarrow +\infty$, а $\varepsilon > 0$ произвольно, следовательно, лемма доказана. $\square$

Следствие 1. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — такая функция, что $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$, тогда

- 1) ее коэффициенты Фурье $a_n, b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) \sin px dx = \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) \cos px dx = \lim_{p \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) e^{ipx} dx = 0$.

1.5.2. Ядра Дирихле

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция. Используя формулы (1.1.2)–(1.1.4) коэффициентов Фурье, запишем частичную сумму ее ряда Фурье

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(y) (\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=1}^n \cos k(y-x) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(y-x) \right) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \mathcal{D}_n(y-x) dy, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{D}_n(z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz \right). \quad (1.5.1)$$

Найдем компактное выражение для функции $\mathcal{D}_n(z)$. Домножим ее на $\sin \frac{z}{2}$ и, воспользовавшись тригонометрической формулой произведения косинус на синус, получим

$$\begin{aligned} \pi \mathcal{D}_n(z) \sin \frac{z}{2} &= \frac{1}{2} \sin \frac{z}{2} + \cos z \sin \frac{z}{2} + \dots + \cos nz \sin \frac{z}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{z}{2} + \left(\frac{1}{2} \sin \frac{3z}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{z}{2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2} \sin \frac{(2n+1)z}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{(2n-1)z}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{(2n+1)z}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}_n(z) = \frac{\sin \frac{(2n+1)z}{2}}{2\pi \sin \frac{z}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1. \quad (1.5.2)$$

Тогда выражение для частичной суммы $T_n(x)$ имеет вид

$$T_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{\sin \frac{(2n+1)(y-x)}{2}}{2\pi \sin \frac{y-x}{2}} dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \frac{(2n+1)z}{2}}{2\pi \sin \frac{z}{2}} dz, \quad (1.5.3)$$

где в последнем равенстве мы сделали замену переменных $z = y - x$ и воспользовались периодичностью подынтегральной функции.

Определение 7. Функция $\mathcal{D}_n(z)$, выражаемая формулами (1.5.1) и (1.5.2), называется n -ым ядром Дирихле³; а интеграл в формуле (1.5.3) — интеграл Дирихле.

Из определения следует, что ядра Дирихле обладают следующим свойством: для любого $n \geq 1$ ядро $\mathcal{D}_n(x)$ — четная функция и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(z) dz = 1. \quad (1.5.4)$$

1.5.3. Кусочно-гладкие функции

Следующий класс функции играет важную роль на протяжении всей этой главы, а теорема 1 дает ответ на вопрос 1) из первого параграфа.

Определение 8. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *кусочно-гладкой* на отрезке $[a, b]$, если существует конечное число точек

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

таких, что на каждом интервале (x_j, x_{j+1}) , $j = 0, \dots, n-1$ функция f будет гладкой, а в точках x_j существуют и конечны следующие односторонние пределы

$$f(x_j \pm 0) := \lim_{x \rightarrow 0 \pm} f(x_j + x),$$

$$f'(x_j \pm 0) := \lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{f(x_j + x) - f(x_j \pm 0)}{x},$$

причем в точках a и b нужно рассматривать только правые и, соответственно, левые пределы.

Упражнение 1. Верно ли, что $f'(x_j \pm 0) = \lim_{x \rightarrow 0 \pm} f'(x_j + x)$?

Чтобы лучше понять это определение, приведем несколько примеров, отражающих каждую деталь этого определения.

Пример 1. На отрезке $[-2, 2]$ рассмотрим четыре функции

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2, 0), \\ x^2, & x \in [0, 2], \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} -\sqrt{-2x - x^2}, & x \in [-2, 0), \\ \sqrt{2x - x^2}, & x \in [0, 2], \end{cases}$$

³Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859) — немецкий математик, основные труды которого посвящены теории чисел и математическому анализу.

$$f_3(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

Для каждой из них есть ровно одна особая точка $x_1 = 0$. Первая функция разрывна, но обладает всеми конечными односторонними пределами в x_1 , поэтому она кусочно-гладкая. Вторая функция непрерывна, но в x_1 правая и левая производная бесконечны, следовательно, она не является кусочно-гладкой. Третья функция не кусочно-гладкая, поскольку правый и левый пределы функции в x_1 не существуют. Наконец, четвертая функция не является кусочно-гладкой, поскольку правый и левый пределы производной не существуют в x_1 . Графики функций изображены на рис. 1.4–1.7.

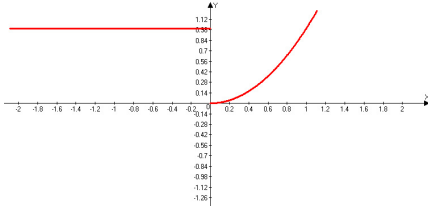


Рис. 1.4: Функция f_1 кусочно-гладкая, поскольку все односторонние пределы в $x_1 = 0$ конечны

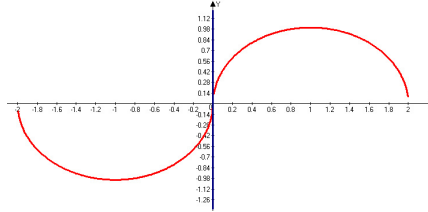


Рис. 1.5: Функция f_2 не кусочно-гладкая, так как пределы производных в $x_1 = 0$ бесконечны

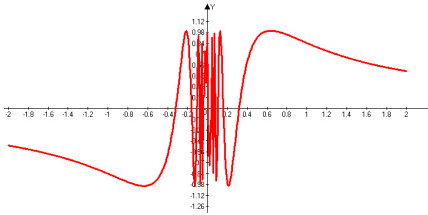


Рис. 1.6: Функция f_3 не кусочно-гладкая, так как пределы функции в $x_1 = 0$ не существуют

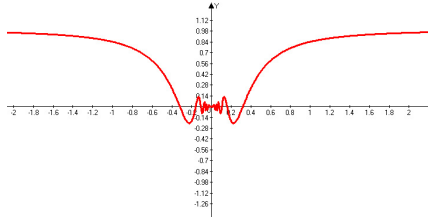


Рис. 1.7: Функция f_4 не кусочно-гладкая, поскольку пределы производной в $x_1 = 0$ не существуют

1.5.4. Теорема о представимости функции своим рядом Фурье

Теорема 1. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция, кусочно-гладкая на своем периоде, тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1.5.5)$$

Напомним, что $f(x \pm 0) = \lim_{y \rightarrow 0 \pm} f(x + y)$. Ясно, что для непрерывных функций левая часть равенства (1.5.5) равна $f(x)$. Таким образом, равенство (1.1.1) справедливо, например, для непрерывных кусочно-гладких функций.

Доказательство теоремы 1. Нам нужно доказать, что для любого $x \in \mathbb{R}$ предел частичных сумм $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ равен $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Используя формулу (1.5.3) для выражения $T_n(x)$, а также свойство (1.5.4), получим

$$\begin{aligned}
 T_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \mathcal{D}_n(z) dz - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(z) dz = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+z) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right) \mathcal{D}_n(z) dz = \\
 &= \underbrace{\int_{-\pi}^0 \left(f(x+z) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right) \mathcal{D}_n(z) dz}_{z=-w} + \\
 &\quad + \int_0^{\pi} \left(f(x+z) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right) \mathcal{D}_n(z) dz = \\
 &= - \int_{\pi}^0 \left(f(x-w) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right) \mathcal{D}_n(-w) dw + \\
 &\quad + \int_0^{\pi} \left(f(x+z) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right) \mathcal{D}_n(z) dz = \\
 &\stackrel{z=w, \mathcal{D}_n(z) = \mathcal{D}_n(-z)}{=} \int_0^{\pi} (f(x+z) + f(x-z) - f(x+0) - f(x-0)) \mathcal{D}_n(z) dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g_x(z) \sin \frac{2n+1}{2} z dz,
 \end{aligned}$$

где

$$g_x(z) = \left(\frac{f(x-z) - f(x-0)}{z} + \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \right) \frac{z}{\sin \frac{z}{2}}.$$

Из определения кусочно-гладкости следует, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ функция g_x в окрестности нуля ограничена, а поскольку на остальном множестве интервала $(0, \pi)$ она кусочно-гладкая, то, следовательно, абсолютно интегрируема. Поэтому по лемме Римана–Лебега интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g_x(z) \sin \frac{2n+1}{2} z dz \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать. $\square$

1.5.5. Рассмотрим использующийся в дальнейшем пример нахождения ряда Фурье и его применение для суммирования числового ряда.

Пример 2. На интервале $(-\pi, \pi)$ определим функцию $\sigma(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$, и продолжим ее по периодичности на всю числовую прямую.

Поскольку $\sigma(x)$ — нечетная функция, то воспользовавшись формулой (1.3.7), получим

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sigma(x) \sin nx dx = \int_0^\pi \sin nx dx = \frac{1 - (-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$$

Так как $\sigma(x)$ кусочно-гладкая, и в точках разрыва выполняется равенство $\sigma(x) = \frac{\sigma(x+0) + \sigma(x-0)}{2}$, то по теореме 1 для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем равенство

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1} \sin(2k-1)x; \quad (1.5.6)$$

в частности, для любого $x \in (-\pi, \pi)$ верно равенство

$$\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1} \sin(2k-1)x. \quad (1.5.7)$$

Подставляя в равенство (1.5.7), например, точку $x = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}.$$

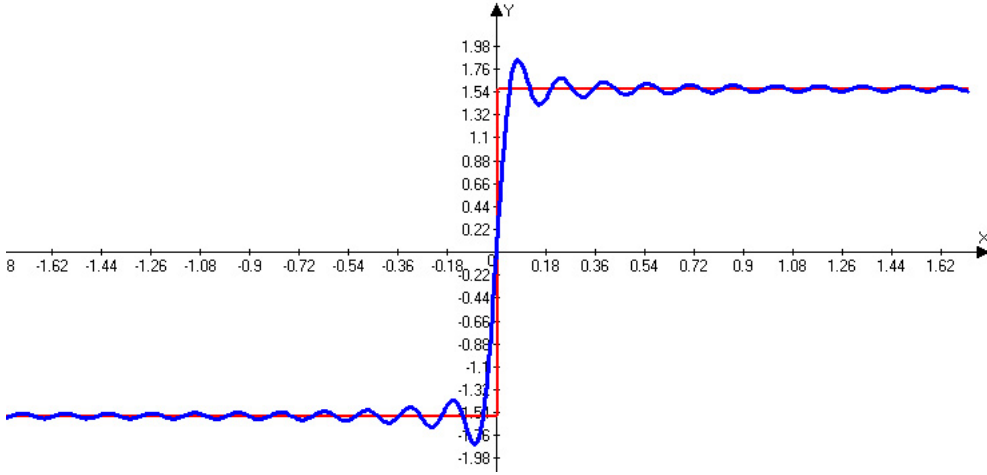


Рис. 1.8: График функции $\sigma(x)$ и частичной суммы $\sigma_{20} = \sum_{k=1}^{20} \frac{2}{2k-1} \sin(2k-1)x$ ее ряда Фурье в окрестности нуля

1.6 Дифференцируемость и интегрируемость рядов Фурье

Теорема 2. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая непрерывно дифференцируемая функция и $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$, тогда

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos nx + b'_n \sin nx,$$

где

$$a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n, \quad n \geq 1. \quad (1.6.1)$$

Доказательство теоремы 2. Поскольку производная f' непрерывна, то для нее можно построить (формальный) ряд Фурье. Поэтому остается лишь показать справедливость формул (1.6.1). Имеем

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx df(x) = \\ &= \frac{1}{\pi} \underbrace{(f(\pi) \cos \pi x - f(-\pi) \cos(-\pi x))}_0 + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n. \end{aligned}$$

Второе равенство из (1.6.1) доказывается аналогично. $\square$

Наложенные условия на функцию f в теореме 2 позволяют формально продифференцировать ее ряд Фурье и получить (формальный) ряд Фурье для ее производной f' :

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{=} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ \downarrow \frac{d}{dx} & & \downarrow \frac{d}{dx} \\ f'(x) & \xrightarrow{\sim} & \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{nb_n}_{=a'_n} \cos nx + \underbrace{-na_n}_{=b'_n} \sin nx. \end{array}$$

Теорема 3. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая непрерывная функция и $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$, при этом $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, тогда для функции $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ и для любого $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx,$$

где

$$A_0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \text{ и } A_n = -\frac{b_n}{n}, \quad B_n = \frac{a_n}{n}, \quad n \geq 1. \quad (1.6.2)$$

1.7. ПРИБЛИЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ 19

Доказательство теоремы 3. Поскольку $F(x)$ непрерывно дифференцируема и 2π -периодична:

$$F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^{x+2\pi} f(t)dt = F(x) + \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)dt}_0 = F(x),$$

то для нее применима теорема 2. Поэтому

$$a_n = nB_n \text{ и } b_n = -nA_n, \quad n \geq 1,$$

откуда получаем последние два равенства из (1.6.2). Выражение для A_0 находим из следующего соотношения:

$$0 = F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

□

Наложенные условия на функцию f в теореме 3 позволяют формально проинтегрировать ее (формальный) ряд Фурье и получить ряд Фурье для ее первообразной F :

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\sim} & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ \downarrow \int_0^x & & \downarrow \int_0^x \\ F(x) & \xrightarrow{=} & \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n}}_{=B_n} \sin nx + \underbrace{\frac{-b_n}{n}}_{=A_n} \cos nx + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}}_{\frac{A_0}{2}}. \end{array}$$

1.7 Приближение функций тригонометрическими многочленами

Определение 9. Выражение вида $\mathcal{T}_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$ с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ будем называть вещественным *тригонометрическим многочленом* степени n .

Ясно, что частичная сумма ряда Фурье $T_n(x)$ интегрируемой функции является тригонометрическим многочленом. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая с квадратом функция, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$. Нужно найти тригонометрический многочлен $\mathcal{T}_n(x)$ такой, чтобы квадрат нормы (в $L_2[-\pi, \pi]$) разности

$$\|\mathcal{T}_n(x) - f(x)\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{T}_n(x) - f(x))^2 dx$$

Л
е
к
ц
и
я
3

был минимальным.

Имеем

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{T}_n(x) - f(x))^2 &= \mathcal{T}_n^2(x) - 2\mathcal{T}_n(x)f(x) + f^2(x) = f^2(x) + \\
 &+ \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right)^2 - 2f(x) \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right) = \\
 &= f^2(x) - \alpha_0 f(x) - 2 \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k f(x) \cos kx + \beta_k f(x) \sin kx \right) + \\
 &\quad + \frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \cos^2 kx + \beta_k^2 \sin^2 kx + \xi_n(x),
 \end{aligned}$$

где

$$\xi_n(x) = \alpha_0 \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx + \sum_{i \neq j} (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)(\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx).$$

Поскольку $\int_{-\pi}^{\pi} \xi_n(x) dx = 0$, то, интегрируя на интервале $(-\pi, \pi)$, получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{T}_n(x) - f(x))^2 dx &= \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \alpha_0 a_0 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k + \beta_k b_k + \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \beta_k^2 = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} - \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k - \alpha_k)^2 + (b_k - \beta_k)^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, минимум нормы разности достигается на тригонометрическом многочлене с коэффициентами $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_k = a_k$ и $\beta_k = b_k$. В этом случае мы получаем, что

$$\mathcal{T}_n(x) = T_n(x)$$

и для любого $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_n(x) - f(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2,$$

откуда для всех $n \geq 1$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем *неравенство Бесселя*⁴

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (1.7.1)$$

⁴Фридрих Вильгельм Бессель (1784–1846) — немецкий математик и астроном, был директором обсерватории в городе Кенигсберг (ныне Калининград).

Тот же самый результат, что минимум нормы разности достигается на тригонометрическом многочлене с коэффициентами $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_k = a_k$ и $\beta_k = b_k$, можно было получить дифференцируя норму разности по параметрам α_k и β_k и зануляя эти производные (см., например, упражнение в [2, с. 563]).

1.8 Равномерная сходимость ряда Фурье

Напомним следующее определение.

Определение 10. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ к функции $S(x)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - S(x) \right| = 0,$$

при этом пишут

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \xrightarrow{E} S(x) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Напомним также достаточный признак равномерной сходимости функциональных рядов — признак Вейерштрасса⁵: если для любого $x \in E$ верно $|f_n(x)| \leq M_n$, и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E . Вспомнив определение и признак, мы теперь готовы сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая непрерывно дифференцируемая функция, тогда ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на всей числовой прямой

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 4. Положим $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $n \geq 1$. Используя признак Вейерштрасса, достаточно найти суммируемую мажоранту для функциональной последовательности $f_n(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \stackrel{(1.6.1)}{=} \frac{|b'_n|}{n} + \frac{|a'_n|}{n} \leq \\ &\stackrel{2st \leq s^2 + t^2}{\leq} \frac{|b'_n|^2}{2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{|a'_n|^2}{2} + \frac{1}{2n^2} = \frac{|b'_n|^2 + |a'_n|^2}{2} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходящийся ряд, а по неравенству Бесселя (1.7.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b'_n|^2 + |a'_n|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx < \infty,$$

то теорема доказана. $\square$

⁵Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) — знаменитый немецкий математик, основоположник математического анализа и теории аналитических функций

1.9 Равенство Ляпунова

1.9.1. Оказывается в неравенстве Бесселя (1.7.1) на самом деле можно поставить равенство, что означает (как мы узнаем) полноту тригонометрической системы функций на интервале $[-\pi, \pi]$.

Теорема 5. Пусть $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая с квадратом функция, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$, и a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье, тогда справедливо равенство Ляпунова⁶

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \quad (1.9.1)$$

Доказательство теоремы 5. Пусть $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что ее 2π -периодическое продолжение f^* на всю числовую прямую будет непрерывно дифференцируемой функцией. Тогда по теореме 4 ряд Фурье этой функции будет равномерно на всей числовой прямой сходиться к ней самой. Поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_n(x) - f(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2,$$

то переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и пронося предел внутрь интеграла ввиду равномерной сходимости, получим требуемое равенство.

Общий случай мы рассматривать не будем; отметим лишь, что его можно получить, приближая произвольную интегрируемую с квадратом функцию указанными в доказательстве гладкими функциями. $\square$

Упражнение 2. Пусть $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ и f^* ее 2π -периодическое продолжение на всю числовую прямую. Верно ли следующее утверждение: $f^* \in C^1(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $f \in C^1(-\pi, \pi)$ и $f(\pi) = f(\pi - 0) = f(-\pi + 0) = f(-\pi)$ и $f'(\pi - 0) = f'(-\pi + 0)$?

1.9.2. Обобщенное равенство Ляпунова

Теорема 6. Пусть $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемые с квадратом функции, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx < \infty$ и $\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)dx < \infty$. Пусть, далее, a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции f , а α_n, β_n — коэффициенты Фурье функции g . Тогда справедливо обобщенное равенство Ляпунова

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\alpha_n + b_n\beta_n. \quad (1.9.2)$$

Доказательство теоремы 6. Легко проверить, что коэффициенты Фурье функций $f \pm g$ будут $a_n \pm \alpha_n$ и $b_n \pm \beta_n$. Кроме того, используя неравенство $(a \pm b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, можно убедиться, что указанные функции $f \pm g$

⁶ Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) — основатель строгой теории устойчивости равновесия и движения систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

будут интегрируемые с квадратом. Тогда запишем для обеих функций равенство Ляпунова (1.9.1):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f+g)^2 dx &= \frac{(a_0 + \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \alpha_n)^2 + (b_n + \beta_n)^2, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f-g)^2 dx &= \frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \alpha_n)^2 + (b_n - \beta_n)^2.\end{aligned}$$

Вычитая из первого неравенства второе, и деля получившееся равенство на 4, получаем требуемое равенство. $\square$

1.9.3. Комплексная форма равенства Ляпунова

Если рассмотреть комплекснозначную функцию $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, и сложить равенства Ляпунова для ее вещественной и мнимой частей, то получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2, \quad (1.9.3)$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье функции f . Однако, для комплекснозначных функций ее ряд Фурье записывают обычно в комплексной форме (1.4.2). Используя ее, можно получить и равенство Ляпунова в комплексной форме.

Теорема 7. Пусть $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ — интегрируемая с квадратом функция, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < \infty$, и c_n — ее коэффициенты Фурье в комплексной форме, тогда справедливо равенство Ляпунова

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (1.9.4)$$

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим правую часть равенства (1.9.4). Вспоминая, что

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}, & n < 0, \\ \frac{a_0}{2}, & n = 0, \\ \frac{a_n - ib_n}{2}, & n > 0, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \right|^2 + \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n - ib_n}{2} \right|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n + ib_n}{2} \right|^2 + \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n - ib_n}{2} \right|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2 + i(a_n \bar{b}_n - \bar{a}_n b_n)}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2 - i(a_n \bar{b}_n - \bar{a}_n b_n)}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \stackrel{(1.9.3)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx.\end{aligned}$$

□

1.10 Гладкость функции и скорость сходимости ее ряда Фурье

Лемма 2. Для любого $\alpha > 0$ при всех $n \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha n^{\alpha}}. \quad (1.10.1)$$

Доказательство леммы 2. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = 1/x^{\alpha+1}$, $x > 0$. Поскольку она убывающая, то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} < \int_n^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{\alpha n^{\alpha}}.$$

□

Теорема 8. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая $(k+1)$ -раз непрерывно дифференцируемая функция, тогда для скорости равномерной сходимости ряда Фурье к функции f

$$R_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |T_n(x) - f(x)|$$

справедливо асимптотическое соотношение

$$R_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1/2}}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 8. Используя теорему 1 о представлении кусочно-гладкой функции своим рядом Фурье и теорему 2 о дифференцировании ряда Фурье, получим для всякого $x \in \mathbb{R}$ неравенства

$$\begin{aligned} |T_n(x) - f(x)| &\stackrel{T1}{=} \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \cos jx + b_j \sin jx \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j \cos jx| + |b_j \sin jx| \leq \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| + |b_j| \stackrel{T2}{=} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|a_j^{(k+1)}|}{j^{k+1}} + \frac{|b_j^{(k+1)}|}{j^{k+1}}, \end{aligned}$$

где $a_j^{(k+1)}$ и $b_j^{(k+1)}$ — коэффициенты Фурье функции $f^{(k+1)}(x)$. Применив к последней сумме неравенство (??) Коши–Буняковского

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} u_j v_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |v_j|^2 \right)^{1/2},$$

которое мы докажем позже; взяв за $u_j = |a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|$, а за $v_j = \frac{1}{j^{k+1}}$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}|}{j^{k+1}} &\leq \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}| \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^{2k+2}} \right)^{1/2} \leq \\ &\stackrel{(1.10.1)}{\leq} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}| \right)^2 \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2k+1} n^{k+1/2}}. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем, что

$$n^{k+1/2} R_n \leq \frac{\xi_n}{\sqrt{2k+1}},$$

где $\xi_n^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}| \right)^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поскольку это "хвост" сходящегося ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(|a_j^{(k+1)}| + |b_j^{(k+1)}| \right)^2 \leq 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j^{(k+1)} \right)^2 + \left(b_j^{(k+1)} \right)^2 \stackrel{(1.9.1)}{=} \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f^{(k+1)} \right)^2 dx < \infty.$$

Таким образом мы показали, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{k+1/2} R_n = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

1.11 Явление Гиббса

1.11.1. Частный случай

Рассмотрим функцию $\sigma(x)$ из примера 2. Было показано, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ она представляется своим рядом Фурье (см. равенство (1.5.6) и график на рис. 1.8

$$\sigma(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Положим

$$\sigma_{2n-1} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Найдем ее экстремумы. Имеем $\sigma'_{2n-1}(x) = 2 \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{\sin x}$, где последнее равенство доказывается аналогично выводу формулы (1.5.2) для ядра Дирихле. Откуда находим, что точки $x_k = \pi k/2n, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — это точки экстремума функции $\sigma'_{2n-1}(x)$. Кроме того, из формулы для производной заключаем, что

$$\sigma_{2n-1}(x) = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt \stackrel{2nt=u}{=} \frac{1}{2n} \int_0^{2nx} \frac{\sin u}{\sin u/2n} du. \quad (1.11.1)$$

Поскольку $\sigma_{2n-1}(x)$ нечетна и симметрична относительно $x = \pi/2$

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}(\pi/2 - x) &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin((k\pi - \pi/2) - (2k-1)x)}{2k-1} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin((k\pi - \pi/2) + (2k-1)x)}{2k-1} = \sigma_{2n-1}(\pi/2 + x),\end{aligned}$$

достаточно рассмотреть экстремумы на промежутке $[0, \pi/2]$, т.е. $x_k = \pi k/2n$ для $1 \leq k \leq n$. Подставляя эти точки в (1.11.1), получаем, что

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}(x_{k+1}) &= \frac{1}{2n} \int_0^{\pi(k+1)} \frac{\sin u}{\sin u/2n} du = \sigma_{2n-1}(x_k) + \frac{1}{2n} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{\sin u}{\sin u/2n} du = \\ &= \sigma_{2n-1}(x_k) + \frac{(-1)^k}{2n} \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sin(t+\pi k)/2n} dt = \\ &= \sigma_{2n-1}(x_k) + (-1)^k v_k,\end{aligned}$$

где $v_k = \frac{1}{2n} \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sin(t+\pi k)/2n} dt$, $1 \leq k \leq n-1$. Поскольку $v_k > 0$ и $v_{k+1} < v_k$, мы заключаем, что наибольшее значение функции $\sigma_{2n-1}(x)$ достигается в точке $x_1 = \pi/2n$.

Вычислим предел

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n-1}(x_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin u/2n} du = \\ &= \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin u}{2n \sin u/2n} du = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du = \text{Si}(\pi),\end{aligned}$$

где $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$ — интегральный синус. Мы смогли внести предел под знак интеграла, поскольку по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для этого достаточно иметь интегрируемую мажоранту; для каждого $u \in [0, \pi]$ и $n \geq 1$ имеем

$$\left| \frac{\sin u}{2n \sin u/2n} \right| = \left| \frac{\sin u}{u} \frac{u/2n}{\sin u/2n} \right| \leq \frac{\pi}{2} \left| \frac{\sin u}{u} \right|.$$

Таким образом, мы получили, что в некотором смысле предельным геометрическим образом в точке $x = 0$ является отрезок (вдоль оси OY) $[-\text{Si}(\pi), \text{Si}(\pi)]$ вместо имеющегося у функции σ — $[-\pi/2, \pi/2]$. Используя таблицу значений для интегрального синуса (отметим, что $\pi/2 = \text{Si}(+\infty)$), получаем, что отличие составляет

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Si}(\pi) - \pi/2}{\pi/2} \simeq 0,178, \quad (1.11.2)$$

т.е. на 18%. Ниже мы узнаем, что такой эффект типичен.

Определение 11. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая кусочно гладкая функция и x_0 — ее точка разрыва, причем для определенности считаем, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Явлением Гиббса⁷ называется свойство

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0 - 0}} T_n(x) < f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0) < \overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0 + 0}} T_n(x).$$

В рассмотренном нами примере, мы как раз и считали верхний (а ввиду нечетности и нижний) указанные пределы.

1.11.2. Общий случай

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая кусочно-гладкая функция и x_0 — ее регулярная точка разрыва, т.е. $f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$. Без ограничения общности, будем предполагать, что $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Покажем, что здесь также имеет место явление Гиббса с теми же 18%.

Пусть $D = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ — скачок функции f в точке x_0 . Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{D}{\pi} \sigma(x - x_0) \quad (1.11.3)$$

и первым делом покажем, что она непрерывна в точке x_0 , что нам существенно пригодится в дальнейших рассуждениях.

Имеем

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - f(x_0) - \frac{D}{\pi} \sigma(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 \pm 0) &= f(x_0 \pm 0) - f(x_0) - \frac{D}{\pi} \sigma(\pm 0) = \\ &= f(x_0 \pm 0) - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} - \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{\pi} (\pm \frac{\pi}{2}) = \\ &= f(x_0 \pm 0) - \frac{f(x_0 + 0)}{2} - \frac{f(x_0 - 0)}{2} \mp \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi(x_0) = \varphi(x_0 + 0) = \varphi(x_0 - 0)$, то непрерывность доказана. Из формулы (1.11.3) находим выражение для рассматриваемой функции f :

$$f(x) = \varphi(x) + f(x_0) + \frac{D}{\pi} \sigma(x - x_0),$$

откуда для частичных сумм рядов Фурье имеем равенство

$$T_{2n-1}(x) = \varphi_{2n-1}(x) + f(x_0) + \frac{D}{\pi} \sigma_{2n-1}(x - x_0).$$

⁷Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903) — американский физик, один из основоположников статистической физики. Первоначально за 50 лет до публикации Гиббса описываемое явление было открыто английским математиком Г. Уилбрагамом

Здесь $T_{2n-1}(x)$, $\varphi_{2n-1}(x)$, $\sigma_{2n-1}(x)$ — частичные суммы, соответственно, для $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\sigma(x)$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0-0}} T_{2n-1}(x) &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0-0}} \varphi_{2n-1}(x) + f(x_0) + \frac{D}{\pi} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0-0}} \sigma_{2n-1}(x - x_0) = \\ &= f(x_0) + \frac{D}{\pi} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -0}} \sigma_{2n-1}(-0) \stackrel{(1.11.2)}{=} f(x_0) - \frac{D}{\pi} \frac{\pi}{2}(\gamma + 1) = \\ &= \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} - \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{2} - \frac{D\gamma}{2} = \\ &= f(x_0 - 0) - \frac{D\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равномерной сходимостью $\varphi_{2n-1}(x)$ к $\varphi(x)$ и непрерывностью $\varphi(x)$ в точке x_0 с нулевым значением.

Аналогично, имеет место равенство для верхнего предела

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0+0}} T_{2n-1}(x) = f(x_0) + \frac{D}{\pi} \frac{\pi}{2}(\gamma + 1) = f(x_0 + 0) + \frac{D\gamma}{2}.$$

Отсюда находим, что предельный геометрический образ отличается от имеющегося у функции f в точке x_0

$$\frac{f(x_0 + 0) + \frac{D\gamma}{2} - (f(x_0 - 0) - \frac{D\gamma}{2})}{D} = \gamma\text{-раз},$$

т.е. те же 18%.

Следствие 2. Справедливы формулы

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_0) &= \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(T_{2n-1}\left(x_0 + \frac{\pi}{2n}\right) - T_{2n-1}\left(x_0 - \frac{\pi}{2n}\right) \right) &= D\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right). \end{aligned}$$

1.12 Применение рядов Фурье: решение задачи Дирихле в круге

Напомним следующее определение.

Определение 12. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *гармонической*, если она дважды непрерывно дифференцируема в D , т.е. $f \in C^2(D)$, и удовлетворяет в D уравнению Лапласа $\Delta f = 0$.

Напомним также, что лапласиан Δ выглядит следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{в декартовой системе координат,}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{в полярной системе координат.}$$

Задача Дирихле в области D состоит в нахождении гармонической в области D функции f по ее значениям на границе области ∂D . Пусть $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$ – открытый единичный круг. Тогда задача Дирихле состоит в решении уравнения Лапласа с граничными условиями:

$$\begin{cases} \Delta f = 0, \\ f(x, y)|_{x^2+y^2=1} = g(x, y), \end{cases}$$

где $g(x, y)$ – гладкая функция. Поскольку область симметрична относительно нуля, то задачу удобнее решать в полярной системе координат:

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0, \\ f(r, \varphi)|_{r=1} = g(\varphi), \end{cases} \quad (1.12.1)$$

где $g(\varphi)$ – 2π -периодическая гладкая функция, которая раскладывается в ряд Фурье

$$g(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi. \quad (1.12.2)$$

Поскольку $f(r, \varphi)$ – гладкая и 2π -периодическая по φ функция, то для каждого $r \in [0, 1]$ она представляется рядом Фурье

$$f(r, \varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi. \quad (1.12.3)$$

Предполагая, что ряд (1.12.3) можно почленно дифференцировать по обоим переменным, подставляя его в уравнение (1.12.1), получим равенство

$$\begin{aligned} \left(r^2 \frac{a_0''(r)}{2} + r \frac{a_0'(r)}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) \right) \cos n\varphi + \\ + \left(r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r) \right) \sin n\varphi = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} r^2 \frac{a_0''(r)}{2} + r \frac{a_0'(r)}{2} &= 0, \\ r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) &= 0, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

и

$$r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r) = 0, \quad n \geq 1.$$

Переписывая условие $f(1, \varphi) = g(\varphi)$ в терминах рядов (1.12.2) и (1.12.3), получим начальные/граничные условия для этих уравнений:

$$a_n(0) < \infty, \quad a_n(1) = \alpha_n, \quad n \geq 0;$$

$$b_n(0) < \infty, \quad b_n(1) = \beta_n, \quad n \geq 1.$$

Первое уравнение легко решается методом разделения переменных и получается выражение

$$a_0(r) = C_1 \ln r + C_2,$$

которое при удовлетворении краевых (начальных/граничных) условий становится $a_0(r) = \alpha_0$. Оставшиеся уравнения одного типа и являются уравнениями Эйлера, которые заменой $r = e^t$ сводятся к однородному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами, решив которое, мы получим

$$a_n(r) = D_1(n)r^n + D_2(n)r^{-n}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n(r) = E_1(n)r^n + E_2(n)r^{-n}, \quad n \geq 1.$$

Константы D_1, D_2, E_1 и E_2 находятся из граничных условий, откуда получаем

$$a_n = \alpha_n r^n, \quad b_n = \beta_n r^n, \quad n \geq 1.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (1.12.3), получим решение задачи Дирихле в виде ряда

$$f(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r^n \cos n\varphi + \beta_n r^n \sin n\varphi, \quad r \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (1.12.4)$$

Однако, решение задачи можно представить и в интегральном виде. Покажем как это сделать. Подставим в формулу (1.12.4) выражения для коэффициентов α_n, β_n и проделаем простые выкладки, аналогичные тем, которые мы уже проделывали при выводе формулы для ядра Дирихле (1.5.1):

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r^k \cos k\varphi + \beta_k r^k \sin k\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} g(t) r^k (\cos kt \cos k\varphi + \sin kt \sin k\varphi) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(t - \varphi) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(t - \varphi) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \mathcal{P}(r, t - \varphi) dt, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{P}(r, z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kz. \quad (1.12.5)$$

1.13. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МЕТОДУ ЧЕЗАРО–ФЕЙЕРА³¹

Пусть $r \in [0, 1)$, тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(r, z) &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikz} = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{re^{iz}}_{\substack{=q \\ |q|=|r|<1}})^k = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{re^{iz}}{1 - re^{iz}} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Re}(re^{iz}(1 - re^{-iz}))}{(1 - re^{iz})(1 - re^{-iz})} = \frac{1}{2} + \frac{r \cos z - r^2}{1 - 2r \cos z + r^2} = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos z + r^2)}.\end{aligned}$$

Таким образом, для каждого $r \in [0, 1)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(t)(1 - r^2)dt}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2}. \quad (1.12.6)$$

Определение 13. Интеграл в формуле (1.12.6) называется *интегралом Пуассона*, а функция $\mathcal{P}(r, z)$, задаваемая формулой (1.12.5) — *ядро Пуассона*.

Можно проверить прямой подстановкой, что функция $f(r, \varphi)$, представляемая своим интегралом Пуассона (1.12.6), действительно удовлетворяет уравнению (1.12.1). Кроме того, известно, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(t)(1 - r^2)dt}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2} = \frac{g(\varphi + 0) + g(\varphi - 0)}{2} = g(\varphi).$$

Поскольку задача Дирихле имеет единственное решение, то, следовательно, оно задается формулой (1.12.6).

Упражнение 3. Проверить, что интеграл Пуассона удовлетворяет уравнению Лапласа в единичном круге.

1.13 Суммирование рядов Фурье по методу Чезаро–Фейера

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция и $T_n(x)$ — n -ая частичная сумма ее ряда Фурье.

Определение 14. Функция

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_k(x) = \frac{T_0(x) + T_1(x) + \dots + T_{n-1}(x)}{n}$$

называется *чезаровским* средним последовательности T_n , или *суммой Фейера*⁸ порядка n .

⁸Липот Фейер (1880–1959) — венгерский математик, успешно применивший метод средних арифметических для исследования обобщенного суммирования рядов Фурье

Упражнение 4. Используя формулу (1.5.3) докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{\sin \frac{n(y-x)}{2}}{\sin \frac{y-x}{2}} \right)^2 dy. \quad (1.13.1)$$

Определение 15. Интеграл (1.13.1) называется *интегралом Фейера*, а функция

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin \frac{nz}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2$$

называется *ядром Фейера*.

Упражнение 5. Проверьте свойство ядер Фейера

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) dz = 1.$$

Теорема 9. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция такая, что в точке $x \in \mathbb{R}$ существуют и конечны односторонние пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Если функция непрерывна во всех точках, то сходимость равномерная.

Эта теорема называется теоремой Фейера. Она, в частности, утверждает, что если ряд Фурье функции f сходится в какой-нибудь точке $x \in \mathbb{R}$, и при этом пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$ существуют и конечны, то он сходится непременно к их полусумме $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

1.14 Теоремы Вейерштрасса

1.14.1. Теорема о приближении непрерывной функции тригонометрическими многочленами

Теорема 10. Пусть $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда найдется последовательность тригонометрических многочленов $S_n(x)$, равномерно на $[-\pi, \pi]$ сходящаяся к функции $f(x)$, т.е.

$$S_n(x) \xrightarrow{[-\pi, \pi]} f(x) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 10. Пусть f^* — 2π -периодическое продолжение функции f на всю числовую прямую. Ясно, что f^* непрерывна. Поэтому, взяв в качестве тригонометрических многочленов $S_n(x)$ средние по Чезаро–Фейеру ряда Фурье функции f^* и применив теорему 9, получим требуемое. $\square$

Отметим, что построенная последовательность тригонометрических многочленов не единственна. Можно, например, в качестве $S_n(x)$ взять частичную сумму ряда Фурье функции $F_{1/n}(x) = \frac{n}{2} \int_{x-1/n}^{x+1/n} f^*(t) dt$. Такие функции называются средним по Стеклову. Доказательство равномерной сходимости можно посмотреть в [A96.2].

1.14.2. Теорема о приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами

Теорема 11. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, тогда существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x) = \sum_{k=0}^{M_n} c_{k,n} x^k$, равномерно на $[a, b]$ сходящаяся к функции $f(x)$, т.е.

$$P_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 11. Поскольку линейным (а значит непрерывным) преобразованием мы можем "пересадить" функцию $f(x)$ на любой другой отрезок, будем считать, что $[a, b] = [0, \pi]$. Продолжим функцию четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$. Получившаяся функция будет удовлетворять условию предыдущей теоремы 10, поэтому найдется последовательность $S_n(x)$ тригонометрических многочленов (возьмем такую же, которая строилась в теореме 10), равномерно на $[-\pi, \pi]$ (следовательно, и на $[0, \pi]$) приближающая непрерывную функцию $f(x)$. Пусть

$$S_n(x) = \alpha_{0,n} + \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n} \cos kx,$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_1 = N_1(\varepsilon) > 0$ такой, что для всех $x \in [0, \pi]$ и всех $n \geq N_1$

$$\left| \alpha_{0,n} + \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n} \cos kx - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как для любого $k \geq 1$

$$\cos kx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!},$$

причем степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, в том числе и на $[0, \pi]$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любых $k, n \geq 1$ найдется номер $N_2 = N_2(\varepsilon, k, n) > 0$ такой, что и для всех $x \in [0, \pi]$ при всех $l \geq N_2$

$$\left| \sum_{m=0}^l \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!} - \cos kx \right| < \frac{\varepsilon}{2n|\alpha_{k,n}|}.$$

Без ограничения общности считаем, что все $\alpha_{k,n} \neq 0$. Пусть

$$D_{k,n} = \sum_{m=0}^{N_2(1/n, k, n)} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!}$$

и

$$P_n(x) = \alpha_{0,n} + \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n} D_{k,n}.$$

Покажем, что $P_n(x)$ равномерно сходится на $[0, \pi]$ к $f(x)$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), 1/\varepsilon\}$ получим для всех $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &\leq |P_n(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - f(x)| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n} (D_{k,n} - \cos kx) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_{k,n}| |D_{k,n} - \cos kx| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\alpha_{k,n}| \frac{1}{2n^2 |\alpha_{k,n}|} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

1.14.3. Многочлены С.Н. Бернштейна

Среди других доказательств теоремы Вейерштрасса особое место занимает вероятностное доказательство, представленное С.Н. Бернштейном.

Определение 16. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Многочлены

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

называются *многочленами Бернштейна* для функции f . Многочлены

$$b_{k,n}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

называются *базисными многочленами Бернштейна*.

Представим несколько простейших свойств базисных многочленов Бернштейна. Ясно, что $b_{k,n}(x) \geq 0$ для $x \in [0, 1]$. Кроме того,

$$\sum_{k=m}^n \frac{C_{n-m}^{k-m}}{C_n^k} b_{k,n}(x) = x^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \leq n. \quad (1.14.1)$$

Действительно, формула (1.14.1) является простым следствием бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} x^m &= x^m (x + 1 - x)^{n-m} = x^m \sum_{k=0}^{n-m} C_{n-m}^k x^k (1-x)^{n-m-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-m} C_{n-m}^k x^{k+m} (1-x)^{n-(m+k)} \stackrel{k+m=r}{=} \sum_{r=m}^n C_{n-m}^{r-m} x^r (1-x)^{n-r} = \\ &= \sum_{k=m}^n \frac{C_{n-m}^{k-m}}{C_n^k} b_{k,n}(x). \end{aligned}$$

В частных случаях при $m = 0, 1, 2$ получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x), \\ x &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} b_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_{k,n}(x), \quad n \geq 1, \\ x^2 &= \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{n(n-1)} b_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n(n-1)} b_{k,n}(x), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Из этих трех формул можно получить еще одно полезное соотношение

$$\frac{x(1-x)}{n} = \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{k,n}(x). \quad (1.14.2)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(x - x^2) &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_{k,n}(x) - \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n(n-1)} b_{k,n}(x) \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_{k,n}(x) - \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n-1} b_{k,n}(x) + \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n} b_{k,n}(x) \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left(- \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n-1} b_{k,n}(x) + \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n} b_{k,n}(x) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} b_{k,n}(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n(n-1)} b_{k,n}(x)}_{=x^2} = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} b_{k,n}(x) - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} b_{k,n}(x) - 2x \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_{k,n}(x) + x^2 \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k^2}{n^2} - 2x \frac{k}{n} + x^2 \right) b_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 b_{k,n}(x). \end{aligned}$$

□

Сформулируем и докажем бернштейновский вариант теоремы Вейерштрасса.

Теорема 12. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n = n_0(f; \varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n \geq n_0$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - B_n(f; x)| < \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 12. Поскольку непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Пусть $M = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$ и

$$J = J(n, \delta, x) = \left\{ k \leq n : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \right\}.$$

Тогда для любого $x \in [0, 1]$ при всех $n \geq 1$

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f; x)| &= \left| f(x) \sum_{k=0}^n b_{k,n}(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| b_{k,n}(x) = \\ &= \sum_{k \in J} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| b_{k,n}(x) + \sum_{k \notin J} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| b_{k,n}(x) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in J} b_{k,n}(x) + 2M \sum_{k \notin J} b_{k,n}(x) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{x(1-x)}{\delta^2 n}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из формулы (1.14.2):

$$\frac{x(1-x)}{n} = \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{k,n}(x) \geq \sum_{k \notin J} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{k,n}(x) \geq \delta^2 \sum_{k \notin J} b_{k,n}(x).$$

Таким образом, для всех $n > \frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$ получим

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(f; x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{\sup_{x \in [0,1]} x(1-x)}{\delta^2 n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\delta^2 n} < \varepsilon.$$

□

Рекомендуемая литература: [A96.2], [B11], [4], [5], [9].

Глава 2

Преобразование Фурье

Тот факт, что преобразование Фурье осуществляет L_2 -изометрию, является одним из его наиболее важных характерных свойств

У. Рудин

2.1 Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Тогда для любого $l > 0$ на интервале $[-l, l]$ она представляется своим рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Применяя формулы (1.2.2) и (1.2.3), перепишем это равенство в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) dy + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(y) \left(\cos \frac{\pi n y}{l} \cos \frac{\pi n x}{l} + \sin \frac{\pi n y}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) dy + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(y) \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n (y-x)}{l}. \end{aligned}$$

Поскольку сумма $\frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n (y-x)}{l}$ очень похожа на сумму Римана для функции $\cos z(y-x)$ от переменной z , то при стремлении $l \rightarrow \infty$, т.е. при измельчении разбиения всей $\mathbb{R}^+$ на отрезки $[\frac{\pi n}{l}, \frac{\pi(n+1)}{l}]$, мы "получим" интеграл $\int_0^{\infty} \cos z(y-x) dz$. Естественно, это — не строгое рассуждение уже потому, что последний интеграл расходящийся. Однако, оно позволяет увидеть во что переходит ряд Фурье при увеличении периода функции до бесконечности.

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy < \infty$, то первое слагаемое стремится к нулю, и получается равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_0^{\infty} \cos z(y-x) dz dy.$$

Поменяв интегрирование местами, получим

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(y) \cos yx + b(y) \sin yx dy, \quad (2.1.1)$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos zy dz, \quad (2.1.2)$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \sin zy dz. \quad (2.1.3)$$

Определение 17. Функции $a(y)$ и $b(y)$, задаваемые формулами (2.1.2) и (2.1.3) называются *прямым косинус* и *синус-преобразованием Фурье* функции f . Интеграл в правой части (2.1.1) — интеграл Фурье, а сама формула (2.1.1) называется интегральной формулой Фурье, или интегральным представлением Фурье функции f .

2.2 Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье

Теорема 13. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая функция. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$\int_0^{+\infty} a(y) \cos yx + b(y) \sin yx dy = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

где $a(y)$ и $b(y)$ — прямые косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x)$.

Доказательство теоремы 13. Нужно доказать, что

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A a(y) \cos yx + b(y) \sin yx dy = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \int_0^A a(y) \cos yx + b(y) \sin yx dy = \frac{1}{\pi} \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos y(z-x) dz \right) dy \stackrel{⑥}{=} \\ &\stackrel{T??}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \left(\int_0^A \cos y(z-x) dy \right) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \frac{\sin A(z-x)}{\pi(z-x)} dz = \\ &\stackrel{z-x=y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) f(x+y) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy = \\ &= \int_0^{+\infty} (f(x+y) + f(x-y)) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy = I_1(A) + I_2(A), \end{aligned}$$

где

$$I_1(A) = \int_1^{+\infty} (f(x+y) + f(x-y)) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy,$$

$$I_2(A) = \int_0^1 (f(x+y) + f(x-y)) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy.$$

Первый интеграл $I_1(A)$ по лемме 1 Римана–Лебега сходится к нулю при $A \rightarrow +\infty$, поскольку функция $\frac{f(x+y)+f(x-y)}{\pi y}$ абсолютно интегрируема на $[1, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \left| \frac{f(x+y) + f(x-y)}{\pi y} \right| dy &\stackrel{y \geq 1}{\leq} \frac{1}{\pi} \left(\int_1^{+\infty} |f(x+y)| dy + \int_1^{+\infty} |f(x-y)| dy \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(\int_{1+x}^{+\infty} |f(y)| dy + \int_{-\infty}^{-1+x} |f(y)| dy \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy < \infty. \end{aligned}$$

Второй интеграл $I_2(A)$ представим в виде суммы трех других интегралов $I_{21}(A)$, $I_{22}(A)$ и $I_{23}(A)$:

$$\begin{aligned} I_2(A) &= \int_0^1 (f(x+y) - \textcolor{red}{f(x+0)} + f(x-y) - \textcolor{blue}{f(x-0)} + \textcolor{red}{f(x+0)} + \textcolor{blue}{f(x-0)}) \frac{\sin Ay}{\pi y} dy = \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(x+y) - f(x+0)}{y} \sin Ay dy}_{I_{21}} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(x-y) - f(x-0)}{y} \sin Ay dy}_{I_{22}} + \\ &+ \underbrace{\int_0^1 \frac{f(x+0) + f(x-0)}{\pi} \frac{\sin Ay}{y} dy}_{I_{23}}. \end{aligned}$$

Так как f кусочно-гладкая, то для любого $x \in \mathbb{R}$ будут ограниченными и, следовательно, абсолютно интегрируемыми на $[0, 1]$ функции $g_{1,x}(y) = \frac{f(x+y) - f(x+0)}{y}$ и $g_{2,x}(y) = \frac{f(x-y) - f(x-0)}{y}$; поэтому по лемме 1 Римана–Лебега интегралы $I_{21}(A)$ и $I_{22}(A)$ стремятся к нулю при $A \rightarrow +\infty$. Предел для интеграла $I_{23}(A)$ находится непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} I_{23}(A) &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\sin Ay}{y} dy = \\ &\stackrel{Ay=z}{=} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin z}{z} dz = \\ &= \frac{f(x+0) + f(x-0)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства нам осталось в равенстве * обосновать переход от одного повторного интеграла к другому. Для этого, используя теорему ?? Фубини–Тонелли, достаточно доказать сходимость двойного интеграла $\iint_D f(z) \cos y(z-x) dz dy$, где $D = [0, A] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$. Это будет

сделано, если мы докажем абсолютную сходимость этого двойного интеграла, которая в свою очередь ввиду теоремы ?? Фубини–Тонелли будет следовать, например, из сходимости повторного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)| \left(\int_0^A |\cos y(z-x)| dy \right) dz \leq A \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)| dz < \infty.$$

Теорема доказана. $\square$

2.3 Интеграл Фурье на полупрямой

Пусть $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Продолжив ее четным образом на $(-\infty, 0]$, запишем для нее интегральное представление Фурье: для любого $x > 0$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos yx + b(y) \sin yx dy = \int_0^{+\infty} a(y) \cos yx dy, \quad (2.3.1)$$

поскольку из-за четности

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(z) \cos yz dz,$$

и

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{even}}(z) \sin yz dz = 0.$$

Аналогичные формулы получаются, если сделать нечетное продолжение функции f на $(-\infty, 0]$: для любого $x > 0$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos yx + b(y) \sin yx dy = \int_0^{+\infty} b(y) \sin yx dy, \quad (2.3.2)$$

где

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(z) \sin yz dz,$$

и

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{odd}}(z) \cos yz dz = 0.$$

Определение 18. Формулы (2.3.1) и (2.3.2) задают соответственно *обратное косинус-* и *синус-преобразование Фурье*.

Пример 3. Вычислим прямое косинус- и синус-преобразование Фурье, а также само интегральное представление Фурье для функции $f(x) = e^{-ax}$, $x \geq 0$,

$a > 0$. Продолжив ее четным и нечетным образом, получим

$$\begin{aligned} a(y) + ib(y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-az} (\cos yz + i \sin yz) dz = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-az} e^{iyz} dz = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{e^{z(-a+iy)}}{-a+iy} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{a-iy} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{a}{a^2+y^2} + i \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2+y^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \frac{a}{a^2+y^2}, \quad b(y) = \frac{2}{\pi} \frac{y}{a^2+y^2};$$

и для любого $x \geq 0$

$$e^{-ax} = \int_0^{+\infty} a(y) \cos yx dy = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{a \cos yx}{a^2+y^2} dy,$$

$$e^{-ax} = \int_0^{+\infty} b(y) \sin yx dy = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \frac{y \sin yx}{a^2+y^2} dy.$$

Эти два последних интеграла называются *интегралами Лапласа*.

2.4 Представление интеграла Фурье в комплексной форме

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Тогда по теореме 13 для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos yx + b(y) \sin yx dy.$$

Перепишем этот интеграл в комплексной форме, заменяя $\cos yx$ и $\sin yx$ по формулам Эйлера (мы уже проделывали такие выкладки при выводе формулы (1.4.2) для комплексной формы ряда Фурье). Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} + \frac{a(y) + ib(y)}{2} e^{-ixy} dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} dy + \int_{-\infty}^0 \frac{a(-y) + ib(-y)}{2} e^{ixy} dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-izy} dz \right) e^{iyx} dy + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-izy} dz \right) e^{iyx} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-izy} dz \right) e^{iyx} dy. \end{aligned}$$

Л
е
к
ц
и
я
6

Здесь мы воспользовались равенствами

$$\begin{aligned} \frac{a(y) - ib(y)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)(\cos zy) - i \sin zy dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-iyz} dz = \frac{a(-y) + ib(-y)}{2}. \end{aligned}$$

Определение 19. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая кусочно-гладкая непрерывная функция. Формула

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-izy} dz \right) e^{iyx} dy \quad (2.4.1)$$

называется *комплексной формой интеграла Фурье*.

Определение 20. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — абсолютно-интегрируемая функция, тогда определены два отображения F_+ и F_- , переводящие функцию f в функции $\hat{f}$ и $\check{f}$ соответственно, где

$$F_+[f(y)](x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-iyx} dy$$

называется *прямым преобразованием Фурье* функции f , а

$$F_-[f(y)](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{iyx} dy$$

называется *обратным преобразованием Фурье* функции f .

Используя понятие прямого и обратного преобразования Фурье, формулу (2.4.1) можно переписать в виде

$$f(x) = F_-[F_+[f(z)](y)](x) = F_+[F_-[f(z)](y)](x). \quad (2.4.2)$$

Пример 4. Вычислим преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{-ax^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} F_+[e^{-ay^2}](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} e^{-iyx} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \cos yx dy + i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \sin yx dy}_{=0} \right) = \\ &\stackrel{|x|y=z}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{az^2}{|x|^2}} \cos zdz. \end{aligned}$$

Таким образом нам нужно вычислить интеграл

$$J(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Az^2} \cos z dz$$

в точке $A = \frac{a}{|x|^2}$. Покажем, что $J(A)$ – дифференцируемая функция. Действительно,

$$\frac{d}{dA} J(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dA} e^{-Az^2} \cos z dz = \int_{-\infty}^{+\infty} -z^2 e^{-Az^2} \cos z dz.$$

Смена мест интегрирования и дифференцирования законна, поскольку для любого $A_0 > 0$ и любого $A > A_0$

$$|-z^2 e^{-Az^2} \cos z| < z^2 e^{-A_0 z^2},$$

где последняя функция абсолютно интегрируема и не зависит от A . Далее, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} J(A) &= \underbrace{e^{-Az^2} \sin z \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + 2A \int_{-\infty}^{+\infty} z \sin z e^{-Az^2} dz = \\ &= -2A \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-Az^2} d \cos z = -2A \underbrace{z \cos z e^{-Az^2} \Big|_0^{+\infty}}_{=0} + 2A \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z dz e^{-Az^2} = \\ &= 2A \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z e^{-Az^2} dz - 4A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cos z e^{-Az^2} dz = \\ &= 2AJ(A) + 4A^2 \frac{d}{dA} J(A), \end{aligned}$$

откуда

$$(1 - 2A)J = 4A^2 J'.$$

Решая это простое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим

$$J(A) = \frac{ce^{-1/4A}}{\sqrt{A}},$$

где c – некоторая константа, которую еще предстоит определить. Вспомогательное равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi|x|}} J\left(\frac{a}{|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} \cos yx dy,$$

и подставляя после преобразований $x = 0$, получим

$$\frac{c}{\sqrt{a}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

откуда $c = \sqrt{\pi}$ и

$$F_+[e^{-ay^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}. \quad (2.4.3)$$

Поскольку легко проверить, что

$$F_+[f(y)](x) = F_-[f(y)](-x), \quad (2.4.4)$$

то

$$F_-[e^{-ay^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}. \quad (2.4.5)$$

Отметим также, что если $a = 1/2$, то формулы (2.4.3) и (2.4.5) становятся совсем легко запоминаемыми

$$F_+[e^{-\frac{y^2}{2}}](x) = F_-[e^{-\frac{y^2}{2}}](x) = e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (2.4.6)$$

2.5 Быстроубывающие функции

2.5.1. Здесь мы рассмотрим класс функций в $\mathbb{R}^n$, для которых можно определить преобразование Фурье, обладающее многими замечательными свойствами.

Определение 21. Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ с целочисленными координатами $\alpha_k \in \mathbb{Z}^+$ называется *мультииндексом*.

С мультииндексами связаны следующие операции и обозначения

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n);$$

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_k \leq \beta_k, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!;$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n;$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}.$$

Определение 22. Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1$, называется *быстроубывающей*, если

1) f — бесконечно дифференцируемая функция, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2) для любых мультииндексов α, β существует константа $c = c(\alpha, \beta) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < c < \infty.$$

Условие 2) эквивалентно

2') для любого мультииндекса α и любого $p > 0$ существует константа $k = k(\alpha, p) > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$|D^\alpha f(x)| \leq \frac{k}{1 + \|x\|^p}, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Множество быстроубывающих функций обозначают как $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 3. Условия 2) и 2') эквивалентны.

Пример 5. Приведем примеры быстроубывающих функций.

1) Функция $f(x) = e^{-a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 - \dots - a_n x_n^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a_k > 0$, — быстроубывающая функция. Действительно, она бесконечно дифференцируема и для любого мультииндекса β производная $D^\beta f(x) = P_\beta(x)f(x)$, где $P_\beta(x)$ некоторый полином. Возьмем еще один мультииндекс — α . Поскольку $x^\alpha P_\beta(x)f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то найдется $R > 0$ такое, что

$$|x^\alpha P_\beta(x)f(x)| < 1 \text{ при всех } \|x\| > R.$$

Полагая $M(\alpha, \beta) = \sup_{\|x\| \leq R} |x^\alpha P_\beta(x)f(x)|$, получим

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| \leq \max\{M, 1\} = c(\alpha, \beta) < \infty.$$

2) Всякая финитная функция в $\mathbb{R}^n$ является быстроубывающей. Чтобы это понять, достаточно вспомнить определение.

Определение 23. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется *финитной* в D , если она бесконечно дифференцируема и ее носитель $\text{supp } f = \text{cl}\{x \in D : f(x) \neq 0\}$ является компактным подмножеством в D . Множество финитных функций обозначают как $C_0^\infty(D)$.

Примером финитной функции может служить

$$\omega_{x_0, \varepsilon}(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\varepsilon^2 - \|x - x_0\|^2}}, & \|x - x_0\| \leq \varepsilon, \\ 0, & \|x - x_0\| > \varepsilon, \end{cases}$$

поскольку $\text{supp } \omega_{x_0, \varepsilon}$ есть замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в x_0 и радиуса ε . А бесконечная дифференцируемость — это следствие бесконечной дифференцируемости для функции $f(x) = e^{-1/x} H(x)$, где

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (2.5.1)$$

а значение $H(0)$ не столь важно и в разных ситуациях полагают равным либо 1, либо $1/2$.

Определение 24. Функция $H(x)$ называется *функцией Хевисайда*, или *функцией скачка*.

2.5.2. Свойства быстроубывающих функций

1°. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любых $a, b \in \mathbb{C}$

$$af + bg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Ясно, что $af + bg \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Второе свойство из определения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует из цепочки неравенств: для любых мультииндексов α и β

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (af(x) + bg(x))| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |ax^\alpha D^\beta f(x) + bx^\alpha D^\beta g(x)| \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|ax^\alpha D^\beta f(x)| + |bx^\alpha D^\beta g(x)|) \leq \\ &\leq |a| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| + |b| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta g(x)| \leq \\ &\leq |a|c(\alpha, \beta, f) + |b|c(\alpha, \beta, g) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — линейное пространство. $\square$

2°. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса γ производная

$$D^\gamma f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Ясно, что $D^\gamma f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Второе свойство из определения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует из цепочки неравенств: для любых мультииндексов α и β

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (D^\gamma f(x))| \stackrel{(2.5.2)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^{\beta+\gamma} f(x)| < c(\alpha, \beta + \gamma) < \infty.$$

$\square$

Упражнение 6. Покажите, что для любых мультииндексов α и β верно равенство

$$D^\alpha (D^\beta f(x)) = D^{\alpha+\beta} f(x). \quad (2.5.2)$$

3°. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса γ

$$x^\gamma f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Ясно, что $x^\gamma f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Второе свойство из определения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует из цепочки неравенств: для любых мультииндексов α и β

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (x^\gamma f(x))| &\stackrel{(2.5.4)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \sum_{0 \leq \delta \leq \beta} C_\beta^\delta D^\delta x^\gamma D^{\beta-\delta} f(x)| = \\ &\stackrel{(2.5.3)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \sum_{\substack{0 \leq \delta \leq \beta \\ \delta \leq \gamma}} \delta! C_\beta^\delta C_\gamma^\delta x^{\gamma-\delta} D^{\beta-\delta} f(x)| \leq \\ &\leq \sum_{\substack{0 \leq \delta \leq \beta \\ \delta \leq \gamma}} \delta! C_\beta^\delta C_\gamma^\delta \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha+\gamma-\delta} D^{\beta-\delta} f(x)| < \\ &< \sum_{\substack{0 \leq \delta \leq \beta \\ \delta \leq \gamma}} \delta! C_\beta^\delta C_\gamma^\delta c(\alpha + \gamma - \delta, \beta - \delta) < \infty. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали легко проверяемое равенство

$$D^\delta x^\gamma = \begin{cases} \frac{\gamma!}{(\gamma-\delta)!} x^{\gamma-\delta}, & \text{если } \delta \leq \gamma, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.5.3)$$

□

Упражнение 7. Докажите многомерный аналог формулы Лейбница

$$D^\beta(f(x)g(x)) = \sum_{0 \leq \delta \leq \beta} C_\beta^\delta D^\delta f(x) D^{\beta-\delta} g(x), \quad (2.5.4)$$

где

$$C_\beta^\delta = \frac{\beta!}{\delta!(\beta-\delta)!} = \prod_{k=1}^n C_{\beta_k}^{\delta_k}.$$

4°. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого полинома $P_m(x)$ степени m в $\mathbb{R}^n$

$$P_m(x)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Поскольку $P_m(x) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, то это свойство есть следствие свойств **1°** и **3°**. □

Упражнение 8. Докажите, что верно следующее свойство в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

5°. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$f(x)g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ быстроубывающих функций замкнуто относительно следующих операций: сложения, умножения, умножения на полином и дифференцирования.

2.6 Преобразование Фурье для быстроубывающих функций

2.6.1. По аналогии с преобразованием Фурье для абсолютно интегрируемых кусочно гладких функций определим его для быстроубывающих функций.

Определение 25. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция, тогда определены два отображения F_+ и F_- , переводящие функцию f в функции $\hat{f}$ и $\check{f}$ соответственно, где

$$F_+[f(y)](x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(y,x)} dy$$

называется *прямым преобразованием Фурье* функции f , а

$$F_-[f(y)](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{i(y,x)} dy$$

Л
е
к
ц
и
я
7

называется *обратным преобразованием Фурье* функции f . Здесь (y, x) обозначает скалярное произведение векторов $y, x \in \mathbb{R}^n$, т.е.

$$(y, x) = y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n.$$

Проверим, что интегралы, стоящие в определении функций $\hat{f}$ и $\check{f}$, сходящиеся. Действительно, по пункту 2^о) определения быстро убывающих функций для любого $p > 0$ существует константа $k > 0$ такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)e^{\pm i(y,x)}| dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{k dy}{1 + \|y\|^p}.$$

При подходящем выборе p ($p > n$) этот интеграл сходится.

2.6.2. Свойства преобразования Фурье быстроубывающих функций

①. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любых $a, b \in \mathbb{C}$

$$F_{\pm}[af(y) + bg(y)](x) = aF_{\pm}[f(y)](x) + bF_{\pm}[g(y)](x). \quad (2.6.1)$$

Доказательство. Следует из свойства 1^о быстроубывающих функций и линейности интеграла. $\square$

②. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса α

$$F_{\pm}[y^{\alpha}f(y)](x) = (\pm i)^{|\alpha|} D^{\alpha} F_{\pm}[f(y)](x). \quad (2.6.2)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} D^{\alpha} F_{\pm}[f(y)](x) &= (2\pi)^{-n/2} D^{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{\mp i(y,x)} dy = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) D^{\alpha} e^{\mp i(y,x)} dy = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\mp i)^{\alpha} e^{\mp i(y,x)} dy = (\mp i)^{|\alpha|} F_{\pm}[y^{\alpha}f(y)](x). \end{aligned}$$

Поскольку $|f(y)y^{\alpha}e^{\mp i(y,x)}| \leq |f(y)y^{\alpha}|$, а $y^{\alpha}f(y)$ абсолютно интегрируемая (так как по свойству 3^о быстроубывающих функций она быстроубывающая), то дифференцирование под знаком интеграла было законно. $\square$

③. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса α

$$F_{\pm}[D^{\alpha}f(y)](x) = (\pm ix)^{\alpha} F_{\pm}[f(y)](x). \quad (2.6.3)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} F_{\pm}[D^{\alpha}f(y)](x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha}f(y) e^{\mp i(y,x)} dy = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial y^{\alpha_1}} \underbrace{(D^{(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} f(y))}_{:=g(y)} e^{\mp i(y,x)} dy_1 \right) dy_2 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Рассматривая внутренний интеграл и интегрируя по частям α_1 -раз, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial y^{\alpha_1}} g(y) e^{\mp i(y,x)} dy_1 &= \int_{\mathbb{R}} e^{\mp i(y,x)} d \left(\frac{\partial^{\alpha_1-1}}{\partial y^{\alpha_1-1}} g(y) \right) = \\ &= \underbrace{e^{\mp i(y,x)} \frac{\partial^{\alpha_1-1}}{\partial y^{\alpha_1-1}} g(y) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1-1}}{\partial y^{\alpha_1-1}} g(y) (\mp i x_1) e^{\mp i(y,x)} dy_1 = \\ &\stackrel{\alpha_1 \text{ раз}}{=} (-1)^{\alpha_1} (\mp i x_1)^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{\mp i(y,x)} dy_1 = (\pm i x_1)^{\alpha_1} \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{\mp i(y,x)} dy_1. \end{aligned}$$

Внеинтегральные члены занулялись, поскольку по свойству **2°** быстроубывающих функций g — быстроубывающая. Подставляя полученное выражение обратно в n -кратный интеграл, меняя интегрирование местами, проделываем тоже самое по переменной y_2 , потом по y_3 и т.д. до y_n . В итоге получим требуемое свойство, выраженное формулой (2.6.3). $\square$

④. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$F_{\pm}[f(y)](x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. По формуле (2.6.2) мы можем найти производную любого порядка для $F_{\pm}[f(y)](x)$, поэтому она бесконечно дифференцируема. Докажем свойство 2) из определения быстроубывающих функций. Имеем, для любых мультииндексов α и β

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha} D^{\beta} F_{\pm}[f(y)](x)| &\stackrel{(2.6.2)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha} F_{\pm}[y^{\beta} f(y)](x)| = \\ &\stackrel{(2.6.3)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |F_{\pm}[\underbrace{D^{\alpha}(y^{\beta} f(y))}_{:=g(y)}](x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |F_{\pm}[g(y)](x)|. \end{aligned}$$

Поскольку по свойствам **2°** и **3°** быстроубывающих функций g — быстроубывающая, то для ограниченности последнего супремума, достаточно доказать, что $F_{\pm}[g(y)](x)$ непрерывная функция, сходящаяся на бесконечности к нулю.

Непрерывность следует уже для абсолютно интегрируемых функций. Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} F_{\pm}[g(y)](x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{\mp i(y,x)} dy = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\mp i(y,x)} dy = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{\mp i(y,x_0)} dy = \\ &= F_{\pm}[g(y)](x_0). \end{aligned}$$

Предел можно было внести под знак интеграла, так как $|g(y) e^{\mp i(y,x)}| \leq |g(y)|$. Докажем теперь сходимость к нулю. Пусть $x \rightarrow \infty$, следовательно, хотя бы

одна координата $x_k \rightarrow \infty$. Пусть для определенности это будет координата x_1 . Тогда получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_{\pm}[g(y)](x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(y) e^{\mp i y_1 x_1} dy_1}_{:=v(y_2, \dots, y_n; x_1)} \underbrace{e^{\mp i((y, x) \pm y_1 x_1)}}_{:=u(y_2, \dots, y_n; x_2, \dots, x_n)} dy_2 \dots dy_n = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \lim_{x \rightarrow \infty} uv dy_2 \dots dy_n = 0, \end{aligned}$$

поскольку $|uv| \leq |v| \leq \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy_1$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} v = 0$ по лемме Римана–Лебега. $\square$

⑤. Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование и $b \in \mathbb{R}^n$. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$F_{\pm}[f(Ay + b)](x) = \frac{e^{\pm i(x, A^{-1}b)}}{|\det A|} F_{\pm}[f(y)]((A^{-1})^* x). \quad (2.6.4)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} F_{\pm}[f(Ay + b)](x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(Ay + b) e^{\mp i(y, x)} dy = \\ &\stackrel{Ay+b=u}{=} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{\mp i(A^{-1}(u-b), x)} \frac{du}{|\det A|} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \frac{e^{\pm i(A^{-1}b, x)}}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{\mp i(A^{-1}u, x)} du = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \frac{e^{\pm i(A^{-1}b, x)}}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{\mp i(u, (A^{-1})^* x)} du. \end{aligned}$$

$\square$

Рассмотрим частные случаи формулы (2.6.4). Пусть $b = -x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n$ и A — тождественное преобразование, т.е. $A = I$, и $A^{-1} = I$ и $(A^{-1})^* = I$. Тогда для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$F_{\pm}[f(y - x_0)](x) = e^{\mp i(x, x_0)} F_{\pm}[f(y)](x). \quad (2.6.5)$$

Если рассмотреть $b = 0$ и $A = aI, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Тогда для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$F_{\pm}[f(ay)](x) = \frac{1}{|a|^n} F_{\pm}[f(y)]\left(\frac{x}{a}\right). \quad (2.6.6)$$

Упражнение 9. Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование и $b \in \mathbb{R}^n$. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ доказать, что

$$f(Ax + b) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2.6.3. Формула обращения

Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула

$$\boxed{F_+[F_-[f(z)](y)](x) = F_-[F_+[f(z)](y)](x) = f(x).} \quad (2.6.7)$$

Доказательство. Используем индукцию по размерности пространства $\mathbb{R}^n$. Для $n = 1$ это в точности формула (2.4.2), доказанная для абсолютно интегрируемых кусочно гладких непрерывных функций. Предполагая справедливость формулы для n , докажем ее для $n + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} F_+[F_-[f(z)](y)](x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(z) e^{\mp i(z,y)} e^{\pm i(y,x)} dz dy = \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\left((2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^{2n-2}} f(z) e^{\mp i(\hat{z}, \hat{y})} e^{\pm i(\hat{y}, \hat{x})} d\hat{z} d\hat{y} \right)}_{:=g(z_n, x_1, \dots, x_{n-1})} e^{\mp i z_n y_n} e^{\pm i y_n x_n} dy_n dz_n. \end{aligned}$$

Здесь мы обозначили $\hat{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$ и аналогично для $\hat{z}$ и $\hat{x}$. Для функции g по предположению индукции, справедливо равенство

$$g(z_n, x_1, \dots, x_{n-1}) = F_+[F_-[f(\hat{z}, z_n)](\hat{y})](\hat{x}) = f(\hat{x}, z_n).$$

Подставляя это выражение в первоначальный интеграл, получаем

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} g(z_n, \hat{x}) e^{\mp i z_n y_n} e^{\pm i y_n x_n} dy_n dz_n &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(\hat{x}, z_n) e^{\mp i z_n y_n} e^{\pm i y_n x_n} dy_n dz_n = \\ &= F_+[F_-[f(\hat{x}, z_n)](y_n)](x_n) = f(x). \end{aligned}$$

□

2.7 Свертка функций

2.7.1. Введем новую операцию для функций и изучим ее свойства.

Определение 26. Для $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ функция

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$$

называется *сверткой* функций f и g .

Легко заметить, что свертка двух функций существует, если, например, одна из функций ограничена, а другая — абсолютно интегрируема. Поэтому свертка двух быстроубывающих функций существует, более того, позже мы поймем, что она тоже является быстроубывающей функцией.

Упражнение 10. Доказать, что свертка двух быстроубывающих функций абсолютно интегрируема.

Рассмотрим простейшие свойства свертки, ограничившись рассмотрением быстроубывающих функций.

1) **Линейность свертки по обоим аргументам.** Для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и любых $f, g, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(\alpha f + \beta g) * \phi = \alpha(f * \phi) + \beta(g * \phi), \quad (2.7.1)$$

$$\phi * (\alpha f + \beta g) = \alpha(\phi * f) + \beta(\phi * g). \quad (2.7.2)$$

2) **Коммутативность свертки.** Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$f * g = g * f. \quad (2.7.3)$$

3) **Ассоциативность свертки.** Для любых $f, g, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(f * g) * \phi = f * (g * \phi). \quad (2.7.4)$$

4) **Дифференцирование свертки.** Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и любого мультииндекса α

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f * g) = (f * D^\alpha g). \quad (2.7.5)$$

Доказательство. Первое свойство следует из линейности интеграла и существования свертки для каждого слагаемого. Для второго имеем

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \stackrel{x-y=z}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)dz = (g * f)(x).$$

Ассоциативность доказывается аналогично с помощью соответствующих замен переменных. Для дифференцирования имеем

$$D^\alpha(f * g)(x) = D^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x-y)g(y)dy = (D^\alpha f * g)(x).$$

Вторая формула следует из коммутативности свертки. $\square$

2.7.2. Свертка и преобразование Фурье

Поскольку свертка двух быстро убывающих функций абсолютно интегрируема, то мы можем определить преобразование Фурье от такой свертки. Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$\boxed{F_\pm[(f * g)(y)](x) = (2\pi)^{n/2} F_\pm[f(y)](x) \cdot F_\pm[g(y)](x).} \quad (2.7.6)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
 F_{\pm}[(f * g)(y)](x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)g(z)dz \right) e^{\mp i(y,x)} dy = \\
 &\stackrel{T.??}{=} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)e^{\mp i(y,x)} dy \right) g(z)dz = \\
 &\stackrel{y-z=u}{=} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(z+u,x)} du \right) g(z)dz = \\
 &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{\mp i(u,x)} du \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{\mp i(z,x)} dz = \\
 &= (2\pi)^{n/2} F_{\pm}[f(u)](x) \cdot F_{\pm}[g(z)](x).
 \end{aligned}$$

□

Следствием доказанной формулы является формула для преобразования Фурье от произведения быстроубывающих функций. Напомним, что по свойству 5° быстроубывающих функций произведение быстроубывающих функций снова быстроубывающая функция и

$$F_{\pm}[(f \cdot g)(y)](x) = (2\pi)^{-n/2} (F_{\pm}[f(y)] * F_{\pm}[g(y)])(x). \quad (2.7.7)$$

Доказательство. Заменяем в формуле (2.7.6) функции $f(x)$ и $g(x)$ на их преобразования Фурье — $F_{\pm}[f(y)](x)$ и $F_{\pm}[g(y)](x)$ соответственно. Далее применим формулу обращения и, навесив преобразование Фурье к получившемуся равенству, получим требуемое равенство. □

Упражнение 11. Используя формулу (2.7.6) докажите, что свертка быстроубывающих функций снова быстроубывающая функция.

В связи с этим упражнением отметим в заключение, что к дополнению к уже обсуждавшимся свойствам пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, оно замкнуто относительно взятия преобразования Фурье и операции свертки.

2.8 Равенство Парсеваля

Для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\overline{\check{g}(x)}dx. \quad (2.8.1)$$

Доказательство. Докажем равенство для обратного преобразования Фурье, для прямого доказательство аналогично. Покажем сначала, что для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx. \quad (2.8.2)$$

Л
е
к
ц
и
я
8

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(y,x)}dy \right) g(x)dx = \\ &\stackrel{T.??}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-i(x,y)}dx \right) f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx. \end{aligned}$$

Далее, легко проверить, что справедливы также формулы

$$\overline{\hat{f}(x)} = \check{f}(x), \quad \overline{\check{f}(x)} = \hat{f}(x) \quad (2.8.3)$$

Применяя обе формулы, а также формулу обращения, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx \stackrel{(2.6.7)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx \stackrel{(2.8.2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\hat{g}(x)dx \stackrel{(2.8.3)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\overline{\check{g}(x)}dx.$$

□

2.9 Формула Пуассона

Теорема 14. Для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ справедлива формула Пуассона

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n). \quad (2.9.1)$$

Доказательство теоремы 14. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x)$$

вещественного переменного x . Поскольку

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(2\pi n + x)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k(p)}{1 + |2\pi n + x|^p},$$

то функция F определена для всех $x \in \mathbb{R}$, более того эта функция непрерывно дифференцируема и 2π -периодична. Действительно,

$$\begin{aligned} F(x + 2\pi) &= \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x + 2\pi) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi(n+1) + x) = \\ &\stackrel{n+1=m}{=} \sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(2\pi m + x) = F(x) \end{aligned}$$

и

$$F'(x) = \sqrt{2\pi} \frac{d}{dx} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'(2\pi n + x).$$

Справедливость последнего равенства будет доказана, если мы покажем, что ряд из производных сходится равномерно в окрестности каждой точки $x \in \mathbb{R}$. Докажем равномерную сходимость на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ — этого будет достаточно. По определению быстроубывающей функции найдется константа $k > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f'(2\pi n + x)| &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1 + (2\pi n + x)^2} = \\ &= \frac{k}{1 + x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k}{1 + (2\pi n + x)^2} + \frac{k}{1 + (2\pi n - x)^2} = \\ &\leq k + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2k}{1 + (2\pi)^2(n-1)^2} < 3k + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{k}{2\pi^2 n^2} < \infty. \end{aligned}$$

По признаку Вейерштрасса ряд из производных сходится равномерно на $[-2\pi, 2\pi]$ и, следовательно, $F(x)$ непрерывно дифференцируема. Поэтому для каждого $x \in \mathbb{R}$ она представляется своим рядом Фурье в комплексной форме (1.4.2):

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Подставляя в это равенство значение $x = 0$, получаем

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n.$$

Таким образом, для завершения доказательства остается показать, что $c_n = \hat{f}(n)$. Имеем

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n + x) \right) e^{-inx} dx = \\ &\stackrel{\text{равн.сх.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(2\pi n + x) e^{-inx} dx = \\ &\stackrel{x+2\pi n=y}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi+2\pi n}^{\pi+2\pi n}}_{=\int_{\mathbb{R}}} f(y) e^{-iny} \underbrace{e^{i2\pi n^2}}_{=1} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iny} dy = \hat{f}(n). \end{aligned}$$

□

2.10 Теорема Котельникова–Шеннона

Теорема 15. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и ее преобразование Фурье $\hat{f}(x)$ зануляется вне некоторого интервала $[-a, a]$, $a > 0$, тогда для любого $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi n}{a}\right) \operatorname{sinc}(ax - \pi n),$$

где $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ — функция отсчетов.

Доказательство теоремы 15. Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{(2.6.7)}{=} \check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{iyx} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \hat{f}(y) e^{iyx} dy = \\ &\stackrel{(1.4.3)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-\frac{i\pi n y}{a}} e^{iyx} dy \stackrel{T.4}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-a}^a e^{-\frac{i\pi n y}{a}} e^{iyx} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2a \frac{\sin(ax - \pi n)}{ax - \pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2ac_n}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}(ax - \pi n). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались разложением гладкой функции $\hat{f}(x)$ в комплексный ряд Фурье на отрезке $[-a, a]$. Остается только показать, что $\frac{2ac_n}{\sqrt{2\pi}} = f\left(\frac{\pi n}{a}\right)$:

$$\frac{2ac_n}{\sqrt{2\pi}} \stackrel{(1.4.4)}{=} \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \hat{f}(x) e^{\frac{i\pi n x}{a}} dx = \check{f}\left(\frac{\pi n}{a}\right) = f\left(\frac{\pi n}{a}\right).$$

□

2.11 Решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу о распределении температуры в пространстве без источников тепла или холода. Обозначим через $u(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ — температуру в точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ в момент времени $t \geq 0$. Известно, что закон изменения температуры определяется *уравнением теплопроводности* и начальным распределением температуры:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u = a^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right), & a > 0; \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (2.11.1)$$

Предположим, что f достаточно хорошая (гладкая и абсолютно интегрируемая), чтобы можно было применить преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Естественно предполагать, что функция $u(x, t)$ унаследует эти свойства. Обозначим через

$$v(x, t) = F_+[u(z, t)](x)$$

прямое преобразование Фурье функции $u(x, t)$ по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Применяв такое преобразование Фурье к уравнению (2.11.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt} F_+[u(z, t)](x) = F_+ \left[\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \right] (x) \stackrel{(2.11.1)}{=} F_+[a^2 \Delta u(z, t)](x) = \\ &\stackrel{(2.6.1)}{=} a^2 \sum_{k=1}^n F_+ \left[\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z_k^2} \right] (x) \stackrel{(2.6.3)}{=} a^2 \sum_{k=1}^n (ix_k)^2 F_+[u(z, t)](x) = -\|x\|^2 v \end{aligned}$$

и $v(x, 0) = \hat{f}(x)$. Таким образом, мы получили параметрическое семейство обыкновенных дифференциальных уравнений (с параметром $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -a^2 \|x\|^2 v, \\ v(0) = \hat{f}(x), \end{cases}$$

решая которые, получаем

$$v(x, t) = \hat{f}(x) e^{-a^2 \|x\|^2 t}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

Применив к последнему соотношению обратное преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^n$, получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &\stackrel{(2.6.7)}{=} F_-[F_+[u(z, t)](y)](x) = F_-[v(y, t)](x) = F_-[\hat{f}(y) e^{-a^2 \|y\|^2 t}](x) = \\ &\stackrel{(2.7.7)}{=} (2\pi)^{-n/2} (F_-[\hat{f}] * F_-[e^{-a^2 \|y\|^2 t}])(x) = (2\pi)^{-n/2} (f * F_-[e^{-a^2 \|y\|^2 t}])(x) = \\ &\stackrel{(2.4.5)}{=} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z) (2a^2 t)^{-n/2} e^{-\frac{\|z\|^2}{4a^2 t}} dz = \\ &= (4\pi a^2 t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z) e^{-\frac{\|z\|^2}{4a^2 t}} dz. \end{aligned}$$

Полученная формула для $u(x, t)$ называется *формулой Пуассона* решения уравнения теплопроводности (2.11.1). Поскольку решение единственно, то подставив это решение, можно убедиться, что оно действительно удовлетворяет уравнению и начальному условию.

2.12 Понятие о дискретном преобразовании Фурье

Смотрите [A02, с.52].

Рекомендуемая литература: [A02], [B14.2], [4], [5], [9], [7].

Глава 3

Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа по своим свойствам мало отличается от преобразования Фурье. Однако класс функций, для которых определено преобразование Лапласа, существенно отличен от класса $L_1(-\infty, \infty)$ функций, для которых существует преобразование Фурье.

А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин

3.1 Оригиналы и изображения

Определение 27. Непрерывная всюду за исключением изолированных точек функция $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ называется *оригиналом*, если существует вещественное число α такое, что

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\alpha t} dt < \infty.$$

Инфимум всех таких α называется *показателем роста* функции f и обозначается как $\alpha(f)$.

Из определения показателя роста видно, что сходимость интеграла будет справедлива для каждого $\alpha > \alpha(f)$. Действительно, возьмем такое α , тогда на интервале $[\alpha(f), \alpha)$ найдется β для которого интеграл $\int_0^\infty |f(t)|e^{-\beta t} dt < \infty$. Тогда

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\alpha t} dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-\beta t} e^{-(\alpha-\beta)t} dt < \int_0^\infty |f(t)|e^{-\beta t} dt < \infty.$$

Оригиналы $f(t)$ могут быть определены и на всей числовой прямой, однако нам важны значения, которые они принимают только на положительной полуоси, поэтому в таких случаях мы рассматриваем функцию $f(t)H(t)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда с единичным значением в нуле (2.5.1).

Определение 28. *Изображением* оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$, определенная в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha(f)$ равенством

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt. \quad (3.1.1)$$

Л
е
к
ц
и
я
9

Коротко, связь между оригиналом и изображением записывают как $f(t) \doteq F(p)$. Эту же связь определяют с помощью преобразования Лапласа $\mathcal{L}$, сопоставляющего оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$, т.е.

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = F(p). \quad (3.1.2)$$

Из определения преобразования Лапласа очевидна его связь с преобразованием Фурье, выражаемая следующей формулой

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \sqrt{2\pi}F_+[f(t)H(t)e^{-ut}](v), \quad p = u + iv, \quad u > \alpha(f). \quad (3.1.3)$$

Пример 6. Пусть $f(t) = 1$. На самом деле как оригинал это функция $H(t)$. Найдем показатель роста. Очевидно, что интеграл $\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt$ сходится для всех $\alpha > 0$ и расходится во всех остальных случаях, поэтому $\alpha(1) = 0$. Таким образом преобразование Лапласа определено в правой комплексной полуплоскости и

$$\mathcal{L}[1](p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

3.2 Простейшие свойства преобразования Лапласа

1. Линейность преобразования Лапласа.

Теорема 16. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы с показателями роста $\alpha(f)$ и $\alpha(g)$ соответственно, тогда их линейная комбинация $af(t) + bg(t)$, $a, b \in \mathbb{C}$ тоже оригинал с показателем роста $\alpha(af + bg) \leq \max\{\alpha(f), \alpha(g)\}$ и

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](p) = a\mathcal{L}[f(t)](p) + b\mathcal{L}[g(t)](p). \quad (3.2.1)$$

Доказательство теоремы 16. Неравенство для показателя роста следует из рассуждений о показателе роста, приведенных выше. А линейность доказывается либо непосредственно, либо через связь с преобразованием Фурье (3.1.3) и линейности самого преобразования Фурье. $\square$

2. Свойство подобия для преобразования Лапласа.

Теорема 17. Пусть $f(t)$ — оригинал с показателем роста $\alpha(f)$, тогда $f(at)$ тоже оригинал для любого $a > 0$ с показателем роста $\alpha(f(at)) = \frac{\alpha(f)}{a}$ и

$$\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{a}\right). \quad (3.2.2)$$

Доказательство теоремы 17. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(at)](p) &\stackrel{(3.1.3)}{=} \sqrt{2\pi}F_+[f(at)H(t)e^{-ut}](v) = \sqrt{2\pi}F_+[f(at)H(at)e^{-\frac{u}{a}at}](v) = \\ &\stackrel{(2.6.6)}{=} \frac{1}{a}\sqrt{2\pi}F_+[f(t)H(t)e^{-\frac{u}{a}t}]\left(\frac{v}{a}\right) \stackrel{(3.1.3)}{=} \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{a}\right). \end{aligned}$$

$\square$

3. Смещение изображения.

Теорема 18. Пусть $f(t)$ — оригинал с показателем роста $\alpha(f)$, тогда $e^{-\alpha t}f(t)$ тоже оригинал для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ с показателем роста $\alpha(f) - \operatorname{Re} \alpha$ и

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)](p) = \mathcal{L}[f(t)](p + \alpha). \quad (3.2.3)$$

Доказательство теоремы 18. При $\operatorname{Re}(p + \alpha) > \alpha(f)$ имеем

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)](p) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p+\alpha)t} dt = \mathcal{L}[f(t)](p + \alpha).$$

□

4. Запаздывание оригинала. Здесь мы рассмотрим взаимосвязь изображений оригинала $f(t)$ и оригинала с запаздывающим аргументом

$$f(t - a)H(t - a), \quad a > 0.$$

Их графики представлены на рис. 3.1.

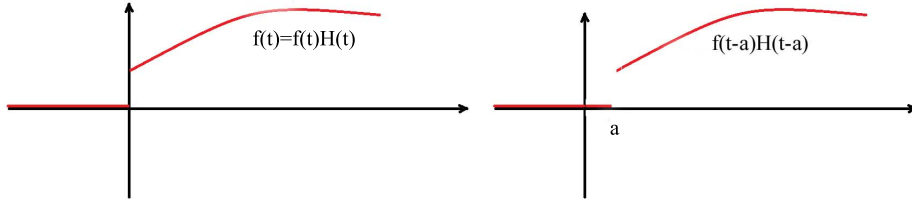


Рис. 3.1: Запаздывание оригинала

Теорема 19. Пусть $f(t)$ — оригинал, тогда $f(t - a)H(t - a)$ — тоже оригинал для любого $a > 0$ и

$$\mathcal{L}[f(t - a)H(t - a)](p) = e^{-ap}\mathcal{L}[f(t)](p). \quad (3.2.4)$$

Доказательство теоремы 19. Опять используя связь с преобразованием Фурье, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - a)H(t - a)](p) &\stackrel{(3.1.3)}{=} \sqrt{2\pi}\mathcal{F}_+[f(t - a)H(t - a)e^{-ut}](v) = \\ &= e^{-ua}\sqrt{2\pi}\mathcal{F}_+[f(t - a)H(t - a)e^{-u(t-a)}](v) = \\ &\stackrel{(2.6.5)}{=} e^{-ua}e^{-iav}\sqrt{2\pi}\mathcal{F}_+[f(t)H(t)e^{-ut}](v) = \\ &= e^{-ap}\mathcal{L}[f(t)](p). \end{aligned}$$

□

3.3 Аналитичность изображения и формула обращения

Одним из важных свойств преобразования Лапласа является аналитичность изображения. Приведем точную формулировку без доказательства (доказательство возможно будет приведено в курсе ТФКП).

Теорема 20. *Изображение $F(p)$ является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > \alpha(f)$. Кроме того,*

$$F(p) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p \rightarrow \infty.$$

Связь между преобразованием Лапласа и преобразованием Фурье приводит к следующей формуле обращения для преобразования Лапласа.

Теорема 21. *Если $f(t)$ — кусочно-гладкий непрерывный оригинал с изображением $F(p)$, то для любого $u > \alpha(f)$*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (3.3.1)$$

Доказательство теоремы 21. Пусть $p = u + iv$ и $u > \alpha(f)$, тогда

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)](u + iv) \stackrel{(3.1.3)}{=} \sqrt{2\pi} F_+[f(t)H(t)e^{-ut}](v).$$

Применяя формулу обращения (2.4.2) для преобразования Фурье кусочно-гладкой непрерывной функции $f(t)H(t)e^{-ut}$, получаем

$$\sqrt{2\pi} f(t)H(t)e^{-ut} = F_-[F(p)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u + iv)e^{ivt} dv,$$

откуда при $t \geq 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u + iv)e^{(u+iv)t} dv \stackrel{p=u+iv}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

□

3.4 Преобразование Лапласа производных и интегралов

Следующим важным свойством является теорема о дифференцировании оригинала.

Теорема 22. *Пусть $f(t)$ — непрерывная при $t \geq 0$ и дифференцируемая при $t > 0$ функция такая, что $f'(t)$ — оригинал. Тогда $f(t)$ тоже оригинал и*

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = p\mathcal{L}[f(t)](p) - f(0+). \quad (3.4.1)$$

Доказательство теоремы 22. Докажем, что $f(t)$ есть оригинал. Для этого зафиксируем $\alpha > \alpha(f')$ и $\alpha > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $\alpha - \varepsilon > \alpha(f')$ и $\alpha - \varepsilon > 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt &= \int_0^{+\infty} \left| \int_0^t f'(s) ds + f(0+) \right| e^{-\alpha t} dt \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t |f'(s)| ds \right) e^{-\alpha t} dt + |f(0+)| \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t |f'(s)| e^{-(\alpha-\varepsilon)s} ds \right) e^{-\varepsilon t} dt + \frac{|f(0+)|}{\alpha} \leq \\
&\stackrel{s \leq t}{\leq} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t |f'(s)| e^{-(\alpha-\varepsilon)s} ds \right) e^{-\varepsilon t} dt + \frac{|f(0+)|}{\alpha} \leq \\
&\stackrel{t < +\infty}{\leq} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |f'(s)| e^{-(\alpha-\varepsilon)s} ds \right) e^{-\varepsilon t} dt + \frac{|f(0+)|}{\alpha} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} |f'(s)| e^{-(\alpha-\varepsilon)s} ds + \frac{|f(0+)|}{\alpha} < \infty.
\end{aligned}$$

Из приведенного рассуждения видно, что показатель роста

$$\alpha(f) \leq \max\{\alpha(f'), 0\}. \quad (3.4.2)$$

Докажем теперь формулу (3.4.1). Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^b f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^b + p \int_0^b f(t) e^{-pt} dt.$$

Пусть $p = u + iv$, $u > \alpha(f')$ и $u > \alpha(f)$. Поскольку интеграл $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-ut} dt$ сходится, то величина $|f(t)| e^{-ut}$ не может быть отделена от нуля, следовательно, найдется последовательность $t_n \rightarrow \infty$ такая, что

$$|f(t_n) e^{-pt_n}| = |f(t_n)| e^{-ut_n} \rightarrow 0.$$

Тогда, взяв $b = t_n$ и перейдя к пределу при $t_n \rightarrow \infty$, получаем равенство (3.4.1). $\square$

Следствие 3. Индукцией по количеству производных можно показать, что справедлива формула

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](p) = p^n \mathcal{L}[f(t)](p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0+). \quad (3.4.3)$$

Следующее утверждение называется теоремой об интегрировании оригинала.

Теорема 23. Пусть $f(t)$ — непрерывный при $t \geq 0$ оригинал, тогда $\int_0^t f(s) ds$ — тоже оригинал и

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(s) ds \right] (p) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](p)}{p}. \quad (3.4.4)$$

Доказательство теоремы 23. Положим $g(t) = \int_0^t f(s) ds$, тогда $g'(t) = f(t)$, $g(0+) = 0$ и по предыдущей теореме 22 имеем

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[g'(t)](p) \stackrel{(3.4.1)}{=} p\mathcal{L}[g(t)](p).$$

□

Следствие 4. Из формулы (3.4.2) вытекает неравенство

$$\alpha \left(\int_0^t f(s) ds \right) \leq \max\{\alpha(f), 0\}. \quad (3.4.5)$$

3.5 Дифференцирование и интегрирование изображений

Теорема 24. Если $f(t)$ и $tf(t)$ являются оригиналами, и $f(t) \doteq F(p)$, то

$$tf(t) \doteq -F'(p). \quad (3.5.1)$$

Доказательство теоремы 24. Дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right) = - \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt} dt = -\mathcal{L}[tf(t)](p).$$

Операция законна, поскольку интеграл $\mathcal{L}[tf(t)](p)$ сходится абсолютно и равномерно относительно $p \in \{\operatorname{Re} p \geq \alpha_0\}$ для любого $\alpha_0 > \alpha(tf(t))$. □

Теорема 25. Если $f(t)$ и $\frac{f(t)}{t}$ являются оригиналами, и $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q) dq = \lim_{\operatorname{Re} P \rightarrow \infty} \int_p^P F(q) dq. \quad (3.5.2)$$

Доказательство теоремы 25. Положим $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, тогда $tg(t) = f(t)$ и, применяя теорему 24, получаем

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[tg(t)](p) \stackrel{(3.5.1)}{=} -\frac{d}{dp} \mathcal{L}[g(t)](p).$$

Интегрируя по произвольному контуру с концевыми точками p и P , получаем

$$\mathcal{L}[g(t)](p) - \mathcal{L}[g(t)](P) = \int_p^P F(q) dq.$$

Из теоремы 20 следует, что

$$\mathcal{L}[g(t)](P) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} P \rightarrow \infty.$$

Переходя к пределу, получаем требуемое. □

3.6 Свертка оригиналов и теорема Бореля

Определение 29. *Сверткой* оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция $(f_1 * f_2)(t)$, определяемая равенством

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(s) f_2(t-s) ds. \quad (3.6.1)$$

Заметим, что это определение согласовано со старым определением свертки 26, если в качестве оригиналов рассматривать, как мы уже делали, функции $f_1(t)H(t)$ и $f_2(t)H(t)$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} (f_1 H * f_2 H)(t) &\stackrel{O.26}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) H(s) f_2(t-s) H(t-s) ds = \\ &= \int_0^{+\infty} f_1(s) f_2(t-s) H(t-s) ds = \\ &= \int_0^t f_1(s) f_2(t-s) ds \stackrel{(3.6.1)}{=} (f_1 * f_2)(t). \end{aligned}$$

Следующая теорема называется теоремой Бореля об умножении изображений.

Теорема 26. *Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — оригиналы с показателями роста $\alpha(f_1)$ и $\alpha(f_2)$ соответственно, тогда их свертка $(f_1 * f_2)(t)$ — тоже оригинал с показателем роста*

$$\alpha(f_1 * f_2) \leq \max\{\alpha(f_1), \alpha(f_2)\}$$

и

$$\mathcal{L}[(f_1 * f_2)(t)](p) = \mathcal{L}[f_1(t)](p) \mathcal{L}[f_2(t)](p). \quad (3.6.2)$$

Доказательство теоремы 26. Для вещественного $\alpha > \max\{\alpha(f_1), \alpha(f_2)\}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |(f_1 * f_2)(t)| e^{-\alpha t} dt &\leq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t |f_1(s)| |f_2(t-s)| ds \right) e^{-\alpha t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |f_1(s)| e^{-\alpha s} |f_2(t-s)| H(t-s) e^{-\alpha(t-s)} ds \right) dt = \\ &\stackrel{T.??}{=} \int_0^{+\infty} |f_1(s)| e^{-\alpha s} \left(\int_0^{+\infty} |f_2(t-s)| H(t-s) e^{-\alpha(t-s)} dt \right) ds = \\ &\stackrel{t-s=u}{=} \int_0^{+\infty} |f_1(s)| e^{-\alpha s} ds \int_0^{+\infty} |f_2(u)| e^{-\alpha u} du < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, свертка есть оригинал. Формула (3.6.2) доказывается аналогично предыдущим рассуждениям: без модулей с заменой α на p . $\square$

Следствие 5. Если $f_1(t)$ непрерывный при $t \geq 0$ оригинал, а $f_2(t)$ непрерывно дифференцируем, то

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt}(f_1 * f_2)(t) \right] (p) = p\mathcal{L}[f_1(t)](p)\mathcal{L}[f_2(t)](p), \quad (3.6.3)$$

Эта формула называется формулой Дюамеля.

Доказательство следствия 5.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt}(f_1 * f_2)(t) \right] (p) &\stackrel{(3.4.1)}{=} p\mathcal{L}[(f_1 * f_2)(t)](p) - (f_1 * f_2)(0) = \\ &\stackrel{(3.6.2)}{=} p\mathcal{L}[f_1(t)](p)\mathcal{L}[f_2(t)](p). \end{aligned}$$

□

3.7 Применение преобразования Лапласа к решению начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) &= f(t) \quad (3.7.1) \\ y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) &= c_{n-1}, \quad a_k, c_k \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Предположим, что правая часть f и решение $y(t)$ со всеми его производными являются оригиналами. Применим к этому уравнению преобразование Лапласа. Используя обозначения $Y(p) \doteq y(t)$ и $F(p) \doteq f(t)$, а также формулу (3.4.3), получаем

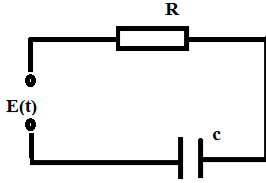
$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)Y(p) - c_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) - \\ - c_1(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) - \dots - c_{n-2}(a_0 p + a_1) - c_{n-1}a_0 = F(p). \end{aligned}$$

Откуда

$$Y(p) = \frac{F(p) + c_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \dots + c_{n-1}a_0}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, например, по теореме 21, находим решение $y(t)$. Таким образом, применение преобразования Лапласа сводит дифференциальное уравнение к алгебраическому, решая которое, находим и решение задачи Коши. Аналогичный метод применим и к решению задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Также можно решать интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, если входящие интегралы имеют вид свертки. Рассмотрим пример интегрального уравнения из теории электрических цепей.

Пример 7. Рассмотрим простейший RC -контур, состоящий из сопротивления R и конденсатора ёмкости c . К контуру подводится напряжением $E(t)$.



Электрический ток $I(t)$ в контуре будет удовлетворять уравнению

$$RI(t) + \frac{1}{c} \int_0^t I(s) ds = E(t).$$

Предположим, что напряжение подводится постоянным $E(t) = E$. Определим какой будет ток $I(t)$. Обозначим $\mathcal{L}[I(t)] = \mathcal{I}$ и применим преобразование Лапласа к этому уравнению. Применяя теорему Бореля и зная изображение 1, находим

$$R\mathcal{L}[I(t)](p) + \frac{1}{c} \mathcal{L}[(I * 1)(t)](p) = E\mathcal{L}[1](p),$$

$$R\mathcal{I} + \frac{\mathcal{I}}{cp} = \frac{E}{p}.$$

Откуда

$$\mathcal{I} = \frac{E}{R} \frac{1}{p + \frac{1}{cR}} = \frac{E}{R} \mathcal{L}[1] \left(p + \frac{1}{cR} \right) \stackrel{(3.2.3)}{=} \mathcal{L} \left[\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{cR}} \right] (p).$$

Следовательно,

$$I(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{cR}},$$

т.е. ток будет постепенно затухать.

Глава 4

Обобщенные функции

Сущность теории распределений состоит в том, что, отказываясь от знания функции на множествах лебеговой меры нуль, мы получаем возможность определить широкий класс обобщенных функций, включая различные δ -функции и их производные

Р. Рихтмайер

4.1 Основные и обобщенные функции

4.1.1. Пробные функции. На протяжении этой главы $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ — это открытое множество.

Определение 30. Функция $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ называется *основной*, или *пробной*, в G , если она финитна в G , т.е. если она бесконечно дифференцируема и имеет компактный носитель в G .

Определение 31. Пусть φ_n, φ — пробные функции в G . Говорят, что φ_n *сходится* к φ в пространстве основных функций, если

- 1) существует компакт $K \subset G$, содержащий носители функций φ и φ_n , $n \in \mathbb{N}$,
- 2) для любого мультииндекса α

$$D^\alpha \varphi_n(x) \xrightarrow{G} D^\alpha \varphi(x)$$

при $n \rightarrow \infty$. Множество основных функций с такой сходимостью обозначают как $\mathcal{D}(G)$, при этом сходимость обозначают как

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}(G)} \varphi(x).$$

Пример 8. Пусть $\varphi_n(x) = \omega_{n,1}(x)$. Ясно, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $\varphi_n(x)$ финитна и $\text{supp } \varphi = [n-1, n+1]$. Легко проверить, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\varphi_n(x) \rightarrow 0,$$

но

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}(G)} 0.$$

4.1.2. Обобщенные функции.

Определение 32. Отображение $F : \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ называется *обобщенной функцией*, или *распределением*, если

- 1) F — линейное отображение, т.е. для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(G)$

$$F(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha F(\varphi) + \beta F(\psi);$$

- 2) F — непрерывное отображение, т.е.

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}(G)} \varphi(x) \Rightarrow F(\varphi_n) \rightarrow F(\varphi).$$

Множество всех обобщенных функций обозначают через $\mathcal{D}'(G)$. Кратко, обобщенные функции можно называть линейными непрерывными функционалами на $\mathcal{D}(G)$.

Рассмотрим несколько примеров обобщенных функций.

Пример 9. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ — локально (абсолютно) интегрируемая функция. Это значит, что для любой точки $x \in G$ существует открытая окрестность U_x в G такая, что $\int_{U_x} |f(x)| dx < \infty$. Множество таких функций обозначают как $L_{1,\text{loc}}(G)$. С помощью функции f определим обобщенную функцию F_f (обозначаемую часто той же буквой f), действующую по правилу

$$F_f(\varphi) := f(\varphi) := (f, \varphi) := \int_G f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G). \quad (4.1.1)$$

Покажем, что это, действительно, обобщенная функция. Сначала нужно убедиться, что интеграл в (4.1.1) сходится для каждой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. Для этого достаточно доказать, что всякая локально интегрируемая функция абсолютно интегрируема на любом компакте $K \subset G$. Поскольку

$$K \subset G = \bigcup_{x \in G} U_x \Rightarrow K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{x_k},$$

тогда

$$\int_K |f(x)| dx \leq \sum_{k=1}^m \int_{U_{x_k}} |f(x)| dx < \infty.$$

Взяв теперь произвольную $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, получим

$$\left| \int_G f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \int_{\text{supp } \varphi} |f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \max |\varphi(x)| \int_{\text{supp } \varphi} |f(x)| dx < \infty.$$

Линейность функционала F_f следует из линейности интеграла. Осталось проверить непрерывность. Пусть $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}(G)} \varphi(x)$, и K — компакт, содержащий носители этих функций. Тогда

$$|(f, \varphi_n) - (f, \varphi)| = |(f, \varphi_n - \varphi)| \leq \int_K |f(x)| |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx,$$

поскольку подинтегральная функция не превосходит абсолютно интегрируемую на K функцию $C|f(x)|$ с константой $C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{x \in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \infty$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить требуемый ноль.

Определение 33. Всякая обобщенная функция $F \in \mathcal{D}'(G)$, для которой найдется функция $f \in L_{1,\text{loc}}(G)$ такая, что $F = F_f$ называется *регулярной* обобщенной функцией (распределением). Если такой функции f нет, то обобщенная функция называется *сингулярной*.

Пример 10. Пусть $G = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ определим обобщенную функцию $\delta \in \mathcal{D}'(G)$ формулой

$$\delta(\varphi) = \varphi(0). \quad (4.1.2)$$

Эта сингулярная обобщенная функция называется *δ -функцией Дирака*. В физической литературе часто про действие такой функции пишут

$$\int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0),$$

однако, пользуясь такой записью, всегда нужно четко понимать, что это означает (4.1.2). Сингулярность δ следует из следующих рассуждений. Предположим, что существует $f_\delta \in L_{1,\text{loc}}(G)$ такая, что для каждой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$(\delta, \varphi) = \int_G f_\delta(x) \varphi(x) dx.$$

Тогда функция $\sin x_1 f_\delta(x)$ будет нулевой почти всюду по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. Действительно, для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$0 = \sin 0 \varphi(0) = (\delta, \sin x_1 \varphi(x)) = \int_G \sin x_1 f_\delta(x) \varphi(x) dx.$$

Таким образом, $f_\delta(x) = 0$ почти всюду, что противоречит определению для δ .

Упражнение 12. Доказать, что $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Пример 11. Пусть $G = \mathbb{R}$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ определим обобщенную функцию $\mathcal{P} \frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(G)$ формулой

$$(\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (4.1.3)$$

Символ $\mathcal{P}$ показывает, что $1/x$ не является локально интегрируемой, поэтому нужно использовать предел в виде главного значения по Коши. В дальнейшем, при возникновении функций, не являющихся локально интегрируемыми, мы уже не будем использовать этот символ, но будем понимать действие порождаемых ими обобщенных функций в виде соответствующего предела.

Поскольку функция φ финитна, то начиная с некоторого $R > 0$ будем иметь включение $\text{supp } \varphi \subset [-R, R]$, поэтому предел по R можно не рассматривать. А предел при $\varepsilon \rightarrow +0$ существует и конечен, поскольку

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx = - \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(-y)}{y} dy + \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx,$$

а функция $\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}$ интегрируема на отрезке $[0, R]$.

Линейность и непрерывность $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ практически очевидна.

Упражнение 13. Показать, что

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx. \quad (4.1.4)$$

4.2 Сходимость обобщенных функций

4.2.1. Все операции, определяемые для обобщенных функций, мотивированы аналогиями, возникающими при рассмотрении регулярных обобщенных функций. Мы будем называть такие аналогии наводящими соображениями. Первой операцией рассмотрим предельный переход в $\mathcal{D}'(G)$.

Наводящие соображения. Пусть f_n, f — абсолютно интегрируемые на G функции, и $f_n \rightarrow f$ почти всюду, причем $|f_n| < |f|$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для любой $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$(f_n, \varphi) = \int_G f_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_G f(x) \varphi(x) dx = (f, \varphi).$$

Определение 34. Пусть $F_n, F \in \mathcal{D}'(G)$. Говорят, что F_n *сходится* к F при $n \rightarrow \infty$, если

$$(F_n, \varphi) \rightarrow (F, \varphi) \text{ для любой } \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

При этом пишут $F_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(G)} F$.

4.2.2. Дельта-образные последовательности. Рассмотрим несколько примеров сходимости обобщенных функций.

Определение 35. Последовательность функций $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *дельта-образной последовательностью*, если выполнены следующие условия:

- 1) $h_k(x) \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}^n$;
- 2) существует последовательность $\varepsilon_k > 0$ такая, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и для всех $k \in \mathbb{N}$ носитель $\text{supp } h_k = \overline{B}(0, \varepsilon_k) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \varepsilon_k\}$;
- 3) $\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) dx = 1$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 27. *Всякая дельта-образная последовательность сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к δ -функции.*

Доказательство теоремы 27. Пусть $h_k(x)$ — дельта-образная последовательность. Нужно показать, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$(h_k, \varphi) \rightarrow (\delta, \varphi) \quad \text{т.е.} \quad \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0).$$

Используя теорему о среднем и свойства дельта-образной последовательности, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x) \varphi(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\overline{B}(0, \varepsilon_k)} h_k(x) \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\xi_k) \int_{\overline{B}(0, \varepsilon_k)} h_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\xi_k) = \varphi(0), \end{aligned}$$

поскольку $\xi_k \in \overline{B}(0, \varepsilon_k)$ и $\xi_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. $\square$

Поскольку предельным геометрическим образом графиков функций из дельтаобразной последовательности (см., например, рис. 4.1) является $+\infty$ в точке $x = (x_1, \dots, x_n) = 0$, то часто δ -функцию графически так и изображают — вертикальной стрелкой $x_k = 0, k = 1, \dots, n-1$ по x_n от 0 до $+\infty$.

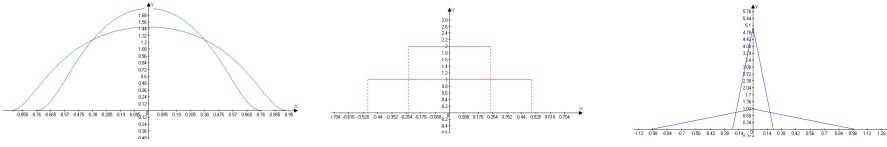


Рис. 4.1: Графики дельта-образных последовательностей в $\mathbb{R}$
 $h_k(x) = c_k e^{\frac{-1}{\varepsilon_k^2 - x^2}} H(\varepsilon_k^2 - x^2)$, $h_k(x) = \frac{H(\varepsilon_k^2 - x^2)}{2\varepsilon_k}$, $h_k(x) = \frac{\varepsilon_k - |x|}{\varepsilon_k^2} H(\varepsilon_k^2 - x^2)$.

4.2.3. Формулы Сохоцкого.

Теорема 28. *В $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедливы формулы Сохоцкого*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} := \frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \quad (4.2.1)$$

Доказательство теоремы 28. Для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем $\text{supp } \varphi \subseteq [-R, R]$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x \pm i\varepsilon}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx}_{I_1} + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{\varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx}_{I_2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \underbrace{\int_{-R}^R \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} dx}_{=0} + \\
 &+ \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R}^R \frac{\mp i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx \stackrel{x=y\varepsilon}{=} \mp i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-R/\varepsilon}^{R/\varepsilon} \frac{dy}{y^2 + 1} = \\
 &= \mp i\varphi(0) \operatorname{arctg} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \mp i\varphi(0)\pi = (\mp i\pi\delta, \varphi).
 \end{aligned}$$

Для вычисления первого предела воспользуемся теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Поскольку для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} \right| \leq \frac{|\varphi(x) - \varphi(0)|}{|x|},$$

а интеграл от последней функции конечен, то

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-R}^R \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx = \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \stackrel{R \rightarrow \infty}{=} \\
 &= \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \stackrel{(4.1.4)}{=} (\mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi).
 \end{aligned}$$

□

4.3 Операции с обобщенными функциями

4.3.1. Линейная замена переменных. Начнем с наводящих соображений. Пусть $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, A — невырожденная $n \times n$ матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Для пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим действие регулярной обобщенной функции $f(Ax + b)$ на $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}
 (f(Ax + b), \varphi(x)) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b) \varphi(x) dx \stackrel{Ax+b=y}{=} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(A^{-1}(y - b)) \frac{dy}{|\det A|} = \left(f(y), \frac{\varphi(A^{-1}(y - b))}{|\det A|} \right).
 \end{aligned}$$

Определение 36. Для любой обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, невырожденной $n \times n$ матрицы A и вектора $b \in \mathbb{R}^n$ определена новая обобщенная функция $F(Ax + b) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующая на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$(F(Ax + b), \varphi(x)) = \left(F(x), \frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|} \right). \quad (4.3.1)$$

Упражнение 14. Доказать, что $F(Ax + b) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Пример 12. $(\delta(x - x_0), \varphi(x)) \stackrel{(4.3.1)}{=} (\delta(x), \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0).$

4.3.2. Нелинейная замена переменных в δ -функции.

Определение 37. Пусть $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и h_k — произвольная дельта-образная последовательность, тогда определена обобщенная функция $\delta(a(x)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ формулой

$$\delta(a(x)) \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(a(x)). \quad (4.3.2)$$

Мы не будем обсуждать деликатный момент о корректности этого определения, т.е. вопрос существования этого предела и его независимости от дельта-образной последовательности, однако используем его для получения полезной формулы.

Теорема 29. Пусть $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция с простыми нулями (т.е. $a(x) = 0, a'(x) \neq 0$). Тогда

$$\delta(a(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|a'(x_k)|}, \quad (4.3.3)$$

где x_k — нули функции a .

Доказательство теоремы 29. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\text{supp } \varphi = [-R, R]$. В интервале $[-R, R]$ находится лишь конечное число нулей $x_k, k = 0, \dots, m$ функции a . Если бы это было не так, то нашлась бы сходящаяся к нулю x_∞ функции a последовательность нулей x_j функции a , но тогда бы $a'(x_\infty) = 0$, что противоречит условию теоремы о простоте нулей функции a .

Для простоты изложения будем считать, что функция a имеет лишь один нуль $x_0 \in [-R, R]$. Тогда по теореме об обратной функции найдется окрестность J точки x_0 , на которой функция a обратима. По определению дельта-образной последовательности h_k , начиная с некоторого номера k будем иметь

$$\text{supp } h_k = [-\varepsilon_k, \varepsilon_k] \subset a(J).$$

Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ получаем

$$\begin{aligned} (\delta(a(x)), \varphi(x)) &\stackrel{(4.3.2)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h_k(a(x)) \varphi(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-R}^R h_k(a(x)) \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_J h_k(a(x)) \varphi(x) dx + \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[-R, R] \setminus J} h_k(a(x)) \varphi(x) dx}_{=0} = \\ &\stackrel{a(x)=y}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a(J)} h_k(y) \varphi(a^{-1}(y)) \frac{dy}{|a'(a^{-1}(y))|} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(h_k, \frac{\varphi(a^{-1}(y))}{|a'(a^{-1}(y))|} \right) \stackrel{T.27}{=} \left(\delta, \frac{\varphi(a^{-1}(y))}{|a'(a^{-1}(y))|} \right) = \\ &= \frac{\varphi(a^{-1}(0))}{|a'(a^{-1}(0))|} = \frac{\varphi(x_0)}{|a'(x_0)|} = \left(\frac{\delta(x - x_0)}{|a'(x_0)|}, \varphi \right). \end{aligned}$$

□

4.3.2. Умножение. Наводящие соображения. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in L_{1,\text{loc}}(G)$, и $g \in C^\infty(G)$, тогда для пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ рассмотрим действие регулярной обобщенной функции $g(x)f(x)$ на $\varphi(x)$:

$$(g(x)f(x), \varphi(x)) = \int_G g(x)f(x)\varphi(x)dx = \int_G f(x)g(x)\varphi(x)dx = (f(x), g(x)\varphi(x)).$$

Определение 38. Пусть $F, \Phi \in \mathcal{D}'(G)$, причем Φ — регулярная обобщенная функция, порожденная бесконечно дифференцируемой функцией (обозначаемой тем же символом Φ), тогда определена обобщенная функция

$$\Phi \cdot F = F \cdot \Phi \in \mathcal{D}'(G),$$

действующая на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ по формуле

$$(\Phi \cdot F, \varphi) = (F, \Phi\varphi) = (F \cdot \Phi, \varphi). \quad (4.3.4)$$

Упражнение 15. Доказать, что $\Phi \cdot F \in \mathcal{D}'(G)$.

Пример 13.

$$(\Phi \cdot \delta, \varphi) = (\delta, \Phi\varphi) = \Phi(0)\varphi(0) = (\Phi(0)\delta, \varphi); \quad (4.3.5)$$

$$(0 \cdot F, \varphi) = (F, 0\varphi) = (F, 0) = 0(F, 1) = 0; \quad (4.3.6)$$

$$(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi) = (\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi dx = (1, \varphi). \quad (4.3.7)$$

Легко проверить, что так определенное умножение коммутативно и ассоциативно. Однако, его нельзя распространить на все пространство обобщенных функций с сохранением свойств коммутативности и ассоциативности. Если предположить, что мы смогли определить такое умножение, то сразу же пришли бы к противоречию

$$0 \stackrel{(4.3.6)}{=} 0\mathcal{P}\frac{1}{x} \stackrel{(4.3.5)}{=} (x\delta)\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta x)\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta \cdot (x\mathcal{P}\frac{1}{x}) \stackrel{(4.3.7)}{=} \delta \cdot 1 \stackrel{(4.3.5)}{=} \delta.$$

4.3.3. Дифференцирование. Наводящие соображения. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Для пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ рассмотрим действие регулярной обобщенной функции $f'(x)$ на $\varphi(x)$:

$$(f', \varphi) = \int_{-R}^R f'(x)\varphi(x)dx = \underbrace{f(x)\varphi(x)}_{=0} \Big|_{-R}^R - \int_{-R}^R f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi').$$

Определение 39. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ и $F \in \mathcal{D}'(G)$. Для любого мультииндекса α определена обобщенная функция $D^\alpha F \in \mathcal{D}'(G)$, которая называется *обобщенной производной* порядка α и действует на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ по правилу

$$(D^\alpha F, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (F, D^\alpha \varphi). \quad (4.3.8)$$

Упражнение 16. Доказать, что $D^\alpha F \in \mathcal{D}'(G)$.

Пример 14.

$$\begin{aligned} (\delta', \varphi) &= -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0); \\ (H', \varphi) &= -(H, \varphi) \stackrel{(2.5.1)}{=} -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Упражнение 17. Пусть $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Показать, что справедлива формула Лейбница

$$(gF)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k g^{(k)} F^{(n-k)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.3.10)$$

В частности,

$$(gF)' = g'F + gF'.$$

Следующая теорема проливает свет на взаимосвязь классической производной кусочно-гладкой функции и ее обобщенным вариантом.

Теорема 30. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-гладкая функция, тогда ее классическая производная $f'_{\text{кл}}$, рассматриваемая как обобщенная функция, и ее обобщенная производная $f'_{\text{об}}$ связаны формулой

$$f'_{\text{об}} \stackrel{\mathcal{D}'}{=} f'_{\text{кл}} + \sum_k [f]_k \delta(x - x_k), \quad (4.3.11)$$

где x_k — точки разрыва функции $f(x)$, и $[f]_k = f(x_k + 0) - f(x_k - 0)$ — скачок функции f в точке x_k .

Доказательство теоремы 30. Подействуем $f'_{\text{об}}$ на функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем $\text{supp } \varphi = [-R, R]$, получим

$$\begin{aligned} (f'_{\text{об}}, \varphi) &\stackrel{(4.3.8)}{=} -(f, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = -\int_{-R}^R f(x) \varphi'(x) dx = \\ &= -\sum_{k: x_k \in [-R, R]} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \varphi'(x) dx = -\sum_{k: x_k \in [-R, R]} f(x) \varphi(x) \Big|_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} + \\ &+ \sum_{k: x_k \in [-R, R]} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x) \varphi(x) dx = -\sum_k (f(x_{k+1} - 0) \varphi(x_{k+1}) - f(x_k + 0) \varphi(x_k)) + \\ &+ (f'_{\text{кл}}, \varphi) = -\sum_k (f(x_{k+1} - 0) \varphi(x_{k+1}) + \sum_k f(x_k + 0) \varphi(x_k)) + (f'_{\text{кл}}, \varphi) = \\ &\stackrel{k+1 \rightarrow k}{=} -\sum_k (f(x_k - 0) \varphi(x_k) + \sum_k f(x_k + 0) \varphi(x_k)) + (f'_{\text{кл}}, \varphi) = \\ &= \sum_k (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) (\delta(x - x_k), \varphi(x)) + (f'_{\text{кл}}, \varphi) = \\ &= \left(\sum_k [f]_k \delta(x - x_k) + f'_{\text{кл}}, \varphi \right). \end{aligned}$$

□

Пример 15. Плотность заряда электрического диполя. Поскольку δ функцию можно воспринимать как плотность распределения какой-либо величины в точке ноль, то с помощью нее можно записать плотность распределения заряда системы из двух заряженных частиц: с зарядом $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$ на расстоянии l . Такая система называется электрическим диполем. Помещая отрицательный заряд в точку $x = 0$, а положительный в точку $x = l$, получаем плотность системы

$$\varrho_l(x) = -\varepsilon\delta(x) + \varepsilon\delta(x + l).$$

Моментом системы называется величина $p = \varepsilon l$. Точечным электрическим диполем называется предельное положение описанной системы при $l \rightarrow 0+$ с сохранением момента p . Вычислим плотность распределения заряда точечного электрического диполя ϱ_0 как предел (в $\mathcal{D}'$) плотности ϱ_l :

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0+} (\varrho_l(x), \varphi(x)) &= \lim_{l \rightarrow 0+} (-\varepsilon\delta(x) + \varepsilon\delta(x + l), \varphi(x)) = \\ &= \lim_{l \rightarrow 0+} (\delta, \varepsilon(\varphi(x + l) - \varphi(x))) = \lim_{l \rightarrow 0+} p \frac{\varphi(l) - \varphi(0)}{l} = \\ &= p\varphi'(0) = -(p\delta', \varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, $\varrho_0 = -p\delta'$.

4.4 Свертка обобщенных функций

Начнем с наводящих соображений. Пусть $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, тогда их свертка $f * g$ существует и является элементом $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Подействуем регулярной обобщенной функцией $f * g$ на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy \right) \varphi(x) dx = \\ &\stackrel{T??}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \varphi(x) dx \right) dy \stackrel{x-y=z}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) \varphi(z + y) dz \right) dy = \\ &\stackrel{T??}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \varphi(z + y) dy \right) dz = (f(z), (g(y), \varphi(y + z))). \end{aligned}$$

Определение 40. Пусть $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, причем G такая, что для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ функция $(G(x), \varphi(x + y))$ является пробной функцией переменной y . Тогда определена обобщенная функция $F * G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, которая называется *сверткой* F и G , и действует на пробную $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$(F * G, \varphi) = (F(y), (G(x), \varphi(x + y))). \quad (4.4.1)$$

Рассмотрим по аналогии с обычной сверткой ее простейшие свойства.

0). **Свертка с δ -функцией.** Пусть $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, тогда $F * \delta$ и $\delta * F$ существуют и

$$F * \delta = \delta * F = F. \quad (4.4.2)$$

Это равенство формально часто записывают как $F(x) = \int F(y)\delta(x-y)dy$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, тогда $(\delta(x), \varphi(x+y)) = \varphi(y)$ — пробная функция, следовательно определена свертка $F * \delta$, при этом

$$(F * \delta, \varphi) = (F(y), (\delta(x), \varphi(x+y))) = (F(y), \varphi(0+y)) = (F, \varphi).$$

Функция $(F(x), \varphi(x+y))$ переменной y вообще говоря не является финитной, но она бесконечно дифференцируема, следовательно, непрерывна, поэтому δ -функция может на нее действовать, имеем

$$(\delta * F, \varphi) = (\delta(y), (F(x), \varphi(x+y))) = (F(x), \varphi(x+0)) = (F, \varphi).$$

□

Упражнение 18. Доказать, что для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и любой $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ функция $(F(x), \varphi(x+y))$ переменной y бесконечно дифференцируема.

1). **Линейность свертки.** Пусть $F_1, F_2, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $F_1 * G, F_2 * G$ существуют, тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ существует свертка $(\alpha F_1 + \beta F_2) * G$, причем

$$(\alpha F_1 + \beta F_2) * G = \alpha(F_1 * G) + \beta(F_2 * G). \quad (4.4.3)$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, имеем

$$\begin{aligned} ((\alpha F_1 + \beta F_2) * G, \varphi) &= ((\alpha F_1(y) + \beta F_2(y), (G(x), \varphi(x+y)))) = \\ &= \alpha(F_1(y), (G(x), \varphi(x+y))) + \beta(F_2(y), (G(x), \varphi(x+y))) = \\ &= (\alpha(F_1 * G), \varphi) + (\beta(F_2 * G), \varphi) = (\alpha(F_1 * G) + \beta(F_2 * G), \varphi). \end{aligned}$$

□

2). **Коммутативность свертки.** Пусть $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $F * G$ существует, тогда существует и свертка $G * F$, причем

$$F * G = G * F. \quad (4.4.4)$$

Без доказательства примем это свойство.

3). **Дифференцирование свертки.** Пусть $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $F * G$ существует, тогда для любого мультииндекса α существуют свертки $D^\alpha(G * F)$, $D^\alpha G * F$ и $G * D^\alpha F$, причем

$$D^\alpha(D * G) = D^\alpha F * G = F * D^\alpha G. \quad (4.4.5)$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ввиду свойства 2) достаточно установить одно из равенств, имеем

$$\begin{aligned}(D^\alpha(F * G), \varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(F * G, D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(F(y), (G(x), D^\alpha \varphi(x + y))) = \\ &= (F(y), (D^\alpha G(x), \varphi(x + y))) = (F * D^\alpha, \varphi).\end{aligned}$$

□

4). **Отсутствие ассоциативности.** Свертка в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ не ассоциативна.

Доказательство. Нужно предъявить обобщенные функции $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$(F_1 * F_2) * F_3 \neq F_1 * (F_2 * F_3).$$

Возьмем $F_1 = 1, F_2 = \delta'$ и $F_3 = H$, тогда

$$0 = 0 * H = 1' * H = (1' * \delta) * H = (1 * \delta') * H \neq 1 * (\delta' * H) = 1 * (\delta * H') = 1 * \delta = 1.$$

□

Стоит отметить, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ существуют подмножества, на которых свертка ассоциативна, подробнее о таких обобщенных функциях можно посмотреть в книге [3, глава 2, §7, пункт 7], или других изданиях этой книги.

4.5 Фундаментальное решение дифференциального оператора

4.5.1. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Под дифференциальным оператором в G мы будем понимать выражение

$$L(D) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} b_\alpha D^\alpha,$$

где $b_\alpha \in C^\infty(G)$ и D^α — символ производной порядка α . Попытаемся понять, как решают уравнения в пространстве обобщенных функций: как искать $X \in \mathcal{D}'(G)$ такую, что

$$L(D)X = F, \quad \text{где } F \in \mathcal{D}'(G). \quad (4.5.1)$$

Начнем с "простых" правых частей F .

Определение 41. Обобщенная функция $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется *фундаментальным решением*, или *функцией влияния* оператора $L(D)$ в $\mathbb{R}^n$, если она является решением уравнения

$$L(D)X = \delta.$$

Фундаментальное решение не единственно, оно находится с точностью до обобщенной функции $E_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такой, что $L(D)E_0 = 0$:

$$L(D)(E + E_0) = L(D)E + L(D)E_0 = \delta + 0 = \delta.$$

Фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами ($b_\alpha = \text{const}$) существует. Приведем без доказательства точную формулировку этого утверждения, известного как теорема Мальгранжа — Эренпрейса [7, стр.62].

Теорема 31. *Для любого не нулевого дифференциального оператора $L(D)$ с постоянными коэффициентами фундаментальное решение E существует в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Пример 16. Покажем, что две обобщенные функции E_1 и E_2 :

$$E_1 = -H\text{sh}x, \quad E_2 = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

являются фундаментальными решениями для оператора $1 - \frac{d^2}{dx^2}$ в $\mathbb{R}$, т.е. являются решениями уравнения

$$X - X'' = \delta.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} E_1 - E_1'' &= -H\text{sh}x + (H\text{sh}x)'' \stackrel{(4.3.10)}{=} -H\text{sh}x + (H'\text{sh}x + H\text{ch}x)' = \\ &\stackrel{(4.3.9)}{=} -H\text{sh}x + (\text{sh}x\delta + H\text{ch}x)' \stackrel{(4.3.5)}{=} -H\text{sh}x + (H\text{ch}x)' = \\ &\stackrel{(4.3.10)}{=} -H\text{sh}x + H'\text{ch}x + H\text{sh}x \stackrel{(4.3.9)}{=} \delta. \end{aligned}$$

Также имеем

$$\begin{aligned} E_2 - E_2'' &= \frac{e^{-|x|}}{2} - \left(\frac{e^{-|x|}}{2} \right)'' \stackrel{(4.3.11)}{=} \\ &= \frac{e^{-|x|}}{2} + \left(\text{sgn } x \frac{e^{-|x|}}{2} \right)' \stackrel{(4.3.11)}{=} \frac{e^{-|x|}}{2} - \frac{e^{-|x|}}{2} + \delta. \end{aligned}$$

Первое решение E_1 было найдено при помощи следующей теоремы о нахождении фундаментального решения обыкновенного дифференциального оператора.

Теорема 32. *Пусть $L(D) = \sum_{j=0}^k a_{k-j}(x) \frac{d^j}{dx^j}$, где $a_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $a_0(0) = 1$, тогда фундаментальное решение E оператора $L(D)$ задается равенством*

$$E = f(x)H(x),$$

где H — функция Хевисайда (2.5.1), а f — решение задачи Коши

$$\begin{cases} L(D)f = 0, \\ f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-2)}(0) = 0, \\ f^{(k-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 32. Вычислим все необходимые производные для E

$$\begin{aligned} E' &= (Hf)' = H'f + f'H = f\delta + f'H = f(0)\delta + f'H = f'H, \\ E'' &= (f'H)' = f'(0)\delta + f''H = f''H, \\ \dots &\dots \dots \\ E^{(k)} &= (f^{(k-1)}H)' = f^{(k-1)}(0)\delta + f^kH = \delta + f^kH. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} L(D)E &= \sum_{j=0}^k a_{k-j}(x) \frac{d^j E}{dx^j} = \sum_{j=0}^k a_{k-j}(x) f^{(j)}H + a_0(x)\delta = \\ &= HL(D)f + a_0(0)\delta = H \cdot 0 + \delta = \delta. \end{aligned}$$

□

4.5.2. Фундаментальное решение оператора Лапласа.

Для важных в математической физике дифференциальных операторов найдены фундаментальные решения. Здесь мы обсудим фундаментальное решение оператора Лапласа

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Для $n = 1$ фундаментальное решение E оператора $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ находится с помощью теоремы 32: $E = xH(x)$. Для $n = 2$ фундаментальное решение E оператора $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ непосредственным вычислением (проведенным на семинарских занятиях) получается равным $\frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$. Покажем теперь, что для $n = 3$ фундаментальное решение задается формулой

$$E = -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (4.5.2)$$

Заметим, что в области $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ функция E — гармоническая, т.е. $\Delta E = 0$. Для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ имеем

$$\begin{aligned} (\Delta E, \varphi) &= \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \varphi \right) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}, \varphi \right) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \varphi \right) = \\ &\stackrel{(4.3.8)}{=} (-1)^2 \left(E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + (-1)^2 \left(E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + (-1)^2 \left(E, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \\ &= (E, \Delta \varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} E \Delta \varphi \, dx \, dy \, dz = \int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} E \Delta \varphi \, dx \, dy \, dz = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2} E \Delta \varphi - \underbrace{\Delta E}_{=0} \varphi \, dx \, dy \, dz = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \left| \begin{array}{cc} E & \varphi \\ \Delta E & \Delta \varphi \end{array} \right| dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Применим теперь следующую формулу Грина. Для любой ограниченной области $V \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $S = \partial V$ и любых гладких в замыкании V функций E и φ справедливо равенство

$$\int_V \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \Delta E & \Delta \varphi \end{vmatrix} dV = \int_S \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \frac{\partial E}{\partial n} & \frac{\partial \varphi}{\partial n} \end{vmatrix} dS, \quad (4.5.3)$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (\nabla \varphi, n)$ — производная по внешней нормали n к поверхности S .

В нашем случае поверхность S состоит из двух сфер

$$S_\varepsilon = \{x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2\} \text{ и } S_R = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Радиус R таков, что пробная функция φ зануляется на S_R , поэтому зануляется и интеграл в правой части формулы Грина (4.5.3). На поверхности S_ε нормаль n противоположна по направлению к радиус-вектору, поэтому

$$\frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) = -\frac{1}{4\pi r^2} = -\frac{1}{4\pi \varepsilon^2}.$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2} \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \Delta E & \Delta \varphi \end{vmatrix} dx dy dz &= \int_{S_\varepsilon} \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \frac{\partial E}{\partial n} & \frac{\partial \varphi}{\partial n} \end{vmatrix} dS + \underbrace{\int_{S_R} \begin{vmatrix} E & \varphi \\ \frac{\partial E}{\partial n} & \frac{\partial \varphi}{\partial n} \end{vmatrix} dS}_{=0} = \\ &= \int_{r=\varepsilon} E \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial E}{\partial n} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \varphi \frac{1}{\varepsilon^2} dS = \\ &\stackrel{T.??}{=} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(\xi) + \varphi(\xi) \frac{1}{\varepsilon^2} \right) 4\pi \varepsilon^2 = \varphi(\xi) + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r}(\xi). \end{aligned}$$

В последних равенствах мы использовали теорему о среднем, по которой найдется $\xi \in S_\varepsilon$, удовлетворяющая написанным равенствам. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$, получаем искомое равенство

$$(\Delta E, \varphi) = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Приведем для полноты картины таблицу фундаментальных решений некоторых из основных дифференциальных операторов математической физики. Вывод этих решений можно найти в монографии [3].

Дифференциальный оператор	Фундаментальное решение
Оператор Лапласа Δ	$E_n(x) = -\Gamma(\frac{n}{2} - 1) \frac{\ x\ ^{-n+2}}{4\pi^{n/2}}, \quad n \geq 3$
Оператор теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$	$E_n(x, t) = \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\ x\ ^2}{4a^2 t}}, \quad n \geq 1$
Волновой оператор $\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$	$E_1(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - x),$ $E_2(x, t) = \frac{H(at - \ x\)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - \ x\ ^2}}$

4.5.3. Как решают обобщенные дифференциальные уравнения.

Для нахождения частных обобщенных решений дифференциального уравнения (4.5.1) с постоянными коэффициентами полезно следующее утверждение.

Теорема 33. Пусть $L(D)$ — дифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ с постоянными коэффициентами, и E — его фундаментальное решение. Тогда, если свертка $E * F$ существует в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то она является решением уравнения (4.5.1).

Доказательство теоремы 33. Непосредственно вычисляя, получаем

$$\begin{aligned} L(D)X &= L(D)(E * F) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} b_\alpha D^\alpha (E * F) = \\ &= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} b_\alpha D^\alpha E \right) * F = \delta * F = F. \end{aligned}$$

□

Зачастую частные решения ищутся не во всем пространстве обобщенных функций, а на каком-нибудь его подпространстве. Одним из них является пространство Соболева.

Определение 42. Пространством Соболева $W_p^l(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty)$ называется множество обобщенных функций $F \in \mathcal{D}'(G)$, у которых обобщенные производные $D^\alpha F$ для всех $0 \leq |\alpha| \leq l$ являются регулярными распределениями, порожденными функциями f_α , интегрируемыми в p -ой степени, т.е.

$$\int_G |f_\alpha(x)|^p < \infty.$$

Простейшая характеристика таких функций дается теоремой вложения Соболева.

Теорема 34. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклая область и $lp > n$, тогда для любой $F \in W_p^l(G)$ найдется непрерывная функция f такая, что для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$(F, \varphi) = \int_G f(x) \varphi(x) dx.$$

Во многих случаях обобщенные решения дифференциального уравнения совпадают с его классическими решениями. Рассмотрим пример.

Пример 17. Покажем, что решением в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ дифференциального уравнения

$$F' = 0 \tag{4.5.4}$$

являются только регулярные обобщенные функции, порожденные константой (т.е. являются классическим решением).

Возьмем $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ такую, что $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x) dx = 1$, и положим $c = (F, \varphi_0)$. Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеем

$$\begin{aligned} (F - c, \varphi) &= (F, \varphi) - (c, \varphi) = (F, \varphi) - c \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \\ &= (F, \varphi) - (F, \varphi_0 \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx) = (F, \phi) = (F, \psi') = -(F', \psi) \stackrel{(4.5.4)}{=} 0, \end{aligned}$$

где

$$\phi(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

и

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(y) dy$$

— также пробная функция. Действительно, она бесконечно дифференцируема. Предположим, что $\text{supp } \phi \subseteq [-R, R]$ для некоторого $R > 0$. Тогда нетрудно проверить, что для любого $x \leq -R$ будет $\psi(x) = 0$, и для любого $x \geq R$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(y) dy = \int_{-R}^R \phi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) dy = 0.$$

Таким образом, мы показали, что $F = c$.

4.6 Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

4.6.1. Наводящие соображения. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, тогда, используя равенство Парсеваля для преобразования Фурье (2.8.1), для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} (F_{\pm}[f], \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} F_{\pm}[f](x) \overline{\varphi}(x) dx \stackrel{(2.8.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) F_{\pm}[\overline{\varphi}](x) dx \stackrel{(2.8.3)}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) F_{\pm}[\varphi](x) dx = (f, F_{\pm}[\varphi]). \end{aligned}$$

Из этих соображений уместно было бы определить преобразование Фурье от произвольной обобщенной функции следующим образом

$$(F_{\pm}[G], \varphi) = (G, F_{\pm}[\varphi])$$

для любых $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Однако, такое определение не совсем корректно, поскольку необходимо, чтобы пробная функция $F_{\pm}[\varphi]$ лежала в области определения обобщенной функции G , т.е. в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Такое возможно только(!), если $\varphi \equiv 0$.

Такое определение станет корректным, если мы расширим множество пробных функций до пространства быстроубывающих функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Итак, на новом пространстве основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ определим сходимость по аналогии со сходимостью в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 43. Пусть φ_n, φ — быстроубывающие функции. Говорят, что φ_n *сходится* к φ в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, если для любого мультииндекса α

$$D^\alpha \varphi_n(x) \xrightarrow{\mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x)$$

при $n \rightarrow \infty$. Такую сходимость обозначают как

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi(x).$$

Теперь мы можем определить новый класс обобщенных функций.

Определение 44. Отображение $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ называется *обобщенной функцией медленного роста*, или *умеренным распределением* если

- 1) F — линейное отображение;
- 2) F — непрерывное отображение, т.е.

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi(x) \Rightarrow F(\varphi_n) \rightarrow F(\varphi).$$

Множество всех обобщенных функций медленного роста обозначают через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Если говорить кратко, то обобщенные функции медленного роста — это линейные непрерывные функционалы на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

4.6.2. Прежде, чем привести примеры обобщенных функций медленного роста, отметим следующий факт. Поскольку $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и сходимость $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x)$ влечет сходимость $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi(x)$, то

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

т.е. всякая обобщенная функция медленного роста остается обобщенной функцией.

Поясним теперь название обобщенных функций медленного роста.

Определение 45. Отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называется *функцией медленного (степенного) роста*, если существует число $m = m(f) > 0$ такое, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)| dx}{(1 + \|x\|)^m} < \infty.$$

Легко проверить, что любой полином и всякая быстроубывающая функция являются функциями медленного роста. А вот, например, при $n = 1$ функция e^x таковой не является.

Покажем, что всякое регулярное распределение, порожаемое функцией f медленного роста, является обобщенной функцией медленного роста.

Для этого достаточно проверить конечность соответствующего интеграла: для любой пробной $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$|(f, \varphi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |\varphi(x)| dx \stackrel{O.22}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{k(0, p) |f(x)|}{1 + \|x\|^p},$$

где p можно положить равным $m(f)$, что повлечет за собой конечность рассматриваемого интеграла.

Однако, не каждая регулярная обобщенная функция медленного роста порождается функцией медленного роста. Например, $f(x) = e^x \sin e^x$. И все же связь между ними определяется следующей теоремой Шварца, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 35. *Любое распределение $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ является обобщенной производной некоторой функции медленного роста.*

Упражнение 19. Проверьте утверждение теоремы для $f(x) = e^x \sin e^x$ и δ .

4.6.3. Операции над обобщенными функциями медленного роста. Теперь мы готовы корректно определить преобразование Фурье для обобщенных функций, но только медленного роста!

Определение 46. Пусть $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Обобщенная функция медленного роста $\mathcal{F}_\pm[\Phi]$, действующая на пробную функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$(\mathcal{F}_\pm[\Phi], \varphi) = (\Phi, \mathcal{F}_\pm[\varphi]), \quad (4.6.1)$$

называется преобразованием Фурье функции Φ .

Ясно, что для регулярных обобщенных функций, порожденных быстроубывающими функциями так определенное преобразование Фурье совпадает с классическим определением. Другими словами, если рассматривать преобразование Фурье как отображение

$$\mathcal{F}_\pm : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

то

$$\mathcal{F}_\pm|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{F}_\pm.$$

Пример 18. Легко проверить, что δ -функция Дирака (напомним, что она определена для любой непрерывной функции) является обобщенной функцией медленного роста. Вычислим ее преобразование Фурье.

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_\pm[\delta], \varphi) &= (\delta, \mathcal{F}_\pm[\varphi]) = \mathcal{F}_\pm[\varphi](0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{\mp i(x, 0)} dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = ((2\pi)^{-n/2}, \varphi). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}_\pm[\delta] = (2\pi)^{-n/2}. \quad (4.6.2)$$

Все операции, которые были определены для обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, справедливы и для обобщенных функций медленного роста с некоторыми уточнениями, при которых данные операции не выводят нас из класса $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Например, при умножении на бесконечно дифференцируемую функцию нужно наложить условие, чтобы она была быстроубывающей. Действительно, рассматривая случай $n = 1$, если взять, в качестве $a = e^{2x^2}$, $F = e^{-x^2}$, то

$$aF = e^{x^2} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

4.6.4. Свойства $\mathcal{F}_\pm$.

Свойства преобразования $\mathcal{F}_\pm$ есть точные аналоги соответствующих свойств преобразования $\mathcal{F}_\pm$.

Для любых $F, G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, любых $a, b \in \mathbb{C}$ и любого мультииндекса α справедливы следующие свойства

$$\mathcal{F}_\pm[aF + bG] = a\mathcal{F}_\pm[F] + b\mathcal{F}_\pm[G], \quad (4.6.3)$$

$$\mathcal{F}_\pm[x^\alpha F] = (\pm i)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F}_\pm[F], \quad (4.6.4)$$

$$\mathcal{F}_\pm[D^\alpha F] = (\pm ix)^\alpha \mathcal{F}_\pm[F], \quad (4.6.5)$$

$$\mathcal{F}_\pm[\mathcal{F}_\mp[F]] = F, \quad (4.6.6)$$

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} F \Rightarrow \mathcal{F}_\pm[F_n] \xrightarrow{\mathcal{S}'} \mathcal{F}_\pm[F]. \quad (4.6.7)$$

Последние два свойства справедливы, если одна из функций F или G регулярная и порождена быстроубывающей функцией.

$$\mathcal{F}_\pm[(F * G)] = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}_\pm[F] \cdot \mathcal{F}_\pm[G], \quad (4.6.8)$$

$$\mathcal{F}_\pm[F \cdot G] = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}_\pm[F] * \mathcal{F}_\pm[G]. \quad (4.6.9)$$

Доказательство. Приведем доказательство последнего свойства (4.6.9). Для определенности считаем F быстроубывающей, тогда для любой пробной $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_\pm[F \cdot G], \varphi) &\stackrel{(4.6.1)}{=} (F \cdot G, \mathcal{F}_\pm[\varphi]) \stackrel{(4.3.4)}{=} (G, F \cdot \mathcal{F}_\pm[\varphi]) \stackrel{(2.6.7)}{=} (G, \mathcal{F}_\pm[\mathcal{F}_\mp[F]] \cdot \mathcal{F}_\pm[\varphi]) = \\ &\stackrel{(2.7.6)}{=} (G, (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}_\pm[\mathcal{F}_\mp[F] * \varphi]) \stackrel{(4.6.1)}{=} (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}_\pm[G], \mathcal{F}_\mp[F] * \varphi) = \\ &= (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}_\pm[G](x), (\mathcal{F}_\pm[F](z), \varphi(x+z))) = \\ &\stackrel{(4.4.1)}{=} (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}_\pm[F] * \mathcal{F}_\pm[G], \varphi). \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство вытекает из следующих выкладок:

$$\begin{aligned} F_{\mp}[F] * \varphi(x) &\stackrel{O.26}{=} \int_{\mathbb{R}^n} F_{\mp}[F](x-y)\varphi(y)dy \stackrel{(2.4.4)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} F_{\pm}[F](y-x)\varphi(y)dy = \\ &\stackrel{z=y-x}{=} \int_{\mathbb{R}^n} F_{\pm}[F](z)\varphi(x+z)dz = (F_{\pm}[F](z), \varphi(x+z)). \end{aligned}$$

□

4.6.5. Применение преобразования Фурье для нахождения фундаментального решения.

Фундаментальные решения дифференциального оператора $L(D)$ с постоянными коэффициентами можно находить и в пространстве обобщенных функций медленного роста. Это позволяет делать следующая теорема Хёрмандера, сравните ее с теоремой 31.

Теорема 36. *Для ненулевого дифференциального оператора $L(D)$ с постоянными коэффициентами существует фундаментальное решение $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Суть метода нахождения фундаментального решения в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ заключается в применении преобразования Фурье к уравнению

$$L(D)E = \delta.$$

Проделав это, получим

$$\mathcal{F}_+[L(D)E] = \mathcal{F}_+[\delta] \stackrel{(4.6.2)}{=} (2\pi)^{-n/2}.$$

Раскрывая левую часть, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+[L(D)E] &= \mathcal{F}_+ \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} b_{\alpha} D^{\alpha} E \right] \stackrel{(4.6.3)}{=} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} b_{\alpha} \mathcal{F}_+[D^{\alpha} E] = \\ &\stackrel{(4.6.5)}{=} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} b_{\alpha} (ix)^{\alpha} \mathcal{F}_+[E] = L(ix) \mathcal{F}_+[E]. \end{aligned}$$

Откуда получаем, что

$$\mathcal{F}_+[E] = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{L(ix)}.$$

Если функция из правой части будет локально интегрируемой, то применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$E = \mathcal{F}_- \left[\frac{(2\pi)^{-n/2}}{L(ix)} \right]. \quad (4.6.10)$$

В противном случае, нужно использовать некоторые предельные переходы (отсюда возникает не единственность E), а потом уже применять обратное преобразование Фурье. В любом случае, как утверждает теорема 36 решение есть.

Покажем, что фундаментальное решение E_2 из примера 16 строится как раз таким образом. В этом случае $L(D)E = E - E''$. Тогда $L(ix) = 1 + x^2$ и

$$E = F_- \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|} = \frac{e^{-|x|}}{2} = E_2.$$

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 19. Применяя формулу (4.6.10), найдем фундаментальное решение $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ трехмерного оператора Лапласа. Поскольку $L(D) = \Delta$, то $L(ix) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -\|x\|^2$. Поэтому для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ имеем

$$\begin{aligned} (E, \varphi) &\stackrel{(4.6.10)}{=} \left(\mathcal{F}_- \left[\frac{(2\pi)^{-3/2}}{L(ix)} \right], \varphi \right) = \left(\frac{-(2\pi)^{-3/2}}{\|x\|^2}, F_-[\varphi] \right) = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\|x\|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi dx = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) \int_{\|x\| \leq R} \frac{e^{i(x, \xi)}}{\|x\|^2} dx d\xi = \\ &= \langle \text{переход во внутр. интеграле к сферич. коорд. с осью Z вдоль } \xi \rangle = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{ir\|\xi\| \cos \theta} \sin \theta d\alpha d\theta dr d\xi = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) \int_0^R \int_0^\pi e^{ir\|\xi\| \cos \theta} d \cos \theta dr d\xi \stackrel{u = \cos \theta}{=} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) \int_0^R \int_{-1}^1 e^{ir\|\xi\| u} du dr d\xi = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) \int_0^R \frac{\sin r\|\xi\|}{r\|\xi\|} dr d\xi \stackrel{r\|\xi\| = v}{=} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \int_0^{R\|\xi\|} \frac{\sin v}{v} dv d\xi = \\ &= \frac{-1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{R\|\xi\|} \frac{\sin v}{v} dv \right) d\xi = \frac{-1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \frac{\pi}{2} d\xi = \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} d\xi = \left(\frac{-1}{4\pi\|x\|}, \varphi \right). \end{aligned}$$

Остается лишь обосновать перенос предела внутрь интеграла. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{R\|\xi\|} \frac{\sin v}{v} dv \right| &= \left| \frac{\pi}{2} - \int_{R\|\xi\|}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} dv \right| = \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\cos R\|\xi\|}{R\|\xi\|} + \int_{R\|\xi\|}^{+\infty} \frac{\cos v}{v^2} dv \right| \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{R\|\xi\|} + \int_{R\|\xi\|}^{+\infty} \frac{dv}{v^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{R\|\xi\|}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что при $R > 1$

$$\left| \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \int_0^{R\|\xi\|} \frac{\sin v}{v} dv \right| \leq 2|\varphi(\xi)| \frac{\|\xi\| + 1}{\|\xi\|^2}.$$

Поскольку функция $|\varphi(\xi)| \frac{\|\xi\|+1}{\|\xi\|^2}$ интегрируема, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости предел можно было перенести внутрь внешнего интеграла. Таким образом мы показали (сравните с (4.5.2)), что

$$E = \frac{-1}{4\pi\|x\|},$$

и, кроме того,

$$\mathcal{F}_- \left[\frac{1}{\|x\|^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\|x\|}. \quad (4.6.11)$$

Глава 5

Геометрия пространств со скалярным произведением

Среди бесконечномерных пространств Банаха гильбертово пространство выделяется относительной простотой. В гильбертовых пространствах нам в наиболее полной мере удаётся использовать свою геометрическую интуицию: измерять углы между векторами, применять теорему Пифагора и ортогональное проектирование

В.М. Кадец

5.1 Векторное пространство

Определение 47. Множество $\mathbf{L}$ называется *линейным (векторным) пространством* над числовым полем $\mathbb{F}$ (если не оговорено противное, то $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), если выполнены условия:

1. Множество $\mathbf{L}$ – это абелева группа по сложению: на $\mathbf{L}$ определена операция сложения $+$, сопоставляющая двум элементам (векторам) $x, y \in \mathbf{L}$ новый элемент $x + y \in \mathbf{L}$ и удовлетворяющая свойствам:

- 1) $x + y = y + x$ (коммутативность);
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность);
- 3) существует вектор $0 \in \mathbf{L}$ такой, что $0 + x = x$ для всех $x \in \mathbf{L}$ (существование нуля);
- 4) для каждого $x \in \mathbf{L}$ существует вектор $-x \in \mathbf{L}$ такой, что $(-x) + x = 0$ (существование обратного).

2. Определена операция умножения $\cdot$, сопоставляющая числу $\alpha \in \mathbb{F}$ и вектору $x \in \mathbf{L}$ новый вектор $\alpha \cdot x \in \mathbf{L}$ и удовлетворяющая свойствам:

- 5) $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;
- 6) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
- 7) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
- 8) $1 \cdot x = x$.

Следует различать умножение и сложение между числами и векторами.

Пример 20. 1). $\mathbf{L} = \mathbb{F}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \in \mathbb{F}\}$ — арифметическое n -мерное пространство. Операции

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha \cdot x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \\ 0 &= (0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

2). $\mathbf{L} = M_n(\mathbb{F})$ — множество матриц размера $n \times n$ над полем $\mathbb{F}$. Можно рассматривать как "упакованное" предыдущее пространство. Операции

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij} + b_{ij}], \\ \alpha \cdot A &= [\alpha a_{ij}], \\ 0 &= [0]. \end{aligned}$$

3). $\mathbf{L} = Y^X = \{f : X \rightarrow Y\}$ — пространство функций определенных на множестве X и действующих в линейное пространство Y . Операции

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\alpha \cdot f)(x) &= \alpha f(x), \\ 0(x) &= 0. \end{aligned}$$

Определение 48. Пусть $\mathbf{L}$ — линейное пространство. Вектора $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{L}$ называются *линейно независимыми*, если

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Бесконечная система векторов линейно независима, если каждая ее конечная подсистема линейно независима. Максимальная линейно независимая система — *алгебраический базис*, или *базис Гамеля* линейного пространства. Число векторов в базисе — *размерность* линейного пространства, обозначают как $\dim \mathbf{L}$.

Из определения базиса ясно, что для любого вектора $x \in \mathbf{L}$ найдется конечное число $n \leq \dim \mathbf{L}$, числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ и вектора из базиса $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$.

Пример 21. 1). Размерность $\dim \mathbb{F}^n = n$, поскольку вектора

$$e_k = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{k\text{-ое место}}, \dots, 0), \quad 1 \leq k \leq n$$

образуют базис.

Упражнение 20. Докажите, что это базис.

2). Линейное пространство быстроубывающих функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ бесконечномерно, поскольку система

$$\{x^k e^{-x^2}, k \geq 0\}$$

линейна независима.

Упражнение 21. Докажите, что эта система действительно линейно независима.

3). В линейном пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ функции

$$\delta, \mathcal{P}\frac{1}{x}, \text{ и } \frac{1}{x \pm i0}$$

линейно зависимы, поскольку они удовлетворяют формулам Сохоцкого (см. теорему 28).

Определение 49. Пусть X — линейное пространство и $Y \subseteq X$, тогда Y называется линейным *подпространством* X , если для любых $x, y \in Y$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ следует, что

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y.$$

Пример 22. 1). $X = \mathbb{F}^n$, $Y = \mathbb{F}^k$, $1 \leq k \leq n$. Действительно, всякий n -мерный вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$ можно считать k -мерным. Ясно, что операции сложения и умножения не выводят из этого множества.

2). $X = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $Y = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

3). $X = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $Y = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

5.2 Нормированное пространство

Определение 50. Пусть $\mathbf{L}$ — линейное пространство и функция $\|\cdot\| : \mathbf{L} \mapsto \mathbb{R}^+$ обладает свойствами:

- 1) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
- 2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (неравенство треугольника);
- 3) $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \|u\|$ (положительная однородность).

Тогда $\|\cdot\|$ — *норма* на $\mathbf{L}$, а $\mathbf{N} = (\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ — линейное *нормированное пространство*.

Пример 23. 1). $\mathbf{N} = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty)$, где норма определяется равенствами

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при } p \neq \infty \quad \text{и}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

2). Нормированным пространством будет $\mathbf{N} = (\ell_2, \|\cdot\|_2)$, где ℓ_2 есть линейное пространство последовательностей (или бесконечномерных векторов)

$$x = (x_1, x_2, \dots), \quad x_k \in \mathbb{F},$$

у которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty;$$

а норма $\|\cdot\|_2$ есть бесконечномерный аналог евклидовой нормы из предыдущего примера:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что это, действительно, бесконечномерное линейное нормированное пространство. Пусть $x, y \in \ell_2$, тогда $x + y \in \ell_2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)(\overline{x_k + y_k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{x_k} y_k + x_k \overline{y_k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (\overline{x_k} y_k) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |y_k| \leq \\ &\stackrel{2ab \leq |a|^2 + |b|^2}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Вектора

$$e_k = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{k\text{-ое место}}, \dots), \quad k \in \mathbb{N}$$

являются линейно независимыми, поэтому $\dim \ell_2 = \infty$.

Первое и третье свойства нормы легко проверяются, а неравенство треугольника будет доказано позже.

3). Пусть X — (открытое) подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathbf{N} = (C^k(X), \|\cdot\|)$, где $C^k(X)$ — линейное пространство функций, имеющих непрерывные производные до порядка $k \in \mathbb{N}$ включительно, а норма определяется равенством

$$\|f\| = \sum_{|\alpha|=0}^{|\alpha|=k} \sup_{x \in X} |D^\alpha f(x)|.$$

Наличие нормы позволяет определять такие понятия как предел, сходимость, фундаментальность, полнота, замкнутость, открытость и сепарабельность. Начнем по порядку.

Определение 51. Пусть $\mathbf{N} = (X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Говорят, что последовательность $x_n \in X$ *сходится* к $x_0 \in X$ при $n \rightarrow \infty$, если $\|x_n - x_0\|$ сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$. При этом пишут

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0,$$

или как обычно, если ясно о какой норме идет речь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Пример 24. Пусть $\mathbf{N} = (\ell_2, \|\cdot\|_2)$ и $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, тогда $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2^2} x_0$, где $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.

Действительно, $x_0 - x_n = (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots)$, поэтому

$$\|x_0 - x_n\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

как хвост сходящегося ряда.

Определение 52. Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ линейного нормированного пространства называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n, m > n_0$ следует $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Легко понять, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной, обратное не верно.

Определение 53. Если в линейном нормированном пространстве всякая фундаментальная последовательность сходится, то такое пространство называется *полным*. В честь С. Банаха его еще называют *банаховым*.

Обычный критерий Коши сходимости вещественных (комплексных) последовательностей показывает нам, что $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ является банаховым пространством. Приведем пример не полного нормированного пространства, показывающий, что такие пространства являются как бы "дырявыми".

Пример 25. Пусть $\mathbf{N} = (c_{fin}, \|\cdot\|_{\infty})$, где c_{fin} есть линейное пространство последовательностей (или бесконечномерных векторов)

$$x = (x_1, x_2, \dots), \quad x_k \in \mathbb{F},$$

у которых лишь конечное число не нулевых координат x_k , а норма $\|\cdot\|_{\infty}$ определяется простым равенством

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Рассмотрим последовательность x_n как из примера 24. Покажем, что она фундаментальна, но не сходится. Для любого малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|x_n - x_m\|_{\infty} = \frac{1}{\min\{n, m\} + 1} < \varepsilon$$

для всех $m, n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon - 1} \right\rceil$. Предположим, что у этой последовательности есть предел $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in c_{fin}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|1 - \xi_1|, |1/2 - \xi_2|, \dots, |1/n - \xi_n|, |\xi_k|, k > n\} = \\ &= \sup_{n \geq 1} |1/n - \xi_n| = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\xi_n = 1/n$ для всех $n \geq 1$. Но такого не должно быть, поскольку у x_0 лишь конечное число ненулевых координат ξ_n . Таким образом на месте предела $\lim x_n$ в пространстве c_{fin} стоит "дырка".

Определение 54. Пусть $\mathbf{N} = (X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство и $Y \subseteq X$. Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой множества* Y , если найдется последовательность $x_n \in Y$ сходящаяся к x_0 .

Определение 55. Пусть $\mathbf{N} = (X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство. Множество $Y \subseteq X$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Другими словами, если $x_n \in Y$ сходится, то ее предел x_0 также лежит в Y .

Множество $Y \subseteq X$ называется *открытым*, если его дополнение $X \setminus Y$ замкнуто. Эквивалентное определение: с каждой точкой $y \in Y$ в этом множестве содержится открытый шар с центром в y подходящего радиуса $\varepsilon > 0$:

$$B(y, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - y\| < \varepsilon\} \subset Y.$$

Пример 26. Множество многочленов $P[0, 1]$ не является замкнутым подпространством в пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$ с равномерной нормой

$$\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

Нужно показать, что это множество не замкнуто, т. е. найдется сходящаяся последовательность многочленов, пределом которой не будет многочлен. Возьмем $p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получим:

$$\max_{x \in [0, 1]} |e^x - p_n(x)| \leq \max_{c \in [0, 1]} \max_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x^{n+1} e^c}{(n+1)!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} \rightarrow 0.$$

Таким образом, e^x есть предельная точка множества $P[0, 1]$. На самом деле (как следует из теоремы Вейерштрасса (см. теорему 11)), замыкание множества $P[0, 1]$ в $C[0, 1]$ есть все пространство $C[0, 1]$.

Определение 56. Нормированное пространство $\mathbf{N} = (X, \|\cdot\|)$ называется *сепарабельным*, если найдется множество $Y \subseteq X$, которое является счетным и *всюду плотным*, т.е. его замыкание совпадает со всем X .

Пример 27. Пространство непрерывных функций $C[a, b]$ – сепарабельное банахово пространство. По теореме Вейерштрасса всякая непрерывная функция может быть приближена равномерно многочленами. Поэтому счетным всюду плотным множеством в $C[a, b]$ будут опять многочлены с рациональными коэффициентами. Доказательство полноты можно посмотреть, например, в [12, с. 32].

5.3 Лебеговские функциональные пространства

5.3.1. Пусть G – измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}^n$. Лебеговским функциональным пространством $\mathfrak{L}_p(G)$, $p \geq 1$ будем называть множество вещественнозначных (комплекснозначных) функций f , определенных на G и

$$\int_X |f|^p dx < \infty.$$

Функции, совпадающие на множестве меры ноль, будем считать одинаковыми (это задает отношение эквивалентности $\sim$). Факторизуя $\mathfrak{L}_p(G)$ по такому отношению эквивалентности, получим новое пространство

$$L_p(G) = \mathfrak{L}_p(G) / \sim.$$

Таким образом, элементами этого нового пространства являются не функции, а классы (эквивалентности) функций. К примеру, в пространстве $L_p([0, 1])$ тождественная единица и функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

лежат в одном классе, поскольку мера Лебега рациональных чисел $\mathbb{Q}$ равна нулю.

Норму класса мы будем определять через норму любого его представителя. Нормой является функционал

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5.3.1)$$

Первые два свойства легко проверяются. Однако, нужно подчеркнуть, что равенство нулю нормы влечет равенство нулю функции только почти всюду, но это как раз и определяет нулевой класс функций в $L_p(G)$. Неравенство треугольника для этой нормы называется *неравенством Минковского*.

5.3.2. Неравенство Минковского

Для любых $f, g \in L_p(G)$ справедливо неравенство Минковского

$$\left(\int_G |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_G |g(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (5.3.2)$$

Доказательство опирается на неравенство Гельдера, которое в свою очередь есть следствие неравенства Юнга — поэтому начнем по-порядку.

1. Докажем сначала **неравенство Юнга**: для любых $a, b \geq 0$

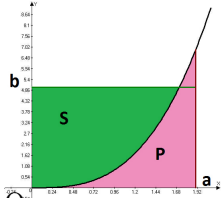
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (5.3.3)$$

где $p, q > 1$ и $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. Ясно, что если одно из чисел a или b равно нулю, то неравенство Юнга очевидно выполняется. Предположим, что и $a > 0$, и $b > 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^{p-1}$. Посмотрев на график этой функции, заметим, что неравенство Юнга – это соотношение между площадью прямоугольника, равной ab , с одной стороны, а с другой — площадью P под графиком рассматриваемой функции и площадью S подграфика обратной к ней: $ab \leq S + P$.

Действительно,



$$P = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p},$$

$$S = \int_0^a y^{1/(p-1)} dy = \frac{(p-1)b^{\frac{p}{p-1}}}{p}.$$

Остается лишь заметить, что $\frac{p}{p-1} = q$. $\square$

2. Докажем теперь **неравенство Гельдера** для интегралов: для любых $f \in L_p(G)$ и $g \in L_q(G)$ при $1/p + 1/q = 1$

$$\int_G |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_G |f(x)|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_G |g(x)|^q \right)^{1/q}. \quad (5.3.4)$$

В терминах норм это неравенство имеет вид

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (5.3.5)$$

Доказательство. Положим

$$A = \|f\|_p, \quad B = \|g\|_q.$$

Ясно, что если одно из этих чисел равно нулю, то неравенство Гельдера очевидно выполняется. Предположим, что $A > 0$ и $B > 0$. Применяя неравенство Юнга (5.3.3) для чисел

$$a = \frac{|f(x)|}{A}, \quad b = \frac{|g(x)|}{B},$$

получаем

$$\frac{|f(x)g(x)|}{AB} \leq \frac{|f(x)|^p}{pA^p} + \frac{|g(x)|^q}{qB^q}.$$

Интегрируя это неравенство, имеем

$$\frac{\|fg\|_1}{AB} \leq \frac{\|f\|_p^p}{pA^p} + \frac{\|g\|_q^q}{qB^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Остается только умножить получившееся соотношение на AB . $\square$

3. Теперь приступим к доказательству непосредственно самого неравенства Минковского.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \int_G |f(x) + g(x)|^p dx &\leq \int_G |f(x) + g(x)|^{p-1} (|f(x)| + |g(x)|) dx = \\ &= \int_G |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_G |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \leq \\ &\stackrel{(5.3.4)}{\leq} \left(\int_G |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} \right)^{1/q} (\|f\|_p + \|g\|_p). \end{aligned}$$

Переписывая в терминах норм, с учетом равенства $(p-1)q = p$, получим

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_p),$$

что эквивалентно доказываемому неравенству. $\square$

5.3.3. Полнота и сепарабельность лебеговских пространств.

Лебеговские функциональные пространства $L_p(G)$ являются сепарабельными банаховыми пространствами. Полнота показывается нетривиально [5, с. 376, 383]. Счетным всюду плотным подмножеством (в случае, например, если $G = [a, b]$) является множество многочленов с рациональными коэффициентами или множество ступенчатых функций с рациональными значениями на отрезках с рациональными концами (или с двоично рациональными концами).

Действительно, в случае многочленов известно, что всякая непрерывная функция приближается многочленами по норме непрерывных функций и, следовательно, по норме пространства $L_p(a, b)$, так как

$$\|\tilde{f} - p\|_p \leq \max_{x \in [a, b]} |\tilde{f}(x) - p(x)| (b - a)^{1/p},$$

где $\tilde{f}(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция, а $p(x)$ – многочлен, приближающий $\tilde{f}(x)$. Всякую функцию $f \in L_p(a, b)$ можно приблизить непрерывными функциями, например, такими:

$$\tilde{f}_\delta(x) = \delta^{-1} \int_a^b f(y) \omega\left(\frac{x-y}{\delta}\right) dy,$$

где $\omega(z)$ – *усредняющее ядро Соболева*, или *шапочка Соболева*, т. е. функция, обладающая свойствами:

- 1) $\omega(z)$ – бесконечно дифференцируемая функция;
- 2) $\omega(z) \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{R}$;
- 3) $\omega(z) = 0$ для всех $|z| \geq 1$;
- 4) $\int_{-1}^1 \omega(z) dz = 1$.

На самом деле, функции $\tilde{f}_\delta$ будут гладкими. Таким образом, всюду плотным множеством будут являться также гладкие функции.

5.4 Скалярное произведение и его свойства

5.4.1. Определение и примеры

Определение 57. Пусть $\mathbf{L}$ – линейное пространство над числовым полем $\mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и функция двух аргументов $(\cdot, \cdot) : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \mapsto \mathbb{F}$ удовлетворяет свойствам:

- 1) $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y)$ (линейность по 1-му аргументу);
- 3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (эрмитова симметричность).

Тогда функция $(\cdot, \cdot)$ называется *скалярным произведением* (или *внутренним произведением*), а пространство $\mathbf{L}$ *евклидовым* (над $\mathbb{R}$) или *унитарным* (над $\mathbb{C}$) пространством.

Отметим, что в физической литературе зачастую встречается скалярное произведение, линейное по второму аргументу, в этом случае комплексное сопряжение в рассматриваемых ниже примерах нужно навешивать на первый аргумент.

Пример 28. Рассмотрим несколько уже встречавшихся нам линейных пространств.

Линейное пространство		Скалярное произведение
арифметическое n – мерное пространство (пример 20.1))	$\mathbb{F}^n$	$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$
пространство матриц (пример 20.2))	$M_n(\mathbb{F})$	$(A, B) = \text{tr}(A \overline{B}^T)$
пространство последовательностей (пример 23.2))	ℓ_2	$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$
Лебеговское функциональное пространство (§ 5.3)	$L_2(G)$	$(f, g) = \int_G f(x) \overline{g(x)} dx$
пространство Соболева (определение 42)	$H^l(G) = W_2^l(G)$	$(f, g) = \sum_{0 \leq \alpha \leq l} \int_G D^\alpha f(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx$

5.4.2. Неравенство Коши–Буняковского (–Шварца)

Для любых $x, y \in \mathbf{L}$ справедливо неравенство

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (5.4.1)$$

Доказательство. Для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{1) \text{св. } O.57}{\leq} (x + ty, x + ty) \stackrel{2) \text{св. } O.57}{=} (x, x + ty) + t(y, x + ty) = \\
 &\stackrel{3) \text{св. } O.57}{=} \overline{(x + ty, x)} + t \overline{(x + ty, y)} = (x, x) + t \overline{(y, x)} + t \overline{(x, y)} + t^2(y, y) = \\
 &= t^2(y, y) + 2t \text{Re}(x, y) + (x, x).
 \end{aligned}$$

Предположим, что $(x, y) \in \mathbb{R}$, тогда из предыдущих выкладок следует, что дискриминант получившегося квадратного многочлена неотрицателен:

$$D = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0,$$

что эквивалентно доказываемому неравенству. Предположим теперь, что $(x, y) \in \mathbb{C}$. Тогда обозначим $(x, y) = re^{i\phi}$ и рассмотрим новый вектор $\tilde{x} = e^{-i\phi}x$. Имеем

$$(\tilde{x}, y) = (e^{-i\phi}x, y) \stackrel{2)\text{св.}O.57}{=} e^{-i\phi}(x, y) = e^{-i\phi}e^{i\phi}r = r \in \mathbb{R},$$

поэтому по уже доказанному случаю, получаем

$$|(\tilde{x}, y)|^2 = (\tilde{x}, \tilde{x})(y, y).$$

Остается заметить, что $|(\tilde{x}, y)| = |(x, y)|$ и $(\tilde{x}, \tilde{x}) = (x, x)$. $\square$

5.4.3. Норма, порожденная скалярным произведением

Определение 58. Говорят, что норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ порождена скалярным произведением, или согласована со скалярным произведением.

Покажем, что это, действительно, норма.

- 1). Ясно, что $\|x\| \geq 0$. Если же $\|x\| = 0$, то $(x, x) = 0 \stackrel{1)\text{св.}O.57}{\Rightarrow} x = 0$.
- 2). Имеем

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} \stackrel{2)\text{св.}O.57}{=} \sqrt{\alpha(x, \alpha x)} = \\ &\stackrel{3)\text{св.}O.57}{=} \sqrt{\alpha(\alpha x, x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x, x)} = |\alpha|\|x\|. \end{aligned}$$

- 3). Рассмотрим квадрат суммы:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + (y, y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \stackrel{(5.4.1)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Свойства нормы проверены. Отметим, что в обозначениях нормы, неравенство Коши–Буняковского принимает вид

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|. \quad (5.4.2)$$

Определение 59. Нормированное пространство $\mathbf{N} = (\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ с нормой $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ называется *предгильбертовым*, или *почти гильбертовым*. Если оно полно относительно этой нормы, то оно называется *гильбертовым* пространством.

5.4.4. Тожество параллелограмма Для любых $x, y \in \mathbf{L}$ справедливо равенство

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2, \quad (5.4.3)$$

которое называется *тождеством параллелограмма*, в связи с его простой геометрической интерпретацией: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон. Тождество легко проверяется раскрытием нормы через соответствующее скалярное произведение.

Важность этого тождества заключается в том, что нормы, ему удовлетворяющие, обязательно согласованы с каким-нибудь скалярным произведением. Сформулируем этот результат в виде теоремы, доказанной фон Нейманом и Йорданом.

Теорема 37. Пусть $\mathbf{N} = (\mathbf{L}, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство и норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет тождеству параллелограмма (5.4.3), тогда существует скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, с которым эта норма согласована.

Доказательство теоремы 37. Мы приведем лишь формулы для скалярного произведения, которые называются *поляризационными тождествами*:

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \text{над } \mathbb{R}, \quad (5.4.4)$$

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4} (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) \quad \text{над } \mathbb{C}. \quad (5.4.5)$$

□

5.4.5. Непрерывность скалярного произведения

Теорема 38. Пусть H – гильбертово пространство, и $x_n \rightarrow x$ и $y_m \rightarrow y$. Тогда для любого $z \in H$

$$(x_n, z) \rightarrow (x, z) \quad \text{– непрерывность по первому аргументу}; \quad (5.4.6)$$

$$(z, y_m) \rightarrow (z, y) \quad \text{– непрерывность по второму аргументу}; \quad (5.4.7)$$

$$(x_n, y_m) \rightarrow (x, y) \quad \text{– непрерывность по двум аргументам}. \quad (5.4.8)$$

Доказательство теоремы 38. Докажем лишь непрерывность по первому аргументу, остальные свойства доказываются почти аналогично. Имеем

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \stackrel{(5.4.2)}{\leq} \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0.$$

□

5.5 Ортогонализация Грама–Шмидта

Определение 60. Векторы x и y – *ортогональны* ($x \perp y$), если $(x, y) = 0$. Векторы x и y – *ортонормальны*, если они ортогональны, и норма каждого равна единице, т.е. $(z_i, z_j) = \delta_{ij}$.

Всякую счетную линейно независимую систему векторов $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ можно *ортонормировать* процессом Грама – Шмидта:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, & z_1 &= \frac{y_1}{\|y_1\|}, \\ y_2 &= x_2 - (x_2, z_1)z_1, & z_2 &= \frac{y_2}{\|y_2\|}, \\ \dots & & \dots & \\ y_n &= x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, z_k)z_k, & z_n &= \frac{y_n}{\|y_n\|}. \\ \dots & & \dots & \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Теорема 39. *Получившиеся векторы z_k ортонормальны и для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$\text{lin}\{x_1, \dots, x_n\} = \text{lin}\{z_1, \dots, z_n\}.$$

Доказательство теоремы 39. Применим индукцию по n . Легко проверяется база индукции. Предположим, что утверждение теоремы уже доказано для всех $1 \leq k < n$. Докажем его для $k = n$. Для любого $1 \leq j < n$ получаем

$$\begin{aligned} (z_n, z_j) &\stackrel{(5.5.1)}{=} \frac{1}{\|y_n\|} \left(x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, z_k)z_k, z_j \right) = \\ &= \frac{1}{\|y_n\|} \left((x_n, z_j) - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, z_k)\delta_{kj} \right) = \\ &= \frac{1}{\|y_n\|} ((x_n, z_j) - (x_n, z_j)) = 0. \end{aligned}$$

Второе утверждение следует из соотношений

$$\text{lin}\{z_1, \dots, z_n\} = \text{lin}\{\text{lin}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}, z_n\}$$

и

$$z_n \in \text{lin}\{\{z_1, \dots, z_{n-1}\}, x_n\}.$$

□

По аналогии с вещественным арифметическим пространством в евклидовых пространствах можно ввести понятие угла.

Определение 61. *Углом* для ненулевых векторов x, y евклидова пространства называется величина $\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}$.

Ввиду неравенства Коши–Буняковского угол корректно определен. В связи с этим понятием ясно, что ортогональность двух векторов эквивалентна прямому углу между ними.

Пример 29. В пространстве Соболева $H^1(-1, 1)$ рассмотрим систему функций $1, x$ и $|x|$. Ортонормируем ее относительно скалярного произведения в H^1 (см. пример 28).

Во-первых, ясно, что эта система линейно независима. Действительно, $\alpha 1 + \beta x + \gamma |x| \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha 1 + (\beta - \gamma)x \equiv 0, x < 0$ и $\alpha 1 + (\beta + \gamma)x \equiv 0, x \geq 0$,

т. е. $\alpha = 0, \beta - \gamma = 0$ и $\beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. Заметим также, что производные $1' = 0, x' = 1$ и $|x|' = \operatorname{sgn}(x)$ интегрируемы на интервале $(-1, 1)$, поэтому $1, x, |x| \in H^1(-1, 1)$.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1, & y_1'(x) &= 0, \\ \|y_1\|^2 &= \int_{-1}^1 y_1^2(x) dx + (y_1'(x))^2 dx = 2, & z_1(x) &= \frac{y_1(x)}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ y_2(x) &= x - (x, \frac{1}{\sqrt{2}}) \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = x, & y_2'(x) &= 1, \\ \|y_2\|^2 &= \int_{-1}^1 y_2^2(x) dx + (y_2'(x))^2 dx = \frac{8}{3} & z_2 &= \frac{y_2(x)}{\|y_2\|} = \frac{x\sqrt{6}}{4}. \\ y_3(x) &= |x| - (|x|, \frac{1}{2}) - (|x|, \frac{x\sqrt{6}}{4}) \frac{x\sqrt{6}}{4} = |x| - \frac{1}{2}, & y_3'(x) &= \operatorname{sgn}(x), \\ \|y_3\|^2 &= \int_{-1}^1 y_3^2(x) dx + (y_3'(x))^2 dx = \frac{13}{6}, & z_3 &= (|x| - \frac{1}{2}) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем ортонормированную систему функций:

$$z_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_2(x) = \frac{x\sqrt{6}}{4} \quad \text{и} \quad z_3(x) = \left(|x| - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}.$$

5.6 Проектирование

5.6.1. Проекция и ближайший вектор

Определение 62. Пусть H — гильбертово пространство, $E \subset H$ — его линейное подпространство. Вектор $y \in E$ называется проекцией вектора $x \in H$ на множество E , если $x - y \perp E$, т. е. $(x - y, z) = 0$ для любых $z \in E$. Обозначают проекцию как $y = \operatorname{Pr}_E x$.

Проекция, вообще говоря, может не существовать (см. [P12, примеры 2.3.1. и 2.3.2.]). Однако, если она существует, то она единственна.

Доказательство. Предположим, что для вектора x найдется еще одна проекция $y' = \operatorname{Pr}_E x$, тогда из определения имеем: для любого $z \in E$

$$(x - y, z) = 0 = (x - y', z).$$

Откуда вычитая одно из другого и беря $z = y - y' \in E$, получаем

$$(y - y', y - y') = 0 \Rightarrow y = y'.$$

□

Определение 63. $\mathbf{N} = (X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $Y \subset X$. Вектор $y \in Y$ называется вектором *наилучшего приближения* из Y для вектора $x \in X$ (или *ближайшим* к x вектором из множества Y), если

$$\|x - y\| = \inf_{z \in Y} \|x - z\|.$$

Как и проекция ближайший вектор тоже может не существовать, а вот если существует, то может быть не единственным. Связь между проекцией и вектором наилучшего приближения заключена в следующей теореме.

Теорема 40. Пусть H — гильбертово пространство, $E \subset H$ — его замкнутое линейное подпространство. Тогда для любого $x \in H$ проекция $y = \text{Pr}_E x$ существует, единственна и является ближайшим вектором из E к x . Кроме того, справедлива теорема Пифагора:

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2. \quad (5.6.1)$$

Доказательство теоремы 40. Докажем сначала теорему Пифагора. Имеем

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= (x - y, x - y) = (x - y, x) - (x - y, y) \stackrel{O.62}{=} (x - y, x) = \\ &= (x, x) - \underbrace{(y, x)}_{=(y, y)} = \|x\|^2 - \|y\|^2. \end{aligned}$$

Существование проекции докажем лишь в важном случае конечномерного подпространства E . Ясно, что оно замкнуто. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — алгебраический базис E . Применяя к нему ортогонализацию Грама–Шмидта, получаем ортонормированную систему $e_1, \dots, e_n$, которая также будет алгебраическим базисом E . Таким образом, всякий вектор $z \in E$ представляется в виде

$$z = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{F}.$$

Покажем, что проекция задается равенством

$$y = \text{Pr}_E x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \quad \lambda_k = (x, e_k). \quad (5.6.2)$$

Имеем

$$\begin{aligned} (x - y, z) &= \left(x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \sum_{m=1}^n \alpha_m e_m \right) = \\ &= \sum_{m=1}^n \overline{\alpha_m} (x, e_m) - \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \lambda_k \overline{\alpha_k} (e_k, e_m) = \\ &= \sum_{m=1}^n \overline{\alpha_m} \lambda_m - \sum_{m=1}^n \overline{\alpha_m} \lambda_m = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, проекция есть вектор наилучшего приближения для x :

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= (x - y - z + y, x - y - z + y) = \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + \underbrace{(x - y, y - z) + (y - z, x - y)}_{=0} \geq \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

□

Пример 30. В пространстве Соболева $H^1(-1, 1)$ найдем двумя способами проекцию вектора x^2 на подпространство $E = \text{lin}\{1, x, |x|\}$.

1 способ: использование формулы (5.6.2). Ортонормированный алгебраический базис в пространстве E мы уже нашли в примере 29:

$$e_1 = z_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_2 = z_2(x) = \frac{x\sqrt{6}}{4} \quad \text{и} \quad e_3 = z_3(x) = \left(|x| - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}.$$

Тогда

$$\text{Pr}_E x^2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3,$$

где

$$\lambda_1 = (x^2, e_1) = \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\lambda_2 = (x^2, e_2) = \int_{-1}^1 x^2 \frac{x\sqrt{6}}{4} dx + \int_{-1}^1 2x \frac{\sqrt{6}}{4} dx = 0,$$

$$\lambda_3 = (x^2, e_3) = \int_{-1}^1 x^2 \left(|x| - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}} dx + \int_{-1}^1 2x \text{sgn} x \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}} dx = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{6}}.$$

Таким образом,

$$\text{Pr}_E x^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{6}} \left(|x| - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}} = |x| - \frac{1}{6}.$$

2 способ: использование понятие ближайшего. Любой вектор $z \in E$ имеет вид

$$z = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot |x|.$$

Для нахождения ближайшего нужно определить числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ из условия наименьшего квадрата нормы $\|x^2 - z\|^2$. Имеем

$$F(a, b, c) = \|x^2 - z\|^2 = \int_{-1}^1 (x^2 - a - bx - c|x|)^2 dx + \int_{-1}^1 (2x - b - c \text{sgn} x)^2 dx.$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 \int_{-1}^1 x^2 - a - bx - c|x| dx = -\frac{4}{3} + 4a + 2c = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2 \int_{-1}^1 (x^2 - a - bx - c|x|)x dx - 2 \int_{-1}^1 2x - b - c \text{sgn} x dx = \frac{16b}{3} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial c} &= -2 \int_{-1}^1 (x^2 - a - bx - c|x|)|x| dx - 2 \int_{-1}^1 (2x - b - c \text{sgn} x) \text{sgn} x dx = \\ &= 2a + \frac{16c}{3} - 5 = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему из трех уравнений, получаем

$$a = -\frac{1}{6}, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

Таким образом, ближайший вектор имеет вид:

$$z = |x| - \frac{1}{6},$$

что, как видим, совпадает с найденной проекцией.

5.6.2. Ортогональное дополнение

Определение 64. Пусть H — гильбертово пространство и $E \subset H$. *Ортогональным дополнением* к множеству E называется множество

$$E^\perp = \{x \in H : x \perp E\}.$$

Упражнение 22. Показать, что ортогональное дополнение $E^\perp$ — замкнутое линейное подпространство H .

Теорема 41. Пусть H — гильбертово пространство и E — его замкнутое линейное подпространство. Тогда H раскладывается в прямую сумму

$$H = E \oplus E^\perp,$$

т.е. для любого $x \in H$ найдутся вектора $y_1 \in E$ и $y_2 \in E^\perp$, что

$$x = y_1 + y_2$$

и такое представление x единственно.

Доказательство теоремы 41. Положим $y_1 = \text{Pr}_E x$. По теореме 40 такой вектор существует и единственен. Остается показать, что вектор $y_2 = x - y_1 \in E^\perp$. Но это следует в точности из определения проекции 62: $x - y_1 \perp E$. Предположим теперь, что существует еще одно представление

$$x = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2, \quad \tilde{y}_1 \in E, \quad \tilde{y}_2 \in E^\perp.$$

Тогда вычитая одно представление из другого, получаем

$$\underbrace{y_1 - \tilde{y}_1}_{\in E} = \underbrace{\tilde{y}_2 - y_2}_{\in E^\perp},$$

откуда получаем

$$0 = (y_1 - \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 - y_2) = (y_1 - \tilde{y}_1, y_1 - \tilde{y}_1) \Rightarrow y_1 = \tilde{y}_1.$$

Аналогично получаем, что $y_2 = \tilde{y}_2$. □

5.7 Ортонормированный базис

5.7.1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{E} = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ — ортонормированная система векторов. Сепарабельность нашего пространства ограничивает количество векторов в этой системе. А именно, покажем,

что эта ортонормированная система не более, чем счетна. Рассмотрим нормы разностей:

$$\|x_\alpha - x_\beta\|^2 = (x_\alpha - x_\beta, x_\alpha - x_\beta) = \underbrace{\|x_\alpha\|^2}_{=1} - \underbrace{(x_\alpha, x_\beta)}_{=0} - \underbrace{(x_\beta, x_\alpha)}_{=0} + \underbrace{\|x_\beta\|^2}_{=1} = 2.$$

Поскольку H сепарабельно, то найдется счетное всюду плотное множество $Y \subset H$ (см. определение 56). Это в частности означает, что в каждый открытый шар $B(x_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2})$ с центром в x_α и радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ попадает хотя бы одна точка $y \in Y$. А поскольку шары не пересекаются, то их количество не более чем счетно.

Упражнение 23. Докажите, что шары $B(x_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2})$ попарно не пересекаются.

Определение 65. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Ортонормированная система $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется *ортонормированным базисом*, или *базисом Гильберта*, если для любого $x \in H$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, \quad \lambda_n = (x, e_n). \quad (5.7.1)$$

Разложение (5.7.1) называется разложением вектора x в ряд Фурье по системе $\mathcal{E}$, а коэффициенты λ_n — коэффициенты Фурье.

Напомним, что равенство (5.7.1) в точности означает

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|x - \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n\| = 0.$$

Теорема 42. Пусть H — не нулевое сепарабельное гильбертово пространство. Ортонормированный базис существует.

Доказательство теоремы 42. Приведем лишь индуктивную процедуру построения гильбертова базиса. Так как H нулевое пространство, то существует $e_1 \in H : \|e_1\| = 1$. Положим $E_1 = \text{lin}\{e_1\}$. По теореме 41 имеем $H = E_1 \oplus E_1^\perp$. Если $E_1^\perp$ нулевое, то e_1 — базис. В противном случае существует $e_2 \in E_1^\perp : \|e_2\| = 1$. Продолжая, положим $E_2 = \text{lin}\{e_1, e_2\}$. Опять по теореме 41 имеем $H = E_2 \oplus E_2^\perp$. И так далее. $\square$

Ясно, что ортонормированный базис является линейно независимой системой, поэтому его можно включить в алгебраический базис (см. определение 48). Их мощности совпадают лишь в конечномерных пространствах.

5.7.2. Неравенство Бесселя и уравнение замкнутости

Теорема 43. Пусть $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — ортонормированная система в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Для любого $x \in H$ справедливо неравенство Бесселя:

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2, \quad \lambda_n = (x, e_n). \quad (5.7.2)$$

Доказательство теоремы 43. Рассмотрим конечномерные подпространства

$$E_n = \text{lin}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \quad n \geq 1.$$

Ясно, что вектора $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют ортонормированный базис E_n . Положим

$$y_n = \text{Pr}_{E_n} x \stackrel{(5.6.2)}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

Применяя теорему Пифагора, для каждого $n \geq 1$ получаем

$$\|x\|^2 = \|x - y_n\|^2 + \|y_n\|^2 \geq \|y_n\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем требуемое. $\square$

Определение 66. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Ортонормированная система $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется *замкнутой*, если для любого $x \in H$ выполняется равенство Парсеваля, или уравнение замкнутости:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2, \quad \lambda_n = (x, e_n). \quad (5.7.3)$$

Упражнение 24. Показать, что уравнение замкнутости (5.7.3) эквивалентно условию: для любых $x, y \in H$

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \bar{\mu}_n, \quad \lambda_n = (x, e_n), \quad \mu_n = (y, e_n). \quad (5.7.4)$$

5.7.3. Эквивалентные определения ортонормированного базиса

Определение 67. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Ортонормированная система $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется *полной*, если ее ортогональное дополнение $\mathcal{E}^\perp = 0$, т.е. если для любого $n \geq 1$ $(x, e_n) = 0$, то $x = 0$. Говорят также, что систему $\mathcal{E}$ нельзя пополнить.

Теорема 44. Пусть $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — ортонормированная система в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Следующие условия эквивалентны:

- 1). $\mathcal{E}$ — ортонормированный базис;
- 2). $\mathcal{E}$ — замкнутая система;
- 3). $\mathcal{E}$ — полная система.

Доказательство теоремы 44. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mathcal{E}$ — ортонормированный базис. Рассмотрим ряды Фурье по системе $\mathcal{E}$ двух произвольных векторов $x, y \in H$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, \quad \lambda_n = (x, e_n),$$

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m e_m, \quad \mu_m = (y, e_m).$$

Имеем

$$\begin{aligned} (x, y) &\stackrel{(5.4.8)}{=} \lim_{N, M \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n e_n, \sum_{m=1}^M \mu_m e_m \right) = \\ &= \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \lambda_n \bar{\mu}_m (e_n, e_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \bar{\mu}_n. \end{aligned}$$

Это, учитывая (5.7.4), означает замкнутость системы $\mathcal{E}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\mathcal{E}$ — замкнутая система. Предположим, что она не полна. Тогда ее можно пополнить не нулевым вектором $x \in H$. Это означает, что все коэффициенты Фурье $\lambda_n = (x, e_n) = 0$. Но тогда из уравнения замкнутости следует, что

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 = 0.$$

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\mathcal{E}$ — полная система. Для любого $x \in H$ рассмотрим последовательность

$$S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n, \quad \lambda_n = (x, e_n).$$

Покажем, что эта последовательность сходится. Ввиду полноты пространства H для этого достаточно доказать фундаментальность S_N . Из неравенства Бесселя (5.7.2) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $M > N \geq n_0$

$$\sum_{n=N+1}^M |\lambda_n|^2 < \varepsilon.$$

Тогда для таких же M и N имеем

$$\|S_M - S_N\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^M \lambda_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^M |\lambda_n|^2 < \varepsilon.$$

Итак, последовательность S_N сходится. Обозначим ее предел через $\tilde{x}$. Для любого $m \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} (x - \tilde{x}, e_m) &= (x, e_m) - (\tilde{x}, e_m) \stackrel{(5.4.6)}{=} \lambda_m - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n e_n, e_m \right) = \\ &= \lambda_m - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \lambda_n (e_n, e_m) = \lambda_m - \lambda_m = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор $x - \tilde{x} \in \mathcal{E}^\perp$. Так как $\mathcal{E}$ полна, то это значит, что $x = \tilde{x}$. А это ввиду произвольности x означает, что $\mathcal{E}$ — гильбертов базис. $\square$

Пример 31. Пусть $H = \ell_2$ покажем, что система $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где

$$e_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{n\text{-ое место}}, \dots), \quad n \in \mathbb{N}$$

является ортонормированным базисом. В примере 23 мы уже рассматривали эту систему и поняли, что она линейно независима. Кроме того, легко посчитать, что она ортонормальна. Рассмотрим произвольный вектор

$$x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2.$$

Коэффициенты Фурье легко считаются: $\lambda_n = (x, e_n) = x_n$, $n \geq 1$. Тогда

$$\|x - \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n\|^2 = \|x - \sum_{n=1}^N x_n e_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \rightarrow 0$$

Таким образом, мы напрямую показали, что $\mathcal{E}$ — гильбертов базис. Уравнение замкнутости для $\mathcal{E}$ выглядит как

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2.$$

Но это по сути определение нормы в ℓ_2 . Полнота системы $\mathcal{E}$ также легко проверяется:

$$(x, e_n) = 0 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Пример 32. Пусть $H = L_2[-\pi, \pi]$ покажем, что система $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где

$$e_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

является ортонормированным базисом. Легко проверяется, что данная система ортонормальна. Запишем, каким должно быть равенство Парсеваля для этой системы:

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

где

$$\lambda_n = (f, e_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \stackrel{(1.4.1)}{=} \sqrt{2\pi} c_{-n},$$

а c_n — "старые" коэффициенты Фурье. Замечаем, что получившееся уравнение замкнутости лишь формой записи отличается от доказанного нами ранее равенства Ляпунова (1.9.4).

Аналогичные рассуждения справедливы для тригонометрической системы состоящей из косинусов и синусов (см. [12, пример 2.4.2.]).

5.8 Изоморфизм гильбертовых пространств

Определение 68. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. Они называются *изоморфными*, если существует отображение $\Phi : H_1 \rightarrow H_2$, удовлетворяющее свойствам

- 1). Φ — биекция;
- 2). Φ — линейное отображение;
- 3). Φ сохраняет скалярное произведение, т.е. для любых $x, y \in H_1$

$$(x, y)_{H_1} = (\Phi(x), \Phi(y))_{H_2}.$$

Отображение Φ называется при этом *изоморфизмом* между пространствами H_1 и H_2 .

Для доказательства теоремы об изоморфизме нам понадобится теорема Рисса–Фишера.

Теорема 45. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Для любого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell_2$ найдется вектор $x \in H$ такой, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, \quad \lambda_n = (x, e_n).$$

Доказательство теоремы 45. Как и при доказательстве теоремы 44 (пункт 3) $\Rightarrow$ 1)) покажем, что последовательность

$$S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n$$

фундаментальна, а значит сходится в H . Так как $\lambda \in \ell_2$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $M > N \geq n_0$

$$\sum_{n=N+1}^M |\lambda_n|^2 < \varepsilon.$$

Тогда для таких же M и N имеем

$$\|S_M - S_N\|^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^M \lambda_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^M |\lambda_n|^2 < \varepsilon.$$

Обозначим за x предел последовательности S_N . Это и есть искомый вектор из H . $\square$

Сформулируем и докажем теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

Теорема 46. *Всякое сепарабельное гильбертово пространство H изоморфно ℓ_2 .*

Доказательство теоремы 46. Зафиксируем в H какой-нибудь гильбертов базис $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Для любого $x \in H$, представляемым своим рядом Фурье по системе $\mathcal{E}$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, \quad \lambda_n = (x, e_n),$$

определим отображение $\Phi : H \rightarrow \ell_2$ равенством

$$\Phi(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots).$$

Покажем, что это и есть изоморфизм. Линейность практически очевидна:

$$\Phi(\alpha x + \beta y) = (\nu_1, \nu_2, \dots) = \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \dots) + \beta(\mu_1, \mu_2, \dots) = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y).$$

Здесь мы воспользовались простыми соотношениями:

$$\nu_n = (\alpha x + \beta y, e_n) = \alpha(x, e_n) + \beta(y, e_n) = \alpha\lambda_n + \beta\mu_n.$$

Сохранение скалярного произведения:

$$(x, y)_H \stackrel{(5.7.4)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \bar{\mu}_n = (\lambda, \mu)_{\ell_2} = (\Phi(x), \Phi(y))_{\ell_2}.$$

Инъективность: пусть $x \neq y$, тогда ввиду полноты системы $\mathcal{E}$ найдется номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\lambda_n = (x, e_n) \neq (y, e_n) = \mu_n.$$

Откуда следует, что $\lambda \neq \mu$. Сюръективность: по теореме 45 Рисса–Фишера для любого $\lambda \in \ell_2$ обязательно найдется вектор x такой, что $\Phi(x) = \lambda$. $\square$

Из доказательства теоремы видно, что изоморфизм не единственен (в теореме он строился, используя некоторый произвольный базис Гильберта). Поскольку отношение изоморфности транзитивно, то из теоремы следует, что любые два сепарабельных гильбертовых пространств изоморфны между собой.

Глава 6

Ортогональные многочлены

Система ортогональных многочленов является простейшей — после тригонометрической системы — системой ортогональных функций и поэтому является весьма ценным аппаратом для приближенного представления функций более сложной природы

Я. Л. Геронимус

6.1 Свойства общих ортогональных многочленов

6.1.1. Построение системы ортогональных многочленов с помощью процесса Грама–Шмидта

Определение 69. Функция $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *весовой функцией*, или просто *весом*, если h неотрицательна почти всюду на (a, b) относительно меры Лебега и $\int_a^b h(x) dx < \infty$. Другими словами, $h \in L_1(a, b)$ и множество $\{x \in (a, b) : h(x) < 0\}$ имеет меру ноль.

Определение 70. Пусть $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая весовая функция. Множество функций $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $\int_a^b f^2(x)h(x) dx < \infty$ будем называть вещественным *весовым* функциональным пространством и обозначать как $L_2^h(a, b)$. При этом, как и ранее мы не различаем функции отличающиеся на множестве меры ноль.

Ясно, что при $h \equiv 1$ мы получаем обычное вещественное лебеговское функциональное пространство $L_2(a, b)$. Отметим также, что вещественные весовые функциональные пространства $L_2^h(a, b)$ являются частными случаями более общих функциональных пространств¹ $L_2(\mu)$, где μ — некоторая мера на (a, b) , определяемых по аналогии с вещественными лебеговским

¹Пространства $L_p(\mu)$ при $1 < p < \infty$ введены Ф. Риссом, а случай $p = 1$ рассмотрен Г. Штейнгаузом

функциональным пространством с заменой меры dx на $d\mu(x)$. В случае весового пространства $d\mu(x) = h(x) dx$. Такие меры называются абсолютно непрерывными.

Легко проверить, что $L_2(\mu)$ (и, следовательно, $L_2^h(a, b)$) есть линейное пространство. Действительно, для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, g \in L_2(\mu)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))^2 d\mu(x) &= \alpha^2 \int_a^b f^2(x) d\mu(x) + \beta^2 \int_a^b g^2(x) d\mu(x) + \\ &+ 2\alpha\beta \int_a^b f(x)g(x) d\mu(x) \leq \\ &\leq 2\alpha^2 \int_a^b f^2(x) d\mu(x) + 2\beta^2 \int_a^b g^2(x) d\mu(x) < \infty. \end{aligned}$$

На линейном пространстве $L_2(\mu)$ (и, следовательно, на $L_2^h(a, b)$) можно ввести скалярное произведение

$$(f, g)_\mu = \int_a^b f(x)g(x) d\mu(x). \quad (6.1.1)$$

Относительно нормы, порожденной этим скалярным произведением, $L_2(\mu)$ (и, следовательно, $L_2^h(a, b)$) является полным, а значит гильбертовым пространством. Доказательство этого факта можно посмотреть в [5, глава VII, §2, теорема 1].

В дальнейшем будем считать, что $\gamma_n = \int_a^b x^{2n} h(x) dx < \infty$ для любого $n \geq 0$, т.е. $x^n \in L_2^h(a, b)$. Это условие, очевидно, выполняется, если (a, b) есть конечный интервал:

$$\int_a^b x^{2n} h(x) dx \leq \max_{x \in (a, b)} x^{2n} \int_a^b h(x) dx < \infty.$$

В случае же бесконечного интервала (a, b) это условие будет выполнено, если весовая функция $h(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности.

Определение 71. Последовательность функций $q_0, q_1, \dots \in L_2^h(a, b)$ называется последовательностью *ортогональных многочленов* на (a, b) с весом h , если

- 1) q_n есть многочлен степени n для всех $n \geq 0$;
- 2) старший коэффициент многочлена q_n положителен для всех $n \geq 0$, т.е. если $q_n(x) = a_n x^n + \dots$, то $a_n > 0$;
- 3) $(q_n, q_m)_h = \delta_{nm}$.

Интервал (a, b) называют при этом промежутком ортогональности.

Существование такой последовательности функций следует из процесса Грама–Шмидта, примененному в пространстве $L_2^h(a, b)$ к последовательности мономов $x^n, n \geq 0$.

6.1.2. Элементарные свойства ортогональных многочленов

1°. Для любого многочлена Q_n степени $n \geq 0$ справедливо разложение $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k q_k(x)$ для некоторых $c_k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n$.

Доказательство. Утверждение сразу же следует из построения ортогональных многочленов с помощью процесса Грама–Шмидта и теоремы 39:

$$Q_n \in \text{lin}\{1, x, \dots, x^n\} \stackrel{T.39}{=} \text{lin}\{q_0, q_2, \dots, q_n\}.$$

□

2°. Пусть Q_n — многочлен степени $n \geq 0$, тогда для любого q_m , $m > n$ верно $(Q_n, q_m)_h = 0$.

Доказательство.

$$(Q_n, q_m)_h \stackrel{1^\circ}{=} \left(\sum_{k=0}^n c_k q_k, q_m \right)_h = \sum_{k=0}^n c_k (q_k, q_m)_h = 0$$

□

3°. Ортогональные многочлены однозначно определяются весовой функцией.

Доказательство. Применим индукцию по степени n многочлена q_n . Поскольку q_0 — это константа, то учитывая положительность старшего коэффициента и условие нормировки, получаем

$$q_0 = \left(\int_a^b h(x) dx \right)^{-1/2} = \gamma_0^{-1/2}.$$

Предположим, что многочлены q_k , $0 \leq k \leq n-1$ уже определены. По свойству 1°

$$q_n(x) - a_n x^n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_k(x),$$

поэтому нужно определить коэффициенты $a_n > 0$ и c_k , $0 \leq k \leq n-1$. Из условия ортогональности для любого $0 \leq m \leq n-1$ имеем

$$0 = (q_n, q_m)_h = a_n (x^n, q_m)_h + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (q_k, q_m)_h = a_n (x^n, q_m)_h + c_m,$$

откуда

$$c_k = -a_n (x^n, q_k)_h, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (6.1.2)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
1 &= (q_n, q_n)_h = \left(a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_k, a_n x^n + \sum_{m=0}^{n-1} c_m q_m \right)_h = \\
&= a_n^2 (x^n, x^n)_h + 2a_n \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x^n, q_k)_h + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} c_k c_m (q_k, q_m)_h = \\
&= a_n^2 \gamma_n + 2a_n \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x^n, q_k)_h + \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 \stackrel{(6.1.2)}{=} \\
&= a_n^2 \gamma_n - 2a_n^2 \sum_{k=0}^{n-1} (x^n, q_k)_h^2 + a_n^2 \sum_{k=0}^{n-1} (x^n, q_k)_h^2 = \\
&= a_n^2 \left(\gamma_n - \sum_{k=0}^{n-1} (x^n, q_k)_h^2 \right).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$a_n = \left(\gamma_n - \sum_{k=0}^{n-1} (x^n, q_k)_h^2 \right)^{-1/2}. \quad (6.1.3)$$

Подставляя (6.1.3) в (6.1.2), получаем

$$c_k = -(x^n, q_k)_h \left(\gamma_n - \sum_{m=0}^{n-1} (x^n, q_m)_h^2 \right)^{-1/2}. \quad (6.1.4)$$

Тем самым мы показали, что q_n однозначно определяется весом h . $\square$

4°. Пусть $(-a, a)$ промежуток ортогональности и $h(x)$ — четная функция, тогда

$$q_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$$

Доказательство. Поскольку весовая функция однозначно определяет ортогональные многочлены, достаточно показать, что $\tilde{q}_n(x) = (-1)^n q_n(-x)$ являются ортогональными многочленами на $(-a, a)$ с весом $h(x)$. Ясно, что $\tilde{q}_n$ есть многочлен степени $n \geq 0$. Если $q_n(x) = a_n x^n + \dots$, то

$$\tilde{q}_n(x) = (-1)^n a_n (-x)^n + \dots = a_n x^n + \dots$$

Таким образом, старшие коэффициенты положительны. И, наконец, проверим условие ортогональности

$$\begin{aligned}
(\tilde{q}_n, \tilde{q}_m)_h &= (-1)^{n+m} \int_{-a}^a q_n(-x) q_m(-x) h(x) dx = \\
&\stackrel{-x=y}{=} (-1)^{n+m} \int_{-a}^a q_n(y) q_m(y) h(-y) dy = \\
&\stackrel{h(y)=h(-y)}{=} (-1)^{n+m} \int_{-a}^a q_n(y) q_m(y) h(y) dy = (-1)^{n+m} (q_n, q_m)_h = \delta_{nm}.
\end{aligned}$$

Утверждение полностью доказано. $\square$

6.1.3. Трехчленная рекуррентная формула

Следующее утверждение уточняет свойство 1°, когда рассматривается многочлен Q_n специального вида. Пусть $n \geq 1$ и

$$\begin{aligned} q_{n-1}(x) &= a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots; \\ q_n(x) &= a_nx^n + b_nx^{n-1} + \dots; \\ q_{n+1}(x) &= a_{n+1}x^{n+1} + b_{n+1}x^n + \dots \end{aligned}$$

Тогда выполняется следующее равенство, которое называется *трехчленной рекуррентной формулой*:

$$xq_n(x) = \frac{a_{n-1}}{a_n}q_{n-1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \right) q_n(x) + \frac{a_n}{a_{n+1}}q_{n+1}(x). \quad (6.1.5)$$

Доказательство. По свойству 1° имеем равенство $xq_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{k,n}q_k(x)$, откуда для любого $0 \leq m \leq n+1$ получаем

$$(xq_m, q_n)_h = (xq_n, q_m)_h = \sum_{k=0}^{n+1} c_{k,n}(q_k, q_m)_h = c_{m,n}.$$

С другой стороны, по свойству 2° для всех $n > m+1$ имеем $(xq_m, q_n)_h = 0$. Следовательно, $c_{m,n} = 0$ при всех $0 \leq m < n-1$. Таким образом, не нулевыми остаются коэффициенты $c_{n-1,n}$, $c_{n,n}$ и $c_{n+1,n}$, входящие в равенство

$$xq_n = c_{n-1,n}q_{n-1}(x) + c_{n,n}q_n(x) + c_{n+1,n}q_{n+1}(x).$$

Подставляя в последнюю формулу выражения многочленов через первые два старших члена, получаем

$$\begin{aligned} x(a_nx^n + b_nx^{n-1} + \dots) &= c_{n-1,n}(a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots) + \\ &+ c_{n,n}(a_nx^n + b_nx^{n-1} + \dots) + \\ &+ c_{n+1,n}(a_{n+1}x^{n+1} + b_{n+1}x^n + \dots). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях x^{n+1} и x^n , получаем

$$\begin{aligned} x^{n+1} : \quad a_n &= c_{n+1,n}a_{n+1}, \\ x^n : \quad b_n &= c_{n,n}a_n + c_{n+1,n}b_{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что для любого $n \geq 1$

$$c_{n+1,n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad c_{n,n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}.$$

Остается заметить, что

$$c_{n-1,n} = c_{n,n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

$\square$

6.1.4. Нули ортогональных многочленов

Определение 72. Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется *точкой перемены знака* функции f , если $f(x_0) = 0$, и найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

$$f(x_1)f(x_2) < 0,$$

т.е. локально справа и слева от точки x_0 функция f принимает значения разных знаков.

Теорема 47. Каждый многочлен q_n имеет n различных вещественных корней, лежащих внутри промежутка ортогональности (a, b) .

Доказательство теоремы 47. Мы докажем даже более сильное утверждение, что каждый из корней является точкой перемены знака для q_n , $n \geq 1$. Предположим сначала, что точек перемены знака на (a, b) нет. Тогда многочлен не меняет знак на всем промежутке ортогональности (a, b) ; предположим для определенности, что $q_n(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Но тогда придем к противоречию:

$$0 = (q_n, q_0)_h = \int_a^b \underbrace{q_n(x)}_{\geq 0} \underbrace{q_0}_{> 0} \underbrace{h(x)}_{\geq 0} dx > 0.$$

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m, m \leq n$ есть все точки перемены знака многочлена q_n на интервале (a, b) . Предположим, что $m < n$. Тогда рассмотрим многочлен $Q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)$. Ясно, что $q_n(x) = P_{n-m}(x)Q_m(x)$, где многочлен $P_{n-m}(x)$ не меняет знак на (a, b) , например, все время неотрицателен. Тогда снова придем к противоречию:

$$0 = (Q_m, q_n)_h = \int_a^b Q_m(x)q_n(x)h(x) dx = \int_a^b \underbrace{Q_m^2(x)}_{\geq 0} \underbrace{P_{n-m}}_{\geq 0} \underbrace{h(x)}_{\geq 0} dx > 0.$$

Следовательно, $m = n$. □

Рассмотрим несколько следствий из теоремы 47 и трехчленной рекуррентной формулы (6.1.5).

Следствие 6. Для всех $n \geq 0$ верны неравенства $q_n(b) > 0$, $(-1)^n q_n(a) > 0$.

Доказательство. Предположим от противного, что $q_n(b) < 0$. Тогда, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n a_n = +\infty,$$

то найдется точка $x_0 \in (b, +\infty)$ такая, что $q_n(x_0) = 0$. Противоречие. Аналогично доказывается второе неравенство. □

Следствие 7. У соседних многочленов нет общих корней.

Доказательство. Пусть найдется такое $n \geq 1$ и $x_0 \in (a, b)$ такие, что

$$q_n(x_0) = q_{n+1}(x_0) = 0.$$

Подставляя точку x_0 в трехчленную рекуррентную формулу (6.1.5), получаем

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0) = 0.$$

Откуда следует, что $q_{n-1}(x_0) = 0$. Применяя последовательно аналогичные рассуждения к парам многочленов q_n и q_{n-1} ; q_{n-1} и q_{n-2} и т.д., получим $q_0(0) = 0$. Противоречие. $\square$

Следствие 8. Пусть $q_n(x_0) = 0$ для некоторого $x_0 \in (a, b)$ и $n \geq 1$, тогда

$$q_{n-1}(x_0)q_{n+1}(x_0) < 0.$$

Доказательство. Снова подставляя точку x_0 в трехчленную рекуррентную формулу (6.1.5), получаем

$$0 = \frac{a_{n-1}}{a_n} q_{n-1}(x_0) + \frac{a_n}{a_{n+1}} q_{n+1}(x_0).$$

Откуда

$$\frac{q_{n-1}(x_0)}{q_{n+1}(x_0)} = -\frac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} < 0.$$

$\square$

Следствие 9. Корни соседних многочленов перемежаются, т.е., если

$$x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}$$

суть корни q_n , то для всех $n \geq 1$

$$a < x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)} < b. \quad (6.1.6)$$

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по степени многочлена $n \geq 1$. Пусть $q_1(x_1^{(1)}) = 0$. Из следствия 3 следует, что $q_2(x_1^{(1)}) < 0$. По следствию 1 $q_2(a) > 0$ и $q_2(b) > 0$, следовательно, на интервалах $(a, x_1^{(1)})$ и $(x_1^{(1)}, b)$ есть корни многочлена $q_2(x) : x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ соответственно. Предположим, что утверждение доказано для всех $1 \leq k \leq n$. Докажем его для $k = n + 1$. Рассмотрим интервал $(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)})$, $1 \leq m \leq n - 1$. По следствию 3 имеем:

$$q_{n-1}(x_m^{(n)})q_{n+1}(x_m^{(n)}) < 0, \quad q_{n-1}(x_{m+1}^{(n)})q_{n+1}(x_{m+1}^{(n)}) < 0,$$

откуда

$$q_{n-1}(x_m^{(n)})q_{n-1}(x_{m+1}^{(n)})q_{n+1}(x_m^{(n)})q_{n+1}(x_{m+1}^{(n)}) > 0.$$

Произведение $q_{n-1}(x_m^{(n)})q_{n-1}(x_{m+1}^{(n)}) < 0$, поскольку по предположению индукции в интервале $(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)})$ лежит в точности один корень многочлена q_{n-1} : $x_m^{(n-1)}$. Таким образом $q_{n+1}(x_m^{(n)})q_{n+1}(x_{m+1}^{(n)}) < 0$. Значит в интервале $(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)})$ лежит хотя бы один корень многочлена q_{n+1} : $x_{m+1}^{(n+1)}$. Итого уже имеем $n - 1$ корень. Оставшиеся два корня лежат на концевых интервалах: это доказывается так же, как в базе индукции. $\square$

6.1.5. Стандартизация ортогональных многочленов

Определение 73. Пусть $q_0, q_1, \dots$ ортогональные многочлены на интервале (a, b) с весом h . Для любой последовательности вещественных чисел α_n многочлены

$$\alpha_0 q_0, \alpha_1 q_1, \dots$$

будем также называть ортогональными многочленами. Выбор коэффициентов α_n называется *стандартизацией* ортогональных многочленов.

В разных задачах, где используются ортогональные многочлены встречаются следующие способы стандартизации:

- 1) $\|q\|_h = 1$, $a_n > 0$ (наше первоначальное определение);
- 2) $q_n(1) = 1$;
- 3) $a_n = 1$;
- 4) стандартизация с использованием производящей функции.

Определение 74. Функция $w(x, t)$ называется *производящей функцией* ортогональных многочленов $q_0, q_1, \dots$, если для любого фиксированного $x \in (a, b)$ при достаточно малых t имеет место разложение

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(x)}{\alpha_n} t^n,$$

где α_n — некоторые коэффициенты.

Легко видеть, что справедливо соотношение

$$q_n(x) = \frac{\alpha_n}{n!} \left. \frac{\partial^n w(x, t)}{\partial t^n} \right|_{t=0}. \quad (6.1.7)$$

6.2 Классические ортогональные многочлены

6.2.1. Таблица

Определение 75. Классическими ортогональными многочленами называются многочлены Якоби, многочлены Лагέρра и многочлены Эрмита. Среди многочленов Якоби выделяют также многочлены Гегенбауэра, многочлены Чебышёва первого и второго рода, а также многочлены Лежандра.

$(a, b) = (-\infty, +\infty)$	$(a, b) = (-1, 1)$	$(a, b) = (0, +\infty)$
Мн-ны Эрмита $H_n(x)$ $h(x) = e^{-x^2}$	Мн-ны Якоби $P_n(x; \alpha, \beta)$ $h(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1, \beta > -1$	Мн-ны Лагέρрра $L_n^\alpha(x)$ $h(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$
Мн-ны Гегенба́уэра $C_n(x; \lambda)$ $h(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda > -1/2$		
Мн-ны Чебышёва 1-го рода $T_n(x)$ $h(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$	Мн-ны Лежандра $P_n(x)$ $h(x) = 1$	Мн-ны Чебышёва 2-го рода $U_n(x)$ $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

В указанных обозначениях имеем

$$\begin{aligned}
 C_n(x; \lambda) &= P_n(x; \lambda - 1/2, \lambda - 1/2); \\
 T_n(x) &= C_n(x, 0) = P_n(x; -1/2, -1/2); \\
 P_n(x) &= C_n(x, 1/2) = P_n(x; 0, 0); \\
 U_n(x) &= C_n(x, 1) = P_n(x; 1/2, 1/2).
 \end{aligned}$$

6.2.2. Уравнение Пирсона

Легко проверить, что весовые функции классических ортогональных многочленов удовлетворяют дифференциальному уравнению Пирсона:

$$\begin{cases} \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}, \\ \lim_{x \rightarrow a+0} B(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} B(x)h(x) = 0, \end{cases}$$

где $A(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ и $B(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Верно и обратное утверждение.

Теорема 48. *Весовая функция является решениями уравнения Пирсона, если с точностью до линейной замены переменной это весовая функция одного из классических ортогональных многочленов.*

Это утверждение не доказывается в нашем курсе, однако доказательство можно найти в [8].

6.2.3. Дополнительные свойства классических ортогональных многочленов

Тот факт, что весовая функция классических ортогональных многочленов удовлетворяет уравнению Пирсона, позволяет получать дополнительную информацию о самих многочленах. Приведем без доказательств наиболее важные свойства.

1) Классический ортогональный многочлен q_n удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$B(x)y''(x) + (A(x) + B'(x))y'(x) - n(\alpha_1 + (n+1)\beta_2)y(x) = 0. \quad (6.2.1)$$

2) Имеет место *формула Родрига*

$$q_n(x) = \frac{c_n}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n} (h(x)B^n(x)), \quad (6.2.2)$$

где c_n — некоторые постоянные, зависящие от стандартизации.

3) Для любого фиксированного $m \geq 1$ производные классических ортогональных многочленов $\frac{d^m q_n}{dx^m}$, $n \geq m$ являются снова классическими ортогональными многочленами на том же промежутке ортогональности (с другим весом или другой стандартизацией).

4) Производящая функция классических ортогональных многочленов выражается через элементарные функции. Пусть, например, классические ортогональные многочлены стандартизованы с использованием производящей функции $w(x, t)$ следующим образом

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(x)}{n!} t^n,$$

тогда для всех x , являющихся точками аналитичности весовой функции h при малых t имеет место равенство

$$w(x, t) = \frac{1}{h(x)} \frac{h(x_0)}{1 - tB'(x_0)},$$

где x_0 — корень (квадратного по переменной z) уравнения $z - x - tB(z) = 0$, ближайший при малых $|t|$ к x .

6.3 Многочлены Лежандра

6.3.1. Производящая функция

Рассмотрим промежуток ортогональности $(a, b) = (-1, 1)$ и весовую функцию $h = 1$. Это значит, что начнем изучать многочлены Лежандра P_n . Мы будем рассматривать эти многочлены и их свойства посредством стандартизации с использованием производящей функции

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (6.3.1)$$

для всех $x \in [-1, 1]$ и t из некоторой окрестности нуля. Мы будем использовать в дальнейшем, что это ряд можно почленно дифференцировать как по переменной x , так и по t .

Сначала выясним, что задаваемые таким образом функции P_n действительно являются многочленами степени n для каждого $n \geq 0$. Имеем

$$P_0(x) = w(x, 0) = 1, \quad (6.3.2)$$

$$P_1(x) = \frac{1}{1!} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = x. \quad (6.3.3)$$

Остальные функции мы найдем, используя трёхчленную рекуррентную формулу.

6.3.2. Трёхчленная рекуррентная формула

Заметим, что

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial w}{\partial t} = (x - t)w.$$

Подставляя сюда выражение (6.3.1) для производящей функции и применяя почленное дифференцирование, получаем

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) n t^{n-1} = (x - t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2xn P_n(x) t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) P_{n-1}(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x P_n(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x) t^n.$$

Приравнявая коэффициенты при t^n справа и слева, получаем для всех $n \geq 1$

$$\boxed{(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0}. \quad (6.3.4)$$

Это соотношение называется трёхчленной рекуррентной формулой для многочленов Лежандра. Из нее уже видно, что каждая функция P_n есть многочлен степени n .

6.3.3. Дифференциальное уравнение

Заметим, что справедливо равенство

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial w}{\partial x} = tw.$$

Подставляя снова сюда выражение (6.3.1) для производящей функции и применяя почленное дифференцирование, получаем

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n = t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Опять приравнявая коэффициенты при t^{n+1} справа и слева, получаем для всех $n \geq 1$

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x). \quad (6.3.5)$$

Продифференцировав трехчленную рекуррентную формулу (6.3.4) по x , получим еще одно соотношение

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - x(2n+1)P'_n(x) - (2n+1)P_n(x) + nP'_{n-1}(x) = 0. \quad (6.3.6)$$

Из уравнений (6.3.5) и (6.3.6) исключая сначала $P'_{n+1}(x)$, а потом $P'_{n-1}(x)$, получаем

$$xP'_n(x) - P'_{n-1} = nP_n(x), \quad n \geq 1, \quad (6.3.7)$$

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x), \quad n \geq 0. \quad (6.3.8)$$

В формуле (6.3.8) сдвинем заменим индекс n на $n-1$ и из получившегося равенства и соотношения (6.3.7) исключим производную P'_{n-1} . Проделав это, получим

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - xnP_n(x), \quad n \geq 1.$$

Дифференцируя это равенство по x , получаем

$$((1-x^2)P'_n(x))' = nP'_{n-1}(x) - xnP'_n(x) - nP_n(x) = 0.$$

Остается использовать формулу (6.3.7) и получить

$$\boxed{((1-x^2)P'_n(x))' + n(n+1)P_n(x) = 0}. \quad (6.3.9)$$

Отметим, что общее решение дифференциального уравнения Лежандра

$$((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0, \quad -1 < x < 1$$

имеет вид

$$y(x) = c_1P_n(x) + c_2Q_n(x),$$

где c_1, c_2 некоторые константы, а функция $Q_n(x)$ является функцией Лежандра второго рода. Она не является многочленом и неограничена на $(-1, 1)$, в отличие от многочленов Лежандра, для которых

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |P_n(x)| = 1. \quad (6.3.10)$$

6.3.4. Соотношение ортогональности

Умножив уравнение (6.3.9) на многочлен Лежандра с другим номером, получим

$$\begin{aligned} ((1-x^2)P'_n(x))'P_m(x) + n(n+1)P_n(x)P_m(x) &= 0 \\ ((1-x^2)P'_m(x))'P_n(x) + m(m+1)P_m(x)P_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

Вычитая одно из другого, получаем

$$\begin{aligned} ((1-x^2)P'_n(x))'P_m(x) - ((1-x^2)P'_m(x))'P_n(x) + P_n(x)P_m(x)(n(n+1) - m(m+1)) &= 0 \\ ((1-x^2)(P'_n(x)P_m(x) - P'_m(x)P_n(x)))' + P_n(x)P_m(x)(n-m)(n+m+1) &= 0. \end{aligned}$$

Теперь проинтегрируем последнее равенство на промежутке ортогональности $(-1, 1)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 ((1-x^2)(P'_n(x)P_m(x) - P'_m(x)P_n(x)))' + P_n(x)P_m(x)(n-m)(n+m+1) dx = \\ &= (1-x^2)(P'_n(x)P_m(x) - P'_m(x)P_n(x)) \Big|_{-1}^1 + (n-m)(n+m+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \\ &= (n-m)(n+m+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, многочлены с разными номерами ортогональны:

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m. \quad (6.3.11)$$

Домножим теперь трехчленную рекуррентную формулу (6.3.4) на $(2n-1)P_{n-1}$, а сдвинутую по номеру на 1 домножим на $(2n+1)P_n$:

$$\begin{aligned} (2n-1)(n+1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) - x(2n-1)(2n+1)P_{n-1}(x)P_n(x) + n(2n-1)P_{n-1}^2(x) &= 0 \\ (2n+1)(n-1)P_n^2(x) - x(2n-1)(2n+1)P_{n-1}(x)P_n(x) + (n-1)(2n+1)P_n(x)P_{n-2}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Вычитая одно из другого и интегрируя получившуюся разность, с учетом (6.3.11), получим

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx.$$

Понижая степень, в итоге получим

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{3}{2n+1} \int_{-1}^1 P_1^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (6.3.12)$$

Соединяя вместе формулы (6.3.11) и (6.3.12), получим соотношения ортогональности для многочленов Лежандра, стандартизованных с использованием производящей функции (6.3.1):

$$\boxed{(P_n, P_m) = \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \frac{1}{n+1/2} \delta_{nm}.} \quad (6.3.13)$$

Тогда многочлены $\tilde{P}_n = \sqrt{n+1/2}P_n$ образуют полную ортонормированную систему в $L_1([-1, 1])$. Следовательно, для любой функции $f \in L_2([-1, 1])$

имеет место разложение в ряд Фурье по системе $\tilde{P}_n$ и, следовательно, по P_n :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

где

$$\lambda_n = (n + 1/2)(f, P_n) = (n + 1/2) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (6.3.14)$$

Для гладких функции f , как и в классическом случае тригонометрической системы, справедливо поточечное представление.

Теорема 49. Пусть $f \in C^1([-1, 1])$, тогда для любого $x \in [-1, 1]$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(x),$$

где λ_n удовлетворяют (6.3.14).

6.3.5. Формула Родрига

Теорема 50. Для многочленов Лежандра стандартизованных с использованием производящей функции (6.3.1) справедлива формула Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} ((1 - x^2)^n)^{(n)}. \quad (6.3.15)$$

Доказательство теоремы 50. Достаточно доказать, что функции, стоящие в правой стороне формулы (6.3.15) являются многочленами, которые удовлетворяют соотношению ортогональности (6.3.13). То, что это многочлен степени n — это очевидно. Проверим соотношение ортогональности. Пусть для определенности $n \geq m$ и

$$c_{n,m} = \frac{1}{2^{n+m} n! m!},$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx &= c_{n,m} \int_{-1}^1 ((1 - x^2)^n)^{(n)} ((1 - x^2)^m)^{(m)} dx = \\ &= c_{n,m} \int_{-1}^1 ((1 - x^2)^m)^{(m)} d((1 - x^2)^n)^{(n-1)} = \\ &= -c_{n,m} \int_{-1}^1 ((1 - x^2)^n)^{(n-1)} ((1 - x^2)^m)^{(m+1)} dx = \\ &= (-1)^n c_{n,m} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n ((1 - x^2)^m)^{(m+n)} dx = \\ &= (-1)^n c_{n,m} \delta_{nm} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n ((1 - x^2)^n)^{(2n)} dx = \\ &= (-1)^{2n} (2n)! c_{n,m} \delta_{nm} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx. \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx \stackrel{x=\sin t}{=} 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt = \\ &= B(n+1, 1/2) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+3/2)} = \frac{n!2^{n+1}}{(2n+1)!!}. \end{aligned}$$

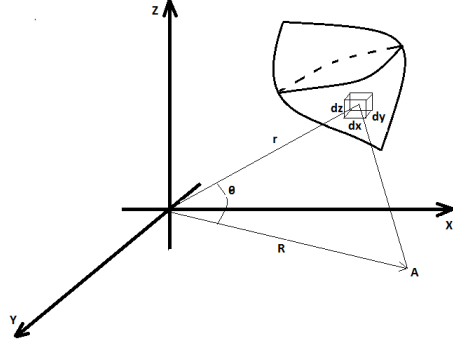
В итоге получаем

$$(P_n, P_n) = (-1)^{2n} (2n)! c_{n,n} \frac{n!2^{n+1}}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1}.$$

□

6.3.6. Мультипольное разложение кулоновского потенциала

В качестве первого применения многочленов Лежандра вычислим несколько последовательных приближенных значений кулоновского потенциала, создаваемого объемным заряженным ограниченным телом на достаточно удаленном от самого тела (по сравнению с его размерами) расстоянии. Рассмотрим объемное тело V с общим зарядом Q (с объемной плотностью



заряда ϱ). Вычислим потенциал, создаваемый этим телом в точке A . Кулоновский потенциал точечного заряда $dq = \varrho dx dy dz$ находится по формуле

$$d\Phi(\mathbf{R}) = \frac{dq}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{\varrho(\mathbf{r}) dx dy dz}{\sqrt{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2}},$$

где r — расстояние от точечного заряда dq до начала координат, R — расстояние от точки A до начала координат, а угол θ — это угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$.

Тогда общий потенциал будет интегралом по всем точечным зарядам, или, что то же самое, по объему:

$$\Phi(\mathbf{R}) = \iiint_V \frac{\varrho(\mathbf{r}) dV}{\sqrt{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2}} = \iiint_V \frac{\varrho(\mathbf{r}) dV}{R \sqrt{1 - 2 \frac{r}{R} \cos \theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2}}.$$

Поскольку мы считаем точку A удаленной от заряженного тела ($R \gg r$), то применяя формулу для производящей функции $w(\frac{r}{R}, \cos \theta)$ для многочленов Лежандра, получим

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{R}) &= \iiint_V \frac{\varrho(\mathbf{r})dV}{R\sqrt{1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2}} \stackrel{(6.3.1)}{=} \iiint_V \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{\varrho(\mathbf{r})dV}{R} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \iiint_V P_n(\cos\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{\varrho(\mathbf{r})dV}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n}{R^{n+1}},\end{aligned}$$

где

$$\sigma_n = \iiint_V P_n(\cos\theta) r^n \varrho(\mathbf{r})dV.$$

Это разложение называется мультипольным разложением кулоновского потенциала. Используя формулы для выражения первых трех многочленов Лежандра, легко выписать выражения для первых трех слагаемых этого разложения, которые имеют свои названия:

$$\Phi(\mathbf{R}) \simeq \frac{\sigma_0}{R} + \frac{\sigma_1}{R^2} + \frac{\sigma_2}{R^3},$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \iiint_V \varrho(\mathbf{r})dV = Q \quad \text{— полный заряд,} \\ \sigma_1 &= \iiint_V \varrho(\mathbf{r})r\cos\theta dV \quad \text{— дипольный момент,} \\ \sigma_2 &= \iiint_V \varrho(\mathbf{r})r^2 \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} dV \quad \text{— квадрупольный момент.}\end{aligned}$$

6.3.7. Задача Дирихле в шаре

Задачу Дирихле нахождения гармонической функции в некоторой области мы уже решали, когда изучали ряды Фурье (по тригонометрической системе) — там мы находили гармонические функции в круге. Используя разложение функции в ряд Фурье по многочленам Лежандра, мы найдем решение задачи Дирихле в шаре.

Пусть $B(0, R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ — открытый шар с центром в нуле и радиуса $R > 0$. Мы ищем отображение $u \in C^2(B(0, R))$ такое, что

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial B(0, R)} = f,$$

где f — гладкая функция, зависящая только от переменной z .

Переходя в сферические координаты

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \theta, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi],$$

получим следующую задачу: найти дважды гладкую функцию $u = u(r, \varphi, \theta)$ такую, что

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

и $u(a, \varphi, \theta) = f(\theta)$. Поскольку на границе шара, как видим, функция u не зависит от переменной φ , будем искать решение, также не зависящее от φ . Тогда задача упростится и будет иметь вид: найти дважды гладкую функцию $u = u(r, \theta)$ такую, что

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0, \quad u(R, \theta) = f(\theta).$$

Разделяя переменные r и θ по методу Фурье, будем искать частное решение в виде $u(r, \theta) = R(r)S(\theta)$. Подставляя в уравнение Лапласа, получим

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = - \frac{1}{S(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) = \text{const}.$$

Полагая $\text{const} = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, решим каждое из уравнений по отдельности. Для первого уравнения

$$(r^2 R')' = n(n+1)R$$

ищем решение в виде $R(r) = r^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Подставляя в уравнение, получаем $\alpha = n$. Для второго уравнения

$$(\sin \theta S')' + n(n+1)S \sin \theta = 0$$

покажем, что $S(\theta) = P_n(\cos \theta)$, где P_n — n -ый многочлен Лежандра. Подставляя в уравнение, получаем

$$(-\sin^2 \theta P_n'(\cos \theta))'(-\sin \theta) + n(n+1)P_n(\cos \theta) \sin \theta = 0.$$

Сокращая на $\sin \theta$ и делая замену $\cos \theta = x$, получаем уравнение Лежандра (6.3.9).

Таким образом частными решениями уравнения Лапласа являются функции $u_n(r, \theta) = r^n P_n(\cos \theta)$, $n \geq 0$, а общим решением является

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos \theta), \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Коэффициенты c_n находят из граничных условий и теоремы 49, примененной к функции $f(\theta) = f(\arccos x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n P_n(\cos \theta) = u(R, \theta) = f(\theta) = f(\arccos x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n(\cos \theta),$$

где

$$\lambda_n \stackrel{(6.3.14)}{=} -(n+1/2) \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Отсюда делаем вывод, что

$$c_n = \frac{\lambda_n}{R^n}$$

и

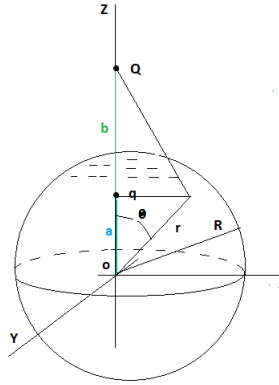
$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{r^n}{R^n} P_n(\cos \theta). \quad (6.3.16)$$

6.3.8. Потенциал точечного заряда внутри полый сферы

Применим результат предыдущего пункта для нахождения потенциала, создаваемого зарядом, помещенным внутри проводящей не заземленной сферы.

Пусть внутри сферы радиуса R помещен положительный заряд q на расстоянии $a < R$ от центра сферы. Потенциал, создаваемый этой системой, есть сумма потенциалов, создаваемых непосредственно зарядом q и индуцированными зарядами на сфере:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \Phi_1(\mathbf{r}).$$



Причем из физических соображений имеем: потенциал Φ_1 является гармонической функцией внутри шара, а Φ на самой сфере нулевой. Таким образом, имеем $\Delta \Phi_1(\mathbf{r}) = 0$, $|\mathbf{r}| < R$ и при $|\mathbf{r}| = R$

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = -\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}.$$

Для такой задачи Дирихле у нас уже есть решение (6.3.16), нужно лишь найти коэффициенты λ_n . При $|\mathbf{r}| = R$ имеем

$$-\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} = \frac{-q}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{R} \cos \theta + \frac{a^2}{R^2}}} = \frac{-q}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{R}\right)^n P_n(\cos \theta),$$

откуда заключаем, что

$$\lambda_n = \frac{-qa^n}{R^{n+1}}. \quad (6.3.17)$$

Тогда для потенциала $\Phi_1(\mathbf{r})$ имеем

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\mathbf{r}) &\stackrel{(6.3.16)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{r^n}{R^n} P_n(\cos \theta) \stackrel{(6.3.17)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-qa^n}{R^{n+1}} \frac{r^n}{R^n} P_n(\cos \theta) = \\
 &= \frac{-q}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ar}{R^2}\right)^n P_n(\cos \theta) = \frac{-q}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{ar}{R^2} \cos \theta + \left(\frac{ar}{R^2}\right)^2}} = \\
 &= \frac{-q}{R} \frac{R^2}{a\sqrt{\left(\frac{R^2}{a}\right)^2 - 2\frac{R^2 r}{a} \cos \theta + r^2}} \stackrel{\mathbf{b}=\left(\frac{R}{a}\right)^2 \mathbf{a}}{=} \frac{-qR}{a\sqrt{b^2 - 2br \cos \theta + r^2}} = \\
 &\stackrel{Q=-q\frac{R}{a}}{=} \frac{Q}{|\mathbf{b} - \mathbf{r}|}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что потенциал, создаваемый индуцированными зарядами на сфере, такой же, как у точечного отрицательного заряда Q , расположенного симметрично относительно сферы заряду q (это значит $ab = R^2$.)

Глава 7

Линейные ограниченные операторы в гильбертовом пространстве

Следует заметить, что если в конечномерном случае при выборе нормы можно руководствоваться одними только соображениями удобства вычислений, поскольку все линейные операторы непрерывны, то в бесконечномерном случае и само определение оператора, и уж, конечно, его непрерывность всецело зависят от выбора пространства

В. Хатсон, Джс. Пим

7.1 Определение линейного оператора

Определение 76. Пусть X, Y — линейные пространства над полем $\mathbb{F}$. Отображение $A : X \rightarrow Y$ называется *линейным оператором*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2. \quad (7.1.1)$$

Во многих случаях линейный оператор может быть определен не на всем пространстве X , а только лишь на каком-то его подпространстве. В этом случае равенство (7.1.1) верно только для элементов из этого подпространства.

Напомним следующие определения. Множества

$$\text{Dom } A = \{x \in X : Ax \text{ определено}\},$$

$$\text{Im } A = \{y \in Y : y = Ax \text{ для некоторого } x \in X\}.$$

называются *областью определения* и, соответственно, *областью значений* оператора A .

Для того, чтобы определить оператор, нужно задать не только правило, по которому он сопоставляет $x \in X$ в соответствующий $y \in Y$, но и выяснить, для каких $x \in X$ это правило работает.

Пример 33.

1. Тожественный оператор. Пусть X — линейное пространство и $I : X \rightarrow X$ по правилу $Ix = x$ для любого $x \in X$.

2. Нулевой оператор. Для любого $x \in X$ полагаем $Ox = 0_Y$, т.е. все вектора пространства X переводятся в ноль пространства Y .

3. Матрицы. Пусть $X = \mathbb{C}^n$, а $Y = \mathbb{C}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — ортонормированный базис в X , а $y_1, y_2, \dots, y_m$ — ортонормированный базис в Y . Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k,$$

и

$$Ax = A \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k Ax_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \sum_{j=1}^m a_{jk} y_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_{jk} \right) y_j.$$

С другой стороны

$$Ax = \sum_{j=1}^m \nu_j y_j.$$

Сравнивая, заключаем, что для каждого $j = 1, 2, \dots, m$

$$\nu_j = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_{jk},$$

или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Таким образом, каждому линейному оператору $A : X \rightarrow Y$ при фиксированных базисах соответствует некоторая матрица.

4. Оператор проектирования. Пусть $X = Y = H$ — гильбертово пространство и $E \subset H$ его замкнутое подпространство. Тогда, как известно из теоремы 41 имеет место разложение в прямую сумму:

$$H = E \oplus E^\perp,$$

т.е. для любого $x \in H$ найдутся вектора $x_1 \in E$ и $x_2 \in E^\perp$, что

$$x = x_1 + x_2.$$

Оператор $\text{Pr}_E : H \rightarrow E$ проектирования на подпространство E определяется равенством: для любого $x \in H$

$$\text{Pr}_E x = x_1.$$

7.2 Непрерывность и ограниченность

Определение 77. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства над одним и тем же полем. Отображение $A : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если из того, что $x_n \in X$ сходится к x_0 , следует, что Ax_n сходится к Ax_0 . Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$ как только $\|x - x_0\|_X < \delta$.

Отображение $A : X \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

Пример 34. Простейшим примером непрерывного отображения является норма, поскольку из неравенства треугольника следует, что

$$|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\|$$

Определение 78. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства. Отображение $A : X \rightarrow Y$ называется *ограниченным*, если оно всякое ограниченное в X множество M переводит в ограниченное в Y множество AM . Другими словами, если существует $r > 0$ такое, что $\|x\|_X \leq r$ для всех $x \in M$, то найдется $R > 0$ такое, что $\|Ax\|_Y \leq R$ для всех $x \in M$.

Упражнение 25. Проверить, что норма — это ограниченное отображение.

Оказывается, что для линейных операторов понятия непрерывности и ограниченности совпадают.

Теорема 51. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства и $A : X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) существует $x_0 \in X$ такой, что A непрерывен в x_0 ;
- 2) A непрерывен;
- 3) A ограничен;
- 4) $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty$.

Доказательство теоремы 51. 1) $\Rightarrow$ 2) : Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$ при $\|x - x_0\|_X < \delta$. Тогда для произвольного $\tilde{x}_0 \in X$ как только $\|x - \tilde{x}_0\|_X < \delta$, то $\|(x - \tilde{x}_0) + x_0 - x_0\|_X < \delta$ и, следовательно,

$$\|A(x - \tilde{x}_0 + x_0) - Ax_0\|_Y < \varepsilon.$$

Ввиду линейности оператора A последнее неравенство переписывается к требуемому виду:

$$\|A(x - \tilde{x}_0 + x_0) - Ax_0\|_Y = \|Ax - A\tilde{x}_0 + Ax_0 - Ax_0\|_Y = \|Ax - A\tilde{x}_0\|_Y < \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность в каждой точке $\tilde{x}_0 \in X$.

2) $\Rightarrow$ 3) : Поскольку A непрерывен в каждой точке, то, в частности, непрерывен в нуле. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$\|Ax\|_Y < \varepsilon$ при $\|x\|_X < \delta$. Рассмотрим ограниченное в X множество M : $\|x\|_X < r$ для всех $x \in M$ и некоторого $r > 0$. Тогда для этих же векторов x имеем:

$$\left\| \frac{\delta}{2r} x \right\|_X \leq \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \left\| A \left(\frac{\delta}{2r} x \right) \right\|_Y < \varepsilon \Rightarrow \|Ax\|_Y < \frac{2r\varepsilon}{\delta} = R.$$

3) $\Rightarrow$ 4) : Поскольку A ограниченный оператор, то единичный шар с центром в нуле $B(0, 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ отображается в ограниченное множество $AB(0, 1)$: существует $R > 0$ такое, что для всех $x \in B(0, 1)$ имеет место неравенство $\|Ax\| \leq R$, что эквивалентно

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq R < \infty.$$

4) $\Rightarrow$ 1) : Если $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq R < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ и всех $x \in X$ таких, что $\|x\| < \frac{\varepsilon}{2R}$ имеем

$$\left\| \frac{2Rx}{\varepsilon} \right\| < 1 \Rightarrow \left\| A \left(\frac{2Rx}{\varepsilon} \right) \right\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq R \Rightarrow \|Ax\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Это доказывает непрерывность оператора A в нуле. $\square$

7.3 Операторная норма

7.3.1. Будем считать, что линейные ограниченные операторы определены всюду на X . Тогда условие 4) из теоремы 51 может быть переписано следующим образом.

Теорема 52. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства и $A : X \rightarrow Y$ — линейный ограниченный оператор. Тогда

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Доказательство теоремы 52. Докажем сначала второе равенство. Имеем

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \sup_{x \neq 0} \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \stackrel{y = \frac{x}{\|x\|}}{=} \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|.$$

Для доказательства первого равенства имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} &= \max \left\{ \sup_{\|x\| > 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}; \sup_{x \neq 0, \|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\} \geq \sup_{x \neq 0, \|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \\ &\geq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \end{aligned}$$

$\square$

Определение 79. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства и $A : X \rightarrow Y$ — линейный ограниченный оператор. Число

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \infty \quad (7.3.1)$$

называется *нормой* оператора A .

7.3.2. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства (над одним и тем же полем). Множество всех линейных операторов $A : X \rightarrow Y$ обозначают через $L(X, Y)$, а множество всех непрерывных линейных операторов — $B(X, Y)$. Легко проверить, что $L(X, Y)$ — это снова линейное пространство. Следующая теорема показывает, что $B(X, Y)$ — это подпространство $L(X, Y)$ и, кроме того, оно является нормированным пространством.

Теорема 53. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства (над одним и тем же полем). Тогда $B(X, Y)$ — нормированное пространство с операторной нормой (заданной равенствами (7.3.1)), т.е.

- 1) $\|A\| \geq 0$ и $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
- 2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$; кроме того,
- 4) $\| \|A\| - \|B\| \| \leq \|A - B\|$;
- 5) если $A \in B(X, Y)$, $B \in B(Y, X)$, то $AB \in B(Y, Y)$, $BA \in B(X, X)$, и

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|BA\| \leq \|B\| \|A\|;$$

- 6) для любого $x \in X$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Доказательство теоремы 53. 1) и 2) свойства доказываются легко, исходя из определения. Для доказательства 3) имеем

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A + B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right) \leq \\ &\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

Свойство 4) есть переформулировка свойства 3):

$$\|A\| = \|A - B + B\| \leq \|A - B\| + \|B\|, \quad \|B\| = \|B - A + A\| \leq \|A - B\| + \|A\|.$$

Для доказательства 5) достаточно получить оценку для нормы. Получим ее для композиции AB :

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{y \neq 0} \frac{\|AB y\|}{\|y\|} = \sup_{By \neq 0} \frac{\|AB y\|}{\|y\|} = \sup_{By \neq 0} \frac{\|AB y\|}{\|By\|} \frac{\|By\|}{\|y\|} \leq \\ &\leq \sup_{By \neq 0} \frac{\|AB y\|}{\|By\|} \sup_{y \neq 0} \frac{\|By\|}{\|y\|} \leq \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

Неравенство в 6) очевидно становится равенством при $x = 0$. При $x \neq 0$ имеем

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

□

Пример 35. Найдем (оценим) нормы линейных операторов из примера 33:

$$\|O\| = 0, \quad \|I\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1;$$

$$\|Pr_E\|^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Pr_E x\|^2}{\|x\|^2} \stackrel{(5.6.1)}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|x_1\|^2}{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2} = 1.$$

Для $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_k a_{jk} y_j \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sup_{\|x\| \leq 1} |(x, x_k)| a_{jk} \underbrace{\|y_j\|}_{=1} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \underbrace{\|x_k\|}_{=1} |a_{jk}| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{jk}| < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) = B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$.

7.4 Сходимость операторов

7.4.1. Имея норму на множестве ограниченных операторов, можно говорить о сходимости операторов в этой норме. Но есть и другой естественный (более слабый) способ определения сходимости операторов.

Определение 80. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства (над одним и тем же полем). Пусть задано отображение $A : X \rightarrow Y$ и операторы $A_n \in B(X, Y)$. Говорят, что A_n сходится к A

1) *сильно*, если для любого $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Dom } A_n$

$$\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty;$$

2) *равномерно*, если

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Если коротко, то равномерная — это сходимость в операторной норме, а сильная — это сходимость по норме образа.

Рассмотрим некоторые свойства сходимости операторов.

1) Сильный предел линейных операторов — снова линейный оператор.

Доказательство. Для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 A x_1 - \alpha_2 A x_2\| = \\ &= \|A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \alpha_1 A_n x_1 - \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A_n x_2 - \alpha_2 A x_2\| \leq \\ &\leq \|A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\| + \|\alpha_1 A_n x_1 - \alpha_1 A x_1\| + \|\alpha_2 A_n x_2 - \alpha_2 A x_2\|. \end{aligned}$$

Поскольку последние три слагаемых стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, то

$$\|A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 A x_1 - \alpha_2 A x_2\| = 0 \Rightarrow A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2.$$

□

2) Из равномерной сходимости следует сильная сходимость. Говорят также, что сильная сходимость слабее :) равномерной.

Доказательство. Для каждого $x \in X$

$$\|A_n x - A x\| \leq \|A_n - A\| \|x\| \rightarrow 0.$$

Соединяя 1) и 2) свойство, заключаем, что равномерный предел линейных операторов тоже является линейным оператором. □

3) Равномерный предел ограниченных линейных операторов — ограниченный линейный оператор.

Доказательство. Необходимо проверить только ограниченность:

$$\|A\| \leq \|A - A_n\| + \|A_n\| < \infty.$$

□

4) Сильный предел ограниченных линейных операторов может оказаться неограниченным оператором. В качестве примера рассмотрим последовательность операторов $A_n : \ell_2 \rightarrow \ell_2$, определенных формулой

$$A_n x = (x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{3}x_3, \dots, \sqrt{n}x_n, 0, 0, \dots), \quad x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \ell_2.$$

Его сильным пределом является оператор уничтожения частиц $A : \ell_2 \rightarrow \ell_2$, определенный на множестве

$$\text{Dom } A = \{x \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n|x_n|^2 < \infty\}$$

равенством

$$Ax = (x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{3}x_3, \dots).$$

Доказательство того факта, что A неограниченный и действительно является сильным пределом A_n оставляем в качестве упражнения.

7.4.2. Следующее важное свойство равномерной сходимости сформулируем в виде теоремы.

Теорема 54. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства над одним и тем же полем, причем Y является полным относительно своей нормы пространством. Тогда $B(X, Y)$ — полное относительно операторной нормы нормированное пространство. В частности, утверждение справедливо, когда X и Y — гильбертовы пространства.

Доказательство теоремы 54. Пусть $A_n \in B(X, Y), n \geq 1$ суть фундаментальная последовательность линейных ограниченных операторов, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для любых $p \geq 0$ и $n \geq n_0$

$$\|A_n - A_{n+p}\| < \varepsilon.$$

Отсюда легко следует, что для каждого фиксированного $x \in X$ последовательность векторов $y_n = A_n x$ является фундаментальной в Y :

$$\|y_n - y_{n+p}\| = \|(A_n - A_{n+p})x\| \leq \|A_n - A_{n+p}\| \|x\| < \varepsilon \|x\|$$

для всех $p \geq 0$ и $n \geq n_0$. Поскольку пространство Y полно, то последовательность y_n имеет предел $y \in Y$. Определим отображение $A : X \rightarrow Y$ равенством $Ax = y$ для каждого $x \in X$. Поскольку из построения следует, что A есть сильный предел последовательности операторов A_n , то A — линейный оператор. Осталось доказать, что A есть равномерный предел последовательности A_n . Для любого $n \geq n_0$ имеем

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n x - A_{n+p} x\| + \|A_{n+p} x - Ax\| < \varepsilon \|x\| + \underbrace{\|A_{n+p} x - Ax\|}_{\rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty},$$

следовательно,

$$\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\|$$

и

$$\|A_n - A\| \leq \varepsilon$$

при $n \geq n_0$. □

7.4.3. Операторные ряды. Наличие операторной нормы дает возможность говорить о рядах операторов.

Определение 81. Пусть H — гильбертово пространство и $A_n \in B(H)$ — последовательность ограниченных операторов. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ *сходится* (равномерно), если последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$ сходится (равномерно).

Справедливы следующие свойства сходимости операторных рядов.

1). Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ сходится, то сходится и операторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

Доказательство. Достаточно доказать фундаментальность частичной суммы S_n . Она следует из сходимости ряда норм. Действительно, имеем

$$\|S_n - S_{n+p}\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A_k\| < \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_k\| < \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2). Если операторные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ сходятся, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha A_n + \beta B_n$ тоже сходится и

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} A_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha A_n + \beta B_n.$$

Доказательство. Легко следует из определения, переходя к рассмотрению частичных сумм. $\square$

7.5 Обратные операторы

Определение 82. Линейный оператор $A \in L(X, Y)$ называется *обратимым*, если для любого $y \in Y$ уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения $x \in X$. Другими словами, *ядро оператора* нулевое, т.е.

$$\ker A = \{x \in X : Ax = 0\} = \{0\}.$$

Если оператор A обратим, то *обратным* называется оператор $A^{-1} : Y \rightarrow X$, задаваемый условием

$$A^{-1}y = x \Leftrightarrow Ax = y.$$

Рассмотрим простейшие свойства обратимых операторов.

Теорема 55. *Справедливы следующие утверждения:*

1). Если $A \in L(X, Y)$ обратим, то A^{-1} — линейный оператор и при этом

$$\text{Dom } A^{-1} = \text{im } A, \quad \text{im } A^{-1} = \text{Dom } A.$$

2). Если $A \in L(X, Y)$ и $B \in L(Y, X)$ и $AB = I_Y$, $BA = I_X$, то A и B — взаимно обратные операторы, т.е. они обратимы и $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$.

3). Если $A \in L(X, Y)$ и $B \in L(Y, Z)$ — обратимые линейные операторы и $\text{Dom } B = \text{im } A$, то $BA \in L(X, Z)$ — обратимый линейный оператор и

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

4). Если $A \in L(X, Y)$ обратим, то $A^{-1} \in L(Y, X)$ тоже обратим и

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Доказательство теоремы 55. 1). Формулы для области определения и области значений сразу же следуют из определения обратного. Теперь убедимся, что область определения обратного есть линейное пространство, т.е. покажем, что образ $\text{im } A$ линейного оператора A есть линейное подпространство в Y . Пусть $y_1, y_2 \in \text{im } A$, тогда найдутся $x_1, x_2 \in \text{Dom } A$ такие, что

$$Ax_1 = y_1, \quad Ax_2 = y_2.$$

Поскольку область определения линейного оператора линейное подпространство, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ вектор $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \text{Dom } A$. Тогда

$$\underbrace{A(\alpha x_1 + \beta x_2)}_{\in \text{im } A} = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$

что доказывает линейность образа. Переписывая это равенство в терминах обратного оператора, получаем

$$\alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2),$$

что завершает доказательство линейности обратного оператора.

2). Предположим, что A не обратим, тогда для некоторого $y \in Y$ найдется по меньшей мере два различных вектора $x_1, x_2 \in X$ таких, что $Ax_1 = y = Ax_2$. Это предположение приводит нас к следующему противоречию:

$$x_1 = I_X x_1 = BAx_1 = By = BAx_2 = I_X x_2 = x_2.$$

Аналогично показывается, что B обратим. Далее, из цепочки включений

$$Y \supseteq \text{Dom } B \supseteq \text{Dom } AB = \text{Dom } I_Y = Y$$

закключаем, что оператор B определен на всем пространстве Y . Похожим образом можно получить, что A определен на всем X . И, наконец, имеем для любого $y \in Y$

$$A^{-1}y = x = I_X x = BAx = By,$$

откуда заключаем, что $A^{-1} = B$. Равенство $B^{-1} = A$ доказывается аналогично.

3). Нужно показать, что для любого $z \in Z$ уравнение $BAx = z$ имеет не более одного решения $x \in X$. Но это последовательно вытекает из того, что для любого $z \in Z$ уравнение $By = z$ имеет не более одного решения $y \in Y$, и

для любого $y \in Y$ уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \text{Dom } (BA)^{-1} &= \text{im } BA \stackrel{\text{Dom } B = \text{im } A}{=} \text{im } B, \\ \text{Dom } A^{-1}B^{-1} &\stackrel{\text{Dom } A^{-1} = \text{im } B^{-1}}{=} \text{Dom } B^{-1} = \text{im } B. \end{aligned}$$

Тогда для любого $z \in \text{im } B$ имеем

$$(BA)^{-1}z = x \Leftrightarrow z = BAx \Leftrightarrow B^{-1}z = Ax \Leftrightarrow A^{-1}B^{-1}z = x,$$

что и завершает доказательства равенства $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

4). Следует из 2), где $B = A^{-1}$. $\square$

Следующие две важные теоремы об обратных операторах, справедливые и в более общем случае, мы приводим в контексте гильбертовых пространств. Первая из них — это теорема Банаха об обратном операторе. Мы приводим ее без доказательства, которое можно посмотреть, например, в [5, глава IV, §5, теорема 3].

Теорема 56. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства и $A \in B(H_1, H_2)$ — обратимый оператор. Если $\text{Dom } A = H_1$ и $\text{im } A = H_2$, то A^{-1} является ограниченным оператором.

Следующая теорема Неймана — это операторное обобщение суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Теорема 57. Пусть H — гильбертово пространство, $A \in B(H)$ и $\|A\| < 1$. Тогда оператор $I - A$ непрерывно обратим и

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Доказательство теоремы 57. Рассмотрим операторный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$, где $A^0 = I$ и $A^{n+1} = AA^n = A^nA$, $n \geq 0$. Поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n \stackrel{\|A\| < 1}{=} (1 - \|A\|)^{-1} < \infty,$$

то по доказанному ранее признаку, ряд $S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ сходится. Положим $S_N = \sum_{n=0}^N A^n$, тогда

$$\begin{aligned} \|(I - A)S_N - I\| &= \|(I - A) \sum_{n=0}^N A^n - I\| = \left\| \sum_{n=0}^N A^n - \sum_{n=1}^{N+1} A^n - I \right\| = \\ &= \|A^{N+1}\| \leq \|A\|^{N+1} \stackrel{\|A\| < 1}{\rightarrow} 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. Отсюда получаем, что S — правый обратный для $(I - A)$. Аналогично доказывается, что он является левым обратным. Теорема доказана. В конце лишь отметим, что

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}.$$

$\square$

7.6 Спектр оператора

7.6.1. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, оператор $A \in L(H)$, и $\lambda \in \mathbb{C}$. Нас будет интересовать разрешимость по $x \in H$ уравнения

$$(A - \lambda I)x = y \quad (7.6.1)$$

для произвольного $y \in H$.

Определение 83. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярным (резольвентным) значением*, если оператор $A - \lambda I$ обратим и $\text{Dom}(A - \lambda I)^{-1} = H$. Множество всех таких точек называется *резольвентным множеством* оператора A и обозначается как $\rho(A)$. Оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ называется *резольвентой* оператора A .

Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ является точкой *точечного спектра*, если оператор $A - \lambda I$ необратим. Множество всех таких точек называется *точечным спектром* оператора A и обозначается как $\sigma_p(A)$.

Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ является точкой *непрерывного спектра*, если оператор $A - \lambda I$ обратим, $\text{Dom}(A - \lambda I)^{-1} \neq H$, но $\text{cl Dom}(A - \lambda I)^{-1} = H$. Множество всех таких точек называется *непрерывным спектром* оператора A и обозначается как $\sigma_c(A)$.

Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ является точкой *остаточного спектра*, если оператор $A - \lambda I$ обратим, но $\text{cl Dom}(A - \lambda I)^{-1} \neq H$. Множество всех таких точек называется *непрерывным спектром* оператора A и обозначается как $\sigma_r(A)$.

Множество $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется спектром оператора A .

Если про оператор дополнительно известно, что он ограничен, т.е. $A \in B(H)$, то спектральные точки и регулярные значения имеют следующие признаки в терминах ограниченности оператора $(A - \lambda I)^{-1}$.

Из теоремы Банаха об обратном операторе (теорема 56) следует, что если $\lambda \in \rho(A)$, то R_λ ограничен.

Если $\lambda \in \sigma_c(A)$, то $(A - \lambda I)^{-1}$ неограничен, поскольку в противном случае мог быть продолжен на все H по непрерывности (и стать резольвентой).

Для $\lambda \in \sigma_r(A)$ оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ может быть как ограниченным, так и неограниченным.

Представим для $A \in B(H)$ все данные в таблице.

$\sigma_p(A)$	$\sigma_r(A)$	$\sigma_c(A)$	$\rho(A)$
$A - \lambda I$ не обратим	$A - \lambda I$ обратим	$A - \lambda I$ обратим	$A - \lambda I$ обратим
	$\text{cl Dom}(A - \lambda I)^{-1} \neq H$	$\text{Dom}(A - \lambda I)^{-1} \neq H$ $\text{cl Dom}(A - \lambda I)^{-1} = H$	$\text{Dom}(A - \lambda I)^{-1} = H$
		$(A - \lambda I)^{-1}$ не ограничен	$(A - \lambda I)^{-1}$ ограничен

7.6.2. Простейшие свойства. Если $\lambda \in \sigma_p(A)$, то по определению найдется такой $y \in H$, что уравнение (7.6.1) имеет не менее двух решений $x_1 \neq x_2$:

$$Ax_1 - \lambda x_1 = y, \quad Ax_2 - \lambda x_2 = y.$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем для не нулевого вектора $v = x_1 - x_2$ равенство $Av = \lambda v$. Таким образом, каждая точка точечного спектра суть собственное значение оператора A . Найти все такие точки значит разрешить последнее уравнение с ненулевым $v \in H$.

Если рассмотреть другую крайнюю ситуацию $\lambda \in \rho(A)$, то говорят, что уравнение (7.6.1) устойчиво относительно малых возмущений правой части, т.е. если для $y, y_n \in H$ известно, что $y_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$, то решения уравнения (7.6.1) с y_n в качестве правой части сходятся к решению этого уравнения с y в его правой части. Действительно,

$$\|x_n - x\| = \|R_\lambda y_n - R_\lambda y\| \leq \|R_\lambda\| \|y_n - y\| \rightarrow 0,$$

так как $\|R_\lambda\| < \infty$.

Из определения спектра очевидно, что все части спектра не пересекаются:

$$\begin{aligned}\sigma_p(A) \cap \sigma_c(A) &= \sigma_p(A) \cap \sigma_r(A) = \sigma_r(A) \cap \sigma_c(A) = \emptyset, \\ \sigma(A) &= \sigma_p(A) \sqcup \sigma_c(A) \sqcup \sigma_r(A), \\ \mathbb{C} &= \sigma(A) \sqcup \rho(A).\end{aligned}$$

7.6.3. Примеры. Исследуем спектр тождественного и нулевого операторов. Для тождественного оператора $I : H \rightarrow H$ спектр состоит только из точечного значения равного 1, т.е.

$$\sigma(I) = \sigma_p(I) = \{1\}.$$

Действительно, уравнение $x = \lambda x, x \neq 0$ имеет единственное решение $\lambda = 1$. Если $\lambda \neq 1$, то уравнение $x - \lambda x = y$ очевидно разрешимо для любого $y \in H$ и имеет единственное решение $x = (1 - \lambda)^{-1}y \in H$.

Для нулевого оператора $O : H \rightarrow H$ спектр состоит только из точечного значения равного 0, т.е.

$$\sigma(O) = \sigma_p(O) = \{0\}.$$

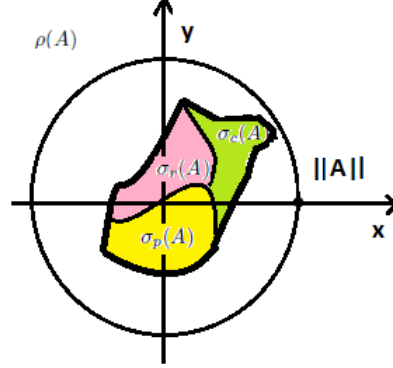
Действительно, уравнение $0 = \lambda x, x \neq 0$ имеет единственное решение $\lambda = 0$. Если $\lambda \neq 0$, то уравнение $0 - \lambda x = y$ очевидно разрешимо для любого $y \in H$ и имеет единственное решение $x = -\lambda^{-1}y \in H$.

Упражнение 26. Докажите, что спектр ортогонального проектирования на замкнутое подпространство E ($E \neq \{0\}, E \neq H$) состоит только из нулевого и единичного точечных значений, т.е.

$$\sigma(\text{Pr}_E) = \sigma_p(\text{Pr}_E) = \{0, 1\}.$$

7.6.4. Компактность спектра ограниченного оператора.

Теорема 58. Спектр ограниченного линейного оператора $A \in B(H)$ является непустым компактом.



Доказательство теоремы 58 очевидно следует из следующих трех лемм.

Лемма 4. *Спектр ограниченного линейного оператора $A \in B(H)$ содержится в замкнутом круге радиуса $\|A\|$, т.е.*

$$\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}. \quad (7.6.2)$$

Лемма 5. *Резольвентное множество $\rho(A)$ ограниченного линейного оператора $A \in B(H)$ открыто.*

Лемма 6. *Спектр ограниченного линейного оператора $A \in B(H)$ не пуст.*

Доказательство леммы 4. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $|\lambda| > \|A\|$. Покажем, что обязательно $\lambda \in \rho(A)$. Действительно, в этом случае для оператора $B = \frac{1}{\lambda}A$ имеем

$$\|B\| = \frac{1}{|\lambda|} \|A\| < 1,$$

и, следовательно, к нему применима теорема Неймана (теорема 57): оператор

$$I - B = -\frac{1}{\lambda}(A - \lambda I)$$

обратим и область определения обратного есть все H . Это по определению означает, что λ — регулярная точка. Кроме того, в этом случае резольвента R_λ раскладывается в ряд Неймана:

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n, \quad \lambda > \|A\|. \quad (7.6.3)$$

□

Доказательство леммы 5. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Нужно показать, что найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что если $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, то $\lambda \in \rho(A)$.

Положим

$$\varepsilon = \|R_{\lambda_0}\|^{-1} = \frac{1}{\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|},$$

тогда для всех $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^{-1} &= (A - \lambda_0 I + (\lambda_0 - \lambda)I)^{-1} = ((A - \lambda_0 I)(I + R_{\lambda_0}(\lambda_0 - \lambda)))^{-1} = \\ &= (I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0})^{-1}R_{\lambda_0}. \end{aligned}$$

Поскольку $\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}\| < 1$, то по теореме Неймана получаем требуемое. Последнее равенство полезно переписать в терминах резольвент:

$$R_\lambda = (I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0})^{-1}R_{\lambda_0}. \quad (7.6.4)$$

□

Доказательство леммы 6. Заметим сначала, что справедливо тождество Гильберта:

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu, \quad \lambda, \mu \in \rho(A). \quad (7.6.5)$$

Оно следует из обращения очевидного равенства

$$(A - \mu I) - (A - \lambda I) = (\lambda - \mu)I.$$

Из тождества Гильберта сразу вытекает несколько следствий: R_λ и норма $\|R_\lambda\|$ есть непрерывные по λ и ограниченные функции; и для произвольных $x, y \in H$ функция $r_{x,y} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, заданная равенством

$$r_{x,y}(\lambda) = (R_\lambda x, y).$$

будет дифференцируема по $\lambda \in \rho(A)$, т.е. аналитическая на резольвентном множестве.

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} |\|R_\lambda\| - \|R_\mu\|| &\leq \|R_\lambda - R_\mu\| \stackrel{(7.6.5)}{\leq} |\lambda - \mu| \|R_\lambda\| \|R_\mu\| \leq \\ &\stackrel{(7.6.4)}{\leq} |\lambda - \mu| \|R_\lambda\| \|(I - (\mu - \lambda)R_\lambda)^{-1}R_\lambda\| \leq \\ &\leq |\lambda - \mu| \frac{\|R_\lambda\|^2}{1 - |\mu - \lambda| \|R_\lambda\|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $\mu \rightarrow \lambda$. Непрерывность показана. Для ограниченности достаточно доказать стремление нормы $\|R_\lambda\|$ к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Для всех $\lambda > \|A\|$ имеем

$$\|R_\lambda\| \stackrel{(7.6.3)}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \rightarrow 0$$

при $\lambda \rightarrow \infty$. Покажем теперь аналитичность функции $r_{x,y}$ для всех $x, y \in H$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{r_{x,y}(\lambda) - r_{x,y}(\mu)}{\lambda - \mu} &= \left(\frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu} x, y \right) = \\ &\stackrel{(7.6.5)}{=} (R_\lambda R_\mu x, y) \rightarrow (R_\lambda^2 x, y) = r'_{x,y} \end{aligned}$$

при $\mu \rightarrow \lambda$.

Предположим теперь, что спектр пуст, т.е. $\sigma(A) = \emptyset$. Тогда резольвента R_λ определена и ограничена для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Следовательно, $r_{x,y}(\lambda)$ — голоморфная во всей комплексной плоскости функция и ограниченная при этом:

$$|r_{x,y}(\lambda)| \leq \|R_\lambda\| \|x\| \|y\| \leq C \|x\| \|y\|.$$

Тогда по теореме Лиувилля из комплексного анализа следует, что $r_{x,y}$ есть константа, причем нулевая, для всех $x, y \in H$. Отсюда следует, что $R_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Противоречие. $\square$

7.7 Линейные непрерывные функционалы

7.7.1. Теорема Рисса.

Определение 84. Пусть H — гильбертово пространство. Линейный ограниченный оператор $f \in B(H, \mathbb{C})$ называется *линейным функционалом*. Множество всех линейных непрерывных функционалов называется *сопряженным к H пространством* и обозначается H' , т.е. $H' = B(H, \mathbb{C})$.

Наша задача в этом параграфе выяснить, как устроено сопряженное пространство, или другими словами, найти общий вид линейного непрерывного функционала, действующего в гильбертовом пространстве. Итогом наших изысканий станет теорема Рисса, а пока исследуем ядро функционала $f \in H'$. Напомним, что ядром называется множество $f^{-1}\{0\}$, т.е.

$$\ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Теорема 59. *Линейный функционал f является непрерывным, т.е. $f \in H'$, тогда и только тогда, когда его ядро $\ker f$ является замкнутым подпространством в H . Кроме того, если $0 \neq f \in H'$, то*

$$\operatorname{codim} \ker f := \dim (\ker f)^\perp = 1. \quad (7.7.1)$$

Доказательство теоремы 59. Покажем сначала, что ядро является линейным подпространством. Действительно, если $x, y \in \ker f$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ немедленно следует очевидно равенство

$$f(\alpha x + \beta y) = \underbrace{\alpha f(x)}_{=0} + \underbrace{\beta f(y)}_{=0} = 0,$$

что по определению означает $\alpha x + \beta y \in \ker f$.

Пусть теперь $f \in H'$, покажем замкнутость ядра $\ker f$. Рассмотрим сходящуюся к $x \in H$ последовательность $x_n \in \ker f$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$|f(x)| = |f(x) - \underbrace{f(x_n)}_{=0}| = |f(x - x_n)| \leq \|f\| \|x - x_n\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось. Докажем теперь равенство (7.7.1). По теореме 41 имеет место разложение

$$H = \ker f \oplus (\ker f)^\perp.$$

Так как f не нулевой, то существует $0 \neq x_0 \in (\ker f)^\perp$. Покажем, что для каждого $x \in (\ker f)^\perp$ найдется $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $x = \alpha x_0$. Так как $f(x_0) \neq 0$, положим

$$\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)};$$

тогда

$$f(x - \alpha x_0) = f(x) - \alpha f(x_0) = 0.$$

Таким образом, с одной стороны $x - \alpha x_0 \in \ker f$, а с другой $x - \alpha x_0 \in (\ker f)^\perp$. Следовательно, $x - \alpha x_0 = 0$. $\square$

Докажем теперь обратное утверждение: из замкнутости ядра следует непрерывность линейного функционала. Если $\ker f = H$, то ясно, что $f = 0$ есть непрерывный линейный функционал. Пусть теперь $\ker f$ есть собственное замкнутое подпространство H , т.е. $\ker f \subset H$. Тогда $(\ker f)^\perp \neq \{0\}$, и более того, справедлива формула (7.7.1), поскольку при ее выводе мы использовали лишь замкнутость ядра.

По теореме 51 достаточно доказать непрерывность функционала в нуле. Пусть $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Благодаря представлению

$$z_n = y_n + \alpha_n x_0, \quad y_n \in \ker f, \quad \alpha_n \in \mathbb{C}, \quad x_0 \in (\ker f)^\perp,$$

получаем

$$f(z_n) = f(y_n + \alpha_n x_0) = f(y_n) + \alpha_n f(x_0) = \alpha_n f(x_0).$$

Таким образом, сходимость $f(z_n)$ к нулю эквивалентна сходимости числовой последовательности α_n к нулю при $n \rightarrow \infty$. Последнее следует из простых выкладок:

$$0 \leftarrow \|z_n\|^2 = \|y_n + \alpha_n x_0\|^2 = \|y_n\|^2 + |\alpha_n|^2 \|x_0\|^2 \geq |\alpha_n|^2 \|x_0\|^2.$$

Упражнение 27. Доказать, что если f неограниченный линейный функционал, то

$$\text{cl } \ker f = H.$$

Пример 36. Пусть $y \in H$, тогда линейный функционал f_y , заданный равенством

$$f_y(x) = (x, y), \quad x \in H$$

является непрерывным.

Это следует из предыдущей теоремы и равенства $\ker f_y = \{y\}^\perp$.

Оказывается других линейных непрерывных функционалов нет. Это и есть утверждение теоремы Рисса о линейном непрерывном функционале в гильбертовом пространстве.

Теорема 60. Пусть H — гильбертово пространство, тогда для любого $f \in H$ найдется единственный вектор $y \in H$ такой, что $f = f_y$, т.е.

$$f(x) = (x, y), \quad x \in H.$$

Доказательство теоремы 60. Если f — нулевой функционал, то естественно $y = 0$:

$$f(x) = 0 = (x, 0).$$

Предположим, что f не нулевой. Тогда, как следует из теоремы 59 для любого $x \in H$ имеет место представление

$$x = z + \alpha x_0, \quad z \in \ker f, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad x_0 \in (\ker f)^\perp, \quad \|x_0\| = 1.$$

Тогда

$$(x, x_0) = (z + \alpha x_0, x_0) = \underbrace{(z, x_0)}_{=0} + \alpha \underbrace{\|x_0\|}_{=1} = \alpha$$

и

$$f(x) = f(z + \alpha x_0) = \underbrace{f(z)}_{=0} + \underbrace{\alpha}_{=(x, x_0)} f(x_0) = f(x_0)(x, x_0) = (x, \overline{f(x_0)} x_0).$$

Таким образом, $y = \overline{f(x_0)} x_0$. Предположим, что найдется еще один вектор y' с доказываемым свойством. Тогда он имеет вид $y' = \overline{f(x'_0)} x'_0$, где $x'_0 \in (\ker f)^\perp$, $\|x'_0\| = 1$. Ясно, что $x'_0 = e^{i\beta} x_0$, $\beta \in \mathbb{R}$, тогда

$$y' = \overline{f(x'_0)} x'_0 = \overline{f(e^{i\beta} x_0)} e^{i\beta} x_0 = e^{-i\beta} e^{i\beta} \overline{f(x_0)} x_0 = \overline{f(x_0)} x_0 = y.$$

□

7.7.2. Бра- и кет-векторы.

Часто в физической литературе встречается обозначение скалярного произведения в виде не круглых, а заостренных скобок: $\langle x, y \rangle$. Давайте на некоторое время тоже воспользуемся этим обозначением, и предположим, что скалярное произведение линейно не по первому аргументу, а по второму. Тогда, следуя Дираку, можно ввести следующую терминологию: для любых $x, y \in H$ будем говорить, что $\langle x|$ — это *бра-вектор*, а $|y\rangle$ — это *кет-вектор*. Эти названия исходят из того, что записав их рядом $\langle x| |y\rangle$ мы получаем обычную скобку $\langle x, y \rangle$ (скобка по английски "bracket"). Такие обозначения удобны при рассмотрении квантово механической интерпретации некоторых важных операторов. При этом кет-вектор $|y\rangle$ — это элемент y гильбертового пространства H , а бра-вектор $\langle x|$ — это элемент сопряженного пространства H' , т.е. линейный непрерывный функционал, который действует по правилу

$$\langle x|(y) = \langle x|(|y\rangle) = \langle x, y \rangle.$$

Таким образом в этих обозначениях стоящие рядом бра- и кет-вектора обозначают скалярное произведение: $\langle x| |y\rangle = \langle x, y \rangle$. Стоящие же рядом

кет и бра вектора есть оператор проектирования на вектор $y \in H$: для любого $z \in H$ имеем

$$|y\rangle\langle x|(z) = |y\rangle\langle x|(|z\rangle) = |y\rangle\langle x, z\rangle = \langle x, z\rangle |y\rangle = \langle x, z\rangle y.$$

Чтобы чуть ближе познакомиться с этой терминологией, давайте в конечномерном пространстве найдем выражения тождественного оператора и резольвенты в терминах бра и кет-векторов.

Пусть $\dim H = n$ и $e_1, e_2, \dots, e_n$ — какой-нибудь ортонормированный базис H . Тогда покажем, что

$$I = \sum_{k=1}^n |e_k\rangle\langle e_k|. \quad (7.7.2)$$

Действительно, для каждого $x \in H$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |e_k\rangle\langle e_k|(x) &= \sum_{k=1}^n |e_k\rangle\langle e_k||x\rangle = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x\rangle |e_k\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n \langle e_k, x\rangle e_k = x = Ix. \end{aligned}$$

Пусть теперь $A \in B(H)$ и $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис H такой, что $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда для любого $\lambda \in \rho(A)$

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda} |e_k\rangle\langle e_k|. \quad (7.7.3)$$

Действительно, пусть $R_\lambda y = x$, тогда

$$\begin{aligned} y &= Ax - \lambda x = A \left(\sum_{k=1}^n \langle e_k, x\rangle |e_k\rangle \right) - \lambda \sum_{k=1}^n \langle e_k, x\rangle |e_k\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n \langle e_k, x\rangle A|e_k\rangle + \lambda \sum_{k=1}^n \langle e_k, x\rangle |e_k\rangle = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda) \langle e_k, x\rangle |e_k\rangle. \end{aligned}$$

Откуда находим, что

$$\langle e_k, y\rangle = (\lambda_k - \lambda) \langle e_k, x\rangle.$$

Используя последнее соотношение, получаем

$$R_\lambda y = x = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x\rangle |e_k\rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\langle e_k, y\rangle}{(\lambda_k - \lambda)} |e_k\rangle = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda} |e_k\rangle\langle e_k|(y).$$

Упражнение 28. Покажите, что для любого $x \in H$ с единичной нормой, т.е. $\|x\| = 1$, справедливо равенство

$$|x\rangle\langle x| = \text{Pr}_{\text{lin}\{x\}}.$$

7.8 Сопряженные операторы

7.8.1. Определение и свойства.

Определение 85. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. Оператор $A^* \in L(H_2, H_1)$ называется сопряженным¹ (относительно скалярного произведения) к $A \in B(H_1, H_2)$ оператором, если для всех $x_1 \in H_1$ и $x_2 \in H_2$ имеет место равенство

$$(Ax_1, x_2)_{H_2} = (x_1, A^*x_2)_{H_1}. \quad (7.8.1)$$

Покажем, что сопряженный оператор A^* существует. Зафиксируем произвольный вектор $x_2 \in H_2$ и рассмотрим функционал $f \in H'_1$, заданный равенством

$$f(x_1) = (Ax_1, x_2)_{H_2}, \quad x_1 \in H_1.$$

Это, действительно, ограниченный, функционал, поскольку

$$|f(x_1)| \leq \|Ax_1\| \|x_2\| \leq \|A\| \|x_1\| \|x_2\|,$$

откуда

$$\|f\| \leq \|A\| \|x_2\| < \infty.$$

По теореме Рисса о линейном непрерывном функционале в гильбертовом пространстве (теорема 60) существует единственный вектор $y_1 \in H_1$ такой, что

$$(x_1, y_1)_{H_1} = f(x_1) = (Ax_1, x_2)_{H_2}.$$

Таким образом у нас есть отображение $A^* : H_2 \rightarrow H_1$, которое каждому вектору $x_2 \in H_2$ сопоставляет вектор $y_1 \in H_1$, и при этом выполняется равенство (7.8.1). Линейность этого отображения следует из линейности скалярного произведения.

Теорема 61. *Справедливы следующие утверждения:*

1) пусть $A, B \in B(H_1, H_2)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, тогда

$$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*;$$

2) пусть $A \in B(H_1, H_2)$, тогда $(A^*)^* = A$;

3) пусть $A \in B(H_1, H_2)$ и $B \in B(H, H_1)$, тогда

$$(AB)^* = B^* A^*;$$

4) пусть $A \in B(H)$ обратим и $A^{-1} \in B(H)$, тогда A^* обратим и

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*,$$

¹иногда также встречается термины: эрмитово сопряженный, гильбертово сопряженный

5) пусть $A \in B(H_1, H_2)$, тогда $A^* \in B(H_2, H_1)$ и

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Доказательство теоремы 61. 1) Для любых $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$ имеем

$$\begin{aligned} (x_1, (\alpha A + \beta B)^* x_2) &= ((\alpha A + \beta B)x_1, x_2) = \alpha(Ax_1, x_2) + \beta(Bx_1, x_2) = \\ &= \alpha(x_1, A^* x_2) + \beta(x_1, B^* x_2) = (x_1, (\bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*)x_2). \end{aligned}$$

2) Аналогично, для всех $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$ имеем

$$(x_1, Ax_2) = \overline{(Ax_2, x_1)} = \overline{(x_2, A^* x_1)} = (A^* x_1, x_2) = (x_1, (A^*)^* x_2).$$

3) Действуя тем же способом, для всех $x_1 \in H$, $x_2 \in H_2$ получаем

$$(x_1, (AB)^* x_2) = (ABx_1, x_2) = (Bx_1, A^* x_2) = (x_1, A^* B^* x_2).$$

4) Покажем сначала, что A^* обратим. Пусть $y \in \ker A^*$, т.е. $A^* y = 0$. Тогда для всех $x \in H$

$$0 = (x, 0) = (x, A^* y) = (Ax, y),$$

т.е. $y \in (\operatorname{im} A)^\perp = H^\perp = \{0\}$. Далее, по свойству 3) имеем

$$I = I^* = (AA^{-1})^* = (A^{-1})^* A^*,$$

что вместе с аналогичным равенством $I = A^*(A^{-1})^*$ доказывает 4).

5) Оценим норму сопряженного оператора:

$$\begin{aligned} \|A^*\|^2 &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|A^* x\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} (A^* x, A^* x) = \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} (x, (A^*)^* A^* x) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 \|AA^*\| = \|AA^*\| \leq \|A\| \|A^*\|, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\|A^*\| \leq \|A\|$. Противоположное неравенство также имеет место ввиду свойства 2). $\square$

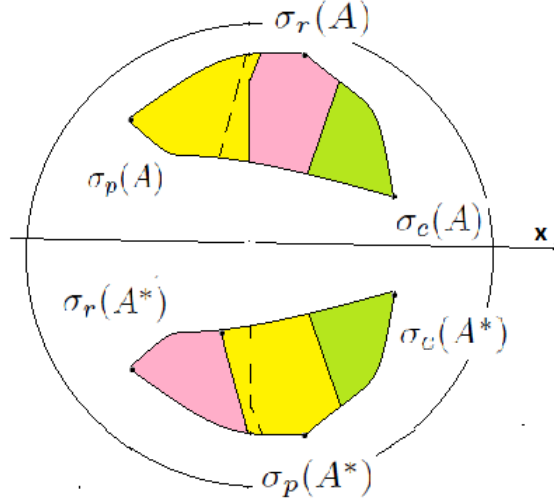
7.8.2. Сопряжение и спектр.

Теорема 62. Пусть $A \in B(H)$. Тогда

- 1) $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$;
- 2) если $\lambda \in \sigma_r(A)$, то $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$;
- 3) если $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ и $\lambda \notin \sigma_p(A)$, то $\lambda \in \sigma_r(A)$;
- 4) $\sigma_c(A^*) = \overline{\sigma_c(A)}$.

Доказательство теоремы 62. 1) Достаточно доказать аналогичное равенство для регулярных значений. По определению $\lambda \in \rho(A)$ тогда и только тогда, когда $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на всем H . По свойствам 4) и 1) теоремы 61 это значит, что оператор

$$((A - \lambda I)^{-1})^* = ((A - \lambda I)^*)^{-1} = (A^* - \bar{\lambda} I)^{-1}$$



определен на всем H . Это по определению означает, что $\bar{\lambda} \in \rho(A^*)$.

2) Пусть $\lambda \in \sigma_r(A)$. Это по определению означает, что подпространство $E = \text{cl dom } (A - \lambda I)^{-1}$ не совпадает с H . Следовательно, найдется ненулевой вектор $y \in E^\perp$, т.е. $y \neq 0$ и $(x, y) = 0$ для всех $x \in E$. Ясно, что все x вида $x = (A - \lambda I)z, z \in H$ лежат в E . Для таких x (т.е. для каждого $z \in H$) получаем

$$0 = (x, y) = ((A - \lambda I)z, y) = (z, (A - \lambda I)^* y).$$

Отсюда следует, что

$$(A - \lambda I)^* y = A^* y - \bar{\lambda} y = 0,$$

что и требовалось доказать ($\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$).

3) Пусть $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$. Это по определению означает, что найдется $y \in H$ такой, что $y \neq 0$ и $A^* y = \bar{\lambda} y$. Тогда для любого $x \in H$

$$0 = (x, 0) = (x, (A^* - \bar{\lambda} I)y) = ((A - \lambda I)x, y),$$

что эквивалентно $\text{im } (A - \lambda I) \subseteq \{y\}^\perp$. Так как к тому же $\lambda \notin \sigma_p(A)$, то оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен и

$$\text{cl dom } (A - \lambda I)^{-1} = \text{cl im } (A - \lambda I) \subseteq \{y\}^\perp \stackrel{y \neq 0}{\neq} H.$$

Следовательно, $\lambda \in \sigma_r(A)$.

4) Из доказанных свойств имеем

$$\sigma_p(A^*) \setminus \overline{\sigma_p(A)} = \overline{\sigma_r(A)},$$

$$\sigma_p(A) \setminus \overline{\sigma_p(A^*)} = \overline{\sigma_r(A^*)}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} \sigma_p(A^*) \sqcup \sigma_r(A^*) &= \sigma_p(A^*) \sqcup (\overline{\sigma_p(A)} \setminus \sigma_p(A^*)) = \sigma_p(A^*) \sqcup \overline{\sigma_p(A)} = \\ &= (\sigma_p(A^*) \setminus \overline{\sigma_p(A)}) \sqcup \overline{\sigma_p(A)} = \overline{\sigma_r(A)} \sqcup \overline{\sigma_p(A)}. \end{aligned}$$

□

7.8.3. Нормальные операторы.

С сопряжением связан естественный класс операторов, обобщающих комплексные числа.

Определение 86. Оператор $A \in B(H)$ называется *нормальным*, если он коммутирует со своим сопряженным, т.е. коммутатор $[A, A^*] := AA^* - A^*A = 0$.

Наиболее важными подклассами нормальных операторов являются самосопряженные и унитарные операторы.

Определение 87. Оператор $A \in B(H)$ называется *самосопряженным* (эрмитовым, симметрическим, вещественным), если $A^* = A$. Оператор $A \in B(H)$ называется *унитарным*, если он непрерывно обратим и $A^{-1} = A^*$.

Любой ограниченный оператор $A \in B(H)$ может быть представлен в виде

$$A = A_1 + iA_2,$$

где

$$A_1 := \operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad A_2 := \operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

называются соответственно вещественной и мнимой частями оператора A . Легко проверить, что оба этих оператора самосопряжены.

Это представление дает аналогию с комплексными числами $z \in \mathbb{C}$, которые по определению имеют вид $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Для комплексных чисел мнимая и действительные части коммутируют: $xy = yx$. Поэтому естественным операторным аналогом $\mathbb{C}$ являются операторы, для которых $[\operatorname{Re} A, \operatorname{Im} A] = 0$. Нетрудно проверить, что это в точности нормальные операторы.

При такой аналогии сопряжение для операторов соответствует комплексному сопряжению, самосопряженные операторы соответствуют вещественным числам, а унитарные операторы — единичной окружности $\{|z| = 1\}$.

7.9 Самосопряженные операторы

7.9.1. Теорема о спектре.

Теорема 63. Пусть $A \in B(H)$ — самосопряженный оператор. Тогда

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}, \quad \sigma_r(A) = \emptyset;$$

собственные вектора, отвечающие различным собственным числам ортогональны, и $\|R_\lambda\| \leq 1/|\operatorname{Im} \lambda|$ для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 63. Рассмотрим уравнение $Ax - \lambda x = y$, $y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Умножим его скалярно на $x \in H$ и возьмем мнимую часть

$$\operatorname{Im}(Ax, x) - \operatorname{Im}(\lambda(x, x)) = \operatorname{Im}(y, x).$$

Поскольку $(x, x) = \|x\|^2$ вещественное число и (Ax, x) тоже вещественное число:

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)},$$

получим равенство

$$-\|x\|^2 \operatorname{Im} \lambda = \operatorname{Im}(y, x). \quad (7.9.1)$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, т.е. $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Тогда полагая $y = 0$, из равенства (7.9.1) получаем, что $\|x\| = 0$, следовательно, $x = 0$. Это в точности означает, что числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ не могут быть собственными значениями, т.е. $\sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$. Далее, по теореме 62 получаем

$$\sigma_r(A) = \overline{\sigma_p(A^*)} \setminus \sigma_p(A) \stackrel{A=A^*}{=} \overline{\sigma_p(A)} \setminus \sigma_p(A) \stackrel{\sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}}{=} \sigma_p(A) \setminus \sigma_p(A) = \emptyset.$$

Поскольку $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ не является собственным числом (а также точкой остаточного спектра), то оператор $(A - \lambda I)$ обратим. Тогда

$$\|(A - \lambda I)^{-1}y\|^2 = \|x\|^2 \stackrel{(7.9.1)}{=} -\frac{\operatorname{Im}(y, x)}{\operatorname{Im} \lambda} \stackrel{\|x\| > 0}{=} \left| \frac{\operatorname{Im}(y, x)}{\operatorname{Im} \lambda} \right| \leq \frac{\|y\| \|x\|}{|\operatorname{Im} \lambda|},$$

откуда следует, что такое $\lambda \in \rho(A)$ и, следовательно, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Переписывая последнее неравенство в терминах резольвенты, получаем $\|R_\lambda\| \leq 1/|\operatorname{Im} \lambda|$ для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Осталось доказать ортогональность собственных чисел. Пусть $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, $Ay = \mu y$, $y \neq 0$, и $\lambda \neq \mu$, тогда поскольку одно из этих чисел точно не равно нулю (например, λ) получим

$$(x, y) = \frac{1}{\lambda}(Ax, y) = \frac{1}{\lambda}(x, Ay) = \frac{\mu}{\lambda}(x, y),$$

откуда

$$\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)(x, y) = 0,$$

что и требовалось. $\square$

Пример 37. Пусть $H = L_2([0, 1])$. Покажем, что спектр оператора координаты (будем обозначать его $\hat{x}$)

$$\hat{x}f(x) = xf(x), \quad f \in L_2([0, 1])$$

состоит только из непрерывной части и равен отрезку $[0, 1]$, т.е.

$$\sigma(\hat{x}) = \sigma_c(\hat{x}) = [0, 1].$$

Нетрудно проверить, что $\hat{x}$ самосопряжен:

$$(\hat{x}f, g) = \int_0^1 xf(x)\bar{g}(x) dx = \int_0^1 f(x)\overline{xg}(x) dx = (f, \hat{x}g).$$

Следовательно, по теореме 63 остаточный спектр пуст. Исследуем точечный спектр. Решим уравнение

$$\hat{x}f(x) = \lambda f(x).$$

Ясно, что это уравнение имеет лишь нулевое решение $f = 0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\sigma_p(\hat{x}) = \emptyset$. Пусть $\lambda \in [0, 1]$. Уравнение

$$\hat{x}f(x) - \lambda f(x) = I_{[\lambda-\delta, \lambda+\delta] \cap [0, 1]}$$

не разрешимо в $L_2([0, 1])$, поскольку для его решения имеем

$$\|f\|^2 = \int_0^1 \frac{1}{(x-\lambda)^2} I_{[\lambda-\delta, \lambda+\delta] \cap [0, 1]} dx \leq \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{dx}{(x-\lambda)^2} = +\infty.$$

Это означает, что все $\lambda \in [0, 1]$ не являются регулярными значениями, и, следовательно, могут принадлежать, лишь непрерывному спектру оператора $\hat{x}$. Все остальные λ являются регулярными значениями, поскольку

$$\|f\|^2 = \int_0^1 \frac{|g|^2}{|x-\lambda|^2} dx \leq \frac{1}{\inf_{x \in [0, 1]} |x-\lambda|^2} \|g\|^2 < \infty.$$

7.9.2. Теорема о норме.

Определение 88. Пусть $A \in B(H)$. Число

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

называется *спектральным радиусом* оператора A .

Из леммы 4 нам известно, что $r(A) \leq \|A\|$. Оказывается, что для самосопряженных операторов это неравенство становится равенством. Прежде чем четко сформулировать и доказать это утверждение, запишем формулу Бёрлинга–Гельфанда для спектрального радиуса произвольного ограниченного линейного оператора A :

$$r(A) = \inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}. \quad (7.9.2)$$

Доказательство этой формулы можно посмотреть, например, в [6, с. 215].

Теорема 64. Пусть $A \in B(H)$ — самосопряженный оператор, тогда

$$r(A) = \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|. \quad (7.9.3)$$

Доказательство теоремы 64. Как видно нужно доказать два равенства. Начнем со второго. Положим $\mu = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|$. Ясно, что $\mu \leq \|A\|$. Следовательно, остается показать обратное неравенство. Нетрудно проверить, используя самосопряженность A , что для любых $x, y \in H$

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 4\operatorname{Re}(Ax, y).$$

Тогда,

$$\begin{aligned} 4\operatorname{Re}(Ax, y) &\leq |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)| \leq \\ &\leq \mu(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \stackrel{(5.4.3)}{=} 2\mu(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Полагая $Ax \neq 0$ и $y = \frac{\|x\|}{\|Ax\|} Ax$, из последнего неравенства получим

$$\|Ax\| \leq \mu\|x\|,$$

откуда следует, что $\|A\| \leq \mu$.

Для доказательства первого равенства сначала отметим, что $\|A^2\| = \|A\|^2$. Действительно,

$$\|A^2\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(A^2x, x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, Ax)| = \|A\|^2.$$

Далее по индукции, заключаем, что $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$. Тогда применяя формулу (7.9.2), получаем

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2^k]{\|A^{2^k}\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2^k]{\|A\|^{2^k}} = \|A\|.$$

□

7.9.3. Теорема об инвариантных подпространствах.

Определение 89. Подпространство E гильбертового пространства H называется *инвариантным* подпространством оператора $A \in B(H)$, если $AE \subseteq E$.

Теорема 65. Пусть $E \subseteq H$ — инвариантное подпространство самосопряженного оператора $A \in B(H)$. Тогда его ортогональное дополнение $E^\perp$ также инвариантно относительно A .

Доказательство теоремы 65. Нужно доказать, что для всех $x \in E^\perp$ следует, что $Ax \in E^\perp$, т.е. $(Ax, y) = 0$ для всех $y \in E$. Это вытекает из цепочки равенств

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \stackrel{A=A^*}{=} (x, Ay) = 0.$$

Последнее равенство верно, поскольку $x \in E^\perp$, а $Ay \in E$.

□

7.10 Компактные операторы

7.10.1. Напомним определение компактного множества.

Определение 90. Множество $E \subset H$ называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие. Эквивалентно: для любой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E$. Множество называется *предкомпактным*, или *относительно компактным*, если его замыкание компактно.

Центральным в этом параграфе является понятие компактного оператора.

Определение 91. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. Оператор $A \in L(H_1, H_2)$ называется *компактным*, если он всякое ограниченное в H_1 подмножество переводит в относительно компактное подмножество в H_2 . Эквивалентно: для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_1$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{Ax_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H_2$. Множество всех компактных операторов $A \in L(H_1, H_2)$ обозначается как $\mathcal{K}(H_1, H_2)$.

7.10.2. Простейшие свойства компактных операторов.

1°. Каждый компактный оператор является ограниченным, т.е.

$$\mathcal{K}(H_1, H_2) \subset B(H_1, H_2).$$

Доказательство. Пусть A — компактный оператор. Нужно показать, что для любого ограниченного множества $E \subset H_1$ его образ AE будет ограниченным в H_2 . Предположим, что найдется ограниченное множество E такое, что AE неограничено, т.е.

$$\sup_{x \in E} \|Ax\| = \infty.$$

Тогда найдется (ограниченная) последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| = \infty.$$

С другой стороны, ввиду компактности оператора A , найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что Ax_{n_k} сходится при $k \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Ax_{n_k}\| < \infty.$$

Противоречие. □

2°. Пусть $A \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, $B \in B(H_2, H_3)$ и $C \in B(H_3, H_1)$, тогда

$$AC \in \mathcal{K}(H_3, H_1), \quad BA \in \mathcal{K}(H_1, H_3),$$

т.е. умножение компактного оператора справа или слева на ограниченный оператор дает снова компактный оператор.

Доказательство. Возьмем ограниченную последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_3$, т.е.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty.$$

Поскольку C — ограниченный оператор, то $\{Cx_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_1$ — также ограниченная последовательность:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|Cx_n\| < \|C\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty.$$

Ввиду компактности оператора A найдется подпоследовательность $\{Cx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что $A(Cx_{n_k}) = (AC)x_{n_k}$ сходится при $k \rightarrow \infty$. Что и означает компактность оператора AC .

Рассмотрим теперь ограниченную последовательность $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_1$. Ввиду компактности оператора A найдется подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что Ay_{n_k} сходится при $k \rightarrow \infty$. Из-за ограниченности оператора B , следовательно, сходится и $B(Ay_{n_k}) = (BA)y_{n_k}$. Это в точности означает, что BA компактен. $\square$

7.10.3. Примеры компактных операторов.

Определение 92. Оператор $A \in B(H_1, H_2)$ называется *оператором конечного ранга*, если его образ конечномерен, т.е. $\dim \operatorname{im} A < \infty$.

1). Операторы конечного ранга являются компактными операторами.

Доказательство. По классическому критерию в конечномерном пространстве множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Следовательно, ограниченность и относительная компактность в конечномерном пространстве эквивалентны. Поскольку оператор конечного ранга ограничен, то он переводит ограниченное множество в ограниченное множество (в конечномерном образе оператора), что, как мы уже отметили, влечет относительную компактность. Что и требовалось доказать. $\square$

2). Тожественный оператор $I \in B(H)$ компактен тогда и только тогда, когда пространство H конечномерно.

Доказательство. Если $\dim H < \infty$, то I является оператором конечного ранга, и по предыдущему примеру — является компактным оператором. Если же H бесконечномерно, то найдется счетная ортонормированная система $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$. В частности, это ограниченная последовательность: $\|e_n\| = 1$. Если бы I был компактным оператором, то нашлась бы подпоследовательность $\{e_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что $Ie_{n_k} = e_{n_k}$ сходится при $k \rightarrow \infty$. Но такого не может быть, поскольку e_{n_k} не фундаментальна:

$$\|e_{n_k} - e_{n_m}\|^2 = 2.$$

$\square$

7.10.4. Замкнутость множества компактных операторов. Следующая теорема является важным инструментом построения компактных операторов.

Теорема 66. *Множество компактных операторов $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ замкнуто в нормированном пространстве $B(H_1, H_2)$ ограниченных операторов. Другими словами, если A_n — сходящаяся (в операторной норме) последовательность компактных операторов, то ее предел A является компактным оператором.*

Доказательство теоремы 66. Зафиксируем ограниченную последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H_1$. Поскольку оператор A_1 компактен, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k^1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такая, что $A_1 x_{n_k^1}$ сходится при $k \rightarrow \infty$. Далее, поскольку оператор A_2 компактен, то из последовательности $\{x_{n_k^1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k^2}\}_{k \in \mathbb{N}}$ такую, что $A_2 x_{n_k^2}$ сходится при $k \rightarrow \infty$. Продолжая этот процесс, мы получим систему последовательностей $\{x_{n_k^m}\}_{k, m \in \mathbb{N}} \subset H_1$ обладающих свойствами:

- 1) для каждого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\{x_{n_k^{m+1}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ является подпоследовательностью $\{x_{n_k^m}\}_{k \in \mathbb{N}}$;
- 2) для каждого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $A_m x_{n_k^m}$ сходится при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим новую подпоследовательность $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$y_k = x_{n_k^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $\{y_k\}_{k \geq m}$ является подпоследовательностью $\{x_{n_k^m}\}_{k \geq m}$, и поэтому последовательность $A_m y_k$ сходится при $k \rightarrow \infty$. Обозначим ее предел как $z_m, m \in \mathbb{N}$.

Покажем, что последовательность $\{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ фундаментальна в H_2 и, следовательно, сходится. Во первых отметим, что $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|y_k\| = c_0 < \infty$. Во вторых, поскольку последовательность операторов A_m сходится, то она фундаментальна, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $m_1, m_2 \geq m_0$

$$\|A_{m_1} - A_{m_2}\| < \frac{\varepsilon}{3c_0}.$$

Далее, найдется такой номер $k_0 = k_0(m_1, m_2, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $k \geq k_0$

$$\|A_{m_1} y_k - z_{m_1}\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|A_{m_2} y_k - z_{m_2}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Соединяя эти выкладки, получаем для любых $m_1, m_2 \geq m_0$

$$\begin{aligned} \|z_{m_1} - z_{m_2}\| &\leq \|z_{m_1} - A_{m_1} y_k\| + \|A_{m_1} - A_{m_2}\| \|y_k\| + \|A_{m_2} y_k - z_{m_2}\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь мы выбирали $k \geq k_0(m_1, m_2, \varepsilon)$.

Таким образом, последовательность z_m сходится при $m \rightarrow \infty$, скажем к $z \in H_2$. Нам осталось сделать последний шаг: показать, что Ay_k сходится к z при $k \rightarrow \infty$. Выбирая по $\varepsilon > 0$ номер m достаточно большим, а по ним и номер k достаточно большим, можно сделать норму

$$\|Ay_k - z\| \leq \|Ay_k - A_my_k\| + \|A_my_k - z_m\| + \|z_m - z\|$$

сколь угодно малой. $\square$

Используя теорему 66 и единственный (пока) пример компактного оператора (оператор конечного ранга!), решите следующую задачу.

Упражнение 29. Пусть $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H и последовательность $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, сходящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Покажите, что оператор

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|$$

является компактным.

7.10.5. Эквивалентное определение компактного оператора. Теорема 66 дает основу для эквивалентного определения компактного оператора, действующего в гильбертовом пространстве.

Теорема 67. Пусть H сепарабельное гильбертово пространство. Оператор $A \in L(H)$ является компактным тогда и только тогда, когда он является пределом последовательности операторов конечного ранга.

Доказательство теоремы 67. Из теоремы 66 следует, что предел последовательности операторов конечного ранга — это компактный оператор. Докажем обратное. Пусть $A \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ и $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — ортонормированные базисы в пространствах H_1 и H_2 соответственно. Тогда для любого $x \in H_1$ имеем

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k, \quad Ax = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) (Ae_k, h_m) h_m.$$

Положим

$$A_n x = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n (x, e_k) (Ae_k, h_m) h_m,$$

а также рассмотрим операторы ортогонального проектирования

$$P_n x = Pr_{\{e_1, \dots, e_n\}} x \stackrel{(5.6.2)}{=} \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k,$$

$$Q_n y = Pr_{\{h_1, \dots, h_n\}} y \stackrel{(5.6.2)}{=} \sum_{m=1}^n (y, h_m) h_m.$$

$\square$

Ясно, что A_n — оператор конечного ранга и $A_n = Q_n A P_n$. Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$. Предположим противное, т.е. найдется $\varepsilon > 0$ и вектора $x_n \in H_1$ такие, что $\|x_n\| = 1$ и $\|(A - A_n)x_n\| \geq \varepsilon$ для бесконечного множества номеров $n \in \mathbb{N}$. Переходя к подпоследовательностям, поскольку A компактный, можно считать, что $AP_n x_n$ и $A(I - P_n)x_n$ сходятся в H_2 . Положим

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} AP_n x_n, \quad v = \lim_{n \rightarrow \infty} A(I - P_n)x_n.$$

Заметим, что $v = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= (v, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A(I - P_n)x_n, v) \stackrel{P_n^* = P_n}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, A^*(I - P_n)v) \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| A^* \|(I - P_n)v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^*\| \sum_{k=n+1}^{\infty} |(v, e_k)|^2 = 0. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \|(A - A_n)x_n\| &= \|(A - Q_n A P_n)x_n\| = \|(A(I - P_n)x_n + AP_n x_n - Q_n A P_n x_n)\| = \\ &= \|(A(I - P_n)x_n + (I - Q_n)AP_n x_n)\| \leq \\ &\leq \|A(I - P_n)x_n\| + \|(I - Q_n)AP_n x_n - (I - Q_n)u\| + \|(I - Q_n)u\| = \\ &= \|A(I - P_n)x_n\| + \|(I - Q_n)(AP_n x_n - u)\| + \|(I - Q_n)u\| \leq \\ &\stackrel{\|I - Q_n\|=1}{\leq} \underbrace{\|A(I - P_n)x_n\|}_{\rightarrow v=0} + \underbrace{\|AP_n x_n - u\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|(I - Q_n)u\|}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Пришли к противоречию. Теорема доказана.

7.11 Теорема Гильберта–Шмидта

7.11.1. Спектр компактного оператора. Приведем без доказательства теорему о спектре компактного оператора и некоторые следствия из нее.

Теорема 68. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство и $A \in \mathcal{K}(H)$, т.е. A — компактный оператор, тогда $0 \in \sigma(A)$ и $\sigma(A) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_p(A)$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственным числам $\lambda \in \sigma_p(A)$ с $|\lambda| \geq \varepsilon$.

Следствие 10. 1) для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число собственных чисел $\lambda \in \sigma_p(A)$ с $|\lambda| \geq \varepsilon$.

2) с учетом кратности собственные числа можно занумеровать:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq 0.$$

Может так оказаться, что кроме нуля в спектре компактного оператора ничего нет. Как показывает следующая теорема при дополнительном условии самосопряженности обязательно найдется ненулевое собственное значение.

Теорема 69. Пусть A — ненулевой компактный самосопряженный оператор, тогда существует $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$.

Доказательство теоремы 69. Воспользуемся равенством (7.9.3) для нормы самосопряженного оператора. Так как $A \neq 0$, то

$$0 < \|A\| = r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}} |\lambda| \stackrel{7.68}{=} \sup_{\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}} |\lambda|.$$

Откуда, очевидно, следует существование нужного собственного значения. $\square$

7.11.2. Спектральное разложение компактного самосопряженного оператора. Из курса линейной алгебры известно, что всякая симметрическая $n \times n$ -матрица может быть приведена к диагональному виду, где на диагоналях стоят собственные числа этой матрицы. Этот вид матрица имеет в базисе, состоящем из ее собственных векторов. Этот же результат можно выразить в других терминах. Пусть λ_k — это собственное число матрицы кратности n_k , $1 \leq k \leq s$, причем $\sum_{k=1}^s n_k = n$. Тогда в базисе, состоящем из собственных векторов матрицы имеем

$$\begin{aligned} \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{n_s}) &= \\ &= \lambda_1 \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, 0, \dots, 0) + \dots + \lambda_s \text{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_s}) = \\ &= \sum_{k=1}^s \lambda_k P_k, \end{aligned}$$

где $P_k = \text{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_k}, 0, \dots, 0)$ — ортопроектор на пространство собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_k .

Аналогичное утверждение имеет место и для компактных самосопряженных операторов.

Теорема 70 (Гильберт, Шмидт). Пусть A — компактный самосопряженный оператор, определенный в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H . Тогда существует ортонормированная система $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, состоящая из собственных векторов оператора A такая, что для каждого $x \in H$

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(x, e_k) e_k, \quad (7.11.1)$$

где $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq 0$ — собственные числа оператора A , пронумерованные с учетом кратности, причем $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Построенная система будет ортонормированным базисом тогда и только тогда, когда $\ker A = 0$.

Доказательство теоремы 70. По теореме 69 найдется вектор $e_1 \in H$ и число $\lambda_1 \in \sigma_p(A)$ такие, что $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ и $|\lambda_1| = \|A\|$. Положим $E_1 = \text{lin}\{e_1\}^\perp$, тогда по теореме 65 об инвариантных подпространствах самосопряженного оператора следует, что E_1 инвариантное подпространство. Тогда, рассматривая сужение $A_1 = A|_{E_1}$ оператора A на E_1 , получим компактный и самосопряженный оператор. Если $A_1 = 0$, то наши рассуждения заканчиваются на этом шаге, поскольку в этом случае получаем для каждого $x \in H$

$$Ax = A((x, e_1)e_1 + x_{E_1}) = (x, e_1)Ae_1 + A_1x_{E_1} = \lambda_1(x, e_1)e_1.$$

Если же $A_1 \neq 0$, то снова по теореме 69 найдется вектор $e_2 \in E_1$ и число $\lambda_2 \in \sigma_p(A_1) \subseteq \sigma_p(A)$ такие, что $A_1e_2 = Ae_2 = \lambda_2 e_2$ и $|\lambda_2| = \|A_1\| \leq \|A\| = \lambda_1$.

Продолжая таким образом, мы либо придем к оператору $A_n = 0$ и тогда для каждого $x \in H$ будет

$$Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k(x, e_k)e_k;$$

либо получим бесконечную систему векторов $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такую, что

$$Ae_n = A_{n-1}e_n = \lambda_n e_n, \quad |\lambda_n| = \|A_{n-1}\| \geq \|A_n\| = |\lambda_{n+1}|,$$

где $A_n = A|_{E_n}$ и $E_n = \text{lin}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}^\perp$.

Покажем, что во втором случае $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что $|\lambda_n| \rightarrow \lambda_\infty > 0$ при $n \rightarrow \infty$ (сходимость есть ввиду монотонности). Тогда последовательность векторов $z_n = \lambda_n^{-1}e_n$ ограничена

$$\|z_n\| = \frac{\|e_n\|}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\lambda_\infty} < \infty,$$

но из последовательности $Az_n = e_n$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность. Получили противоречие с компактностью оператора A .

Рассмотрим теперь последовательность векторов x_n , задаваемых равенством

$$x_n = x - \sum_{k=1}^n (x, e_k)e_k.$$

Ясно, что $\|x_n\| \leq 2\|x\|$ и, кроме того, $x_n \in E_n$. Тогда

$$\|Ax_n\| = \|A_n x_n\| \leq \|A_n\| \|x_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\|.$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ будет $Ax_n \rightarrow 0$, что эквивалентно равенству (7.11.1).

Предположим теперь, что построенная система, состоящая из собственных векторов оператора A , полна. Возьмем $x \in \ker A$, тогда имеем

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)e_n, \quad 0 = Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n)e_n.$$

Из последнего равенства следует, что $(x, e_n) = 0$ (поскольку $\lambda_n \neq 0$); подставляя в первое, получаем $x = 0$. Пусть теперь $\ker A = 0$. Рассмотрим вектор $x \in H$ и $\tilde{x}$, задаваемый равенством

$$\tilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n.$$

Тогда

$$A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n = 0,$$

т.е. $x - \tilde{x} \in \ker A$, следовательно,

$$x = \tilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n.$$

Теорема полностью доказана. $\square$

7.12 Возмущение точечного спектра самосопряженного оператора

7.12.1. Задача теории возмущений. Метод теории возмущений применяется в том случае, когда оператор, спектр которого нужно изучить, близок в каком-либо смысле к оператору, у которого спектральные данные известны. Невозмущенный оператор, про спектр которого все известно, будем обозначать A_0 , оператор возмущения будем обозначать B , а возмущенный оператор, соответственно $A_\varepsilon = A_0 + \varepsilon B$. Поскольку спектр чувствителен даже к малым изменениям оператора, то нужно накладывать некоторые условия на операторы A_0 и B , чтобы задача поддавалась исследованию.

Мы рассмотрим классическую задачу о возмущении изолированного собственного значения простой кратности для самосопряженного оператора A_0 . В этом случае можно доказать, что возмущенное собственное значение и собственный вектор являются аналитическими функциями относительно ε , т.е. раскладываются в ряд. Более сложные задачи можно посмотреть в монографиях [18].

7.12.2. Задача Релиха. Итак, у нас есть самосопряженный оператор A_0 , у которого есть изолированное собственное значение λ_0 кратности 1, т.е. $\dim \ker (A_0 - \lambda_0 I) = 1$. Пусть x_0 есть какой-нибудь собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_0 , т.е. $A_0 x_0 = \lambda_0 x_0$.

Возмущенный оператор A_ε в некоторой окрестности точки λ_0 будет иметь собственное значение λ_ε также кратности 1:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varepsilon^n, \quad \lambda_n \in \mathbb{C}. \quad (7.12.1)$$

Собственный вектор x_ε ему соответствующий будет лежать в некоторой окрестности вектора x_0 :

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n, \quad x_n \in H. \quad (7.12.2)$$

Нам нужно определить все неизвестные параметры выписанных разложений, решая уравнение $A_\varepsilon x_\varepsilon = \lambda_\varepsilon x_\varepsilon$. Левая часть этого уравнения имеет следующий вид:

$$A_\varepsilon x_\varepsilon = (A_0 + \varepsilon B) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n = A_0 x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n (A_0 x_n + B x_{n-1}).$$

Правая часть будет иметь следующее представление:

$$\lambda_\varepsilon x_\varepsilon = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \lambda_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k x_{n-k} \right).$$

Приравнявая выражения при одинаковых степенях ε в получившихся рядах, получаем систему уравнений $A_0 x_n + B x_{n-1} = \sum_{k=0}^n \lambda_k x_{n-k}$, $n \geq 1$, или

$$\begin{aligned} (A_0 - \lambda_0 I)x_0 &= 0, \\ (A_0 - \lambda_0 I)x_1 &= -Bx_0 + \lambda_1 x_0, \\ (A_0 - \lambda_0 I)x_2 &= -Bx_1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_0, \\ &\dots, \\ (A_0 - \lambda_0 I)x_n &= -Bx_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n-k} x_k. \end{aligned}$$

Можно считать, что все вектора x_n при $n \geq 1$ лежат в пространстве $E = \ker(A_0 - \lambda_0 I)^\perp$. Действительно, в противном случае каждый вектор x_n может быть представлен в виде суммы $x_n = c_n x_0 + \tilde{x}_n$, где $c_n \in \mathbb{F}$ и $\tilde{x}_n \in E$. Тогда представление (7.12.2) будет иметь требуемый вид:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n (c_n x_0 + \tilde{x}_n) = \\ &= x_0 \underbrace{\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varepsilon^n \right)}_{\tilde{x}_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{x}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{x}_n. \end{aligned}$$

Чтобы определить скаляры λ_n , в полученных уравнениях возьмем скалярные произведения с вектором x_0 , получим

$$((A_0 - \lambda_0 I)x_n, x_0) = (x_n, (A_0 - \lambda_0 I)^* x_0) = (x_n, (A_0 - \lambda_0 I)x_0) = (x_n, 0) = 0$$

для левых частей, откуда для правых частей получаем равенства

$$0 = -((B - \lambda_1 I)x_0, x_0),$$

$$0 = -(Bx_{n-1}, x_0) + \lambda_n(x_0, x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} \underbrace{(x_k, x_0)}_{=0}, n \geq 2.$$

Отсюда находим, что $\lambda_n = \frac{(Bx_{n-1}, x_0)}{(x_0, x_0)}, n \geq 1$.

Положим $R_0 = ((A_0 - \lambda_0 I) |_E)^{-1}$. Этот оператор есть взаимнооднозначное линейное ограниченное отображение пространства E на E . Тогда

$$x_1 = -R_0 \underbrace{(B - \lambda_1 I)x_0}_{\in E},$$

$$x_n = -R_0 \underbrace{(Bx_{n-1} - \lambda_n x_0)}_{\in E} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} R_0 \underbrace{x_k}_{\in E}, n \geq 2.$$

Глава 8

Неограниченные симметрические операторы

Имеет ли данный симметрический оператор самосопряженные расширения, а если имеет, то сколько, — это вопрос физики, ибо самосопряженные операторы соответствуют наблюдаемым

Р.Д. Рихтмайер

8.1 Определение и примеры неограниченного оператора

Напомним, что задать оператор $A \in \mathfrak{L}(H)$ — это значит выяснить, какова его область определения $\text{Dom } A$ и правило по которому он действует. Отсюда следует, что если операторы задаются одинаковой формулой, но с разными областями определения, то это разные операторы.

Если не оговорено противное, то область определения линейного оператора будем считать линейным подпространством, всюду плотным в гильбертовом пространстве H .

Определение 93. Оператор $A \in \mathfrak{L}(H)$ называется неограниченным, если

$$\sup_{0 \neq x \in \text{Dom } A} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \infty.$$

Мы уже встречались с неограниченным оператором в предыдущей главе. Там неограниченный оператор естественно возник как сильный предел последовательности ограниченных операторов. Конкретным примером был оператор уничтожения частиц. Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 38. Пусть $H_1 = L_2(0, 1)$ и $H_2 = L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим операторы координаты

$$\hat{q}_k : H_k \rightarrow H_k, \quad k = 1, 2,$$

действующие по правилу

$$\hat{q}_k f_k(x) = x f_k(x), \quad f_k(x) \in \text{Dom } \hat{q}_k, \quad k = 1, 2,$$

где $\text{Dom } \hat{q}_1 = H_1$, а $\text{Dom } \hat{q}_2 = \{f_2 \in H_2 \mid \int_{\mathbb{R}} x^2 |f_2(x)|^2 dx < \infty\}$.

Нам уже известно, что $\hat{q}_1 \in \mathfrak{B}(H_1)$ и $\|\hat{q}_1\| = 1$. Покажем, что $\hat{q}_2$ — неограниченный оператор. Отметим, что его область определения содержит финитные функции, поэтому всюду плотна в H_2 . Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \theta(n^2 - x^2)$, где θ — функция Хевисайда (равна нулю на отрицательных числах и единице на неотрицательных.) Ясно, что $f_n(x) \in \text{Dom } \hat{q}_2$:

$$\|\hat{q}_2 f_n(x)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_n^2(x) dx = \int_{-n}^n x^2 dx = \frac{2n^3}{3},$$

тогда

$$\sup_{0 \neq f \in \text{Dom } \hat{q}_2} \frac{\|\hat{q}_2 f\|}{\|f\|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{q}_2 f_n\|}{\|f_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2n^3}{3}}{2n} \right)^{1/2} = \infty.$$

Пример 39. Пусть $H_1 = L_2(0, 1)$ и $H_2 = L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим операторы импульса

$$\hat{p}_k : H_k \rightarrow H_k, \quad k = 1, 2,$$

действующие по правилу

$$\hat{p}_k f_k(x) = i \frac{d}{dx} f_k(x), \quad f_k(x) \in \text{Dom } \hat{p}_k, \quad k = 1, 2,$$

где $\text{Dom } \hat{p}_1 = C^\infty(0, 1)$, а

$$\text{Dom } \hat{p}_2 = \{f_2 \in H_2 : f'(x) \text{ существует п.в. и } f' \in H_2\}.$$

Покажем, что оба оператора неограничены. Пусть $f_n(x) = x^n$, тогда

$$\sup_{0 \neq f \in \text{Dom } \hat{p}_1} \frac{\|\hat{p}_1 f\|}{\|f\|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{p}_1 f_n\|}{\|f_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n^2}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}} \right)^{1/2} = \infty.$$

Возьмём теперь $f(x) = x^n \theta(1 - x^2)$, тогда точно также

$$\sup_{0 \neq f \in \text{Dom } \hat{p}_2} \frac{\|\hat{p}_2 f\|}{\|f\|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{p}_2 f_n\|}{\|f_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n^2}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}} \right)^{1/2} = \infty.$$

Пример 40. Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$ и оператор

$$Af(x) = -f''(x) + x^2 f(x), \quad f \in \text{Dom } A,$$

где $\text{Dom } A = \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ — быстроубывающие функции. Тогда этот оператор неограничен, так как у него есть собственные функции $\phi_n \in \mathfrak{J}(\mathbb{R})$ с собственными значениями $2n + 1$:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) \phi_n(x) = (2n + 1) \phi_n(x).$$

Они называются функциями Эрмита, или волновыми функциями гармонического осциллятора. Ясно, что этого достаточно, чтобы доказать неограниченность.

8.2 Замыкание оператора

Определение 94. График $\Gamma(T)$ линейного оператора T – это множество пар

$$\{ \langle f, Tf \rangle, f \in \text{Dom} T \}.$$

Ясно, что $\Gamma(T) \subset \mathbf{H} \times \mathbf{H}$, где $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ – прямое произведение гильбертовых пространств, которое также является гильбертовым пространством. Скалярное произведение в нём задаётся формулой (упражнение 3.1):

$$\langle \langle f_1, f_2 \rangle, \langle g_1, g_2 \rangle \rangle_{\mathbf{H} \times \mathbf{H}} = \langle f_1, g_1 \rangle_{\mathbf{H}} + \langle f_2, g_2 \rangle_{\mathbf{H}}. \quad (3.2)$$

В дальнейшем индексы у скалярных произведений мы будем опускать.

Определение 95. Оператор T называется **замкнутым**, если его график $\Gamma(T)$ – это замкнутое в $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ множество.

Замкнутость оператора в точности означает, что если последовательность $f_n \in \text{Dom} T$ сходится к $f \in \text{Dom} T$ и Tf_n также сходится, то она обязательно сходится к Tf .

Ввиду последней переформулировки, ясно, что из ограниченности оператора следует его замкнутость. Обратно, также верно: замкнутый всюду определённый оператор будет ограниченным. Это утверждение классической **теоремы о замкнутом графике**.

Определение 96. Пусть $T, T_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$. Тогда оператор T_1 называется **расширением** оператора T , если $\Gamma(T_1) \supset \Gamma(T)$. В этом случае пишут $T_1 \supset T$. Иначе, это можно записать следующим образом:

$$T_1 \supset T \Leftrightarrow \Gamma(T_1) \supset \Gamma(T) \Leftrightarrow \text{Dom} T_1 \supset \text{Dom} T \text{ и } T_1 f = Tf, \quad f \in \text{Dom} T.$$

Определение 97. Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ имеет замкнутое расширение, тогда говорят, что он **замыкаем**, или **допускает замыкание**. Наименьшее (по включению) замкнутое расширение называется **замыканием** T и обозначается $\bar{T}$.

Ясно, что для замкнутого оператора $T = \bar{T}$. Неограниченный не замкнутый оператор может быть замыкаем, а может и не быть.

Пример 3.6. Рассмотрим пример оператора, который имеет замкнутые расширения.

Пусть $\mathbf{H} = L_2(\mathbb{R})$, $\text{Dom} T_1 = C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\text{Dom} T_2 = C_0^1(\mathbb{R})$. Положим

$$T_k f = i f', \quad f \in \text{Dom} T_k, \quad k = 1, 2.$$

Ясно, что T_2 – расширение T_1 , т. е. $\Gamma(T_2) \supset \Gamma(T_1)$. Покажем, что $\overline{\Gamma(T_1)} \supset \Gamma(T_2)$.

Пусть положительная функция $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такая, что

$$\text{supp} \omega = [-1, 1] \text{ и } \int_{\mathbb{R}} \omega(x) dx = 1.$$

Примером такой функции является хорошо известная "шапочка Соболева". Для всякого $\varepsilon > 0$ положим $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Покажем, что для всякой $\varphi \in \text{Dom} T_2$ найдётся $\varphi_\varepsilon \in \text{Dom} T_1$, такая, что

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi, \quad \varphi'_\varepsilon \rightarrow \varphi' \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Пусть

$$\varphi_\varepsilon(x) = (\omega_\varepsilon * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(x-t) \varphi(t) dt,$$

тогда

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon - \varphi\| &\leq |\text{supp} \varphi| \sup_{x \in \text{supp} \varphi} |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| \\ &\leq |\text{supp} \varphi| \sup_{x \in \text{supp} \varphi} \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(x-t) |\varphi(t) - \varphi(x)| dt \\ &\leq |\text{supp} \varphi| \sup_{x \in \text{supp} \varphi} \sup_{|x-t| > \varepsilon} |\varphi(t) - \varphi(x)|. \end{aligned}$$

Так как по теореме Кантора функция φ равномерно непрерывна на компакте $\text{supp} \varphi$, то последнее выражение стремится к нулю при ε , стремящемся к нулю. Аналогично доказывается сходимость производных. Таким образом, мы показали, что $\langle \varphi_\varepsilon, T_1 \varphi_\varepsilon \rangle \rightarrow \langle \varphi, T_2 \varphi \rangle$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Позже мы узнаем, что оба оператора T_1 и T_2 замыкаемы, поэтому будет справедливы соотношения:

$$T_2 \supset T_1, \quad \overline{T_2} \supset \overline{T_1};$$

$$\overline{T_1} \supset T_2, \quad \overline{T_1} \supset \overline{T_2};$$

следовательно,

$$\overline{T_1} = \overline{T_2}.$$

8.3 Оператор, сопряженный к неограниченному

Определение 98. Пусть T – плотно определенный линейный оператор в гильбертовом пространстве H . Пусть $D(T^*)$ – множество таких $\varphi \in H$, для которых существуют такие $\eta \in H$, что

$$(T\psi, \varphi) = (\psi, \eta)$$

для всех $\psi \in \text{Dom} T$. Тогда для каждого такого $\varphi \in D(T^*)$ положим $T^*\varphi = \eta$. Оператор T^* называется **сопряженным** к T .

Если оператор T будет не плотно определенным, то его сопряженный T^* не существует (точнее говоря, он определяется не однозначно). Действительно, пусть найдутся два элемента η_1 и η_2 таких, что:

$$(T\psi, \varphi) = (\psi, \eta_1), \quad (T\psi, \varphi) = (\psi, \eta_2)$$

для всех $\psi \in \text{Dom}T$. Тогда, вычитая одно равенство из другого, получаем:

$$(\psi, \eta_1 - \eta_2) = 0,$$

т. е. вектор $\eta_1 - \eta_2$ лежит в $(\text{Dom}T)^\perp$.

Так как $\text{Dom}T$ плотно в H и скалярное произведение непрерывно по левому аргументу, то для всякого $\xi \in H$ найдутся $\psi_n \in \text{Dom}T$ такие, что

$$0 = (\psi_n, \eta_1 - \eta_2) \rightarrow (\xi, \eta_1 - \eta_2) = 0.$$

Взяв $\xi = \eta_1 - \eta_2$ получим, что $\eta_1 = \eta_2$.

Итак, чтобы сопряженный оператор существовал, нужна плотная определенность первоначального оператора. Поэтому, даже если сопряженный существует, то второй сопряженный $T^{**} = (T^*)^*$ может уже не существовать.

Пример 41. Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$ и f — ограниченная функция, не лежащая в $L_2(\mathbb{R})$, например, $f(x) = \sin x$. Определим оператор T следующим образом. Положим

$$\text{Dom}T = \left\{ \psi \in L_2(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)\psi(x)| dx < \infty \right\}.$$

Ясно, что это множество содержит функции с компактным носителем (например, индикаторы отрезков), следовательно, оно плотно в $L_2(\mathbb{R})$. Для всякой $\psi \in \text{Dom}T$ определим

$$T\psi = (\psi, f)\psi_0,$$

где ψ_0 — произвольная фиксированная функция из $L_2(\mathbb{R})$, например, $\psi_0(x) = e^{-x^2}$.

Пусть $\varphi \in \text{Dom}T^*$, тогда для всякой $\psi \in \text{Dom}T$ получим равенства:

$$\begin{aligned} (\psi, T^*\varphi) &= (T\psi, \varphi) = ((\psi, f)\psi_0, \varphi) = \\ &= (\psi, f)(\psi_0, \varphi) = (\psi, \overline{(\psi_0, \varphi)})f = (\psi, (\varphi, \psi_0)f). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $T^*\varphi = (\varphi, \psi_0)f$, но так как $f \notin L_2(\mathbb{R})$, то с необходимостью $(\varphi, \psi_0) = 0$. Таким образом, получаем, что $\text{Dom}T^* = \psi_0^\perp$ — не плотное в H множество, следовательно, второй сопряженный T^{**} не определен, а $T^* = 0$ на своей области определения.

8.3.1. О связи сопряжения и замыкания Рассмотрим теперь соотношения между замыканием оператора и его второго сопряженного, если они существуют.

Теорема 71 (О связи сопряжения и замыкания). Пусть $T \in \mathfrak{L}(H)$ и $\text{Dom} T$ плотно в H , тогда

- 1) T^* замкнуто;
- 2) T допускает замыкание тогда и только тогда, когда $\text{Dom} T^*$ плотно в H , причем, в этом случае $\bar{T} = T^{**}$;
- 3) если T допускает замыкание, то $\bar{T}^* = T^*$

8.4 Симметрические и самосопряженные операторы

В случае ограниченных операторов понятия симметрического и самосопряженного операторов одинаковы. В неограниченном случае есть отличия, а в чем они заключаются, и предстоит нам выяснить в этом разделе.

Определение 99. Плотно определенный оператор $T \in \mathfrak{L}(H)$ называется **симметрическим**, если сопряженный к нему является его расширением: $T \subset T^*$. Это равносильно выполнению равенства для всяких $\varphi, \psi \in \text{Dom} T$

$$(T\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi).$$

Ясно, что всякий симметрический оператор замыкаем. Действительно, чтобы это понять, нужно показать, что $\text{Dom} T^*$ плотно в H . Но это следует из включения $\text{Dom} T \subset \text{Dom} T^*$ и всюду плотности $\text{Dom} T$.

Раз T замыкаем, то существует наименьшее замкнутое расширение $\bar{T} = T^{**}$, а так как T^* тоже замкнутое расширение T , то получаем включение, эквивалентное определению симметрического оператора:

$$T \subset T^{**} \subset T^*.$$

Для замкнутых симметрических операторов справедливо, следовательно, такое включение:

$$T = T^{**} \subset T^*.$$

Следующим шагом является рассмотрение операторов, для которых будут равенства между тремя операторами.

Определение 100. Плотно определенный оператор $T \in \mathfrak{L}(H)$ называется **самосопряженным**, если

$$T = T^{**} = T^*.$$

Самосопряженные операторы являются самыми важными среди всех определенных выше, однако, легче установить симметричность и замкнутость оператора. Выяснить наличие самосопряженности у замкнутого симметрического оператора можно с помощью установления симметричности сопряженного к нему. Действительно, имеем включения:

$$T = T^{**} \subset T^* \subset T^{**},$$

откуда получаем равенство $T^* = T^{**}$.

Определение 101. Плотно определенный оператор $T \in \mathfrak{L}(\mathbf{H})$ называется существенно самосопряженным, если его замыкание – самосопряженный оператор.

В терминах равенств и включений это определение эквивалентно записи:

$$T \subset T^{**} = T^*.$$

Действительно, имеем соотношения:

$$T \subset \bar{T}, \bar{T} = T^{**}, \bar{T} = (\bar{T})^*, (\bar{T})^* = T^*.$$

Исключительность таких операторов заключается в том, что среди всех расширений они обладают единственным самосопряженным расширением.

Теорема 72 (О самосопряженном расширении существенно самосопряженного оператора). Пусть T – существенно самосопряженный оператор, тогда он имеет единственное самосопряженное расширение $S = T^{**}$.

Доказательство. Из определения существенной самосопряженности следует, что T^{**} самосопряженное расширение оператора T . Пусть S – какое-нибудь самосопряженное расширение T . Тогда S замкнут и из того, что S расширяет T получаем, что

$$\bar{S} = S \supset \bar{T} = T^{**}.$$

Откуда

$$S = S^* \subset (T^{**})^* = T^{**}.$$

Сравнивая включения, получаем $S = T^{**}$. $\square$

Выпишем таблицу для запоминания операторов с той или иной степенью сопряжения.

Симметрический оператор	$T \subset T^{**} \subset T^*$
Замкнутый симметрический оператор	$T = T^{**} \subset T^*$
Самосопряженный оператор	$T = T^{**} = T^*$
Существенно самосопряженный оператор	$T \subset T^{**} = T^*$

8.4.1. Критерий самосопряженности

Для выяснения самосопряжен ли (или существенно самосопряжен) рассматриваемый оператор полезен следующий общий критерий.

Теорема 73 (Критерий самосопряженности симметрического оператора). Пусть T – симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. Тогда самосопряженность этого оператора эквивалентна каждому из условий:

- 1) T замкнут и $\ker(T^* \pm iI) = \{0\}$;
- 2) $\operatorname{im}(T \pm iI) = \mathbf{H}$.

Существенная самосопряженность T равносильна каждому из условий:

- 3) $\ker(T^* \pm iI) = \{0\}$;
- 4) $\operatorname{im}(T \pm iI)$ плотно в $\mathbf{H}$.

Рассмотрим вопрос самосопряженности операторов координаты и импульса.

Пример 42 (Оператор координаты). Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$, и $\hat{q}f(x) = xf(x)$ для всякой $f \in \text{Dom } \hat{q} = C_0^\infty$.

Найдем $\hat{q}^*$. Его область определения $\text{Dom } \hat{q}^*$ состоит из таких $\varphi \in H$, что для всякой $f \in \text{Dom } \hat{q}$ верно равенство:

$$(\hat{q}f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\overline{\varphi(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\hat{q}^*\varphi(x)} dx,$$

откуда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\overline{x\varphi(x)} - \overline{\hat{q}^*\varphi(x)}) dx = 0.$$

Это равенство означает, что функция $x\varphi(x) - \hat{q}^*\varphi(x)$ лежит в $(C_0^\infty)^\perp$. Так как это ортогональное дополнение состоит только из нуля, то $\hat{q}^*\varphi(x) = x\varphi(x)$. И, кроме того, $\text{Dom } \hat{q}^* = \{f(x) \in L_2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L_2(\mathbb{R})\}$. Отсюда мы заключаем, в частности, что $\hat{q} \subset \hat{q}^*$, т. е. оператор $\hat{q}$ — симметрический.

Используя критерий существенной самосопряженности, покажем, что $\hat{q}$ существенно самосопряжен. Для этого найдем ядро операторов $\hat{q}^* \pm iI$. Ищем $f_\pm \in \text{Dom } \hat{q}^*$ такие, что $xf_\pm(x) \pm if_\pm(x) = 0$. Откуда очевидно получаем, что $f_\pm = 0$.

Другой способ показать, что $\hat{q}$ существенно самосопряженный, — это, опять же опираясь на критерий, показать, что $\hat{q}^*$ самосопряженный. Для этого нужно для всякой $g \in L_2(\mathbb{R})$ найти функции $f_\pm \in \text{Dom } \hat{q}^*$ такие, что

$$xf_\pm(x) \pm if_\pm(x) = g(x).$$

Нетрудно видеть, что $f_\pm(x) = \frac{g(x)}{x \pm i}$ действительно лежит в $\text{Dom } \hat{q}^*$.

Ну и третьим подходом просто определим второй сопряженный оператор $\hat{q}^{**}$ (напомним, что он определен, так как область определения $\text{Dom } \hat{q}^*$ всюду плотна). Для всякой $g \in \text{Dom } \hat{q}^{**}$ и $\varphi \in \text{Dom } \hat{q}^*$ должно выполняться равенство:

$$(\hat{q}^*\varphi, g) - (\varphi, \hat{q}^{**}g) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(\overline{xg(x)} - \overline{\hat{q}^{**}g(x)}) dx = 0.$$

Как и в предыдущем случае, это равенство означает, что функция $xg(x) - \hat{q}^{**}g(x)$ лежит в $(\text{Dom } \hat{q}^*)^\perp$. Последнее равно нулю, так как

$$0 = (C_0^\infty)^\perp = (\text{Dom } \hat{q})^\perp \supset (\text{Dom } \hat{q}^*)^\perp.$$

Таким образом, получаем, что $\hat{q}^{**}g(x) = xg(x) = \hat{q}^*g(x)$ для всякой

$$g \in \text{Dom } \hat{q}^{**} = \{g(x) \in L_2(\mathbb{R}) : xg(x) \in L_2(\mathbb{R})\} = \text{Dom } \hat{q}^*.$$

В итоге, тремя способами мы показали, что $\hat{q}$ — существенно самосопряженный оператор ввиду того, что $\hat{q} \subset \hat{q}^{**} = \hat{q}^*$. Заметим, что оператор $\hat{q}$ остался бы существенно самосопряженным, если бы мы увеличили его область определения до C_0^k , $k \in \mathbb{N}$.

Пример 43 (Оператор импульса). Пусть $H = L_2(\mathbb{R})$, и $\hat{p}f(x) = i \frac{d}{dx} f(x)$ для всякой $f \in \text{Dom } \hat{p} = C_0^\infty$.

Заметим, что всякую функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{R}) \subset L_{1,loc}(\mathbb{R})$ можно рассматривать как регулярное распределение, которое как известно можно обобщенно дифференцировать. Используя это замечание, найдем $\hat{p}^*$ и его область определения, состоящую из таких функций $\varphi \in H$, что для всякой $f \in \text{Dom } \hat{p}$ выполняется равенство:

$$\begin{aligned} (\hat{p}f, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} i f'(x) \bar{\varphi} dx = \langle i \bar{\varphi}, f' \rangle = \langle -i D \bar{\varphi}, f \rangle = \\ &= \langle \overline{i D \varphi}, f \rangle = \langle \hat{p}^* \bar{\varphi}, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\hat{p}^* \varphi} dx. \end{aligned}$$

где $D\varphi(x)$ – обобщенная производная функции $\varphi(x)$. Откуда заключаем, что функция $i D\varphi(x) - \hat{p}^* \varphi(x) = 0$

Таким образом, получаем, что $\hat{p}^* \varphi(x) = i D\varphi(x)$ для всякой $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$, у которой обобщенная производная $D\varphi(x)$ также из $L_2(\mathbb{R})$. Такое множество функций образует пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$ (если, конечно, ввести дополнительную структуру). Так как

$$C_0^\infty = \text{Dom } \hat{p} \subset \text{Dom } \hat{p}^* = W_2^1(\mathbb{R})$$

и для всякой $f \in C_0^\infty$ производные совпадают: $f'(x) = Df(x)$, то оператор импульса $\hat{p}$ – симметрический.

Покажем теперь, что он существенно самосопряжен, для этого воспользуемся критерием. Выясним, из чего состоит ядро $\ker(\hat{p}^* \pm iI)$.

Имеем

$$(\hat{p}^* \pm iI)f = i Df(x) \pm i f(x) = 0,$$

т. е. нужно решить дифференциальное уравнение в обобщенных функциях:

$$Df(x) = \pm f(x).$$

Ясно, что классическое решение такого дифференциального уравнения есть функция $f_0^\pm(x) = ce^{\pm x}$. Покажем, что решение в обобщенных функциях точно такое же. Действительно, пусть $f_\pm(x)$ – решение уравнения, тогда рассмотрим обобщенную функцию $g_\pm(x) = e^{\mp x} f_\pm(x)$ (ясно, что эта обобщенная функция определена, так как $e^{\mp x} \in C^\infty(\mathbb{R})$) и покажем, что $Dg_\pm(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \langle Dg_\pm, \varphi \rangle &= -\langle g_\pm, \varphi' \rangle = -\langle e^{\mp x} f_\pm(x), \varphi' \rangle = -\langle f_\pm(x), e^{\mp x} \varphi' \rangle \\ &= -\langle f_\pm(x), (e^{\mp x} \varphi)' \pm e^{\mp x} \varphi \rangle = -\langle f_\pm(x), (e^{\mp x} \varphi)' \rangle \\ &\mp \langle f_\pm(x), e^{\mp x} \varphi \rangle = \langle Df_\pm(x), e^{\mp x} \varphi \rangle \mp \langle f_\pm(x), e^{\mp x} \varphi \rangle \\ &= \pm \langle f_\pm(x), e^{\mp x} \varphi \rangle \mp \langle f_\pm(x), e^{\mp x} \varphi \rangle = 0. \end{aligned}$$

Нам уже известно, что $g_\pm$ есть постоянное регулярное распределение (обобщенная функция). Таким образом, $f_\pm(x) = f_0^\pm(x)$.

Нам нужно, чтобы это решение лежало в $L_2(\mathbb{R})$, но это возможно только при $c = 0$. Следовательно, мы показали, что $\ker(T^* \pm iI) = \{0\}$ и T — существенно самосопряженный оператор.

Глава 9

Интегральные уравнения

Почему изучаются интегральные операторы? Традиционным ответом является такой: интегральные уравнения имеют важные приложения за пределами математики (и непосредственно сами и через дифференциальные уравнения), а также такой: с точки зрения чистой математики они являются непосредственным аналитическим обобщением понятий и методов классической алгебраической теории и линейных уравнений

П. Халмош, В. Сандер

9.1 Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра

Лекции по этой теме полностью соответствуют пособию [АК93].

Оглавление

1	Ряды Фурье	3
1.1	Разложение периодической функции в ряд Фурье	4
1.2	Функции с произвольным периодом	6
1.3	Разложение на интервале	7
1.4	Комплексная форма ряда Фурье	10
1.5	Теорема о представимости рядом Фурье	12
1.6	Дифференцирование ряда Фурье	18
1.7	Приближение тригонометрическими многочленами	19
1.8	Равномерная сходимость ряда Фурье	21
1.9	Равенство Ляпунова	22
1.10	Скорость сходимости ряда Фурье	24
1.11	Явление Гиббса	25
1.12	Решение задачи Дирихле в круге	28
1.13	Суммирование рядов Фурье по методу Чезаро–Фейера	31
1.14	Теоремы Вейерштрасса	32
2	Преобразование Фурье	37
2.1	Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье	37
2.2	Теорема о представимости интегралом Фурье	38
2.3	Интеграл Фурье на полупрямой	40
2.4	Интеграл Фурье в комплексной форме	41
2.5	Быстроубывающие функции	44
2.6	Преобразование Фурье в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	47
2.7	Свертка функций	51
2.8	Равенство Парсеваля	53
2.9	Формула Пуассона	54
2.10	Теорема Котельникова–Шеннона	56
2.11	Решение уравнения теплопроводности	56
2.12	Понятие о дискретном преобразовании Фурье	57
3	Преобразование Лапласа	59
3.1	Оригиналы и изображения	59
3.2	Простейшие свойства преобразования Лапласа	60
3.3	Аналитичность, формула обращения	62

3.4	Изображение производных и интегралов	62
3.5	Дифференцирование и интегрирование изображений	64
3.6	Свертка оригиналов и теорема Бореля	65
3.7	Применение преобразования Лапласа	66
4	Обобщенные функции	69
4.1	Основные и обобщенные функции	69
4.2	Сходимость обобщенных функций	72
4.3	Операции с обобщенными функциями	74
4.4	Свертка обобщенных функций	78
4.5	Фундаментальное решение	80
4.6	Обобщенные функции медленного роста	85
5	Пространства со скалярным произведением	93
5.1	Векторное пространство	93
5.2	Нормированное пространство	95
5.3	Лебеговские функциональные пространства	99
5.4	Скалярное произведение и его свойства	102
5.5	Ортогонализация Грама–Шмидта	104
5.6	Проектирование	106
5.7	Ортонормированный базис	109
5.8	Изоморфизм гильбертовых пространств	114
6	Ортогональные многочлены	117
6.1	Свойства общих ортогональных многочленов	117
6.2	Классические ортогональные многочлены	124
6.3	Многочлены Лежандра	126
7	Ограниченные операторы	137
7.1	Определение линейного оператора	137
7.2	Непрерывность и ограниченность	139
7.3	Операторная норма	140
7.4	Сходимость операторов	142
7.5	Обратные операторы	145
7.6	Спектр оператора	148
7.7	Линейные непрерывные функционалы	152
7.8	Сопряженные операторы	156
7.9	Самосопряженные операторы	159
7.10	Компактные операторы	163
7.11	Теорема Гильберта–Шмидта	167
7.12	Возмущение точечного спектра самосопряженного оператора	170
8	Неограниченные симметрические операторы	173
8.1	Определение и примеры неограниченного оператора	173
8.2	Замыкание оператора	175
8.3	Оператор, сопряженный к неограниченному	176

<i>ОГЛАВЛЕНИЕ</i>	187
8.4 Симметрические и самосопряженные операторы	178
9 Интегральные уравнения	183
9.1 Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра	183
Список литературы	188

Список литературы

Издания, подготовленные кафедрой высшей математики ФФ НГУ

- [Ab07] Абашеева Н.Л., *Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 2007; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsAb07\(djvu\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsAb07(djvu)).
- [A95] Александров В.А., *Геометрия пространств со скалярным произведением*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 1995; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA95\(pdf\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA95(pdf)).
- [A05] Александров В.А., *Обобщённые функции*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2005; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA05\(ps\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA05(ps)).
- [A96.1] Александров В.А., *Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 1996.
- [A93] Александров В.А., *Ортогональные многочлены*, Метод. указания, НГУ, Новосибирск, 1993; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA93\(pdf\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA93(pdf)).
- [A92] Александров В.А., *Преобразование Лапласа*, Метод. указания, НГУ, Новосибирск, 1992; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA92\(pdf\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA92(pdf)).
- [A02] Александров В.А., *Преобразование Фурье*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2002; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA02\(pdf\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA02(pdf)).
- [A96.2] Александров В.А., *Ряды Фурье*, Метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 1996; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA96.2\(pdf\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsA96.2(pdf)).
- [AK93] Александров В.А., Колесников Е.В., *Интегральные уравнения*, Метод. указания, НГУ, Новосибирск, 1993; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsAK93\(pdf\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsAK93(pdf)).
- [B11] Бельхеева Р.К., *Ряды Фурье в примерах и задачах*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2011; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsB11\(pdf\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsB11(pdf)).
- [B14.1] Бельхеева Р.К., *Обобщённые функции в примерах и задачах*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2014; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsB14.1\(pdf\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsB14.1(pdf)).
- [B14.2] Бельхеева Р.К., *Преобразование Фурье в примерах и задачах*, Учеб. пособие, НГУ, Новосибирск, 2014; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsB14.2\(pdf\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsB14.2(pdf)).
- [P12] Подвигин И.В., *Гильбертовы пространства в примерах и задачах*, Учебно-метод. пособие, НГУ, Новосибирск, 2012; [www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsP12\(pdf\)](http://www.phys.nsu.ru/ok03/ManualsP12(pdf)).

Издания, рекомендуемые кафедрой высшей математики ФФ НГУ

- [1] Антоневи́ч А.Б., Кня́зев П.Н., Рады́но Я.В., *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Выш. шк., Минск, 1978; [http://reslib.org/Antonevich78\(e-djvu\)](http://reslib.org/Antonevich78(e-djvu)).
- [2] Арфкен Г., *Математические методы в физике*, Атомиздат, Москва, 1970.
- [3] Владимиров В.С., *Уравнения математической физики*, издание 4, исправленное и дополненное, Наука, М., 1981; [http://reslib.org/Vladimirov81\(e-djvu\)](http://reslib.org/Vladimirov81(e-djvu)).
- [4] Зорич В.А. *Математический анализ*, Часть II. Издание 4-е, исправленное, МЦНМО, М., 2002.
- [5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы функционального анализа и теории функций*, Издание 6-е, исправленное, Наука, М., 1989.

- [6] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*, Том 1. Функциональный анализ, Мир, М., 1977.
- [7] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*, Том 2. Гармонический анализ. Самосопряженность, Мир, М., 1978.
- [8] Суетин П. К., *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1976.
- [9] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Том. 3. Издание 5-е, Наука, М., 1969.

Дополнительная литература, использованная при подготовке курса лекций

- [10] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М., *Численные методы*, Наука, М., 1987; [http://reslib.org/Bakhvalov87\(e-djvu\)](http://reslib.org/Bakhvalov87(e-djvu)).
- [11] Конторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.
- [12] Толстов Г. П., *Ряды Фурье*, Физматгиз, М., 1960.
- [13] Харди Г. Х., Рогозинский В. В., *Ряды Фурье*, Физматгиз, М., 1962.
- [14] Халмош П., Сандерс П., *Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2* , Наука, М., 1985.
- [15] Шварц Л., *Применение обобщенных функций к изучению элементарных частиц в релятивистской квантовой механике*, Мир, М., 1964.
- [16] Кадец В. М., *Курс функционального анализа*, Учеб. пособие, ХНУ, Харьков, 2006.
- [17] Хатсон В., Пим Дж. С., *Приложения функционального анализа и теории операторов*, Мир, М., 1983.
- [18] Фридрихс К., *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1969.