Контрольные работы по математическому анализу ММФ НГУ, проводившиеся в 2020–2024 годах

Подвигин И.В.

Содержание

1 2020-2021. 1 семестр

1.1 Контрольная 1

Вариант 1

1. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ - целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ - также целое при любом $n \in \mathbb{N}$.

2. Определить точные границы множества

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : p \in \mathbb{N}, p+1 \text{ делится на } 3, q \in \mathbb{N}, p < q, q \text{ делится на } 2022 \right\}.$$

3. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f : \mathbb{Q} \times ((\mathbb{R} \setminus \sqrt{2}\mathbb{Q}) \cup \{0\}) \to \mathbb{R}$, действующее по правилу

$$f(x, y) = \sqrt{2}x + y, \; x \in \mathbb{Q}, y \in (\mathbb{R} \setminus \sqrt{2}\mathbb{Q}) \cup \{0\}.$$

4. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 3n + 1}{4\sqrt{n^7} + \sqrt[n]{n}} = 0.$$

5. Найти предел последовательности $x_n = \frac{\ln(n+\sin(2n))}{\ln(n^2+1)}$.

Вариант 2

1. Показать, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

2. Определить точные границы множества

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : p \in \mathbb{N}, p \text{ делится на } 5, q \in \mathbb{N}, p < q, q+1 \text{ делится на } 2022 \right\}.$$

3. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, действующее по правилу

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2} + x}{\sqrt{3} + y}, \; x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}.$$

4. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 100n + 1}{5\sqrt{n^5} + \sqrt[n]{10}} = 0.$$

5. Найти предел последовательности $x_n = \frac{\ln(n^3+4n)}{\ln(n^2+\cos(n))}$.

Вариант 3

1. Покажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ верно тождество

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

2. Определить точные границы множества

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : p \in \mathbb{N}, p+1 \text{ делится на } 7, q \in \mathbb{N}, p < q, q+1 \text{ делится на } 2022 \right\}.$$

3. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f : (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, действующее по правилу

$$f(x, y) = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y, \; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}.$$

4. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n^3} - 7n + 2}{10n^2 + \sqrt[n]{13}} = 0.$$

5. Найти предел последовательности $x_n = \frac{\ln(n^3+2^n)}{n+\cos(3n)}$.

Вариант 4

1. Сравнить два вещественных числа

$$\sqrt{8-\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \quad \text{и} \quad 1.$$

2. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ число $2^{5n+3}+5^n 3^{n+2}$ делится на 17.

3. Определить точные границы множества

$$A=\left\{\frac{n^2}{m^2+n} \in \mathbb{Q} : n,m \in \mathbb{N}, n \le m\right\}.$$

4. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f:[1,2)\times\mathbb{N}\to[0,1)$, действующее по правилу

$$f(x,y)=\left\{x+\frac{1}{y}\right\},\ x\in[1,2), y\in\mathbb{N}.$$

Скобки $\{\cdot\}$ обозначают дробную часть числа.

5. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\sin n}{4\sqrt{n^3}+\cos n}=0.$$

Вариант 5

1. Сравнить два вещественных числа

$$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}}} \quad \text{и} \quad -\frac{\sqrt{2\sqrt{5}}}{4}.$$

2. Показать, что для всех $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство $5^n \ge n(2^n+3^n)$.

3. Определить точные границы множества

$$A=\left\{\frac{m-n^2}{m+n} \in \mathbb{Q} : n,m \in \mathbb{N}, m > n^2\right\}.$$

4. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, действующее по правилу

$$f(x,y)=x!-y,\ x,y\in\mathbb{N}.$$

5. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^{n!}}{n\sin^2 n+4}=+\infty.$$

Вариант 6

1. Сравнить два вещественных числа

$$\sqrt{11}-\sqrt{3} \quad \text{и} \quad \sqrt{10}-\sqrt{2}.$$

2. Покажите, что для каждого $n>1$ верно неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

3. Определить точные границы множества

$$A=\left\{\frac{2m\sqrt{n}}{m^2+n} \in \mathbb{R} : n,m \in \mathbb{N}, n \text{ не является квадратом натурального числа}\right\}.$$

4. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f:\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, действующее по правилу

$$f(x,y)=\frac{xy+1}{x},\ x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{Z}.$$

5. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+\sin n}-n=-\infty.$$

1.2 Контрольная 2

Вариант 1

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-2\sqrt[3]{3x-1}}{2\sin(x-3)}.$$

2. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найти ее предел, если

$$x_1=0,\quad x_{n+1}=\frac{2x_n+1}{x_n+1}, n\geq 1.$$

3. Показать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ не существует.

4. Найти все частичные пределы последовательности $x_n=\sin(\pi\sqrt{n^2-\pi n}), n\geq 4$.

5. Вычислить предел, используя известные предельные представления числа e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+4\sqrt{n}}{4\sqrt[n]{n!+(n+3)!}}.$$

Вариант 2

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{3\sin(4-x^2)}{\sqrt{3x+10}-2\sqrt[3]{x^2+4}}.$$

2. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найти ее предел, если

$$x_1=0,\quad x_{n+1}=\frac{3x_n+1}{x_n+2}, n\geq 1.$$

3. Показать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\ln n)$ не существует.

4. Найти все частичные пределы последовательности $x_n=\sin(\pi\sqrt{9n^2+n}), n\geq 1$.

5. Вычислить предел, используя известные предельные представления числа e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+3)!-n!}}{\ln(4+2^n)}.$$

Вариант 3

1. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{-\sin(1/6-x/3)}{\sqrt{6x+1}-2\sqrt[3]{x^2+3/4}}.$$

2. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найти ее предел, если

$$x_1=2,\quad x_{n+1}=\frac{5x_n+1}{3x_n+1}, n\geq 1.$$

3. Показать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})$ не существует.

4. Найти все частичные пределы последовательности $x_n=\cos(\pi\sqrt{n^2+6n}), n\geq 1$.

5. Вычислить предел, используя известные предельные представления числа e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[n]{(n+2)!-1}}{\sqrt[n+1]{((n+1)!+\sin^2 n)^2}}.$$

Вариант 4

1. Вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{C_n^{n-1}C_{2n}^{2n-1}C_{3n}^{3n-1}C_{4n}^{4n-1}}}{n^2+n\ln(2020^n+n)}.$$

2. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найти ее предел, если
$$x_1=\frac{3\pi}{2},\ \ x_{n+1}=x_n+\sin x_n, n\geq 1.$$

3. Показать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\{n+\sqrt{n}\}$ не существует.

4. Найти все частичные пределы последовательности $x_n=\left\{\sqrt{n^2+(-1)^n 2n}\right\}, n\geq 2.$

5. Вспоминая определение константы Эйлера, вычислить
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\dots+\frac{1}{5n}.$$

Вариант 5

1. Вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(2^n+3^n+5^n)}{\sqrt{C_{n+4}^4+C_{n^2+2}^2}}.$$

2. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найти ее предел, если
$$x_1=0,\ \ x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n+6}, n\geq 1.$$

3. Показать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n^2+\sqrt{3n}\right\}$ не существует.

4. Найти все частичные пределы последовательности $x_n=\left\{\sqrt{4n^2+(-1)^n en}\right\}, n\geq 1.$

5. Вспоминая определение константы Эйлера, вычислить
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{7n}.$$

Вариант 6

1. Вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\ln(n+2^{\sqrt{n}})}-\sqrt{\ln(n^2+3^{\sqrt{n+1}})}}{\sqrt[4]{n+\sin n}}.$$

2. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ иммет предел, и найдите его, если
$$x_1=0,\ \ x_{n+1}=-x_n^2+5x_n-4, n\geq 1.$$

3. Показать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{5n}\right\}$ не существует.

4. Найти все частичные пределы последовательности $x_n=\left\{\sqrt{9n^2+(-1)^n 5n}\right\}, n\geq 1.$

5. Вспоминая определение константы Эйлера, вычислить
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\dots+\frac{1}{4n}.$$

1.3 Контрольная 3

Вариант 1

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{5x+1}-2\sqrt[3]{3x-1}}{2\sin(x-3)}$.

2. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1-x) - 1}{x^2 \sin x}.$$

3. Верно ли, что при $x \to +\infty$

$$\frac{x\sin 2x}{\cos x + 2020 \operatorname{arctg} x} = \mathcal{O}(x \sin x).$$

4. Определить точки непрерывности и классифицировать разрывы

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x+\sin x}} & x < 0 \\ ax + b & x \in [0,1) \\ (x-1)/\ln(x) & x \geq 1 \end{cases}$$

5. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \sin \frac{x^3}{x^2+1}$ на $\mathbb{R}$.

Вариант 2

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3\sin(4-x^2)}{\sqrt{3x+10}-2\sqrt[3]{x^2+4}}$.

2. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - e^{x/2}}{x\ln(1+x)}.$$

3. Верно ли, что при $x \to +\infty$

$$\frac{x + 2020\sin x}{\ln(1+1/x)} = \mathcal{O}(x\sqrt{2+3x^2}).$$

4. Определить точки непрерывности и классифицировать разрывы

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x}{x+\sin x}\right)^2 & x < 0 \\ (x+a)/((bx)^2+1) & x \in [0,1] \\ (x^{2020}-1)/(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

5. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \sin \frac{x^{3/2}}{x^2+3}$ на $\mathbb{R}$.

Вариант 3

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{\sqrt{6x+1}-2\sqrt[3]{x^2+3/4}}{\sin(1/6-x/3)}$.

2. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos\frac{x}{2}} - e^{-x^2/16}}{x^2\sin^2 x}.$$

3. Верно ли, что при $x \to +\infty$

$$\frac{2x^2 - \ln x}{\sqrt{x} + \cos(2020x)} = \mathcal{O}(x\sqrt{1+x}).$$

4. Определить точки непрерывности и классифицировать разрывы

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x}{x+\sin x}\right) & x < 0 \\ e^{ax+b} & x \in [0,1] \\ (x-1)^x & x > 1 \end{cases}$$

5. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \sin \frac{x^{3/2}}{2|x|+1}$ на $\mathbb{R}$.

Вариант 4

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin\left(\sqrt{5x-1}-\sqrt[3]{3x+2}-1\right)}{x^2-4}$.

2. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{2\sin x}}{x^4+3x^3}.$$

3. Вспоминая формулу Эйлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, проверить

$$\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n=\mathcal{O}(1)\quad \text{при}\quad n\to+\infty.$$

4. Определить точки непрерывности и классифицировать разрывы

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\frac{1}{2-x}) & x<2\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(nx+A)^n}{(nx)^n+B} & x\geq 2\end{cases}$$

5. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x)=e^{\frac{x}{x+\sin x}}$ на множестве $x>0$.

Вариант 5

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(2-2x)}{1-\sqrt{5x+4}+\sqrt[3]{x+7}}$.

2. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x\sin(x^4+x^5)}.$$

3. Вспоминая формулу Эйлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, проверить

$$\cos 1+\cos 2+\ldots+\cos n=\mathcal{O}(1)\quad \text{при}\quad n\to+\infty.$$

4. Определить точки непрерывности и классифицировать разрывы

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\operatorname{arcctg}(\frac{1}{x-1})) & x<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n+A}\right)^n & x>1\end{cases}$$

5. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x)=e^{\frac{x+\sin x}{\sin^2 x}}$ на множестве $x>0$.

Вариант 6

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+10}-2\sqrt[3]{5x+6}-1}{\sin(2x+2)}$.

2. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(1-x/2)-(1+x)^{1/x}}{x^2}.$$

3. Вспоминая формулу Эйлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, проверить

$$\sin n+\sin 2n+\ldots+\sin n^2=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sin(n/2)}\right)\quad \text{при}\quad n\to+\infty.$$

4. Определить точки непрерывности и классифицировать разрывы

$$f(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{\sin(Ax)}{x+\sin x}\right) & x<0\\ \lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}(x^n) & x\geq 0\end{cases}$$

5. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x)=e^{\sqrt[3]{\sin x}}$ на множестве $x>0$.

1.4 Контрольная 4

Вариант 1

1. Вычислить производную функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\cos\sqrt[3]{4x^2-5x}\right) + \ln\left(\frac{2^x - x}{x+2}\right)$$

и найти все точки, где функция дифференцируема.

2. Определить параметры, при которых функция лежит в классе $C^1(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+3x-1 & x<2 \\ x^2+bx+1 & x\geq 2 \end{cases}$$

3. Найти угол, под которым пересекаются графики функций $f(x)=\sqrt{x+100}$ и $g(x)=\sqrt{100-x}$.

4. Ученый с мировым именем Иннокентий получил неравенство:

$$|e^{\sin x} - e^{\sin y}| \leq e|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Верно ли оно?

5. Определить локальные экстремумы функции $f(x) = (2x+1)e^{x^2-3x+1}$.

Вариант 2

1. Вычислить производную функции

$$f(x) = e^{\sin\sqrt[5]{x^2+2x}} + \ln\left(\frac{3^x - x}{x+3}\right)$$

и найти все точки, где функция дифференцируема.

2. Определить параметры, при которых функция лежит в классе $C^1(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+x+1 & x<1 \\ 3x^2+bx & x\geq 1 \end{cases}$$

3. Найти угол, под которым пересекаются графики функций $f(x)=e^{x+2}$ и $g(x)=e^{5-x}$.

4. Ученый с мировым именем Иннокентий получил неравенство:

$$e^{y^2} - e^{x^2} \leq 2ye^{y^2}(y-x), \quad 0 \leq x < y.$$

Верно ли оно?

5. Определить локальные экстремумы функции $f(x) = (-x+3)e^{2x^2-x+2}$.

Вариант 3

1. Вычислить производную функции

$$f(x) = e^{\arcsin\sqrt[3]{x^2-x}} + \cos\left(\frac{3^x - x}{x+3}\right)$$

и найти все точки, где функция дифференцируема.

2. Определить параметры, при которых функция лежит в классе $C^1(\mathbb{R})$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+2x & x<-1 \\ x^2+bx-5 & x\geq -1 \end{cases}$$

3. Найти угол, под которым пересекаются графики функций $f(x)=\ln(2x+1)$ и $g(x)=\ln(7-2x)$.

4. Ученый с мировым именем Иннокентий получил неравенство:

$$|\sin^2 e^x - \sin^2 e^y| \leq 2e^{|x|+|y|}|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Верно ли оно?

5. Определить локальные экстремумы функции $f(x) = (2x-1)e^{-x^2+3x}$.

1.5 Контрольная 5

Вариант 1

1. Найти наибольшее значение функции $f(x) = x + \sin x + \frac{\cos x}{2}$ на отрезке $[0, 1]$.

2. Определить параметры, при которых функция будет выпуклой

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1 & x < 1 \\ e^x + x + b & x \geq 1 \end{cases}$$

3. Построить график функции $f(x) = e^{x+2-4/x}$.

4. Используя (на каком-либо шаге) правило Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2 + 3x}\right) \ln(e^{2x^2} - 3x)$$

5. Для $x_0 = 0$ найти многочлен Тэйлора 5 степени для функции $f(x) = \frac{e^{2x}}{3+x}$.

Вариант 2

1. Найти наибольшее значение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}$ на отрезке $[1, 2020]$.

2. Определить параметры, при которых функция будет вогнутой

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x - 4 & x < 1 \\ bx + \ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

3. Построить график функции $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$.

4. Используя (на каком-либо шаге) правило Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{2x^2 - x}\right) \ln(e^{3x^2} + 5x)$$

5. Для $x_0 = 0$ найти многочлен Тэйлора 5 степени для функции $f(x) = \frac{e^{-x+2}}{1-2x}$.

Вариант 3

1. Найти наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ на отрезке $[-2020, 2020]$.

2. Определить параметры, при которых функция будет выпуклой вверх

$$f(x) = \begin{cases} -ax^2 + 3x & x < -1 \\ be^x - 5 & x \geq -1 \end{cases}$$

3. Построить график функции $f(x) = \frac{2-x}{x^2-1}$.

4. Используя (на каком-либо шаге) правило Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2x^3 - 1}\right) \ln(e^{\pi x^2} + x)$$

5. Для $x_0 = 0$ найти многочлен Тэйлора 5 степени для функции $f(x) = \frac{xe^{3x+1}}{1+x^2}$.

2 2020-2021. 2 семестр

2.1 Контрольная 1

Вариант 1

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+5n-1}\right)^{n(n+1)}.$$
2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\sin^4\left(\sqrt{\frac{n^e+4}{2n^3+1}}\right)\right).$$
3. Используя признак Раабе или Гаусса или еще что-нибудь, выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}\ln^4 n}$.

4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\ln n)^{\ln n}}.$$
5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sin(n!)}$.

Вариант 2

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2)!}{2^{n^2}}$.

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^6\left(\cos\left(\sqrt{\frac{n^e+1}{3n^3+1}}\right)-1\right).$$
3. Используя признак Раабе или Гаусса или еще что-нибудь, выяснить, сходится ли ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(\ln 3+\sqrt{2021})(\ln 6+\sqrt{2022})\cdots(\ln(3n)+\sqrt{n+2021})}.$$
4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n)\cdot\sin 2n}{n}.$$
5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sqrt[n]{2}\cos n}$.

Вариант 3

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{5^{3n}(n^2)!}$.

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{1/n}-\frac{2^{1/n}+3^{1/n}}{2}.$$
3. Используя признак Раабе или Гаусса или еще что-нибудь, выяснить, сходится ли ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sin^3\frac{1}{n}}{e^{1+1/2+\cdots+1/n}}.$$
4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{1/n}\sin\frac{n^2-5}{n^3-6n}}{\ln n}.$$
5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{n+e\sin n}$.

Вариант 4

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3n+\sin n}{n^2+5n}\right)^{n(2n+1)}.$$

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\cos^e\left(\sqrt[4]{\frac{n^2+1}{3n^5+1}}\right)\right).$$

3. Используя признак Раабе или Гаусса, выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2021)^{2/3}\ln^5 n}$.

4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+\sin n)^3}.$$

5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1-e^{(-1)^n\sin 1/n}$.

Вариант 5

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+\cos n}{n^2-n}\right)^{n(2n+1)}.$$

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\sqrt{\frac{n+1}{2n^2+1}}-e^{-\frac{1}{4n}}.$$

3. Используя признак Раабе или Гаусса, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\pi}.$$

4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2^{(-1)^{n+1}n}}$.

Вариант 6

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\pi}}{e^n+3^{n+1}}$.

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^e\left(\frac{n^{20}+n+1}{n^{21}-n+3}\right).$$

3. Используя признак Раабе или Гаусса, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{(e^{1+1/2+\cdots+1/n})^2}.$$

4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n^2-4}{n^3-3n+1}}{\sqrt{n+2021}}.$$

5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)$.

2.2 Контрольная 2

Вариант 1

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ последовательность функций

$$f_n(x) = n \operatorname{arctg}\left(\frac{2xn+1}{n^2}\right), \ n \geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xe^{-\sqrt{n}x}}{e^{nx} + \sqrt[3]{n}}.$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{2021}}{\sqrt{n + x^4}}.$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(x-1)^{n!}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$.

Вариант 2

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ последовательность функций

$$f_n(x) = \sqrt{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+\sqrt{n}}{n}\right), \ n \geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cos^2 nx}{e^{nx} + \sqrt{n}}.$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + e^{-n})}{\sqrt{3n + x^2}}.$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n(x+1)^{4^n}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^2+\sin n}}$.

Вариант 3

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на отрезке $[0, 2021]$ последовательность функций

$$f_n(x) = (n+x) \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1+nx}\right), \ n \geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx}}{n^2 + e^{n^2 x}}.$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n + x)}{\sqrt{n^2 + x^2}}.$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1! + 2! + \cdots + n!) x^{n^{2021}}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}+n}{e^{2n}-n}$.

Вариант 4

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на $[0,+\infty)$ последовательность функций

$$f_n(x)=\ln\left(\frac{e^{nx}+x}{e^{nx}-x}\right),\ n\geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[-1,1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}\sin nx}{\ln n}.$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(2x^2+\frac{nx}{3}+\frac{n^2}{60}\right)}.$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(x-e)^{2n}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2+3n-10}{n^2+n+5}$.

Вариант 5

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ последовательность функций

$$f_n(x)=\ln|\cos(x/n)+\sin(x/n)|,\ n\geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[-1,1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}\cos nx}{\sqrt{1+n}}.$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(x^2+nx+\frac{7n^2}{24}\right)}.$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n!}(x+\pi)^{3n}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}e^{1/n^2}\cos(e^{-n})$.

Вариант 6

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на $[0,1)$ последовательность функций

$$f_n(x)=\ln(1+x+\cdots+x^n),\ n\geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[1,2]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin nx}{n}\right).$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg}\left(2x^2+\frac{nx}{2}+\frac{n^2}{8}\right).$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(e^n+n^2)x^{n^2}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n+n}{\sqrt{n}+n}$.

2.3 Контрольная 3

Вариант 1

1. Найти неопределенный интеграл
$$\int \frac{3x^{20} - 4\sqrt{x} + 10\sqrt{\sqrt{x^3}}}{\sqrt[3]{x}} + \sin^2 x\,dx.$$
2. Вычислить, используя интегрирование по частям
$$\int (2x + 3\sin x)^2\,dx.$$
3. Вычислить интеграл от рациональной функции
$$\int \frac{x^4 + x^2 - 6}{2x + x^2}\,dx.$$
4. Провести рационализацию интеграла
$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-2}}{3\sqrt[3]{x-2} - x\sqrt[3]{x+1}}\,dx$$
5. Вычислить первообразную
$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + 3\sin x}\,dx$$

Вариант 2

1. Найти неопределенный интеграл
$$\int \frac{x^{10} - 3\sqrt[4]{x} + 7\sqrt[5]{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \cos^2 x\,dx.$$
2. Вычислить, используя интегрирование по частям
$$\int (4x - 3\,\mathrm{sh}\,x)^2\,dx.$$
3. Вычислить интеграл от рациональной функции
$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - x - 2}{(1+x)^2}\,dx.$$
4. Провести рационализацию интеграла $\int \frac{2-x}{\sqrt{2+3x+4x^2}}\,dx.$

5. Вычислить первообразную $\int \sin x \ln(2\sin x + \cos x)\,dx.$

Вариант 3

1. Найти неопределенный интеграл
$$\int \frac{(x+1)^2 - 5\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$
2. Вычислить, используя интегрирование по частям
$$\int (2\arcsin x + x)^2\,dx.$$
3. Вычислить интеграл от рациональной функции
$$\int \frac{5x^3 + x^2 + x - 1}{5x^2 - 4x - 1}\,dx.$$
4. Провести рационализацию интеграла
$$\int \left(\frac{1+x^2}{x^5}\right)^{1/3}\,dx$$
5. Вычислить первообразную
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin^2 x}}\,dx$$

Вариант 4

1. Найти неопределенный интеграл
$$\int \frac{e^{2x}-e^x-6}{e^x+3} + \sqrt[2]{\sqrt[5]{x^\pi}}\,dx.$$

2. Вычислить, используя интегрирование по частям
$$\int \ln(2x+1)^2\,dx.$$

3. Вычислить интеграл от рациональной функции
$$\int \frac{x^2}{(2+x^2)^2}\,dx.$$

4. Провести рационализацию интеграла
$$\int \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-1}}{5\sqrt{x+2}-x\sqrt{2x-1}}\,dx$$

5. Вычислить первообразную
$$\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+3\sin x}\,dx$$

Вариант 5

1. Найти неопределенный интеграл
$$\int \frac{\operatorname{sh}^2 x + x\operatorname{sh} x - 2x^2}{\operatorname{sh} x - x} + (2+x)^{1+2+\ldots+2021}\,dx.$$

2. Вычислить, используя интегрирование по частям
$$\int e^{4x}\cos^2 x\,dx.$$

3. Вычислить интеграл от рациональной функции
$$\int \frac{x}{8+x^3}\,dx.$$

4. Провести рационализацию интеграла $\int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x+2x^2}}\,dx.$

5. Вычислить первообразную $\int \frac{\sin(x+4)}{2+\cos x}\,dx.$

Вариант 6

1. Найти неопределенный интеграл
$$\int \frac{2x^2 + x\operatorname{ch} x - \operatorname{ch}^2 x}{2x - \operatorname{ch} x} + \sin(x+\pi^{2020})\,dx.$$

2. Вычислить, используя интегрирование по частям
$$\int (\ln x + x)^2\,dx.$$

3. Вычислить интеграл от рациональной функции
$$\int \frac{x}{2x^3+2x^2+x+1}\,dx.$$

4. Провести рационализацию интеграла
$$\int \left(\frac{2-x^2}{x^5}\right)^{1/3}\,dx$$

5. Вычислить первообразную
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin^2 x}}\,dx$$

2.4 Контрольная 4

Вариант 1

1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 (2+x)^3 \sin(\pi x)\, dx$.

2. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^4 \frac{\sin nx}{1+x^2}\, dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x+\sqrt{x}}}{2x+x^2}\, dx.$$

4. Жук ползет с постоянной скоростью v по кривой, заданной параметрически:

$$x = \sqrt{t}\cos t, \quad y = \sqrt{t}\sin t, \quad z = t, \quad t \in [0, 4].$$

Найти время, за которое жук пройдет свой путь.

5. Вычислить

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+2x^2}\, dx$$

Вариант 2

1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 (1+2x)^3 \sqrt{2-x}\, dx$.

2. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^5 \cos(nx) \ln x\, dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin e^x}{\sqrt{x^5-1}}\, dx.$$

4. Муха ползет с постоянной скоростью v по кривой, заданной параметрически:

$$x = \sqrt[6]{t}\cos t, \quad y = \sqrt[6]{t}\sin t, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} t^{2/3}, \quad t \in [0, 2].$$

Найти время, за которое муха пройдет свой путь.

5. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{4+e^{2x}}\, dx$$

Вариант 3

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 \frac{(2+x)^3}{x^2+x}\, dx.$$

2. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{2021} e^x \sqrt[n]{1+x^n}\, dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x+1/x)}{\sqrt{x^3-8}}\, dx.$$

4. Гусеница ползет с постоянной скоростью v по кривой, заданной параметрически:

$$x = t^2\cos t, \quad y = t^2\sin t, \quad z = \frac{4}{5} t^{5/2}, \quad t \in [0, 3].$$

Найти время, за которое гусеница пройдет свой путь.

5. Вычислить

$$\int_5^{+\infty} \frac{\ln(x-5)}{1+x^2}\, dx$$

Вариант 4

1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + 3e^{-x}}\,dx$.

2. Вычислить

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \right) dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость

$$\int_0^3 \frac{\sin^{-1/2}(3-x)}{\sqrt[3]{e^{-x} - e^{2x}}}\,dx.$$

4. Вычислить длину кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = \pi^{2\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi/2$.

5. Вычислить

$$\int_0^{\pi} \sin x \operatorname{arctg}(x - \pi/2)\,dx$$

Вариант 5

1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + e^x}\,dx$.

2. Вычислить

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi n x)}{n^2} \right) dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1/3}(\operatorname{sh} x)}{\sqrt[7]{(x-1)^4}}\,dx.$$

4. Вычислить длину кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = e^{-\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi^{2021}$.

5. Вычислить

$$\int_0^{\pi} \cos x \operatorname{arctg}^2(x - \pi/2)\,dx$$

Вариант 6

1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 2e^{-x}}\,dx$.

2. Вычислить

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x\cos(2nx)}{n^2} \right) dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость

$$\int_2^3 \frac{e^{x^4}\sin(2x-4)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\,dx.$$

4. Вычислить длину кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = 7^{\varphi}, 0 \le \varphi \le 2\pi$.

5. Вычислить

$$\int_0^{\pi} \cos x \ln(\cos^2 x)\,dx$$

3 2021-2022. 3 семестр

3.1 Контрольная 1

Вариант 1

1. Найти все $a \in \mathbb{R}$, для которых существует конечный предел и вычислите этот предел:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} e^{-x^2+axy-y^2}$$

2. Исследовать функцию $z = \sqrt{|xy|}$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Найти матрицу Якоби в точке (0,0,1) для отображения $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, где

$$F(x,y,z) = (x^2 + y\cos(z - 2xy),\ y^2 + \sin(zx + y)).$$

4. Найти первый и второй дифференциалы функции

$$z = (x + y)e^{x^2-y^2}.$$

5. Преобразовать уравнение $xz_{xx} - yz_{yy} = 0, x > 0, y > 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$x = (u + v)^2, \quad y = (u - v)^2.$$

Вариант 2

1. Найти все $a \in \mathbb{R}$, для которых существует конечный предел и вычислите этот предел:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} e^{ax^2+xy-y^2}$$

2. Исследовать функцию $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Найти матрицу Якоби в точке (0,1) для отображения $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, где

$$F(x,y) = (x^2 + y\cos(x - y^2),\ y^2 + \sin(x + y),\ xy).$$

4. Найти первый и второй дифференциалы функции

$$z = (x - 2y)\sin(x^2 + y^2).$$

5. Преобразовать уравнение $xz_{xx} - yz_{yy} = 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$u = xy, \quad v = x/y.$$

Вариант 3

1. Найти все $a \in \mathbb{R}$, для которых существует предел и вычислите этот предел:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \operatorname{arctg}(-x^2 + axy - y^2)$$

2. Исследовать функцию $z = \sin|xy|$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Найти матрицу Якоби в точке (1,0,0) для отображения $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, где

$$F(x,y,z) = (y^2 + xe^{z-2xy},\ x^2 + \cos(zx + y)).$$

4. Найти первый и второй дифференциалы функции

$$z = (3x - y)\cos(x^2 - y^2).$$

5. Преобразовать уравнение $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$u = x + z, \quad v = y + z.$$

Вариант 4

1. Найти предел, или показать, что он не существует

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{xy}{3x^2+xy-2y^2}.$$

2. Исследовать функцию $z=\sqrt{|2x+3y|}$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Найти матрицу Якоби в точке (1,1,1) для отображения $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, где

$$F(x,y,z)=(x^y+y^z, e^{y^2}\sin(z+xy)).$$

4. Найти первый и второй дифференциалы функции

$$z=(2x-y)\cos(xy).$$

5. Преобразовать уравнение $z_{xx}+2xy^2z_x+2(y-y^3)z_y+x^2y^2z=0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$x=uv,\quad y=\frac{1}{v}.$$

Вариант 5

1. Найти предел, или показать, что он не существует

$$\lim_{\substack{x\to+0\\ y\to+0}} \frac{xy}{x^2+2xy-y^2}.$$

2. Исследовать функцию $z=\sqrt{|x-3y|}$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Найти матрицу Якоби в точке (1,1) для отображения $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, где

$$F(x,y)=(x^y-2\cos(xy),\ y^x+\sin(x-2y),\ (y+3x)^2).$$

4. Найти первый и второй дифференциалы функции

$$z=\sin(x^2+3xy-y^2).$$

5. Преобразовать уравнение $6z_{xx}-z_{xy}-z_{yy}=0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$u=x+2y,\quad v=x-3y.$$

Вариант 6

1. Найти предел, или показать, что он не существует

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+0}} \frac{xy+y}{x^2+2xy-y^2}.$$

2. Исследовать функцию $z=\sin|x+2y|$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Найти матрицу Якоби в точке (1,1,1) для отображения $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, где

$$F(x,y,z)=(yxz+e^{z-2xy},\ x^z+\cos(z-2xy)).$$

4. Найти первый и второй дифференциалы функции

$$z=x\cos(x^2+3y).$$

5. Преобразовать уравнение $4z_{xx}+3z_{xy}-z_{yy}=0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$u=x+4y,\quad v=x-y.$$

3.2 Контрольная 2

Вариант 1

1. Найти локальные экстремумы функции

$$z = x^3 + 2xy - y^2 + x - y.$$

2. Задана система из двух уравнений от 4-ёх переменных (x, y, u, v) :

$$\begin{cases} x^2 + xy - ux - v^2 = 0 \\ u^3 - yv + x^2u = 0 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(1, 0, 0, 1)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, и (в) найти в этой точке дифференциал dx.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = \operatorname{arctg}(2x + y^2 - z)\}$, в которых касательная плоскость к M ортогональна вектору $n = (1, 1, -1)$.

4. Разложить функцию $z = \ln(1 + \frac{x}{y})$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(0, 1)$ до $o(x^2 + (y-1)^2)$.

5. Определить экстремумы функции $z = 2xy - x^2$ на множестве $2x^2 + y^2 = 1$.

Вариант 2

1. Найти локальные экстремумы функции

$$z = 2x^3 - xy + y^2 - x + 2y.$$

2. Задана система из двух уравнений от 4-ёх переменных (x, y, u, v) :

$$\begin{cases} yv - 3u^2 + x^2 = 0 \\ v^2 + yx - ux = 0 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(-1, 1, 0, -1)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, и (в) найти в этой точке дифференциал dx.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; yx = \operatorname{arctg}(z + y^2 - 3x)\}$, в которых касательная плоскость к M ортогональна вектору $n = (3, 1, -1)$.

4. Разложить функцию $z = \ln(1 - \frac{y}{2x})$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, 0)$ до $o((x-1)^2 + y^2)$.

5. Определить экстремумы функции $z = (x - 3y)^2$ на множестве $2y^2 + x^2 = 1$.

Вариант 3

1. Найти локальные экстремумы функции

$$z = 2y^3 - xy + x^2 - 3x + y.$$

2. Задана система из двух уравнений от 4-ёх переменных (x, y, u, v) :

$$\begin{cases} x^2 \cos u - v^2 \sin y = 1 \\ vx - y \cos v + u^2 = 0 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(1, 0, 0, 0)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, и (в) найти в этой точке дифференциал dy.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; zy = \operatorname{arctg}(x - 2y - z^2)\}$, в которых касательная плоскость к M ортогональна вектору $n = (1, -2, -1/2)$.

4. Разложить функцию $z = \frac{\cos(x-1)}{3y}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, 1)$ до $o((x-1)^2 + (y-1)^2)$.

5. Определить экстремумы функции $z = xy$ на множестве $x^2 + 2y^2 = x$.

Вариант 4

1. Исследовать функцию $z = (x + 2y)e^{2xy-y^2}$ на локальные экстремумы.

2. Задана система из двух уравнений от 3-ёх переменных (x, y, z) :

$$\begin{cases} x^2 + xy - \sin(x + z + y) - z^2 = 0 \\ z^3 - yx - \cos(x + y + z) = 0 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(1, -1, 0)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функцию $x = x(y)$ и $z = z(y)$ (в) найти в этой точке дифференциалы dx и dz.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 1\}$, в которых касательная плоскость к M такова, что она пересекает ось OX в точке $x = 2$, а ось OY в точке $y = 2$.

4. Преобразовать уравнение $z_{xx} + 2xy^2 z_x + 2(y - y^3)z_y + x^2y^2 z = 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{v}.$$

5. Определить условные экстремумы функции $z = x^2 - 2y$ на множестве $x^3 + y^3 = 1$.

Вариант 5

1. Исследовать функцию $z = (x + y - 2y^2)e^{2x-3y}$ на локальные экстремумы.

2. Задана система из двух уравнений от 3-ёх переменных (x, y, z) :

$$\begin{cases} ye^{x+z} - 3z^2 + \sin(x + y) + e = 0 \\ z^2 + yx + e^{z+y+x} = 0 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(1, -1, 0)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функции $x = x(y)$ и $z = z(y)$, и (в) найти в этой точке дифференциалы dx и dz.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$, в которых касательная плоскость к M такова, что она пересекает ось OZ в точке $z = 2$, а ось OX в точке $x = -1$.

4. Преобразовать уравнение $6z_{xx} - z_{xy} - z_{yy} = 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$u = x + 2y, \quad v = x - 3y.$$

5. Определить условные экстремумы функции $z = y^3 + 2x$ на множестве $y^3 + x^2 = 1$.

Вариант 6

1. Исследовать функцию $z = (xy + 2)e^{x^2-y^2}$ на локальные экстремумы.

2. Задана система из двух уравнений от 3-ёх переменных (x, y, z) :

$$\begin{cases} x^2 \cos(y^2 - z) - z^2 \sin(x - y) = 4\cos 1 \\ xyz + y\cos(x + 2y + 3z) = 1 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(-2, 1, 0)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функции $x = x(y)$ и $z = z(y)$, и (в) найти в этой точке дифференциалы dx и dz.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$, в которых касательная плоскость к M такова, что она пересекает ось OZ в точке $z = 5$, а ось OY в точке $y = 2$.

4. Преобразовать уравнение $4z_{xx} + 3z_{xy} - z_{yy} = 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$u = x + 4y, \quad v = x - y.$$

5. Определить условные экстремумы функции $z = 2x^3 + y$ на множестве $x^3 + 2y^2 = 1$.

3.3 Контрольная 3

Вариант 1

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega \frac{x\,dxdy}{(1+y)^2}$, где

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; y \leq x^2 + 1, \; y \leq (x-3)^2 - 1\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2 + 2y^2)^2 = x + y$.

3. Вычислить тройной интеграл

$$\int_0^1 \int_z^{2z} \int_0^{y^2} (x+z)^2 \, dx \, dy \, dz.$$

4. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для астеройда "Камешек-26112021" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = 2x^2$ и форму, задаваемую неравенствами

$$\sqrt{x^2 + 2y^2} \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2 + 2y^2}.$$

Определить массу этого астеройда и аппликату его центра масс.

5. Вычислить интеграл

$$\iiiint\limits_{|x+y|+|2y+z|+|z+2|+|w+x| \leq 1} z \, dxdydzdw.$$

Вариант 2

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega \frac{y\,dxdy}{1+x}$, где

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 3 \geq x \geq 0, \; y \geq 0, \; y \leq x^2, \; y \leq (x-3)^2 + 1\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $(2x^2 + y^2)^2 = 2x + y$.

3. Вычислить тройной интеграл

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{y^2} (x-z)^2 \, dz \, dy \, dx.$$

4. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для астеройда "Камешек-26112021" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = 3y^2$ и форму, задаваемую неравенствами

$$\sqrt{2x^2 + y^2} \leq z \leq 3 - \sqrt{2x^2 + y^2}.$$

Определить массу этого астеройда и абсциссу его центра масс.

5. Вычислить интеграл

$$\iiiint\limits_{|x-2y|+|y+3z|+|z-x|+|w+1| \leq 1} w \, dxdydzdw.$$

Вариант 3

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega \frac{dxdy}{(1+xy)^2}$, где

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; y \leq x^2, \; y \leq 1 - 2x^2\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2 + y^2)^3 = x + y$.

3. Вычислить тройной интеграл

$$\int_0^1 \int_y^{3y} \int_0^{x^2} (z+2y)^2 \, dz \, dx \, dy.$$

4. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для астеройда "Камешек-26112021" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2$ и форму, задаваемую неравенствами

$$\sqrt{3x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3x^2 + y^2}.$$

Определить массу этого астеройда и ординату его центра масс.

5. Вычислить интеграл

$$\iiiint\limits_{|x+z|+|y+2w|+|y+1|+|w-x| \leq 1} y \, dxdydzdw.$$

Вариант 4

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega |x-y|\,dxdy$, где

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ \frac{x}{2} \le y \le 4x^2\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах равенством $r(\varphi) = -\varphi^2 + 3\varphi - 2$.

3. Вычислить тройной интеграл

$$\int_0^1 \int_1^{z+2} \int_{-y}^{y} xy - z\,dx\,dy\,dz.$$

4. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для кометы "Глыба-24122021" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = |xy|$ и форму, задаваемую неравенствами

$$2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 8 - x^2 - y^2.$$

Определить массу кометы и аппликату ее центра масс.

5. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |x| \left(\iint\limits_{z^2+w^2\le x^2+y^2} dzdw \right) dxdy.$$

Вариант 5

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega |x-y|\,dxdy$, где

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ \frac{x^2}{2} \le y \le 2x\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах равенством $r(\varphi) = \varphi\sqrt[3]{3-\varphi}$.

3. Вычислить тройной интеграл

$$\int_0^1 \int_{x-1}^{x+1} \int_{y}^{3y} x - zy\,dz\,dy\,dx.$$

4. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для кометы "Глыба-24122021" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = |yz|$ и форму, задаваемую неравенствами

$$4\sqrt{2x^2+y^2} \le z \le 5 - (2x^2+y^2).$$

Определить массу кометы и абсциссу ее центра масс.

5. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |y| \left(\iint\limits_{z^2+w^2\le |xy|} dzdw \right) dxdy.$$

3.4 Контрольная 4

Вариант 1

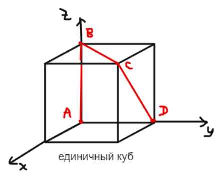
1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{\substack{xy\le 1\\ x\ge 1,\ y\ge 0}} \frac{y\,dxdy}{3y^p+\sqrt{x}}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{0\le x,y,z\le 1} \frac{dxdydz}{z-\sin(xy)}.$$

3. На кривой $ABCD$ распределена масса с плотностью $\rho(x,y,z)=x+2y^2+3z$. Найти абсциссу центра масс



4. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода $\iint_S z^3 dS$, где S — это часть верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$, лежащая внутри параболического цилиндра $y+z^2=1$.

Вариант 2

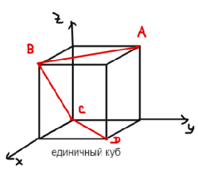
1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{\substack{2x+3y\ge 1\\ x\ge 0,\ y\ge 0}} \frac{\sqrt{x}\,dxdy}{x^3+y^p}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{0\le x,y,z\le 1} \frac{dxdydz}{\sqrt{z}-\sqrt{xy}}.$$

3. На кривой $ABCD$ распределена масса с плотностью $\rho(x,y,z)=2x^2+yz$. Найти ординату центра масс



4. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода $\iint_S \sqrt{1+4y^2}dS$, где S — это часть параболического циллиндра $z=y^2-1$, лежащая внутри другого параболического цилиндра $z=1-x^2$.

Вариант 3

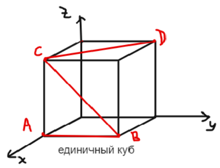
1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{\substack{x+y^2\le 1\\ x\ge 0,\ y\ge 0}} \frac{\sqrt[3]{x}\,dxdy}{x^p+2y}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{0\le x,y,z\le 1} \frac{dxdydz}{\sqrt[3]{z-y\sqrt{x}}}.$$

3. На кривой $ABCD$ распределена масса с плотностью $\rho(x,y,z) = 2xz + y^2$. Найти аппликату центра масс



4. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода $\iint_S xydS$, где S — это часть параболойда $\frac{z}{2} = 1 - y^2 - x^2$, лежащая внутри единичного куба $0 \le x, y, z \le 1$.

Вариант 4

1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{ydxdy}{y^{2p} + x^2}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{x \ge y \ge z \ge 1} \frac{dxdydz}{x + xyz + xyz}.$$

3. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int\limits_{\gamma} \frac{x^2}{\sqrt{z}} - z\sin(3x - y)\, d\ell,$$

где γ — дуга кривой $z = 2x^2 + y^2, 3x = y$, соединяющая точки $(0,0,0)$ и $(1,3,11)$.

4. Определить массу поверхности $z = xy$, расположенной внутри циллиндра $x^2 + y^2 = 1$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y,z) = |xy|$.

Вариант 5

1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\sqrt{|x|}dxdy}{y^{2q} + x^2}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{x,y,z \ge 1} \frac{dxdydz}{(xy + yz + xz)^3}.$$

3. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z}{x} + y\cos(x - 2y)\, d\ell,$$

где γ — дуга кривой $z = x^2 + y^2, x = 2y$, соединяющая точки $(0,0,0)$ и $(2,1,5)$.

4. Определить массу циллиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 1$, расположенной между плоскостями $x + z = 0$ и $x + z = 1$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y,z) = |z| + |x|$.

4 2021-2022. 4 семестр

4.1 Контрольная 1

Вариант 1

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{(x+\alpha)^{4/3}}\,dx, \quad \alpha \geq 2$$

и вычислить $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.

2. Используя правило Бернулли–Лопиталя и правило Лейбница, вычислить предел

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x}\int_{\sin x}^{x} \frac{e^{xt}}{t}\,dt.$$

3. Исследовать несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \geq \varepsilon > 0$ на равномерную сходимость.

4. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{x^{-2/5}\ln x}{1+x}\,dx$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$.

Вариант 2

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{(x+\alpha)^{5/4}}\,dx, \quad \alpha \geq 0$$

и вычислить $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.

2. Используя правило Бернулли–Лопиталя и правило Лейбница, вычислить предел

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x^{3/2}}\int_{x}^{\sqrt{x}} \frac{\sin(xt)}{t}\,dt.$$

3. Исследовать несобственный интеграл $\int_1^\infty \cos(x^\alpha)\,dx$, $\alpha \geq 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ на равномерную сходимость.

4. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^n}\,dx$.

Вариант 3

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$I(\alpha) = \int_2^3 \sqrt[3]{\frac{e^x}{x-\alpha}}\,dx, \quad \alpha \leq 2$$

и вычислить $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)$.

2. Используя правило Бернулли–Лопиталя и правило Лейбница, вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x}\int_{x}^{x^2} \frac{\operatorname{arctg}(xt)}{t}\,dt.$$

3. Исследовать несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x)^\alpha}\,dx$, $\alpha \geq \varepsilon > 0$ на равномерную сходимость.

4. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{x^{-1/3}\ln x}{1+x}\,dx$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-x^n}\,dx$.

Вариант 4

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$I(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{\sin x}{(x+\alpha)^{4/3}}\,dx, \quad \alpha \geq 1$$

и вычислить $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.

2. Вычислить $f''(0)$, если

$$f(x) = \int_{x^2}^{x} \sin^{2022}(xt+1)\,dt.$$

3. Исследовать несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx$, $\alpha \in [0,1]$ на равномерную сходимость.

4. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x} e^{-3x}\,dx$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(2x)^n}\,dx$.

Вариант 5

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\operatorname{arctg} x}{(x+\alpha)^{5/4}}\,dx, \quad \alpha \geq 1$$

и вычислить $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.

2. Вычислить $f''(0)$, если

$$f(x) = \int_{x}^{x^2} \cos^{567}(xt-1)\,dt.$$

3. Исследовать несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(e^x)}{1+x^\alpha}\,dx$, $\alpha > 0$ на равномерную сходимость.

4. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{x} e^{-\pi x}\,dx$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+(\pi x)^{3n}}\,dx$.

Вариант 6

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{x+\alpha}, dx, \quad \alpha \geq 1$$

и вычислить $\lim\limits_{\alpha\to\infty} I(\alpha)$.

2. Вычислить $f''(0)$, если

$$f(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{\operatorname{arctg}(xt)}{t}\,dt.$$

3. Исследовать несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{\ln^\alpha x}{x} \sin x\,dx$, $\alpha \in [0,1]$ на равномерную сходимость.

4. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2+x^n}\,dx$.

4.2 Контрольная 2

Вариант 1

1. Пусть $f(x,y) = e^x \cdot \chi_{[-1,1]}(y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ и $g(x,y) = f(y,x)$, вычислите свёртку $f * g$.

2. Найти ряд Фурье по классической тригонометрической системе для функции

$$f(x) = \cos(4x) + \frac{x+5}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-периодическая интегрируемая с квадратом на периоде функция. Может ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(2nx)}{\sqrt{n}}$$

быть ее рядом Фурье?

4. Вычислить преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{-x} \cdot \chi_{(-1,+\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R}$.

5. Используя свойства преобразования Фурье, найти

$$\mathcal{F}\left[y\cos(3y)e^{-5(y+3)^2}\right](x).$$

Вариант 2

1. Пусть $f(x,y) = \sin(x) \cdot \chi_{[-1,1]}(y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ и $g(x,y) = \cos(y) \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$, вычислите свёртку $f * g$.

2. Найти ряд Фурье по классической тригонометрической системе для функции

$$f(x) = \sin(7x) + \frac{|x|-1}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-периодическая непрерывно дифференцируемая функция. Может ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{n} + (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n}$$

быть ее рядом Фурье?

4. Вычислить преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{x} \cdot \chi_{(-\infty,1)}(x),\ x \in \mathbb{R}$.

5. Используя свойства преобразования Фурье, найти

$$\mathcal{F}\left[(y+1)\sin(2y)e^{-3(y-1)^2}\right](x).$$

Вариант 3

1. Пусть $f(x,y) = x^3 \cdot \chi_{[-1,1]}(y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ и $g(x,y) = f(-y,-x)$, вычислите свёртку $f * g$.

2. Найти ряд Фурье по классической тригонометрической системе для функции

$$f(x) = \cos^2(3x) + \chi_{[-1,1]}(x), \quad x \in (-\pi, \pi).$$

3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-периодическая интегрируемая на периоде функция. Может ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{1/n}}$$

быть ее рядом Фурье?

4. Вычислить преобразование Фурье для функции $f(x) = \operatorname{sh}(x) \cdot \chi_{(-1,\ln 5)}(x),\ x \in \mathbb{R}$.

5. Используя свойства преобразования Фурье, найти

$$\mathcal{F}\left[y\cos(y+1)e^{-(1-y/2)^2}\right](x).$$

Вариант 4

1. Пусть $f(x,y) = x \cdot \chi_{[-1,1]}(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ и $g(x,y) = 2f(y,x)$, вычислите свёртку $f * g$.

2. Найти ряд Фурье по классической тригонометрической системе для функции

$$f(x) = \cos(4x) + \frac{x+5}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-периодическая интегрируемая с квадратом на периоде функция. Может ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(2nx)}{\sqrt{n}}$$

быть ее рядом Фурье?

4. Вычислить преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{-x} \cdot \chi_{(-1,+\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Используя свойства преобразования Фурье, найти

$$\mathcal{F}\left[y\cos(3y)e^{-5(y+3)^2} \right](x).$$

Вариант 5

1. Пусть $f(x,y) = (x-2y) \cdot \chi_{[-1,1]}(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ и $g(x,y) = (y+x) \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$, вычислите свёртку $f * g$.

2. Найти ряд Фурье по классической тригонометрической системе для функции

$$f(x) = \sin(7x) + \frac{|x|-1}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-периодическая непрерывно дифференцируемая функция. Может ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3nx)}{n} + (-1)^n \frac{\cos(nx)}{2n+1}$$

быть ее рядом Фурье?

4. Вычислить преобразование Фурье для функции $f(x) = e^{x+1} \cdot \chi_{(-\infty,4)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Используя свойства преобразования Фурье, найти

$$\mathcal{F}\left[(y+1)\sin(2y)e^{-3(y-1)^2} \right](x).$$

Вариант 6

1. Пусть $f(x,y) = xy \cdot \chi_{[-1,1]}(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ и $g(x,y) = f(-y,-x)$, вычислите свёртку $f * g$.

2. Найти ряд Фурье по классической тригонометрической системе для функции

$$f(x) = \cos^2(3x) + \chi_{[-1,1]}(x), \quad x \in (-\pi, \pi).$$

3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – 2π-периодическая интегрируемая на периоде функция. Может ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^{1/n}}$$

быть ее рядом Фурье?

4. Вычислить преобразование Фурье для функции $f(x) = \mathrm{sh}(x) \cdot \chi_{(-1,\ln 5)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Используя свойства преобразования Фурье, найти

$$\mathcal{F}\left[y\cos(y-1)e^{-(1-y/2)^2} \right](x).$$

4.3 Контрольная 3

Вариант 1

1. Исследовать на потенциальность (и найти потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = (3x^2y^2z + y^2z^3, 2x^3yz + 2xyz^3, x^3y^2 + 3xy^2z^2).$$

2. Исследовать на соленоидальность (и найти векторный потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = ye^z\mathbf{i} + ze^x\mathbf{j} + xe^y\mathbf{k}.$$

3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(-3)^n} \underbrace{rot \circ \cdots \circ rot}_{2n+1} \vec{F}$, где $\vec{F} = (e^{x+y+z}, y^{2022}, z^{2022})$.

4. Посчитать работу поля $\vec{F} = ((x+1)^2, 2y, 1)$ вдоль кривой γ, заданной условиями

$$z = 4 - x^2 - y^2,\ y = -(x+2)^2/2,\ z \geq 0$$

и ориентированной направлением обхода от точки $(-2, 0, 0)$ к точке $(0, -2, 0)$.

5. Для поля $\vec{F} = (zx + y)\mathbf{i} + (2zy - x)\mathbf{j} + e^{xyz}\mathbf{k}$ вычислить поток через внутреннюю часть боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1$.

Вариант 2

1. Исследовать на потенциальность (и найти потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = \left(\frac{3x^2y^2}{z} - 2x^3, \frac{2x^3y}{z} + 3y^3, z^3 - \frac{x^3y^2}{z^2}\right).$$

2. Исследовать на соленоидальность (и найти векторный потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = e^{z-x}\mathbf{i} + ye^{z-x}\mathbf{j} + e^{y+x}\mathbf{k}.$$

3. Для гладкого поля $\vec{F} = (P, Q, R)$ определим две операции

$$[\vec{F}] = (R, P, Q), \quad \phi(\vec{F}) = (div\vec{F}, div[\vec{F}], div[[\vec{F}]]).$$

Вычислить для поля $\vec{F} = (e^x, e^{2y}, e^{3z})$ поле $\underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{2022}(\vec{F})$.

4. Посчитать работу поля $\vec{F} = (z, 1, (1-x)/4)$ вдоль кривой γ, заданной условиями

$$z = 1 - x^2 - y^2/4,\ y = -2(x-1)^2,\ z \geq 0$$

и ориентированной направлением обхода от точки $(1, 0, 0)$ до точки $(0, -2, 0)$.

5. Для поля $\vec{F} = e^{x+yz}\mathbf{i} + (xy + 3z)\mathbf{j} - (2zx + 3y)\mathbf{k}$ вычислить поток через внутреннюю часть боковой поверхности цилиндра $z^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq x \leq 1$.

Вариант 3

1. Исследовать на потенциальность (и найти потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = (y - z, x - z, e^z - x - y).$$

2. Исследовать на соленоидальность (и найти векторный потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = \frac{3z}{x}\mathbf{i} + \frac{yz}{x^2}\mathbf{j} + \frac{z^2}{x^2}\mathbf{k}.$$

3. Для гладкого поля $\vec{F} = (P, Q, R)$ определим операцию

$$\psi(\vec{F}) = (\nabla P, \nabla Q)\mathbf{i} + (\nabla Q, \nabla R)\mathbf{j} + (\nabla R, \nabla P)\mathbf{k}.$$

Вычислить для поля $\vec{F} = (e^{y+z}, e^{x+z}, e^{x+y})$ поле $\underbrace{\psi \circ \cdots \circ \psi}_{10}(\vec{F})$.

4. Посчитать работу поля $\vec{F} = (x + y, y, 1/2)$ вдоль кривой γ, заданной условиями

$$z = 1 - 4x^2 - y^2,\ y = (2x-1)^2,\ z \geq 0$$

и ориентированной направлением обхода от точки $(1/2, 0, 0)$ до точки $(0, 1, 0)$.

5. Для поля $\vec{F} = (z - x)\mathbf{i} + (z^2y)\mathbf{j} - xe^z\mathbf{k}$ вычислить поток через внешнюю часть боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1$.

Вариант 4

1. Исследовать на потенциальность (и найти потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = \left(\frac{1}{1+e^z}, \frac{\cos(y+z)}{1+e^z}, \frac{\cos(y+z)}{1+e^z} - \frac{e^z\sin(y+z)}{(1+e^z)^2}\right).$$

2. Исследовать на соленоидальность (и найти векторный потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = ye^{z-2y}\mathbf{i} + ze^{x-z}\mathbf{j} + (x+y)e^y\mathbf{k}.$$

3. Приведите пример гладкого векторного поля, для которого $rot\vec{F} = \vec{F}$.

4. Найти работу векторного поля $\vec{F} = (x, y+z, z)$ вдоль контура, задаваемого условиями: $z = 1 - x^2 - y^2, z - y = 1, x \geq 0$, и ориентированного направлением от точки $(0,-1,0)$ к точке $(0,0,1)$.

5. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (ye^z, 2x, x)$ через прямоугольную площадку $ABCD$ с вершинами $A(3,0,1), B(-2,0,1), C(-2,2,0)$ и $D(3,2,0)$. Ориентация площадки согласована с обходом края: $A \to B \to C \to D$.

Вариант 5

1. Исследовать на потенциальность (и найти потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = \left(\cos(y+z), -x\sin(y+z), 3z^2 - x\sin(y+z)\right).$$

2. Исследовать на соленоидальность (и найти векторный потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = (e^{z-x} + zy)\mathbf{i} + (ye^{z-x} - xz)\mathbf{j} + xye^{y+x}\mathbf{k}.$$

3. Приведите пример гладкого векторного поля, для которого $rot\vec{F} = -\vec{F}$.

4. Найти работу векторного поля $\vec{F} = (x, yx, z)$ вдоль контура, задаваемого условиями: $z = 1 - x^2 - y^2, z + x = 1, y \geq 0$, и ориентированного направлением от точки $(1,0,0)$ к точке $(0,0,1)$.

5. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (y, ze^x, 2y)$ через прямоугольную площадку $ABCD$ с вершинами $A(0,0,2), B(0,2,2), C(1,2,0)$ и $D(1,0,0)$. Ориентация площадки согласована с обходом края: $A \to D \to C \to B$.

Вариант 6

1. Исследовать на потенциальность (и найти потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = (z\cos(e^{x^2})e^{x^2}2x, -3zy^2, -y^3 + \sin e^{x^2}).$$

2. Исследовать на соленоидальность (и найти векторный потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = \frac{3z+y}{x}\mathbf{i} + \frac{yz}{x^2}\mathbf{j} + \frac{z^2+yz}{x^2}\mathbf{k}.$$

3. Приведите пример непостоянного гладкого векторного поля $\vec{F} = (P, Q, R)$, для которого

$$grad(P+Q+R) = (divP\vec{e}, divQ\vec{e}, divR\vec{e}),$$

где $\vec{e} = (1,1,1)$.

4. Найти работу векторного поля $\vec{F} = (xz, y, z-1)$ вдоль контура, задаваемого условиями: $z = 1 - x^2 - y^2, z - x = 1, y \geq 0$, и ориентированного направлением от точки $(0,0,1)$ к точке $(-1,0,0)$.

5. Найти поток векторного поля $F = (x, ye^z, -x)$ через прямоугольную площадку $ABCD$ с вершинами $A(0,-1,2), B(0,2,2), C(1,2,0)$ и $D(1,-1,0)$. Ориентация площадки согласована с обходом края: $A \to B \to C \to D$.

4.4 Контрольная 4

Вариант 1

1. В $\mathbb{R}^3$ задана дифференциальная форма $\omega = y\,dx \wedge dz$, векторное поле $\vec{F} = (x, y, z)$ и диффеоморфизм $\varphi(u, v, w) = (u, u + v, u + v + w)$. Вычислить $\varphi^*(i_{\vec{F}}(\omega))$.

2. В $\mathbb{R}^4$ задана дифференциальная форма

$$\omega = (x + y + z + u)\,dx \wedge dy \wedge dz \wedge du.$$

Исследовать ее на замкнутость и точность, и найти потенциал (первообразную).

3. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma (x + 2y + 5z)\,dx + (2y - x + 3z)\,dy + (y + 4z + 2x)\,dz,$$

где контур γ получается пересечением плоскости $2z + x + 2y = 3$ с поверхностью куба

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1,$$

и ориентирован против часовой стрелки, если смотреть из точки $(1, 1, 1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S ((x + yz)\,dx + z\,dy) \wedge d(x^2 + zy),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

5. Сколько точных базисных форм есть в $\mathbb{R}^n$?

Вариант 2

1. В $\mathbb{R}^3$ задана дифференциальная форма $\omega = x\,dy \wedge dz$, векторное поле $\vec{F} = (x + y, y + z, z + x)$ и диффеоморфизм $\varphi(u, v, w) = (u - v, v - w, w - u)$. Вычислить $\varphi^*(i_{\vec{F}}(\omega))$.

2. В $\mathbb{R}^4$ задана дифференциальная форма

$$\omega = (xy + yu)\,dx \wedge dy + (zu - ux)\,dz \wedge du + (y^2/2 - xz)\,dx \wedge du.$$

Исследовать ее на замкнутость и точность, и найти потенциал (первообразную).

3. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma (2x - 2y + 3z)\,dx + (y - 5x + z)\,dy - (3y + z + x)\,dz,$$

где контур γ получается пересечением плоскости $2z + x + 2y = 2$ с поверхностью куба

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1,$$

и ориентирован против часовой стрелки, если смотреть из точки $(1, 1, 1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S ((2y - z)\,dx - x\,dz) \wedge d(y^2 - zx),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2z$.

5. Сколько точных базисных форм порядка 2 есть в $\mathbb{R}^n$?

Вариант 3

1. В $\mathbb{R}^3$ задана дифференциальная форма $\omega = z\,dx \wedge dy$, векторное поле $\vec{F} = (e^x, e^y, e^z)$ и диффеоморфизм $\varphi(u, v, w) = (u + v, v + w, e^{-v})$. Вычислить $\varphi^*(i_{\vec{F}}(\omega))$.

2. В $\mathbb{R}^4$ задана дифференциальная форма

$$\omega = (z + u)\,dx \wedge dy \wedge dz + (x + y)\,dy \wedge dz \wedge du + (z + u + x)\,dz \wedge du \wedge dx.$$

Исследовать ее на замкнутость и точность, и найти потенциал (первообразную).

3. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma (x - 12y + z)\,dx + (y - 10x + 2z)\,dy - (y + 2z + x)\,dz,$$

где контур γ получается пересечением плоскости $2z + 2x + y = 3$ с поверхностью куба

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1,$$

и ориентирован по часовой стрелки, если смотреть из точки $(1, 1, 1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S d(yx + z) \wedge (y\,dz - (y + x^2)\,dx),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$.

5. Сколько точных базисных форм порядка $n - 1$ есть в $\mathbb{R}^n$?

Вариант 4

1. В $\mathbb{R}^3$ задана дифференциальная форма $\omega = e^y\,dx \wedge dz$, векторное поле $\vec{F} = (xy, yz, xz)$ и диффеоморфизм $\varphi(u, v, w) = (2u, u - v, v + 2w)$. Вычислить $\varphi^*(i_{\vec{F}}(\omega))$.

2. В $\mathbb{R}^4$ задана дифференциальная форма

$$\omega = (x + e^y + z^2 - u)\,dx \wedge dy \wedge dz \wedge du.$$

Исследовать ее на замкнутость и точность, и найти потенциал (первообразную).

3. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma (x + 2y - z)\,dx + (3y - x + 3z)\,dy + (y - 4z + 2x)\,dz,$$

где контур γ получается пересечением плоскости $z + 2x + 2y = 3$ с поверхностью куба

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1,$$

и ориентирован против часовой стрелки, если смотреть из точки $(1, 1, 1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S ((x + yz)\,dx + z\,dy) \wedge d(x^2 + zy),$$

где S — внешняя сторона полушара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2x, z \ge 0$.

5. Сколько точных базисных форм порядка 3 есть в $\mathbb{R}^5$?

Вариант 5

1. В $\mathbb{R}^3$ задана дифференциальная форма $\omega = e^x\,dy \wedge dz$, векторное поле $\vec{F} = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ и диффеоморфизм $\varphi(u, v, w) = (u + v, 2v - w, w + u)$. Вычислить $\varphi^*(i_{\vec{F}}(\omega))$.

2. В $\mathbb{R}^4$ задана дифференциальная форма

$$\omega = (xy + yu)\,dx \wedge dy + (zu - ux)\,dz \wedge du + R\,dx \wedge du.$$

При какой функции R она будет замкнутой, точной?

3. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma (x-2y+5z)\,dx + (2y-4x+z)\,dy - (3y+z+2x)\,dz,$$

где контур γ получается пересечением плоскости $2z+2x+y=2$ с поверхностью куба

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1,$$

и ориентирован по часовой стрелке, если смотреть из точки $(1,1,1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S ((2y-z)\,dx - x\,dz) \wedge d(y^2-zx),$$

где S — внешняя сторона полушара $x^2+y^2+z^2 \le 2x+2z, y \ge 0$.

5. Сколько точных базисных форм порядка 2 есть в $\mathbb{R}^{2022}$?

Вариант 6

1. В $\mathbb{R}^3$ задана дифференциальная форма $\omega = e^z\,dx \wedge dy$, векторное поле $\vec{F} = (x, y^2, z^3)$ и диффеоморфизм $\varphi(u,v,w) = (2u+v, v+2w, w-3u)$. Вычислить $\varphi^*(i_{\vec{F}}(\omega))$.

2. В $\mathbb{R}^4$ задана дифференциальная форма

$$\omega = (z+u)\,dx \wedge dy \wedge dz + Q\,dy \wedge dz \wedge du + (z+u+x)\,dz \wedge du \wedge dx.$$

При какой функции Q она будет замкнутой, точной?

3. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma (x-7y+z)\,dx + (2y-3x+2z)\,dy - (y+z+x)\,dz,$$

где контур γ получается пересечением плоскости $2z+2x+y=3$ с поверхностью куба

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1,$$

и ориентирован против часовой стрелки, если смотреть из точки $(1,1,1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S d(yx+z) \wedge (y\,dz - (y+x^2)\,dx),$$

где S — внешняя сторона полушара $x^2+y^2+z^2 \le 2y, x \ge 0$.

5. Сколько точных базисных форм порядка $n-1$ есть в $\mathbb{R}^n$?

5 2022-2023. 1 семестр

5.1 Контрольная 1

Вариант 1

1. Известно, что $x+\frac{1}{x}$ - целое число. Докажите, что $x^n+\frac{1}{x^n}$ - также целое при любом $n\in\mathbb{N}$.

2. Определить точные границы множества

$$A=\left\{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}: p\in\mathbb{N}, p+1 \text{ делится на } 3, q\in\mathbb{N}, p<q, q \text{ делится на } 2022\right\}.$$

3. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f:\mathbb{Q}\times((\mathbb{R}\setminus\sqrt{2}\mathbb{Q})\cup\{0\})\to\mathbb{R}$, действующее по правилу

$$f(x,y)=\sqrt{2}x+y,\ x\in\mathbb{Q}, y\in(\mathbb{R}\setminus\sqrt{2}\mathbb{Q})\cup\{0\}.$$

4. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-6n+5}{7\sqrt{n^7}+\sqrt[n]{n}}=0.$$

5. Найти предел последовательности $x_n=\frac{\ln(n+2\sin(3n))}{\ln(n^2+1)}$.

Вариант 2

1. Показать, что для всех $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

2. Определить точные границы множества

$$A=\left\{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}: p\in\mathbb{N}, p \text{ делится на } 5, q\in\mathbb{N}, p<q, q+1 \text{ делится на } 2022\right\}.$$

3. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, действующее по правилу

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{3}+y},\ x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}.$$

4. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-105n+3}{6\sqrt{n^5}+\sqrt[n]{11}}=0.$$

5. Найти предел последовательности $x_n=\frac{\ln(n^3+6n)}{\ln(n^2+2\cos(3n))}$.

Вариант 3

1. Покажите, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ верно тождество

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

2. Определить точные границы множества

$$A=\left\{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}: p\in\mathbb{N}, p+1 \text{ делится на } 7, q\in\mathbb{N}, p<q, q+1 \text{ делится на } 2022\right\}.$$

3. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f:(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$, действующее по правилу

$$f(x,y)=\sqrt{2}x+\sqrt{3}y,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}.$$

4. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n^3}-7n+2}{n^2+\sqrt[n]{17}}=0.$$

5. Найти предел последовательности $x_n=\frac{\ln(3n^3+2^n)}{n+4\cos(3n)}$.

Вариант 4

1. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ число $2^{5n+3} + 5^n 3^{n+2}$ делится на 17.

2. Определить точные границы множества

$$A = \left\{ \frac{n^2}{m^2+n} \in \mathbb{Q} : n, m \in \mathbb{N}, n \le m \right\}.$$

3. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f : [1,2) \times \mathbb{N} \to [0,1)$, действующее по правилу

$$f(x,y) = \left\{ x + \frac{1}{y} \right\},\ x \in [1,2), y \in \mathbb{N}.$$

Скобки $\{\cdot\}$ обозначают дробную часть числа.

4. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n + \sin n}{4\sqrt{n^3} + \cos n} = 0.$$

5. Найти предел последовательности $x_n = \frac{\ln(5n^3 - n)}{\ln(9n^2 + \sin(n!))}$.

Вариант 5

1. Показать, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $5^n \ge n(2^n + 3^n)$.

2. Определить точные границы множества

$$A = \left\{ \frac{m - n^2}{m+n} \in \mathbb{Q} : n, m \in \mathbb{N}, m > n^2 \right\}.$$

3. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, действующее по правилу

$$f(x,y) = x! - y,\ x, y \in \mathbb{N}.$$

4. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + (-1)^{n!}}{\sin^2 n + 4n^2} = 0.$$

5. Найти предел последовательности $x_n = \frac{\ln(|n^5 - 2^n|)}{3n + \cos(n^2)}$.

Вариант 6

1. Покажите, что для каждого $n > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

2. Определить точные границы множества

$$A = \left\{ \frac{2m\sqrt{n}}{m^2+n} \in \mathbb{R} : n, m \in \mathbb{N}, n \text{ не является квадратом натурального числа} \right\}.$$

3. Исследовать на инъективность и сюръективность отображение $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, действующее по правилу

$$f(x,y) = \frac{xy+1}{x},\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}.$$

4. По определению предела последовательности показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n + \sin n} - \sqrt{n} = 0.$$

5. Найти предел последовательности $x_n = \frac{\ln(n + n^2 + \ldots + n^{2022})}{\ln(n^2 + 2022)}$.

5.2 Контрольная 2

Вариант 1

1. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найти ее предел, если

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 1}, n \geq 1.$$

2. Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 - \pi n}), n \geq 4$.

3. Используя элементарные преобразования и первый замечательный предел, вычислить

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 2\sqrt[3]{3x-1}}{\sin(x-3)}.$$

4. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} + \ln(1-x) - 1}{x^2 \sin x}.$$

5. Верно ли, что при $x \to +\infty$

$$\frac{x \sin 2x}{\cos x + 2022 \operatorname{arctg} x} = \mathcal{O}(x \sin x).$$

Вариант 2

1. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найти ее предел, если

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{x_n + 2}, n \geq 1.$$

2. Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \sin(\pi\sqrt{9n^2 + n}), n \geq 1$.

3. Используя элементарные преобразования и первый замечательный предел, вычислить

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(4-x^2)}{\sqrt{3x+10} - 2\sqrt[3]{x^2+4}}.$$

4. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - e^{x/2}}{x \ln(1+x)}.$$

5. Верно ли, что при $x \to +\infty$

$$\frac{x + 2022 \sin x}{\ln(1+1/x)} = \mathcal{O}(x\sqrt{2+3x^2}).$$

Вариант 3

1. Показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и найти ее предел, если

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{5x_n + 1}{3x_n + 1}, n \geq 1.$$

2. Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + 6n}), n \geq 1$.

3. Используя элементарные преобразования и первый замечательный предел, вычислить

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{-\sin(1/6 - x/3)}{\sqrt{6x+1} - 2\sqrt[3]{x^2+3/4}}.$$

4. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos\frac{x}{2}} - e^{-x^2/16}}{x^2 \sin^2 x}.$$

5. Верно ли, что при $x \to +\infty$

$$\frac{2x^2 - \ln x}{\sqrt{x} + \cos(2022x)} = \mathcal{O}(x\sqrt{1+x}).$$

Вариант 4

1. Показать, что последовательность x_n сходится и найти ее предел, если

$$x_1 = \frac{3\pi}{2}, \ \ x_{n+1} = x_n + \sin x_n, n \geq 1.$$

2. Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \left\{\sqrt{n^2 + (-1)^n 2n}\right\}, n \geq 2.$

3. Используя элементарные преобразования и первый замечательный предел, вычислить

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(2-2x)}{1-\sqrt{5x+4}+\sqrt[3]{x+7}}.$$

4. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{2\sin x}}{x^4+3x^3}.$$

5. Верно ли, что $\cos(\operatorname{arctg}(x+1/x)) = \mathcal{O}(1/x)$ при $x \to +\infty$.

Вариант 5

1. Показать, что последовательность x_n сходится и найти ее предел, если

$$x_1 = 0, \ \ x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n+6}, n \geq 1.$$

2. Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \left\{\sqrt{4n^2 + (-1)^n en}\right\}, n \geq 1.$

3. Используя элементарные преобразования и первый замечательный предел, вычислить

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+10}-2\sqrt[3]{5x+6}-1}{\sin(2x+2)}.$$

4. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x\sin(x^4+x^5)}.$$

5. Верно ли, что $\sin(\operatorname{arcctg}(x-1/x)) = \mathcal{O}(1/x)$ при $x \to +\infty$.

Вариант 6

1. Показать, что последовательность x_n имеет предел; найти ее предел, если

$$x_1 = 0, \ \ x_{n+1} = -x_n^2 + 5x_n - 4, n \geq 1.$$

2. Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \left\{\sqrt{9n^2 + (-1)^n 5n}\right\}, n \geq 1.$

3. Используя элементарные преобразования и первый замечательный предел, вычислить

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin\left(\sqrt{5x-1}-\sqrt[3]{3x+2}-1\right)}{x^2-4}.$$

4. Вычислить предел с использованием o-малого

$$\lim_{x\to 0} \frac{e(1-x/2)-(1+x)^{1/x}}{x^2}.$$

5. Верно ли, что при $x \to 0$

$$\sin(x+\operatorname{arctg}(1/x)) = \mathcal{O}(1+\sin^2(1/x)).$$

5.3 Контрольная 3

Вариант 1

1. Определить и классифицировать точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x+\sin x}} & x < 0 \\ ax + b & x \in [0,1] \\ (x-1)/\ln(x) & x > 1 \end{cases}$$

2. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \sin\sqrt{2x-1}$ на $[1/2, +\infty)$.

3. Вычислить производную функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\cos\sqrt[3]{4x^2-5x}\right) + \ln\left(\frac{2^x - x}{x+2}\right)$$

и найти все точки, где функция дифференцируема.

4. Найти угол, под которым пересекаются графики функций $f(x) = \ln(2x+1)$ и $g(x) = \ln(7-2x)$. Схематично изобразить эти графики.

5. Ученый с мировым именем Иннокентий получил неравенство: $e^{\sin x} \geq 1 + x, \quad x \in \mathbb{R}$. Верно ли оно?

Вариант 2

1. Определить и классифицировать точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x}{x+\sin x}\right)^2 & x < 0 \\ (x+a)/((bx)^2+1) & x \in [0,1] \\ (x^{2022}-1)/(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

2. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \sin\sqrt[3]{x-2022}$ на $\mathbb{R}$.

3. Вычислить производную функции

$$f(x) = e^{\sin\sqrt[5]{x^2+2x}} + \ln\left(\frac{3^x - x}{x+3}\right)$$

и найти все точки, где функция дифференцируема.

4. Найти угол, под которым пересекаются графики функций $f(x) = e^{x+2}$ и $g(x) = e^{5-x}$. Схематично изобразить эти графики.

5. Ученый с мировым именем Иннокентий получил неравенство: $e^{1-\cos x} \leq 1 + x^2, \quad x \geq 0$. Верно ли оно?

Вариант 3

1. Определить и классифицировать точки разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x}{x+\sin x}\right) & x < 0 \\ e^{ax+b} & x \in [0,1] \\ (x-1)^x & x > 1 \end{cases}$$

2. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \sin\frac{x}{2x^2+1}$ на $\mathbb{R}$.

3. Вычислить производную функции

$$f(x) = e^{\arcsin\sqrt[3]{x^2-x}} + \cos\left(\frac{3^x - x}{x+3}\right)$$

и найти все точки, где функция дифференцируема.

4. Найти угол, под которым пересекаются графики функций $f(x) = \sqrt{x+2022}$ и $g(x) = \sqrt{2022-x}$. Схематично изобразить эти графики.

5. Ученый с мировым именем Иннокентий получил неравенство: $e^{\operatorname{tg} x} \geq 1 + \frac{2x^2}{\pi - 2x}, \quad x \in [0, \pi/2)$. Верно ли оно?

5.4 Контрольная 4

Вариант 1

1. Найти наибольшее значение функции $f(x) = x + \sin x + \frac{\cos x}{2}$ на отрезке $[0, 1]$.

2. Определить параметры, при которых функция будет выпуклой

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1 & x < 1 \\ e^x + x + b & x \geq 1 \end{cases}$$

3. Построить график функции $f(x) = e^{x+2-4/x}$.

4. Используя (на каком-либо шаге) правило Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2+3x}\right) \ln(e^{2x^2} - 3x)$$

5. Для $x_0 = 0$ найти многочлен Тэйлора 5 степени для функции $f(x) = \frac{e^{2x}}{3+x}$.

Вариант 2

1. Найти наибольшее значение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$ на отрезке $[0, 2022]$.

2. Определить параметры, при которых функция будет вогнутой

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x - 4 & x < 1 \\ bx + \ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

3. Построить график функции $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$.

4. Используя (на каком-либо шаге) правило Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{2x^2-x}\right) \ln(e^{3x^2} + 5x)$$

5. Для $x_0 = 0$ найти многочлен Тэйлора 5 степени для функции $f(x) = \frac{e^{-x+2}}{1-2x}$.

Вариант 3

1. Найти наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ на отрезке $[-2022, 2023]$.

2. Определить параметры, при которых функция будет выпуклой вверх

$$f(x) = \begin{cases} -ax^2 + 3x & x < -1 \\ be^x - 5 & x \geq -1 \end{cases}$$

3. Построить график функции $f(x) = \frac{2-x}{x^2-1}$.

4. Используя (на каком-либо шаге) правило Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2x^3-1}\right) \ln(e^{\pi x^2} + x)$$

5. Для $x_0 = 0$ найти многочлен Тэйлора 5 степени для функции $f(x) = \frac{xe^{3x+1}}{1+x^2}$.

Вариант 4

1. Найти наибольшее значение функции $f(x) = x + \frac{\sin x}{3} + \frac{\cos x}{2}$ на отрезке $[0, 1]$.

2. Определить параметры, при которых функция будет выпуклой

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1 & x < 1 \\ e^x + 2x + b & x \geq 1 \end{cases}$$

3. Построить график функции $f(x) = e^{x-1+\frac{2}{x+1}}$.

4. Используя (на каком-либо шаге) правило Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2 + 5x}\right) \ln(e^{x^2} - 4x)$$

5. Для $x_0 = 0$ найти многочлен Тэйлора 5 степени для функции $f(x) = \frac{e^{\pi x}}{3+x^3}$.

Вариант 5

1. Найти наибольшее значение функции $f(x) = -x + 3 \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$ на отрезке $[0, 2022]$.

2. Определить параметры, при которых функция будет вогнутой

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1 & x < 1 \\ bx + \ln x & x \geq 1 \end{cases}$$

3. Построить график функции $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$.

4. Используя (на каком-либо шаге) правило Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{2x^2 - 7x}\right) \ln(e^{x^2} - x)$$

5. Для $x_0 = 0$ найти многочлен Тэйлора 5 степени для функции $f(x) = \frac{e^{-x+1}}{1-3x^2}$.

Вариант 6

1. Найти наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+x+3}$ на отрезке $[0, 2023]$.

2. Определить параметры, при которых функция будет выпуклой вверх

$$f(x) = \begin{cases} -ax^2 + 3x & x < -1 \\ be^x - 5 & x \geq -1 \end{cases}$$

3. Построить график функции $f(x) = \frac{2+x^2}{x+2}$.

4. Используя (на каком-либо шаге) правило Лопиталя, вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2x^3 - 1}\right) \ln(e^{5x^2} - 8x)$$

5. Для $x_0 = 0$ найти многочлен Тэйлора 5 степени для функции $f(x) = \frac{xe^{-x}}{2+x^2}$.

6 2022-2023. 2 семестр

6.1 Контрольная 1

Вариант 1

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+5n-1}\right)^{n(n+1)}.$$

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\sin^4\left(\sqrt{\frac{n^e+4}{2n^3+1}}\right)\right).$$

3. Используя признак Раабе или Гаусса или еще что-нибудь, выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}\ln^4 n}$.

4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\sin(n!)}$.

Вариант 2

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2)!}{2^{n^2}}$.

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^6\left(\cos\left(\sqrt{\frac{n^e+1}{3n^3+1}}\right)-1\right).$$

3. Используя признак Раабе или Гаусса или еще что-нибудь, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(\ln 3+\sqrt{2023})(\ln 6+\sqrt{2024})\cdots(\ln(3n)+\sqrt{n+2023})}.$$

4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n)\cdot\sin 2n}{n}.$$

5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sqrt[n]{2}\cos n}$.

Вариант 3

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{5^{3n}(n^2)!}$.

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{1/n}-\frac{2^{1/n}+3^{1/n}}{2}.$$

3. Используя признак Раабе или Гаусса или еще что-нибудь, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sin^3\frac{1}{n}}{e^{1+1/2+\cdots+1/n}}.$$

4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{1/n}\sin\frac{n^2-5}{n^3-6n}}{\ln n}.$$

5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{n+e\sin n}$.

Вариант 4

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3n+\sin n}{n^2+5n}\right)^{n(2n+1)}.$$

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\cos^e\left(\sqrt[4]{\frac{n^2+1}{3n^5+1}}\right)\right).$$

3. Используя признак Раабе или Гаусса, выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2021)^{2/3}\ln^5 n}$.

4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+\sin n)^3}.$$

5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1-e^{(-1)^n\sin 1/n}$.

Вариант 5

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+\cos n}{n^2-n}\right)^{n(2n+1)}.$$

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\sqrt{\frac{n+1}{2n^2+1}}-e^{-\frac{1}{4n}}.$$

3. Используя признак Раабе или Гаусса, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\pi}.$$

4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2^{(-1)^{n+1}n}}$.

Вариант 6

1. Используя признак Коши или Даламбера, выяснить, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\pi}}{e^n+3^{n+1}}$.

2. Используя (асимптотический) признак сравнения, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^e\left(\frac{n^{20}+n+1}{n^{21}-n+3}\right).$$

3. Используя признак Раабе или Гаусса, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{(e^{1+1/2+\cdots+1/n})^2}.$$

4. Используя признак Абеля или Дирихле или Лейбница, выяснить, сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n^2-4}{n^3-3n+1}}{\sqrt{n+2021}}.$$

5. Иследовать ряд на условную и абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)$.

6.2 Контрольная 2

Вариант 1

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на $[0, +\infty)$ последовательность функций

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{e^{nx} + x}{e^{nx} - x}\right),\ n \geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[-1, 1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1} \sin nx}{\ln n}.$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(2x^2 + \frac{nx}{3} + \frac{n^2}{60}\right)}.$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-e)^{2n}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^2+3n-10}{n^2+n+5}$.

Вариант 2

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ последовательность функций

$$f_n(x) = \ln|\cos(x/n) + \sin(x/n)|,\ n \geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[-1, 1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1} \cos nx}{\sqrt{1+n}}.$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(x^2 + nx + \frac{7n^2}{24}\right)}.$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n!}(x+\pi)^{3n}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2} \cos(e^{-n})$.

Вариант 3

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на $[0, 1)$ последовательность функций

$$f_n(x) = \ln(1 + x + \dots + x^n),\ n \geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[1, 2]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin nx}{n}\right).$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\left(2x^2 + \frac{nx}{2} + \frac{n^2}{8}\right).$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(e^n + n^2)x^{n^2}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos^2 n}{\sqrt{n}+n}$.

Вариант 4

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ последовательность функций

$$f_n(x) = n \operatorname{arctg}\left(\frac{2xn+1}{n^2}\right), \ n \geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{xe^{-\sqrt{n}x}}{e^{nx} + \sqrt[3]{n}}.$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{2023}}{\sqrt{n + x^3}}.$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 (x+\pi)^{n!}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n+e}$.

Вариант 5

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ последовательность функций

$$f_n(x) = \sqrt{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 + \sqrt{n}}{n}\right), \ n \geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \cos^2 nx}{e^{nx} + \sqrt{n}}.$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + e^{-n})}{\sqrt{3n + x^2}}.$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^{4^n}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^2 + \sin n}}$.

Вариант 6

1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на отрезке $[0, 2023]$ последовательность функций

$$f_n(x) = (n+2x) \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1+nx}\right), \ n \geq 1.$$

2. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $[0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx}}{n^2 + e^{n^2 x}}.$$

3. Исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n + x)}{\sqrt{n^2 + x^2}}.$$

4. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1! + 2! + \cdots + n!) x^{n^{2023}}$.

5. Выяснить, сходится ли бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n} + 2n}{e^{2n} - 3n}$.

6.3 Контрольная 3

Вариант 1

1. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{3x^{20} - 4\sqrt{x} + 10\sqrt{\sqrt{x^3}}}{\sqrt[3]{x}} + \sin^2 x \, dx.$$

2. Вычислить, используя интегрирование по частям

$$\int (2x + 3\sin x)^2 \, dx.$$

3. Вычислить интеграл от рациональной функции

$$\int \frac{x^4 + x^2 - 6}{2x + x^2} \, dx.$$

4. Провести рационализацию интеграла

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-2}}{3\sqrt[3]{x-2} - x\sqrt[3]{x+1}} \, dx$$

5. Вычислить первообразную

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + 3\sin x} \, dx$$

Вариант 2

1. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^{10} - 3\sqrt[4]{x} + 7\sqrt[5]{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \cos^2 x \, dx.$$

2. Вычислить, используя интегрирование по частям

$$\int (4x - 3\,\mathrm{sh}\, x)^2 \, dx.$$

3. Вычислить интеграл от рациональной функции

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - x - 2}{(1+x)^2} \, dx.$$

4. Провести рационализацию интеграла $\int \frac{2-x}{\sqrt{2+3x+4x^2}} \, dx$.

5. Вычислить первообразную $\int \sin x \ln(2\sin x + \cos x) \, dx$.

Вариант 3

1. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{(x+1)^2 - 5\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

2. Вычислить, используя интегрирование по частям

$$\int (2\arcsin x + x)^2 \, dx.$$

3. Вычислить интеграл от рациональной функции

$$\int \frac{5x^3 + x^2 + x - 1}{5x^2 - 4x - 1} \, dx.$$

4. Провести рационализацию интеграла

$$\int \left(\frac{1+x^2}{x^5}\right)^{1/3} \, dx$$

5. Вычислить первообразную

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin^2 x}} \, dx$$

Вариант 4

1. Найти неопределенный интеграл
$$\int \frac{e^{2x}-e^x-6}{e^x+3}+\sqrt[2]{\sqrt[5]{x^\pi}}\,dx.$$
2. Вычислить, используя интегрирование по частям
$$\int \ln(2x+1)^2\,dx.$$
3. Вычислить интеграл от рациональной функции
$$\int \frac{x^2}{(2+x^2)^2}\,dx.$$
4. Провести рационализацию интеграла
$$\int \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-1}}{5\sqrt{x+2}-x\sqrt{2x-1}}\,dx$$
5. Вычислить первообразную
$$\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+3\sin x}\,dx$$

Вариант 5

1. Найти неопределенный интеграл
$$\int \frac{\operatorname{sh}^2 x+x\operatorname{sh} x-2x^2}{\operatorname{sh} x-x}+(2+x)^{1+2+\ldots+2023}\,dx.$$
2. Вычислить, используя интегрирование по частям
$$\int e^{4x}\cos^2 x\,dx.$$
3. Вычислить интеграл от рациональной функции
$$\int \frac{x}{8+x^3}\,dx.$$
4. Провести рационализацию интеграла $\int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x+2x^2}}\,dx.$

5. Вычислить первообразную $\int \frac{\sin(x+4)}{2+\cos x}\,dx.$

Вариант 6

1. Найти неопределенный интеграл
$$\int \frac{2x^2+x\operatorname{ch} x-\operatorname{ch}^2 x}{2x-\operatorname{ch} x}+\sin(x+\pi^{2023})\,dx.$$
2. Вычислить, используя интегрирование по частям
$$\int (\ln x+x)^2\,dx.$$
3. Вычислить интеграл от рациональной функции
$$\int \frac{x}{2x^3+2x^2+x+1}\,dx.$$
4. Провести рационализацию интеграла
$$\int \left(\frac{2-x^2}{x^5}\right)^{1/3}\,dx$$
5. Вычислить первообразную
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin^2 x}}\,dx$$

6.4 Контрольная 4

Вариант 1

1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 (2+x)^3 \sin(\pi x)\,dx$.

2. Вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{\sin nx}{1+x^2}\,dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x+\sqrt{x}}}{2x+x^2}\,dx.$$

4. Жук ползет с постоянной скоростью v по кривой, заданной параметрически:
$$x=\sqrt{t}\cos t,\quad y=\sqrt{t}\sin t,\quad z=t,\quad t\in[0,4].$$
Найти время, за которое жук пройдет свой путь.

5. Вычислить
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+2x^2}\,dx$$

Вариант 2

1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 (1+2x)^3\sqrt{2-x}\,dx$.

2. Вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty} \int_1^5 \cos(nx)\ln x\,dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin e^x}{\sqrt{x^5-1}}\,dx.$$

4. Муха ползет с постоянной скоростью v по кривой, заданной параметрически:
$$x=\sqrt[6]{t}\cos t,\quad y=\sqrt[6]{t}\sin t,\quad z=\frac{\sqrt{3}}{2}t^{2/3},\quad t\in[0,2].$$
Найти время, за которое муха пройдет свой путь.

5. Вычислить
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{4+e^{2x}}\,dx$$

Вариант 3

1. Вычислить определенный интеграл
$$\int_1^2 \frac{(2+x)^3}{x^2+x}\,dx.$$

2. Вычислить предел
$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{2021} e^x\sqrt[n]{1+x^n}\,dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость
$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x+1/x)}{\sqrt{x^3-8}}\,dx.$$

4. Гусеница ползет с постоянной скоростью v по кривой, заданной параметрически:
$$x=t^2\cos t,\quad y=t^2\sin t,\quad z=\frac{4}{5}t^{5/2},\quad t\in[0,3].$$
Найти время, за которое гусеница пройдет свой путь.

5. Вычислить
$$\int_5^{+\infty} \frac{\ln(x-5)}{1+x^2}\,dx$$

Вариант 4

1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + 3e^{-x}}\, dx$.

2. Вычислить
$$\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \right) dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость
$$\int_0^3 \frac{\sin^{-1/2}(3-x)}{\sqrt[3]{e^{-x} - e^{2x}}}\, dx.$$

4. Вычислить длину кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = \pi^{2\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi/2$.

5. Вычислить
$$\int_0^{\pi} \sin x \operatorname{arctg}(x - \pi/2)\, dx$$

Вариант 5

1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + e^{x}}\, dx$.

2. Вычислить
$$\int_0^{1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi n x)}{n^2} \right) dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость
$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1/3}(\operatorname{sh} x)}{\sqrt[7]{(x-1)^4}}\, dx.$$

4. Вычислить длину кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = e^{-\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi^{e}$.

5. Вычислить
$$\int_0^{\pi} \cos x \operatorname{arctg}^2(x - \pi/2)\, dx$$

Вариант 6

1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 2e^{-x}}\, dx$.

2. Вычислить
$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x\cos(2nx)}{n^2} \right) dx.$$

3. Исследовать несобственный интеграл на сходимость
$$\int_2^3 \frac{e^{x^4}\sin(2x-4)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}\, dx.$$

4. Вычислить длину кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = 7^{\varphi}, 0 \le \varphi \le 2\pi$.

5. Вычислить
$$\int_0^{\pi} \cos x \ln(\cos^2 x)\, dx$$

7 2023-2024. 3 семестр

7.1 Контрольная 1

Вариант 1

1. Найти предел или показать, что он не существует:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\sin y + y^2 \sin x}{x^4+y^2}.$$

2. Исследовать функцию $z = \ln(5+\sqrt[3]{x^2 y})$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Для отображения $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, где

$$F = (F^1, F^2) = (x^2 + y\cos(z-3xy),\ -y^2 + \sin(zx+2y)),$$

найти: матрицу Якоби $F'(0,0,1)$; $D_{\mathrm{grad} F^1(0,0,1)} F^2(0,0,1)$.

4. Найти первый, второй и третий дифференциалы функции

$$z = (x+y)e^{x^2-y^2},$$

а также формулу Тейлора до третьего порядка включительно в окрестности точки $(0,0)$.

5. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для непрерывно дифференцируемого отображения $F = (f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ значение $F(1,1) = (0,0)$ и матрицу Якóби обратного отображения

$$J_{F^{-1}}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите дифференциал dz в точке $(0,1)$ для функции

$$z(u,v) = \sin f(v+2u, v^3) - vg(u^2+v, \sqrt{v}).$$

Вариант 2

1. Найти предел или показать, что он не существует:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}.$$

2. Исследовать функцию $z = |y|\sin x$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Для отображения $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, где

$$F = (F^1, F^2, F^2) = (x^2 + y\cos(x^2+y),\ y^2 + \sin(x+2y),\ 5xy - y^2).$$

найти: матрицу Якоби $F'(0,1)$; $D_{\mathrm{grad} F^1(0,1)} F^3(0,1)$.

4. Найти первый, второй и третий дифференциалы функции

$$z = (x-2y)\sin(x^2+y^2),$$

а также формулу Тейлора до третьего порядка включительно в окрестности точки $(0,0)$.

5. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для непрерывно дифференцируемого отображения $F = (f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ значение $F(1,1) = (0,0)$ и матрицу Якóби обратного отображения

$$J_{F^{-1}}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите дифференциал dz в точке $(0,1)$ для функции

$$z(u,v) = f(v+\sin u, v^2) - ve^{g(3u+v,\sqrt{v})}.$$

Вариант 3

1. Найти предел или показать, что он не существует:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-7xy+y^2}.$$

2. Исследовать функцию $z=\sqrt[5]{1-\cos(xy)}$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Для отображения $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, где

$$F=(F^1,F^2)=(y^2-xe^{z-2xy},\ \operatorname{arctg}(x^2)+\cos(zx+y)),$$

найти: матрицу Якоби $F'(1,0,0)$; $D_{\operatorname{grad}F^2(1,0,0)}F^2(1,0,0)$.

4. Найти первый, второй и третий дифференциалы функции

$$z=(3x-y)\cos(x^2-y^2),$$

а также формулу Тейлора до третьего порядка включительно в окрестности точки $(0,0)$.

5. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для непрерывно дифференцируемого отображения $F=(f,g):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ значение $F(1,1)=(0,0)$ и матрицу Якóби обратного отображения

$$J_{F^{-1}}(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислите дифференциал dz в точке $(0,1)$ для функции

$$z(u,v)=vf(\cos u,\sqrt{v})+\sin g(2u+v,v-3u).$$

Вариант 4

1. Найти предел, или показать, что он не существует

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \frac{xy}{3x^2+xy-2y^2}.$$

2. Исследовать функцию $z=\sqrt{|2x+3y|}$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Найти матрицу Якоби в точке (1,1,1) для отображения $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, где

$$F(x,y,z)=(x^y+y^z,e^{y^2}\sin(z+xy)).$$

4. Записать формулу Тейлора до третьего порядка включительно в окрестности точки $(0,0)$ для функции

$$z=(2x-y)\cos(xy).$$

5. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для непрерывно дифференцируемого отображения $F=(f,g):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ значение $F(1,1)=(0,0)$ и матрицу Якóби обратного отображения

$$J_{F^{-1}}(0,0)=\begin{pmatrix} -1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислите дифференциал dz в точке $(0,1)$ для функции

$$z(u,v)=\sin f(v+2u,v^2-u)-g^2(u^2+v,\sqrt{v+u}).$$

Вариант 5

1. Найти предел, или показать, что он не существует

$$\lim_{\substack{x\to+0\\ y\to+0}} \frac{xy}{x^2+2xy-y^2}.$$

2. Исследовать функцию $z = \sqrt{|x-3y|}$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Найти матрицу Якоби в точке (1,1) для отображения $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, где

$$F(x,y) = (x^y - 2\cos(xy),\ y^x + \sin(x-2y),\ (y+3x)^2).$$

4. Записать формулу Тейлора до третьего порядка включительно в окрестности точки $(0,0)$ для функции

$$z = \sin(x^2+3xy-y^2).$$

5. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для непрерывно дифференцируемого отображения $F=(f,g):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ значение $F(1,1)=(0,0)$ и матрицу Якóби обратного отображения

$$J_{F^{-1}}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите дифференциал dz в точке $(0,1)$ для функции

$$z(u,v) = f(v+\sin u, v^2\cos u) - ue^{g(3u+v,\sqrt{v+2u})}.$$

Вариант 6

1. Найти предел, или показать, что он не существует

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+0}} \frac{xy+y}{x^2+2xy-y^2}.$$

2. Исследовать функцию $z = \sin|x+2y|$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

3. Найти матрицу Якоби в точке (1,1,1) для отображения $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, где

$$F(x,y,z) = (yxz + e^{z-2xy},\ x^z + \cos(z-2xy)).$$

4. Записать формулу Тейлора до третьего порядка включительно в окрестности точки $(0,0)$ для функции

$$z = x\cos(x^2+3y).$$

5.Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для непрерывно дифференцируемого отображения $F=(f,g):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ значение $F(1,1)=(0,0)$ и матрицу Якóби обратного отображения

$$J_{F^{-1}}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите дифференциал dz в точке $(0,1)$ для функции

$$z(u,v) = vf(\cos(uv),\sqrt{v}) + \sin g(3u+v, v-u^2).$$

7.2 Контрольная 2

Вариант 1

1. Найти локальные экстремумы функции

$$z = x^3 + 2xy - y^2 + x - y.$$

2. Задана система из двух уравнений от 4-ёх переменных (x, y, u, v) :

$$\begin{cases} x^2 + xy - ux - v^2 = 0 \\ u^3 - yv + x^2 u = 0 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(1, 0, 0, 1)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, и (в) найти в этой точке дифференциал dx.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \operatorname{arctg}(2x + y^2 - z)\}$, в которых касательная плоскость к M ортогональна вектору $n = (1, 1, -1)$.

4. Преобразовать уравнение $xz_{xx} - yz_{yy} = 0, x > 0, y > 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$x = (u + v)^2, \quad y = (u - v)^2.$$

5. Определить экстремумы функции $z = 2xy - x^2$ на множестве $2x^2 + y^2 = 1$.

Вариант 2

1. Найти локальные экстремумы функции

$$z = 2x^3 - xy + y^2 - x + 2y.$$

2. Задана система из двух уравнений от 4-ёх переменных (x, y, u, v) :

$$\begin{cases} yv - 3u^2 + x^2 = 0 \\ v^2 + yx - ux = 0 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(-1, 1, 0, -1)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, и (в) найти в этой точке дифференциал dx.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ yx = \operatorname{arctg}(z + y^2 - 3x)\}$, в которых касательная плоскость к M ортогональна вектору $n = (3, 1, -1)$.

4. Преобразовать уравнение $xz_{xx} - yz_{yy} = 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$u = xy, \quad v = x/y.$$

5. Определить экстремумы функции $z = (x - 3y)^2$ на множестве $2y^2 + x^2 = 1$.

Вариант 3

1. Найти локальные экстремумы функции

$$z = 2y^3 - xy + x^2 - 3x + y.$$

2. Задана система из двух уравнений от 4-ёх переменных (x, y, u, v) :

$$\begin{cases} x^2 \cos u - v^2 \sin y = 1 \\ vx - y \cos v + u^2 = 0 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(1, 0, 0, 0)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, и (в) найти в этой точке дифференциал dy.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ zy = \operatorname{arctg}(x - 2y - z^2)\}$, в которых касательная плоскость к M ортогональна вектору $n = (1, -2, -1/2)$.

4. Преобразовать уравнение $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$u = x + z, \quad v = y + z.$$

5. Определить экстремумы функции $z = xy$ на множестве $x^2 + 2y^2 = x$.

Вариант 4

1. Исследовать функцию $z = (x + 2y)e^{2xy-y^2}$ на локальные экстремумы.

2. Задана система из двух уравнений от 3-ёх переменных (x, y, z) :

$$\begin{cases} x^2 + xy - \sin(x + z + y) - z^2 = 0 \\ z^3 - yx - \cos(x + y + z) = 0 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(1, -1, 0)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функцию $x = x(y)$ и $z = z(y)$ (в) найти в этой точке дифференциалы dx и dz.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 1\}$, в которых касательная плоскость к M такова, что она пересекает ось OX в точке $x = 2$, а ось OY в точке $y = 2$.

4. Преобразовать уравнение $z_{xx} + 2xy^2z_x + 2(y - y^3)z_y + x^2y^2z = 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{v}.$$

5. Определить условные экстремумы функции $z = x^2 - 2y$ на множестве $x^3 + y^3 = 1$.

Вариант 5

1. Исследовать функцию $z = (x + y - 2y^2)e^{2x-3y}$ на локальные экстремумы.

2. Задана система из двух уравнений от 3-ёх переменных (x, y, z) :

$$\begin{cases} ye^{x+z} - 3z^2 + \sin(x + y) + e = 0 \\ z^2 + yx + e^{z+y+x} = 0 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(1, -1, 0)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функции $x = x(y)$ и $z = z(y)$, и (в) найти в этой точке дифференциалы dx и dz.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$, в которых касательная плоскость к M такова, что она пересекает ось OZ в точке $z = 2$, а ось OX в точке $x = -1$.

4. Преобразовать уравнение $6z_{xx} - z_{xy} - z_{yy} = 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$u = x + 2y, \quad v = x - 3y.$$

5. Определить условные экстремумы функции $z = y^3 + 2x$ на множестве $y^3 + x^2 = 1$.

Вариант 6

1. Исследовать функцию $z = (xy + 2)e^{x^2-y^2}$ на локальные экстремумы.

2. Задана система из двух уравнений от 3-ёх переменных (x, y, z) :

$$\begin{cases} x^2 \cos(y^2 - z) - z^2 \sin(x - y) = 4\cos 1 \\ xyz + y\cos(x + 2y + 3z) = 1 \end{cases}$$

Показать, (а) что точка $(-2, 1, 0)$ является решением системы, (б) что в окрестности этой точки система задает гладкие функции $x = x(y)$ и $z = z(y)$, и (в) найти в этой точке дифференциалы dx и dz.

3. Найти точки на гладком многообразии $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$, в которых касательная плоскость к M такова, что она пересекает ось OZ в точке $z = 5$, а ось OY в точке $y = 2$.

4. Преобразовать уравнение $4z_{xx} + 3z_{xy} - z_{yy} = 0$, взяв за новые независимые переменные u и v, если

$$u = x + 4y, \quad v = x - y.$$

5. Определить условные экстремумы функции $z = 2x^3 + y$ на множестве $x^3 + 2y^2 = 1$.

7.3 Контрольная 3

Вариант 1

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega \frac{x\,dxdy}{(1+y)^2}$, где

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x^2+1,\ y \leq (x-3)^2-1\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2+2y^2)^2 = x+y$.

4. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для астеройда "Камешек-27112023" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = 2x^2$ и форму, задаваемую неравенствами

$$\sqrt{x^2+2y^2} \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2+2y^2}.$$

Определить массу этого астеройда и аппликату его центра масс.

4. Вычислить интеграл

$$\iiiint\limits_\Omega z\,dxdydzdw,$$

где множество $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ такое, что его проекция на ось OW есть отрезок $[1,2]$, а сечение при фиксированном $w \in [1,2]$ есть тетраэдр

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{x}{w} + \frac{y}{2w} + z \leq 1.$$

Вариант 2

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega \frac{y\,dxdy}{1+x}$, где

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3 \geq x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x^2,\ y \leq (x-3)^2+1\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $(2x^2+y^2)^2 = 2x+y$.

3. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для астеройда "Камешек-27112023" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = 3y^2$ и форму, задаваемую неравенствами

$$\sqrt{2x^2+y^2} \leq z \leq 3 - \sqrt{2x^2+y^2}.$$

Определить массу этого астеройда и абсциссу его центра масс.

4. Вычислить интеграл

$$\iiiint\limits_{|x-2y|+|y+3z|+|z-x|+|w+1|\leq 1} w\,dxdydzdw.$$

Вариант 3

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega \frac{dxdy}{(1+xy)^2}$, где

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x^2,\ y \leq 1-2x^2\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^3 = x+y$.

3. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для астеройда "Камешек-27112023" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2$ и форму, задаваемую неравенствами

$$\sqrt{3x^2+y^2} \leq z \leq 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+y^2}.$$

Определить массу этого астеройда и ординату его центра масс.

4. Вычислить интеграл

$$\iiiint\limits_{|x+z|+|y+2w|+|y+1|+|w-x|\leq 1} y\,dxdydzdw.$$

Вариант 4

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega |x-y|\,dxdy$, где

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ \frac{x}{2}\le y\le 4x^2\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах равенством $r(\varphi) = -\varphi^2 + 3\varphi - 2$.

3. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для кометы "Глыба-11122023" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = |xy|$ и форму, задаваемую неравенствами

$$2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 8 - x^2 - y^2.$$

Определить массу кометы и аппликату ее центра масс.

4. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |x| \left(\iint\limits_{z^2+w^2\le x^2+y^2} dzdw \right) dxdy.$$

Вариант 5

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega |x-y|\,dxdy$, где

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ \frac{x^2}{2}\le y\le 2x\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах равенством $r(\varphi) = \varphi\sqrt[3]{3-\varphi}$.

3. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для кометы "Глыба-11122023" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = |yz|$ и форму, задаваемую неравенствами

$$4\sqrt{2x^2+y^2} \le z \le 5 - (2x^2 + y^2).$$

Определить массу кометы и абсциссу ее центра масс.

4. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |y| \left(\iint\limits_{z^2+w^2\le |xy|} dzdw \right) dxdy.$$

Вариант 6

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_\Omega |x^2-y|\,dxdy$, где

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ \frac{x^2}{2}\le y\le 2x\}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах равенством $r(\varphi) = (\varphi+\pi)\sqrt{\pi-2\varphi}$.

3. Ученый с мировым именем Иннокентий вычислил для кометы "Глыба-11122023" плотность распределения массы $\rho(x,y,z) = |xz|$ и форму, задаваемую неравенствами

$$2\sqrt{x^2+2y^2} \le z \le 3 - (x^2 + 2y^2).$$

Определить массу кометы и ординату ее центра масс.

4. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\iint\limits_{z^2+w^2\le |xy|} w^2\,dzdw \right) dxdy.$$

7.4 Контрольная 4

Вариант 1

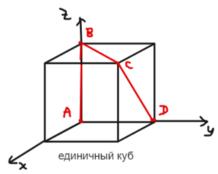
1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{\substack{xy\le 1\\ x\ge 1,\ y\ge 0}} \frac{y\,dx\,dy}{3y^p+\sqrt{x}}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{0\le x,y,z\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{z-\sin(xy)}.$$

3. На кривой $ABCD$ распределена масса с плотностью $\rho(x,y,z)=x+2y^2+3z$. Найти абсциссу центра масс



4. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода $\iint_S z^3 dS$, где S — это часть верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$, лежащая внутри параболического цилиндра $y+z^2=1$.

Вариант 2

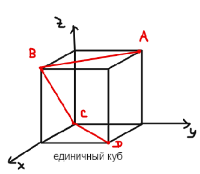
1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{\substack{2x+3y\ge 1\\ x\ge 0,\ y\ge 0}} \frac{\sqrt{x}\,dx\,dy}{x^3+y^p}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{0\le x,y,z\le 1} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{z}-\sqrt{xy}}.$$

3. На кривой $ABCD$ распределена масса с плотностью $\rho(x,y,z)=2x^2+yz$. Найти ординату центра масс



4. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода $\iint_S \sqrt{1+4y^2}dS$, где S — это часть параболического циллиндра $z=y^2-1$, лежащая внутри другого параболического цилиндра $z=1-x^2$.

Вариант 3

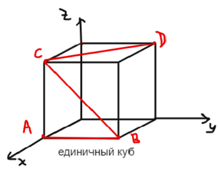
1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{\substack{x+y^2\le 1\\ x\ge 0,\ y\ge 0}} \frac{\sqrt[3]{x}dxdy}{x^p+2y}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{0\le x,y,z\le 1} \frac{dxdydz}{\sqrt[3]{z-y\sqrt{x}}}.$$

3.На кривой $ABCD$ распределена масса с плотностью $\rho(x,y,z)=2xz+y^2$. Найти аппликату центра масс



4. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода $\iint_S xydS$, где S — это часть параболойда $\frac{z}{2}=1-y^2-x^2$, лежащая внутри единичного куба $0\le x,y,z\le 1$.

Вариант 4

1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{ydxdy}{y^{2p}+x^2}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{x\ge y\ge z\ge 1} \frac{dxdydz}{x+xy+xyz}.$$

3. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int\limits_{\gamma} \frac{x^2}{\sqrt{z}} - z\sin(3x-y)\,d\ell,$$

где γ — дуга кривой $z=2x^2+y^2, 3x=y$, соединяющая точки $(0,0,0)$ и $(1,3,11)$.

4. Определить массу поверхности $z=xy$, расположенной внутри циллиндра $x^2+y^2=1$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y,z)=|xy|$.

Вариант 5

1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\sqrt{|x|}dxdy}{y^{2q}+x^2}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{x,y,z\ge 1} \frac{dxdydz}{(xy+yz+xz)^3}.$$

3. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z}{x} + y\cos(x-2y)\,d\ell,$$

где γ — дуга кривой $z = x^2 + y^2, x = 2y$, соединяющая точки $(0,0,0)$ и $(2,1,5)$.

4. Определить массу циллиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 1$, расположенной между плоскостями $x + z = 0$ и $x + z = 1$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y,z) = |z| + |x|$.

Вариант 6

1. Исследовать двойной интеграл на сходимость

$$\iint\limits_{xy>1, y>1} \frac{dxdy}{y^2 + x^p}.$$

2. Исследовать тройной интеграл на сходимость

$$\iiint\limits_{0 \le x,y,z \le 1} \frac{dxdydz}{xy + yz + xz}.$$

3. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z}{x+y} + y\cos^2(x-y)\,d\ell,$$

где γ — дуга кривой $z = x^2 + 2y^2, x = y$, соединяющая точки $(0,0,0)$ и $(1,1,3)$.

4. Определить массу поверхности $z = x + y^2$, расположенной внутри циллиндра $x^2 + y^2 = 1$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y,z) = \frac{|y|}{\sqrt{1+2y^2}}$.

8 2023-2024. 4 семестр

8.1 Контрольная 1

Вариант 1

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin(x+\alpha)}{(x+\alpha)^{4/3}}\,dx, \quad \alpha \geq 0$$

и вычислить $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$.

2. Ученый с мировым именем Иннокентий получил неравенство

$$\int\limits_0^{\int_0^x e^{-t^2}dt} e^{t^2}dt \geq \int\limits_0^{\int_0^x e^{t^2}dt} e^{-t^2}dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

Верно ли оно?

3. Исследовать несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin(x^2+x^{2024})}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha \geq \varepsilon > 0$ на равномерную сходимость.

4. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(4+x^2)}{9+x^2}\,dx$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2-x)^n}\,dx$.

8.2 Контрольная 2

см. контрольную 2 за 4 семестр 2021-2022

8.3 Контрольная 3

Вариант 1

1. Исследовать на потенциальность (и найти потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = (3x^2y^2z + y^2z^3, 2x^3yz + 2xyz^3, x^3y^2 + 3xy^2z^2).$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_\gamma ydx + xzdy - x^2zdz$, где γ — ломаная, проходящая через точки $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ и $(1,1,1)$, и ориентированная таким же обходом этих точек.

3. Посчитать работу поля $\vec{F} = ((x+1)^2, 2y, 1)$ вдоль кривой γ, заданной условиями

$$z = 4 - x^2 - y^2, \ y = -(x+2)^2/2, \ z \geq 0$$

и ориентированной направлением обхода от точки $(-2,0,0)$ к точке $(0,-2,0)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить интеграл $\oint\limits_\gamma \sin(2y)dx + \cos(3x)dy$, где γ — положительно ориентированная граница квадрата $|x| \leq \pi/2, |y| \leq \pi/2$.

5. Найти площадь области, ограниченной кривой $x^7 + y^7 = x^6 + y^6$ и осями координат.

Вариант 2

1. Исследовать на потенциальность (и найти потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = \left(\frac{3x^2y^2}{z} - 2x^3, \frac{2x^3y}{z} + 3y^3, z^3 - \frac{x^3y^2}{z^2}\right).$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_\gamma z^2dx - xzdy + 2yxdz$, где γ — ломаная, проходящая через точки $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ и $(1,0,0)$, и ориентированная таким же обходом этих точек.

3. Посчитать работу поля $\vec{F} = (z, 1, (1-x)/4)$ вдоль кривой γ, заданной условиями

$$z = 1 - x^2 - y^2/4, \ y = -2(x-1)^2, \ z \geq 0$$

и ориентированной направлением обхода от точки $(1,0,0)$ до точки $(0,-2,0)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить интеграл $\oint\limits_\gamma 2^y dx + 3^x dy$, где γ — положительно ориентированная граница квадрата $|x| \le 1, |y| \le 1$.

5. Найти площадь области, ограниченной кривой $x^5 + y^5 = x^4 + y^4$ и осями координат.

Вариант 3

1. Исследовать на потенциальность (и найти потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = (y - z, x - z, e^z - x - y).$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_\gamma x dx - 3xy dy + yz^2 dz$, где γ — ломаная, проходящая через точки $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(0,1,0)$ и $(1,1,0)$, и ориентированная таким же обходом этих точек.

3. Посчитать работу поля $\vec{F} = (x + y, y, 1/2)$ вдоль кривой γ, заданной условиями

$$z = 1 - 4x^2 - y^2,\ y = (2x-1)^2,\ z \ge 0$$

и ориентированной направлением обхода от точки $(1/2,0,0)$ до точки $(0,1,0)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить интеграл $\oint\limits_\gamma \ln(y+2)dx + \ln(x+3)dy$, где γ — отрицательно ориентированная граница квадрата $|x| \le 1, |y| \le 1$.

5. Найти площадь области, ограниченной кривой $x^{100} + y^{100} = x^{99} + y^{99}$ и осями координат.

Вариант 4

1. Исследовать на потенциальность (и найти потенциал, если он существует) поля

$$\vec{F} = \left(\frac{z\cos(x+y)}{y^2+1}, z\frac{\cos(x+y)}{y^2+1} - 2yz\frac{\sin(x+y)}{(y^2+1)^2}, \frac{\sin(x+y)}{y^2+1} \right).$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_\gamma (x+2z)dx - (3x+y)dy + xz^2 dz$, где γ — ломаная, проходящая через точки $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(0,1,0)$ и $(1,1,0)$, и ориентированная таким же обходом этих точек.

3. Посчитать работу поля $\vec{F} = (x + y, y, 1/2)$ вдоль кривой γ, заданной условиями

$$z = 1 - 4x^2 - y^2,\ y = (2x-1)^2,\ z \ge 0$$

и ориентированной направлением обхода от точки $(1/2,0,0)$ до точки $(0,1,0)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить интеграл $\oint\limits_\gamma (6x^2 + 2xy - 3y^2)dx + (x^2 + 3xy + e^y)dy$, где γ — положительно ориентированная граница квадрата $1 \le x \le 2,\quad 3 \le y \le 4$.

5. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклая ограниченная область, граница которой ∂D содержит точки с координатами $(-a,0)$, $(a,0)$ и $(0,b)$. Верно ли, что

$$\left| \oint_{\partial D} \frac{y^3+3y}{x^2+1}dx - \frac{x^3+3x}{y^2+1}dy \right| \ge 6|ab| \ ?$$

8.4 Контрольная 4

Вариант 1

1. Вычислить интеграл $\iint_S \frac{y}{z} dz\wedge dx - \frac{x}{z} dz\wedge dy$, где S — внешняя сторона части сферы

$$x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2\le 1,\ z\ge 0.$$

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=(x+2y, y-2z, z+x)$ через треугольную плоскую площадку с вершинами $A(2,0,0)$, $B(0,-1,0)$, $C(0,0,-2)$, ориентированную обходом края $A\to B\to C$.

3. Используя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma (x+2y+5z)\,dx+(2y-x+3z)\,dy+R(x,y,z)\,dz,$$

где $R(x,y,z)=zI_{\{x=0\}}$, и контур γ получается пересечением плоскости $2z+x+2y=3$ с поверхностью куба

$$0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1,$$

и ориентирован против часовой стрелки, если смотреть из точки $(1,1,1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S ((x+yz)\,dx+z\,dy)\wedge d(x^2+zy),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=2x$.

5. Верно ли, что для любых $\vec{A},\vec{B}\in\mathbb{R}^3$

$$i_{\vec{A}}(\omega^2_{\vec{B}})=\omega^1_{\vec{B}\times\vec{A}}?$$

Вариант 2

1. Вычислить интеграл $\iint_S \frac{z}{y} dy\wedge dx - \frac{x}{y} dy\wedge dz$, где S — внешняя сторона части сферы

$$x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+z^2\le 1,\ y\le 0.$$

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=(x-3y, y-z, -z+2x)$ через треугольную плоскую площадку с вершинами $A(3,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,-1)$, ориентированную обходом края $A\to B\to C$.

3. Используя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma (2x-2y+3z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy-(3y+z+x)\,dz,$$

где $Q(x,y,z)=yI_{\{x=1\}}$, и контур γ получается пересечением плоскости $2z+x+2y=2$ с поверхностью куба

$$0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1,$$

и ориентирован против часовой стрелки, если смотреть из точки $(1,1,1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S ((2y-z)\,dx-x\,dz)\wedge d(y^2-zx),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=2x+2z$.

5. Верно ли, что для любого $\vec{A}\in\mathbb{R}^3$

$$i_{\vec{A}}(\omega^3_f)=\omega^2_{f\vec{A}}?$$

Вариант 3

1. Вычислить интеграл $\iint_S \frac{x}{z} dz\wedge dy - \frac{y}{z} dz \wedge dx$, где S — внутренняя сторона части сферы

$$x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2\le 4,\ z\ge 0.$$

2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=(x+y, 2y-z, z+x)$ через треугольную плоскую площадку с вершинами $A(-1,0,0),\ B(0,-2,0),\ C(0,0,1)$, ориентированную обходом края $A\to B\to C$.

3. Используя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma P(x,y,z)\,dx + (y-10x+2z)\,dy - (y+2z+x)\,dz,$$

где $P(x,y,z)=xI_{\{y=0\}}$, и контур γ получается пересечением плоскости $2z+2x+y=3$ с поверхностью куба

$$0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1,$$

и ориентирован по часовой стрелки, если смотреть из точки $(1,1,1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S d(yx+z)\wedge(y\,dz-(y+x^2)\,dx),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=2y$.

5. Верно ли, что для любых $\vec{A},\vec{B}\in\mathbb{R}^3$

$$i_{\vec{A}}(\omega^1_{\vec{B}})=\omega^0_{\vec{B}\cdot\vec{A}}?$$

Вариант 4

1. Вычислить интеграл $\iint_S xdy\wedge dz - ydz\wedge dx - zdx\wedge dy$, где S — часть поверхности $z=2xy$, лежащая внутри круга $x^2+y^2\le 4$ и ориентированная положительным обходом края.

2. У Мряки было векторное поле $\vec{F}=(\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{3})$, а у Бряки гладкая поверхность $z=f(x,y),\ |x|,|y|\le 1$. Бряка знала, что вектор $\vec{\nu}=(x+y,x-y,1)$ является (не единичной) нормалью к ее поверхности. Вместе они смогли вычислить, что поток векторного поля Мряки через гладкую ориентированную поверхность Бряки равен π. Вычислите интеграл $\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)\,dxdy$.

3. Используя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma (x+3y+5z)\,dx + (3y-x+4z)\,dy + R(x,y,z)\,dz,$$

где $R(x,y,z)=z^2I_{\{x=0\}}$, и контур γ получается пересечением плоскости $2z+x+2y=3$ с поверхностью куба

$$0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1,$$

и ориентирован против часовой стрелки, если смотреть из точки $(1,1,1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S ydx\wedge dz + d(x^2+yz)\wedge d(z^2+xy),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=2x$.

Вариант 5

1. Вычислить интеграл $\iint_S xdy\wedge dz - ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$, где S — часть поверхности $z=xy$, лежащая внутри круга $x^2+y^2\le 1$ и ориентированная положительным обходом края.

2. У Мряки было векторное поле $\vec{F}=(x,\frac{y}{2},\frac{z}{4})$, а у Бряки гладкая поверхность $z=f(x,y),\ |x|,|y|\le 1$. Бряка знала, что вектор $\vec{\nu}=(x/2+y,2x-y,1)$ является (не единичной) нормалью к ее поверхности. Вместе они смогли вычислить, что поток векторного поля Мряки через гладкую ориентированную поверхность Бряки равен 4. Вычислите интеграл $\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)\,dxdy$.

3. Используя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma (x-2y+z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy - (3y+7z+x)\,dz,$$

где $Q(x,y,z) = y^2 I_{\{x=1\}}$, и контур γ получается пересечением плоскости $2z+x+2y=2$ с поверхностью куба

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1,$$

и ориентирован против часовой стрелки, если смотреть из точки $(1,1,1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S xdz \wedge dy - d(2y - x^2 - xz) \wedge d(y^2 - zx),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2 = 2x+2z$.

Вариант 6

1. Вычислить интеграл $\iint_S -xdy \wedge dz + ydz \wedge dx - zdx \wedge dy$, где S — часть поверхности $z = -xy$, лежащая внутри круга $x^2+y^2 \le 1$ и ориентированная отрицательным обходом края.

2. У Мряки было векторное поле $\vec{F} = (2x, y, \frac{z}{2})$, а у Бряки гладкая поверхность $z = f(x,y)$, $x^2+y^2 \le 1$. Бряка знала, что вектор $\vec{\nu} = (x-y, x-2y, 1)$ является (не единичной) нормалью к ее поверхности. Вместе они смогли вычислить, что поток векторного поля Мряки через гладкую ориентированную поверхность Бряки равен e. Вычислите интеграл $\iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,dxdy$.

3. Используя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_\gamma P(x,y,z)\,dx + (y+5x-z)\,dy - (y+2z+3x)\,dz,$$

где $P(x,y,z) = x^2 I_{\{y=0\}}$, и контур γ получается пересечением плоскости $2z+2x+y=3$ с поверхностью куба

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1,$$

и ориентирован по часовой стрелки, если смотреть из точки $(1,1,1)$.

4. С помощью формулы Гаусса–Остроградского вычислить поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S zdx \wedge dy + d(yx+z) \wedge d(z-y+x^2),$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2 = 2z$.