

Замечание: при отрицании высказывания $\wedge$ переходит в $\vee$, $\vee$ переходит в $\wedge$ и наоборот.

Правила де Моргана:

$$1) A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$2) A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$3) (A \vee B)^c = A^c \wedge B^c, (A \wedge B)^c = A^c \vee B^c$$

$$4) (A^c)^c = A$$

Опр. Мн-м $\mathbb{R}$ наз-я мн-во ~~уд~~ удовлетворяющее следующим системам аксиом:

1) Аксиомы сложения:

$$A_1. (x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$A_2. x+y = y+x, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$A_3. \exists 0 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, x+0 = 0+x = x$$

$$A_4. \exists (-x) \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, x+(-x) = (-x)+x = 0$$

2) Аксиомы умножения:

$$M_1. x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$M_2. x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$M_3. \exists 1 \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

$$M_4. (\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \mid x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

$$AM. \forall x, y, z \in \mathbb{R}, x(y+z) = xy + xz.$$

3) Аксиомы порядка; на $\mathbb{R}$ определено отношение порядка „ $\leq$ “, удовлетворяющее св-ам:

O_1 . $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ (рефлексивность)

O_2 . $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Транзитивность)

O_3 . $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

O_4 . $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \vee y \leq x$ (линейный порядок)

OA . $\forall x, y, z \in \mathbb{R}; x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

OM . $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}^+, x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$.

4) Аксиома Полноты (непрерывности):

$\# C$. $\forall A, B \subseteq \mathbb{R} \mid (A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset) \wedge (\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a \leq b) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq c \leq b$.

Следствия из аксиом сложения и умножения:

1) 0 - единственный, 1 - единственна.

2) x^{-1} - единств., $(-x)$ - единств.

3) ур-ие $ax = b$ имеет ~~единств.~~ решение $x = b \cdot a^{-1}$

4) ур-ие $\forall ax = b$, где $a \neq 0$, имеет единств. решение $x = b \cdot a^{-1}$.

5) $(-1) \cdot x = -x$

6) $0 \cdot x = 0$

7) $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$

Следствия из аксиом порядка:

1) если $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$

2) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$

3) $x \geq y, z \leq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot x \geq 0$

5) $x, y > 0 \Rightarrow xy > 0$

6) $0 < 1$

7) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \vee x = y \vee x > y.$

Опр. знаком числа $x \in \mathbb{R}$ наз-ся выражение

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} := \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Опр. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$, элемент $m \in X$ наз-ся наибольшим в X , если $\forall x \in X, m \geq x$.

Эл. $m \in X$ наз-ся наименьшим в X , если $\forall x \in X, x \geq m$.

Опр. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset, a \in \mathbb{R}$ наз-ся верхней границей X , если $\forall x \in X, a \geq x$. Нижней границей X , если $\forall x \in X, x \geq a$.

Опр. Мн-во $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ наз-ся ограниченным сверху/снизу, если у него существует хотя бы

одна верхняя/нижняя граница.

Опр. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, X - ограниченна
сверху/снизу, число $a \in \mathbb{R}$ наз-я точной верхней/
нижней границей X , если ~~то~~ a - наименьшая из
верхних границ /наибольшая из нижних границ.

Обозначения:

$M = \max X$ - наиб.

$m = \min X$ - наим.

$\mu = \sup X$ - точная верхняя грань

$\nu = \inf X$ - точная нижняя грань

Пример:

1) $X = [\alpha, \beta]$, где $\alpha < \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha = \min X = \inf X$$

$$\beta = \max X = \sup X$$

2) $X = (\alpha, \beta)$, где $\alpha < \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\min X, \max X$ - не существует

$$\alpha = \inf X.$$

$$\beta = \sup X.$$

Теорема о существовании точных границ:

Для всех непустых отр. сверху/снизу

мн-во всегда существует верхняя/нижняя граница.

Д-во: Δ 1) Т.к X -отр сверху, то $\Gamma_+ \neq \emptyset$, используя аксиому полноты для мн-ва $X \neq \emptyset$ и $\Gamma_+ \neq \emptyset$ получаем, что $\exists u \in \mathbb{R}: X \leq u \leq \alpha \Rightarrow u \in \Gamma_+ \Rightarrow u = \min \Gamma_+ = \sup X$. (Γ_+ - мн-во верхних границ мн-ва X).

2) ед-тво: Пусть $\exists u \in \Gamma_+ : u = \sup X = \min \Gamma_+$, $u' \leq u$ и $u \leq u' \Rightarrow u = u'$ Δ

Теорема. (Критерий точных границ).

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, X -отр. сверху/снизу. Тогда эквивалентны утверждения:

1) $u = \sup X$ ($v = \inf X$);

2) $\forall \epsilon > 0, \exists x \in X : u < x + \epsilon$ ($v > x - \epsilon$)

Д-во: Δ (для $\inf$) 1) $\Rightarrow$ 2): $v = \inf \Rightarrow \forall x \in X, x \geq v$. Пусть от противного $\exists \epsilon > 0 : \forall x \in X, x \geq v + \epsilon$, т.к. $v = \inf$ нз, значит $v + \epsilon \in F$ и $v + \epsilon > v$ - Противоречие.

1) $\Leftarrow$ 2) Пусть $v' > v$. Тогда, возьмем $\epsilon = v' - v > 0$ по п. 2 $\exists x \in X : x < v + \epsilon = v'$. Γ

Значит, $x < \varepsilon' \wedge x \geq \varepsilon'$ — противоречие. Δ

Предложение (о непустоте $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$):

Существует $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ число $\alpha > 0$: $\alpha^2 = 2$.

До-во: Δ 1) Пусть такое α существует, покажем, что $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $\text{НОД}(p, q) = 1$

Пусть $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha = \frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \div 2 \Rightarrow p \div 2. \text{ Значит}$$

$$p = 2p_1 \Rightarrow (2p_1)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p_1^2 = q^2 \Rightarrow q \div 2, \text{ значит}$$

p и q — не взаимно просты — противоречие.

2) Пусть $X = \{x > 0 \mid x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$, $Y = \{y > 0 \mid y \in \mathbb{R} \mid$

$y^2 > 2\}$. Значит $\forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x < y$. Пусть

не так $\Rightarrow \exists x \in X$ и $\exists y \in Y$: $x > y \Rightarrow x^2 > xy \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 y > y^2 x \Rightarrow x^2 > y^2, \text{ но } x^2 < 2 < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2 -$$

— противоречие. $X \neq \emptyset$, т.к. $1 \in X$, $1^2 < 2 \Leftrightarrow$

$$0 < 1. Y \neq \emptyset, \text{ т.к. } 2 \in Y, 2^2 > 2 \Leftrightarrow 2 > 1 > 0.$$

По аксиоме непрерывности $\exists \alpha \in \mathbb{R}$: $\forall x \in X, \forall y \in Y$

$$x \leq \alpha \leq y. \text{ Либо } \alpha^2 = 2, \text{ либо } \alpha^2 < 2, \text{ либо } \alpha^2 > 2.$$

Пусть $\alpha^2 < 2$, тогда $\Delta = 2 - \alpha^2 > 0$, $0 < \frac{\Delta}{5} < 1$.

$$\left(\alpha + \frac{\Delta}{5}\right)^2 \leq \alpha^2 + \Delta = \alpha^2 + 2 - \alpha^2 = 2 \Rightarrow \left(\alpha + \frac{\Delta}{5}\right)^2 < 2 \Rightarrow \alpha + \frac{\Delta}{5} \in X.$$

$$\text{6) } \Rightarrow \alpha + \frac{\Delta}{5} \leq \alpha \Rightarrow \frac{\Delta}{5} \leq 0 - \text{противоречие.}$$

Пусть $\alpha^2 > 2$, тогда $\delta = \alpha^2 - 2 \Rightarrow 1 > \delta > 0$.

$$\left(\alpha - \frac{\delta}{5}\right)^2 > \delta^2 - \frac{4\delta}{5} - \frac{\delta}{5} = \alpha^2 - \delta > \delta^2 - \alpha^2 + 2 = 2.$$

$\left(\alpha - \frac{\delta}{5}\right)^2 > 2 \Rightarrow \left(\alpha - \frac{\delta}{5}\right) \in Y \Rightarrow \alpha - \frac{\delta}{5} \geq \alpha \Rightarrow \frac{\delta}{5} \leq 0$ — противоречие. $\triangleright$

Лемма: (1)

Пусть $y \geq 0, x > 0$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} \mid y < nx$.

Д-во: $\nexists \frac{y}{x} \in \mathbb{R}, E = \{n \in \mathbb{N} : \frac{y}{x} < n\}$, надо $E \neq \emptyset$.

Пусть не так, $\forall n \in \mathbb{N}, n \notin E \Rightarrow n \leq \frac{y}{x}$ — противоречие с принципом Архимеда. $\triangleright$

Лемма: (2)

Пусть $y \in \mathbb{R}, x > 0$. Тогда $\exists! m_0 \in \mathbb{Z} : (m_0 - 1)x < y < m_0 x$.

Д-во: $\nexists \frac{y}{x} \in \mathbb{R}, E = \{m \in \mathbb{Z} \mid \frac{y}{x} < m\}$. $E \neq \emptyset$ т.к. если $y > 0$, то по Лемме (1), если $y < 0$, то $0 \in E$.

Таким образом, $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{Z}$ и огр. снизу $\frac{y}{x}$.

Тогда $\exists! m_0 = \min E \Rightarrow m_0 \in E$, но $m_0 - 1 \notin E$.

$(m_0 - 1)x \leq y < m_0 x$. $m_0 = \left[\frac{y}{x} \right]$ — целая часть

с недостатком. $\triangleright$

Теорема (о плотности мн-ва $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$).

Пусть $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \in (a, b)$. $\boxed{=}$

$\exists \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \beta \in (a, b)$.

D-во: $\triangleleft$ 1) В лемме 1 возьмем $y = x, x > 0; x = b - a >$

$\exists n \in \mathbb{N} \mid \frac{y}{x} < n \Rightarrow \frac{x}{n} < b - a$ (*).

2) В лемме 2 возьмем $y = a, x = \frac{x}{n}$. $\exists! m_0 \in \mathbb{Z}$.

$$x(m_0 - 1) \leq y < m_0 x, \Rightarrow a < \frac{m_0 x}{n}; \frac{x}{n} m_0 - \frac{x}{n} \leq a.$$

$$\frac{x}{n} m_0 \leq a + \frac{x}{n} < b \text{ (по *)}.$$

$$a < \frac{x}{n} \cdot m_0 < b.$$

Получим, что $\frac{x \cdot m_0}{n} \in (a, b)$, если $x = 1, a = \frac{m_0}{n} \in (a, b) \in \mathbb{Q}$.

Если $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \frac{\sqrt{2} \cdot m_0}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow m_0 \neq 0$.

Пусть $m_0 = 0 \Rightarrow a < 0, b > 0$. $\exists \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \beta \in (0, b) \subseteq (a, b)$.

$\triangle$

Замечание:

1) на $\mathbb{R}$ можно ввести метрику (т.е. расстояние между точками) d .

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$$\boxed{8} \quad d(x, y) = |x - y|.$$

2) Плотность $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ означает, что $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$

$$\exists \alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: d(x, \alpha) < \varepsilon \wedge d(x, \beta) < \varepsilon.$$

3) $d(x, y) \in \mathbb{Q}, \forall x, y \in \mathbb{Q}, \exists$ мн-во $E \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такое, что E плотно в $\mathbb{R}^2: d(x, y) \in \mathbb{Q}, \forall x, y \in E$.

$$\text{Здесь } d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2).$$

Расширенная числовая прямая.

Опр. Расширенной числовой прямой наз-я мн-во $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Для символов $\pm\infty$ положим:

$$1) \forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty; \quad -\infty < +\infty$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}; \quad x + (+\infty) = +\infty; \quad x + (-\infty) = -\infty; \quad +\infty + \infty = +\infty.$$

$$3) \forall x > 0, \quad x \cdot (+\infty) = +\infty; \quad x \cdot (-\infty) = -\infty.$$

$$\forall x < 0, \quad x \cdot (+\infty) = -\infty; \quad x \cdot (-\infty) = +\infty.$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty)(+\infty) = -\infty,$$

$$-(+\infty) = -\infty.$$

Неопределено (пока):

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty); \quad \frac{x}{\pm\infty}.$$

Теорема (о точных границах в $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\forall A \subseteq \overline{\mathbb{R}}, \exists q, \ell \in \overline{\mathbb{R}}: q = \sup A, \ell = \inf A.$$

Д-во: 1) Пусть $A = \emptyset$, тогда полагают по опр., что $\sup \emptyset = -\infty$; $\inf \emptyset = +\infty$.

2) Пусть $A \neq \emptyset$ и A -огр. Тогда $q = \sup A$, $\ell = \inf A$, где $q, \ell \in \mathbb{R}$; по т. о точных границах.

3) Пусть $A \neq \emptyset$, A -неогр. Пусть неогр. сверху, тогда $\forall s \in \mathbb{R}, \exists x \in A: x > s$. Покажем, что $\Gamma_+(A) = \{+\infty\}$.

Пусть не так $\Rightarrow \exists s_0 \in \Gamma_+(A)$, $s_0 \neq +\infty = s_0 < +\infty$.

Тогда $\forall x \in A, x \leq s_0$. $\exists x \in A: x > s_0$ - противоречие.

Предложение (о точных границах вложенных мн-в)

Пусть $A, B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, $A \subseteq B$. Тогда $(\sup A \leq \sup B) \wedge (\inf A \geq \inf B)$.

Комплексные числа.

Рассмотрим $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Будем обозн. пары $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ след. способом:

$(x, y) = x + iy$, где $i^2 = -1$.

Определим на $\mathbb{R}^2$ операции сложения и умножения

$$(a + ib) + (x + iy) = (a + x) + i(b + y)$$

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = (ac - bd) +$$

$+ i(ad + bc)$. Данные операции удовл. аксиомам

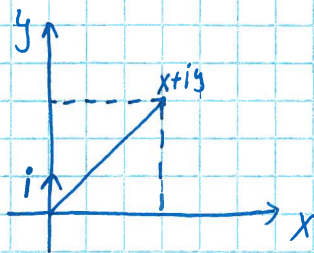
10 $A_1 - A_4, M_1 - M_4, AM$. Найдем 1 и 0:

$$0 = 0 + i \cdot 0$$

$$1 = 1 + i \cdot 0$$

$-a + i(-b)$ - противоположный

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right) - \text{обратный.}$$



Опр. Пусть $z = x + iy$. Тогда модуль z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

сопряженное к z : $\bar{z} = x - iy = x + i(-y)$

вещественная часть z : $\operatorname{Re} z = x$

мнимая часть z : $\operatorname{Im} z = y$.

Предложение. (о св-вах для $\mathbb{C}$):

$$1) |z| = z \cdot \bar{z}$$

$$2) |z| = |\bar{z}|$$

$$3) |\operatorname{Re} z| \leq |z|$$

$$|\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

$$4) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$5) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\triangle 1) |z|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}$$

□

4) $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$. Тогда

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}.$$
 Надо проверить

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$

$$2x_1x_2 + 2y_1y_2 \leq 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

$$(x_1x_2)^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + (y_1y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

$$2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 \Rightarrow (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \geq 0 - \text{Выполнено } \forall x_1, x_2,$$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. (кр-бо Коши).

$$\mathbb{R} \cong \{z \in \mathbb{C} : z = x + i \cdot 0\}, \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Отображение.

Опр. Пусть X, Y - мн-ва. f -ей (отображением) наз-я про-
-вило f , которое каждому $x \in X$ сопоставляет $!y \in Y$.

При этом пишут $f(x) = y$.

обозн: $f: X \rightarrow Y, x \xrightarrow{f} y, x \in X \xrightarrow{f} y \in Y, y = f(x)$

Опр. $\text{Dom } f = D(f) = \{x \in X : \exists y \in Y : y = f(x)\}$ - область опр-я.

$R(f) = \text{im } f = \{y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y\}$ - область значений.

Опр. Пусть $A \subseteq D(f) = X, B \subseteq Y$. Тогда образом A под действием
 f наз-я мн-во $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : f(x) = y\}$.

Прообразом B относительно f наз-я мн-во: $f^{-1}(B) = \{x \in X$

12 $f(x) \in B\}$.

Очевидно, что $f(X) = \text{im } f = R(f)$, $f^{-1}(Y) = \text{Dom } f = X$.

Опр. Пусть $f: X \rightarrow Y$, $g: U \rightarrow V$. Тогда $f = g \Leftrightarrow X = U$, $Y = V$ и $\forall x \in X$, $f(x) = g(x)$.

Примеры:

1) Постоянная ф-ия: $g: X \rightarrow Y$, $y_0 \in Y$, $g(x) = y_0$, $\forall x \in X$.

2) Вложение, $i_A: A \rightarrow Y$, $A \subset Y$, $\forall a \in A$, $i_A(a) = a$. Если $A = Y$, то $i_Y: Y \rightarrow Y$, тогда $i_Y(y) = y$ — тожд. отображение.

3) Пусть $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$. Определим $g: A \rightarrow Y$: $g(a) = f(a)$, $\forall a \in A$.
 g -сужение f на A .

обозн: $g = f|_A$.

f -расширение g с A на X .

4) f -вещественная (вещественнозначная), если $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$.

5) f -послед-ть, если $x = \mathbb{N}$ ($x = \mathbb{Z}$).

обозн: $f(n) = f_n$

Операции.

1) композиция или суперпозиция

$$f: X \rightarrow Y$$

$$g: U \rightarrow V$$

$$g \circ f: X \rightarrow V, g \circ f(u) = g(f(u)), \forall u \in \text{Dom}(g \circ f)$$

Композиция не коммутативна, т.е.

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Пример. $A = \{a, b\}$, $f: A \rightarrow A$, $g: A \rightarrow A$, $f(x) = a$, $\forall x \in A$, $g(x) = b$, $\forall x \in A$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a) = b$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(b) = a.$$

Предложение (об ассоц. композиции). Композиция го-ий ассоциативна, т.е. $f: X \rightarrow Y$, $g: U \rightarrow V$, $h: P \rightarrow Q$. Тогда $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
 $\triangleleft p \in P, (f \circ g) \circ h = (f \circ g)(h(p)) = f(g(h(p)))$

$$(f \circ (g \circ h))(p) = f((g \circ h)(p)) = f(g(h(p))).$$

$$p \in h^{-1}, \text{Dom } h \cap \text{im } h = h^{-1} \circ g^{-1}(X \cap \text{im } g)$$

$$\text{Dom } h = g^{-1}(X \cap \text{im } g)$$

$$p \in f^{-1}(X \cap \text{im } f)$$

$$\text{im } f = \text{im } g \circ h = \{p \in P \mid \exists v \in V: v = g(h(p))\}$$

$$\text{Пусть } p \in h^{-1}(g^{-1}(X \cap \text{im } g) \cap \text{im } h) \Rightarrow h(p) \in g^{-1}(X \cap \text{im } g) \cap \text{im } h \Leftarrow$$

$$\Leftrightarrow h(p) \in \text{im } h \cap h(p) \in g^{-1}(X \cap \text{im } g) \Leftrightarrow p \in P \cap g(h(p)) \in X \cap \text{im } g \Leftarrow$$

$$\Leftrightarrow p \in P \cap h(p) \in U \cap g(h(p)) \in X, p \in \text{Dom}(f \circ g \circ h) \Leftrightarrow f(p) \in X \cap \text{im } f$$

$$\Leftrightarrow g(h(p)) \in X \cap (g \circ h)(p) \in \text{im } f \Leftrightarrow g(h(p)) \cap g(h(p)) \in \text{im } f, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(h(p)) \in X \cap h(p) \in U \cap p \in P.$$

2) Если $g, f: X \rightarrow \mathbb{R}$, то опер-ы арифм. опер-ии:

$$f \pm g: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{12.2} \quad f/g: X \setminus \{s^{-1}(0)\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Мощность мн-ва.

Опр. Отображение $f: X \rightarrow Y$ наз-я инъективным или взаимно-однозначным отображением, если: $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom } f: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Опр. Отображение $f: X \rightarrow Y$ наз-я сюръективным отображением (отображением), если $f(x) \in Y$.

Опр. Отображение $f: X \rightarrow Y$ наз-я биективным, если оно инъективно и сюръективно.

Опр. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - инъективное отображ. Тогда определено обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X$$

$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $f: x \mapsto x^2$. Тогда, если $y = x^2$, то $y^{-1} = \sqrt{x}$.

Опр. Пусть $X \neq \emptyset$ - мн-во, говорят, что на X задано отношение экв-ти $\sim$, если это отношение обладает св-ми:

1) $\forall x \in X, x \sim x$

2) $\forall x, y \in X, ((x \sim y) \vee (y \sim x)) \Rightarrow x \sim y$

3) $\forall x, y, z \in X, (x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$

На X задано отношение экв-ти $\sim$, которое разбивает мн-во X на классы экв-ти.



Опр. Мн-ва X и Y наз-я равномошными, если суш. биекция м/у ними.

Предложение. Отношение равномошностей - это отнош. экв-ей.

□ 1) X равномошен X т.к. $i_X: X \rightarrow X$ - биекция

2) Если X равномошен $Y \Rightarrow$ суш. биекция $f: X \rightarrow Y \Rightarrow f^{-1}: Y \rightarrow X$ - биекция $\Rightarrow Y$ равномошен X

3) Если X равномошно Y , Y равн-о $Z \Rightarrow \exists$ биекция $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$. Тогда $g \circ f: X \rightarrow Z$ - биекция ▽

Мощностью мн-ва X наз-я класс экв-ти по отношению р-вомошности. Будем говорить, что мн-во X - конечно, если оно равномошно $I_n = [1, n] \cap \mathbb{N}$, для нек-го $n \in \mathbb{N}$. Счётно, если оно равномошно $\mathbb{N}$. Не более чем счётно, если оно конечно, либо счётно. Континуально, если оно равномошно $\mathbb{R}$.

Предложение (о конечных мн-вах). Пусть X - конечно и $\exists g$ биекции $f: X \rightarrow I_n$, $g: X \rightarrow I_m$. Тогда $m = n$.

□ I_n равномошен I_m . $h: I_m \rightarrow I_n$ - биекция. Пусть $m \neq n$, например $m < n$.

$$h(i_1) < h(i_2) < \dots < h(i_n) \leq m.$$

12.4 $\exists i \in I_n : h(j) = i, \forall j \in I_n$

card A - число эл-ов в конечном мн-ве.

Предложение (о счётности $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$).

$\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ равносильны $\mathbb{N}$

▽ Построим биекцию нумерации для $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ т.е. биекции

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}.$$

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (-1)^n, n \geq 1$$

$$(p, q) \sim p/q = (pr, nq)$$

$$g(n) = \text{придумать } q\text{-лу } \triangleright$$

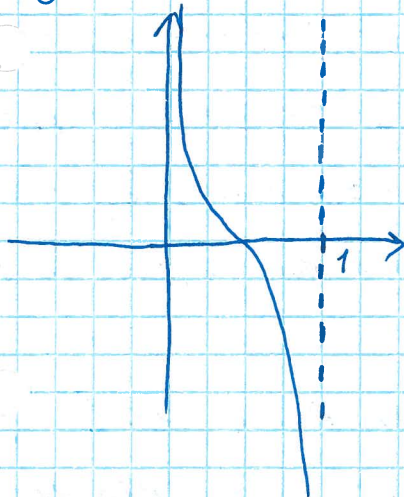
Теорема Кантора.

$\mathbb{R}$ не счётно

▽ Покажем, что $\mathbb{R}$ равносильно $(0, 1)$

и док-м, что $(0, 1)$ не счётно

$$y = \text{сег}(x); (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} - \text{биекция.}$$



Пусть $(0, 1)$ - счётное мн-во

$$\alpha \in (0, 1), \alpha = 0, \alpha \alpha \alpha, \alpha \in \{0, 1\}$$

$$1 = 0, (9). \delta = 0, (\alpha, +1)(\beta, +1)(\gamma, +1)$$

это число не занумеровано

$$f(N) = \delta, \quad \begin{array}{l} 0+1=1 \\ 1+1=0 \end{array}$$

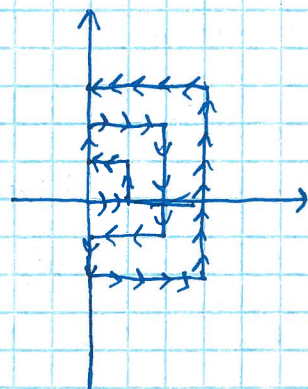
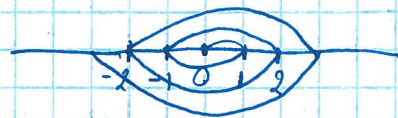
$$f(1) = \alpha$$

$$f(2) = \beta$$

$$f(3) = \gamma$$

$$f(N) = \delta.$$

▽ 12.



Точные границы.

A - огр. сверху

$$\exists u = \sup A$$

$$\forall a \in A, a \leq u$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A: a > u - \varepsilon$$

A - огр. снизу

$$\exists l = \inf A$$

$$\forall a \in A, a \geq l$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A: a < l + \varepsilon$$

Теорема (о счетных мн-вах):

1) Пусть A - счетное мн-во и $B \subset A$, B - бесконечное. Тогда B - счётно.

2) Пусть I не более чем счётно и $\forall s \in I$. Тогда $\bigcup_{s \in I} E_s$ не более чем счётно, E_s - не более чем счётно.

3) Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ - счётные мн-ва. Тогда $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ - счётно.

1) Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ т.к. A - счётно. (Возьмем макс. номер $k_i: a_{k_i} \in B$. $B_i = B \setminus \{a_{k_i}\}$ - бесконечное мн-во). Выбросим из посл-ти $a_0, a_1, \dots$ те члены, которые не принадлежат B , сохраняя порядок оставшихся. Тогда оставшиеся члены образуют либо конечную посл-ть, либо бесконечную, но счётную.

2) Пусть имеется счётное число счётных мн-в $A_1, A_2, \dots$. Расположив эл-ты каждого из них слева направо в посл-ть $A_i = \{a_{i0}, a_{i1}, \dots\}$ и поместив эти пос

-ти друг по другом, получим таблицу

$\alpha_{00} \alpha_{01} \alpha_{02} \alpha_{03} \dots$

$\alpha_{10} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots$

$\alpha_{20} \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots$

$\alpha_{30} \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots$

$\dots \dots \dots$

Теперь эту таблицу можно развернуть в посл-ть, напри
проходя по очереди диагонали:

$\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{02}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{03}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{30}, \dots$

Если мн-ва A_i не пересекались, то мы получили исконое пре-
ставление для их объединения. Если пересекались, то из
построенной посл-ти надо выбросить повторения.

Если мн-во конечное число или какие-то из мн-во кон-
чны, то в этой конструкции части членов не будет.
Останется либо конечное, либо счётное мн-во. $\triangleright$

Теория пределов.

3 основных принципа:

1) Принцип Коши-Кантора (о вложении отрезка):

Пусть $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ - система вложенных отрезков $I_{n+1} \subseteq I_n$. Тогда $\exists s \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Если $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \beta_n - \alpha_n < \varepsilon$
 $\Rightarrow$ точка s - единственная. 12.

$\nabla m, n \in \mathbb{N}, I_m = [a_m, b_m], I_n = [a_n, b_n]$ имеет место $a_m \leq b_n$. Таким образом, для числовых мн-в $A = \{a_m | m \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ выполнены условия аксиомы полноты, т.е. $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a_m \in A, \forall b_n \in B, a_m \leq c \leq b_n$.

Пусть c_1 и c_2 - две точки, обладающие этим св-ом. Если они различны и, например, $c_1 < c_2$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n \Rightarrow 0 < c_2 - c_1 < b_n - a_n < \varepsilon \Rightarrow c_2 - c_1 < \varepsilon \Rightarrow c_2 \rightarrow c_1$.

2) Принцип Бореля-Лебега (о конечном покрытии):

В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

∇ Пусть $S = \{I\}$ - система интервалов I , покрывающая отрезок $[a, b] = I_1$. Если бы отрезок I_1 не допускал покрытия конечным набором интервалов системы S , то, поделив I_1 пополам, мы получили бы, что по крайней мере одна из его половинок, которую мы обозначим $1/2 I_2$, не допускает конечного покрытия, продолжая эту процедуру и получаем $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ - послед-ть вложенных отрезков не допускающих конечного покрытия S . Поскольку

$|I_n| = |I_1| \cdot 2^{-n}$, то послед-ть $\{I_n\}$ сход. строго к нулю по длине. По лемме Коши-Кантора суц. т. $c \in I_n, \forall n$.

Поскольку $c \in I_1 = [a, b]$, то найдется интервал $(\alpha, \beta) \in S: c \in (\alpha, \beta)$

Пусть $\varepsilon = \min(c - \alpha, \beta - c)$. Найдем в построенной посл-ти I

$|I_n| < \varepsilon$. Т.к. $c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$, заключаем, что $I_n \subset V = [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$

Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы! $\triangleright$

Опр. Говорят, что система мн-в $S = \{X\}$ покрывает мн-во Y если $Y \subset \bigcup_{X \in S} X$.

3) Принцип Больцано - Вейерштрасса (о предельной точке):

Опр. Пусть $x \in \overline{\mathbb{R}}$, элементарной (открытой) окр-ью т. $x \in \overline{\mathbb{R}}$ на-
-я мн-во $U(x)$, содержащие т. x .

Если $x \in \mathbb{R}$, то $U(x) = U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

Если $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, то $U(+\infty) = [E, +\infty]$, $E > 0$

$U(-\infty) = [-\infty, -E]$, $E > 0$

Опр. Пусть $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда a наз-я предельной точ-
ой для X , если для любой эл. окр. $U(a)$ верно $(U(a) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset$

Опр. $U(x) \setminus \{x\} = \overset{\circ}{U}(x)$ - проколота окр-ть т. x .

Принцип Б-В:

Всякое бесконечное ограниченное числовое мн-во имеет
крайней мере одну предельную точку.

∇ Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$. X из опр-ия агр-ти мн-ва $X \Rightarrow X \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$
 где $I = [a, b]$. Покажем, что на крайней мере одна точка
 I явл-я предельной для X .

Если бы это было не так, то каждая точка $x \in I$ имела бы окр-ть $U(x)$, в которой либо вообще нет точек мн-ва, либо их там конечное число. Совокупность $\{U(x)\}$ таких окр-ей, построенных для каждой точки $x \in I$, образует покрытие отрезка I интервалами $U(x)$, из которого по Лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную сист-у $U(x_1), \dots, U(x_n)$ интервалов, покрывающую отрезок I . Но, поскольку $x \in I$, эта же сист. покрывает всё мн-во X . Но в каждом интервале $U(x_i)$ только конечное число т. X , т.е. X — конечное мн-во — Противоречие Δ

Предел посл-ти.

Опр. Число $a \in \mathbb{R}$ наз-я пределом посл-ти $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |x_n - a| < \varepsilon$.

Пример. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$, покажем, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \left| \frac{n}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon.$$

$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ при } n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1.$$

2) $x_n = (-1)^n$ — предела нет. Д-м это:

12.10 Пусть $\exists a \in \mathbb{R} : \lim x_n = a$, значит:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, |(-1)^n - \alpha| < \varepsilon \Rightarrow |1 - \alpha| < \varepsilon, \wedge |1 - \alpha| < \varepsilon.$

$2 = |1 - (-1)| = |1 - \alpha + 1 + \alpha| \leq |1 - \alpha| + |1 + \alpha| < 2\varepsilon \Rightarrow 1 < \varepsilon$
 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall n_0 \in \mathbb{N}: \nexists n \geq n_0, |x_n - \alpha| \geq \varepsilon.$

Св-ва предела.

- 1) предел посл-ти единственен
- 2) сходящаяся посл-ть ограничена
- 3) Если $x_n = \alpha$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$,
- 4) Если $x_n \rightarrow \alpha$, то $x_n - \alpha \rightarrow 0$
- 5) Если $x_n \rightarrow \alpha$, то $\forall k \in \mathbb{N}, x_{n+k} \rightarrow \alpha$

Д-во: 1) Пусть $x_n \rightarrow \alpha$ и $x_n \rightarrow \beta$, при этом $\alpha < \beta$. Тогда

Для $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2}$ получим, что

$$\exists n_0^{(1)} \in \mathbb{N}: |x_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n \geq n_0^{(1)}$$

$$\exists n_0^{(2)} \in \mathbb{N}: |x_n - \beta| < \varepsilon, \forall n \geq n_0^{(2)}, \text{ значит:}$$

$$\forall n \geq \max\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}\} \Rightarrow x_n < \alpha + \varepsilon = \frac{\alpha + \beta}{2} = \beta - \varepsilon < x_n - \text{противоречие.}$$

2) для $\varepsilon = 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}: n \geq n_0, -1 < x_n - \alpha < 1 \Rightarrow -1 + \alpha < x_n < 1 + \alpha \Rightarrow |x_n| < \max\{|1 + \alpha|, |\alpha - 1|\}.$

$$C = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0} - 1|, |1 + \alpha|, |\alpha - 1|\}.$$

$$\forall n \geq 1, |x_n| < C.$$

3) Очевидно

4) Очевидно

5) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq \tilde{n}_0, |x_{n+k} - a| < \varepsilon$, ясно, что $\forall n \geq n_0, n+k \geq n_0 \Rightarrow \Rightarrow \tilde{n}_0 = n_0 \quad \triangleright$

Теорема (о пределе арифм. операций).

Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b, a, b \in \mathbb{R}$. Тогда:

1) $x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$

2) $x_n \cdot y_n \rightarrow a \cdot b$

3) $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$, если $b \neq 0$

$\triangleright$ 1) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0^{(1)} \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0^{(1)}, |x_n - a| < \varepsilon/2$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0^{(2)} \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0^{(2)}, |y_n - b| < \varepsilon/2$.

$\forall n \geq \max\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}\}, |x_n \pm y_n - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0^{(1)} \in \mathbb{N}: |x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0^{(1)}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0^{(2)} \in \mathbb{N}: |y_n - b| < \varepsilon, \forall n \geq n_0^{(2)}$

$|x_n y_n - a \cdot b| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - a b| = |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)|$

$\leq |y_n(x_n - a)| + |a(y_n - b)| \leq \dots$ (т.к. y_n - сходя., то $\exists c > 0: y_n < c$)

$\leq c|x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b|$. Возьмём $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2 \max\{1, |a|, c\}}$,

$\varepsilon_0 > 0$. Тогда $\forall n \geq \max\{n_0^{(1)}(\varepsilon), n_0^{(2)}(\varepsilon)\}$,

$\boxed{12.12} \quad |x_n y_n - a b| < c \cdot \varepsilon + |a| \cdot \varepsilon = \varepsilon(c + |a|) = \varepsilon_0 \left(\frac{c + |a|}{2 \max\{c, |a|\}} \right) < \varepsilon_0$

3) Достаточно г-ть, что $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{b}$, $b \neq 0$.

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| |b|}, \text{ покажем, что } \exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}: \left| \frac{1}{y_n} \right| \leq c, \forall n \geq n_1$$

Для $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ найдётся $n_0 \in \mathbb{N}: |y_n - b| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, значи

$$b - \frac{|b|}{2} < y_n < b + \frac{|b|}{2}$$

$$1) b > 0, \frac{|b|}{2} < y_n < \frac{3|b|}{2}, \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \text{ (берём } n_1 = n_0 \left(\frac{|b|}{2} \right))$$

$$2) b < 0, -\frac{3|b|}{2} < y_n < -\frac{|b|}{2}, \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}: |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{c} |b|, \forall n \geq n_2$, значит

$$\frac{|y_n - b|}{|y_n| |b|} \leq \frac{\varepsilon |b| \cdot c}{|b|} = \varepsilon \quad \triangleright$$

Пример. $X_n = \frac{3n^2 - n + 1}{4n^2 + 2n + 1}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{4n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} =$

$$= \frac{\lim(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{\lim(4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{\lim(3) - \lim(\frac{1}{n}) + \lim(\frac{1}{n^2})}{\lim(4) + \lim(\frac{2}{n}) + \lim(\frac{1}{n^2})} = \frac{3}{4}$$

Предел и неравенства

Теорема (о сохр. знака).

Опр. $X_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, x_n > E$

$$X_n \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall E > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, x_n < -E$$

$$X_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |X_n| \rightarrow +\infty$$

X_n - бесконечно большая.

Пусть $\lim X_n = a, \lim y_n = b, a, b \in \mathbb{R}$, тогда:

1) Если $a < b$, то $\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_1, x_n < y_n$

2) Если $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1, x_n \leq y_n$, то $\alpha \leq \beta$.

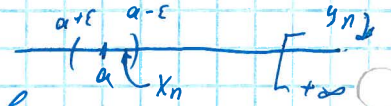
Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда для $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2}$ получим $\exists n_0^1 \in \mathbb{N}, n_0^2 \in \mathbb{N} :$
 $|x_n - \alpha| < \varepsilon, |y_n - \beta| < \varepsilon, \forall n \geq n_0^1, \forall n \geq n_0^2$.

Возьмем $n_1 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$ и $\forall n \geq n_1$,

$$x_n < \alpha + \varepsilon = \frac{\beta + \alpha}{2} < \beta - \varepsilon < y_n, \text{ т.е. } x_n < y_n.$$

Пусть теперь $\beta = +\infty, \alpha \in \mathbb{R}$ (случай $\alpha = -\infty, \beta \in \mathbb{R}$, аналогичен).

Если $\alpha + \varepsilon < E \Rightarrow x_n < y_n, \forall n \geq n_1$



2) Пусть неверно, что $\alpha \leq \beta$. Тогда $\alpha > \beta$.

Тогда $\nexists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1, x_n > y_n$ — противоречие ∇

Пример. $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n+1}, x_n > y_n, \lim x_n = \lim y_n = 0$.

Теорема (о зажатых послед.)

Пусть $\lim x_n = \lim y_n = \alpha, \alpha \in \overline{\mathbb{R}}, \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1, x_n \leq z_n \leq y_n$

Тогда $\lim z_n = \alpha$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Дано: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1' \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1', |x_n - \alpha| < \varepsilon$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2, |y_n - \alpha| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m, x_n \leq z_n \leq y_n$.

$\forall n \geq n_0 = \max\{n_1', n_2, m\}, \alpha - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < \alpha + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha - \varepsilon < z_n < \alpha + \varepsilon \Rightarrow |z_n - \alpha| < \varepsilon \quad \nabla$

Примеры. 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, т.к. $0 \leq \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$.

2) $a, b > 0, \lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$. Пусть $a \leq b$. Тогда:

$$\boxed{12.14} \quad b = \sqrt[n]{b^n} < \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{b^n + b^n} = \sqrt[n]{2} b.$$

Осталось проверить, что $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$.

$\forall \varepsilon > 0$ нужно найти $n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, |\sqrt[n]{2} - 1| < \varepsilon$, значит:

$$\sqrt[n]{2} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 2 < (1 + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \varepsilon^k > 1 + n \cdot \varepsilon > 2 \Leftrightarrow n < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1.$$

Критерий Коши для сходимости последовательности.

Опр. Послед-ть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз-я фундаментальной, или сходя-ся или посл-ью Коши, если $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, |x_n - x_m| < \varepsilon$

Теорема (Кр-ий Коши для посл-ти).

Посл-ть сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть фундаментальная.

$\Leftarrow$ Дано: $\exists \alpha \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, |x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\forall m, n \geq n_0, |x_n - x_m| = |x_n - \alpha + \alpha - x_m| \leq |x_n - \alpha| + |\alpha - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.е. } x_n - \text{фундаментальная.}$$

$\Rightarrow$ Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ф.нд. Покажем, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - огр. посл-ть.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем n_0 . Тогда $\forall n \geq n_0, |x_n - x_{n_0}| < \varepsilon$

$$x_{n_0} - \varepsilon < x_n < x_{n_0} + \varepsilon, \text{ т.е. } x_n - \text{огр.}$$

Рассмотрим два случая:

1) мн-во значений $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно.

2) мн-во значений $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - конечно.

1) По принципу Больцано-Вейерштрасса о пред. точке, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$: α - пред. точка для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

По опр. предельной точки $\forall N \in \mathbb{N}, \exists x_{n_N}: x_{n_N} \in \bigcup_{n=N}^{\infty} (x_n - \frac{1}{N}, x_n + \frac{1}{N}) \Leftrightarrow$ 12.

$$\Leftrightarrow 0 < |X_{n_N} - \alpha| < \frac{1}{N}.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ (из функ.): $\forall n \geq n_0, |X_n - \alpha| = |X_n - X_{n_N} + X_{n_N} - \alpha| \leq |X_n - X_{n_N}| + |X_{n_N} - \alpha|$ выбираем n_N такое, что $|X_{n_N} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{N} < \varepsilon$.

Для $n_N \geq n_0, |X_n - X_{n_N}| + |X_{n_N} - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \alpha.$$

2) Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{A_1, \dots, A_m\}$, положим $E = \min_{i \neq j} (|A_i - A_j|)$;

Тогда из функ.-ти: для этого $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0, |X_n - X_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow |X_n - X_m| = 0, \forall m, n \geq n_0$, т.е. $X_n = X_m, \forall m, n \geq 0$, т.е. X_n - сходится. $\triangleright$

Пример. 1) $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

$\forall \varepsilon > 0$ нужно найти $n_0 : \forall m, n \geq n_0, |X_n - X_m| < \varepsilon$.

Пусть $n > m$.

$$|X_n - X_m| = X_{m+p} - X_m = \frac{1}{(m+1)^2} + \dots + \frac{1}{(m+p)^2} \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+p-1} - \frac{1}{m+p} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+p} < \frac{1}{m} < \varepsilon \Leftrightarrow m > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1.$$

Отрицание опр-ия функ.-ти:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n, m \geq n_0, |X_n - X_m| \geq \varepsilon.$$

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \text{ возьмем } \begin{matrix} m=n_0 \\ n=2n_0 \end{matrix}. \text{ Тогда:}$$

$$|X_{n_0} - X_{2n_0}| = \frac{1}{n_0+1} + \dots + \frac{1}{2n_0} \geq n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Опр. Послед-ть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ наз-я возр-ей, если $X_{n+1} > X_n, \forall n \geq 1$, ме-

-ей, если $X_{n+1} \geq X_n, \forall n \geq 1$; убыв-ей, если $X_{n+1} < X_n, \forall n \geq 1$;

невозр-ея, если $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \geq 1$.

Теорема Вейерштрасса (о пределе монотон. посл-ти).

Всякая монотонная посл-ть имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, при этом если x_n -неуб., то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} x_n$. Если x_n -невозр., то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \geq 1} x_n$.

◁ Будем считать для опр-ти, что $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \geq 1$.

1) Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не огр. сверху, тогда $\forall E > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: x_{n_0} > E$ тогда $\forall n \geq n_0, x_n \geq x_{n_0} > E \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} x_n = +\infty$.

2) Пусть x_n огр. сверху, тогда $u = \sup_{n \geq 1} x_n, u \in \mathbb{R}$, откуда след $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: x_{n_0} > u - \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Rightarrow u + \varepsilon > u \geq x_n \geq x_{n_0} > u - \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0, u - \varepsilon < x_n < u + \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u \triangleright$

Примеры.

1) $x_n = \frac{a^n}{n!}, a \in \mathbb{R}; y_n = \frac{|a|^n}{n!}, \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{|a|}{n+1} < 1, \forall n > |a| - 1$.

Т.О. y_n -убывает, $y_n > 0$, по т.В. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

$y_{n+1} = \frac{|a|}{n+1} \cdot y_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = C = 0, C \Rightarrow C = 0$.

2) $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} = f(x_n)$, где $y = f(x) = \sqrt{2+x}$.

Покажем по индукции, что $x_n \leq 2$:

$$x_0 = 0 < 2$$

$$x_1 = \sqrt{2} < 2$$

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow x_{n+1} < 2.$$

$$x_{n+1} \geq x_n, \sqrt{2+x_n} \geq x_n \Rightarrow 2+x_n \geq x_n^2 \Rightarrow (x_n-2)(x_n+1) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_n - 2 \leq 0 \Rightarrow x_n \leq 2.$$

Теорема (о сущ. экспоненты).

$\forall x \in \mathbb{R}$ положим $U_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x)$ сущ. и конечен.

⟨ Покажем, что $U_n(x)$ - неуб. и огр. сверху.

1) Пусть $1 + \frac{x}{n} > 0 \Leftrightarrow n > -x$, тогда $U_n(x) > 0$, $\forall n > -x$, и

$$\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{-x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1} \geq \text{«пер-бо Бернулли»} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) = \frac{n+x}{n} \cdot \frac{n}{n+x} = 1.$$

$$\text{Нужно проверить } \frac{-x}{(n+x)(n+1)} > 1 \Leftrightarrow x < (n+x)(n+1) \Leftrightarrow 0 < n^2 + n + n \Rightarrow n+1 > -x.$$

Т.О. $U_{n+1}(x) \geq U_n(x)$, $\forall n > -x$

2) Рассмотрим $V_n(x) = \frac{1}{U_n(-x)}$. Тогда $\forall n > |x|$, $V_{n+1}(x) = \frac{1}{U_{n+1}(-x)} \leq \frac{1}{U_n(-x)} = V_n(x)$.

$$\frac{U_n(x)}{V_n(x)} = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1 \Rightarrow U_n(x) \leq V_n(x). \text{ Тогда } \forall n > |x|,$$

$U_n(x) \leq V_n(x) \leq V_{n_0}(x) \Rightarrow U_n(x)$ - огр. сверху. ▽

Опр. $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Утв. } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \text{ т.е. } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow$$

12.18 | Теорема (о предст. e).

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

$$\Delta e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{p}{n}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)! n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{C_{n,k}}{k!}$$

$$\text{где } C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k}.$$

1) Покажем, что $\forall$ фикс. $k, C_{n,k} \rightarrow 1$, где $n \rightarrow \infty$.

$$\frac{n!}{(n-k)! n^k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots n}{\underbrace{n \dots n}_k} = \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \dots 1}_{k\text{-мн-ей}} \rightarrow$$

$\rightarrow 1$, при $n \rightarrow \infty$.

$$u_n(1) = u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$z_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, |u_n - z_n| < \varepsilon/2 \Rightarrow |z_n - e| \leq |z_n - u_n| + |u_n - e| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, для всех достаточно больших номеров.

Зафиксируем $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - z_n| = \left| \sum_{k=0}^n \left(\frac{C_{n,k}}{k!} - \frac{1}{k!} \right) \right| \leq \overbrace{\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{C_{n,k}}{k!} - \frac{1}{k!} \right) \right|}^{I_1} + \overbrace{\left| \sum_{k=n_0}^n \left(\frac{C_{n,k}}{k!} - \frac{1}{k!} \right) \right|}^{I_2},$$

$$\exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq \tilde{n}_0, |C_{n,k} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \in \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}.$$

$$I_1 \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{|C_{n,k} - 1|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |C_{n,k} - 1| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$I_2 \leq \sum_{k=n_0}^n \frac{|C_{n,k} - 1|}{k!} \leq \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{n_0!} \left(1 + \frac{1}{n_0+1} + \dots + \frac{\frac{n_0!}{n!}}{\left(\frac{n-n_0}{n}\right)^{n-n_0}} \right) \leq \frac{1}{n_0!} \left(1 + \frac{p}{n_0+1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n_0+1)^2} + \frac{1}{(n_0+1)^3} + \dots \right) = \frac{1}{n_0!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n_0+1}} = \frac{1}{n_0!} \cdot \frac{n_0+1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ выбираем } n$$

кое n_0 , берём $n \geq n_0$ и $n \geq \tilde{n}_0 \quad \triangleright$

Следствие 1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \theta_n \in (0, 1): e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n n!}{n! \cdot n}$.

$$\triangleleft e = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n}^m \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sup_{m > n} \sum_{k=n}^m \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \exists \theta_n \in (0, 1): \sup_{m > n} \sum_{k=n}^m \frac{1}{k!} = \theta_n \cdot \frac{n+1}{n! \cdot n} \quad \triangleright$$

Следствие 2. $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\triangleleft$ Пусть $\exists p, q \in \mathbb{N}: e = p/q$. Тогда для $n = q+1$ в ф-ле гл.

$$e \text{ получим: } e = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{\theta_q (q+1)}{(q+1)!(q+1)}, \quad \theta_q \in (0, 1)$$

умножим на $q!$

$$p \cdot (q-1)! = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + \frac{\theta_q (q+2)}{(q+1)^2} \Rightarrow \overbrace{p(q-1)! - \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}}^{\mathbb{Z}} = \overbrace{\theta_q \cdot \frac{(q+2)}{(q+1)^2}}^{\in (0, 1)}$$

противоречие $\triangleright$

Замечание 1. Аналогично док-я, что $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Замечание 2. (О сложности банковских %о)

Теорема (об основном св-ве эксп-ой ф-ции).

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

$\triangleleft$ Пусть $z_n \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$. Тогда $(1 + \frac{z_n}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

$$1 + z_n < 1 + n \cdot \frac{z_n}{n} < u_n(z_n) < v_n(z_n) = \frac{1}{u_n(-z_n)} = \frac{1}{(1 - \frac{z_n}{n})^n} < \frac{1}{1 - z_n}$$

$$1 < 1 + z_n < u_n(z_n) < \frac{1}{1 - z_n} \rightarrow 1$$

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \left(1 + \frac{xy}{n+x+y}\right)^n \right), \quad z_n \rightarrow 0$$

$$\boxed{12.20} \quad \exp(x+y) \cdot 1 = \exp(x+y) \quad \triangleright$$

Следствие (о свойствах $\exp$).

$$1) \exp(x) > 0$$

$$2) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$3) \exp(x) > 1+x$$

$$4) \exp(x) > \exp(y), \text{ при } x > y$$

$$5) \exp(n) = e^n, n \in \mathbb{N}$$

$$6) \exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

$$\triangleleft 1) \exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0. 1 = \exp(0) = \exp(x)$$

$$\exp(-x) \Rightarrow \exp(x) \neq 0.$$

$$2) \exp(-x) = 1/\exp(x)$$

$$3) \exp(x) > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 1+x \text{ (пер-во Бернулли)}$$

$$4) \exp(x) = \exp(y+x-y) = \exp(y) \cdot \exp(x-y) \geq \exp(y) \cdot (1+x-y) > \exp(y)$$

$$5) \exp(n) = \exp(1+\dots+1) = (\exp(1))^n = e^n$$

$$6) \left(\exp\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q = \exp\left(\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}\right) = \exp(1) = e \Rightarrow \exp\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = \left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p = e^{p/q} \triangleright$$

Частичные пределы.

Опр. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — посл-ть. $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

Тогда $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпосл-ть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Опр. Частичным пределом посл-ти x_n наз-я предел какой-нибудь её подпосл-ти.

Обозн: $\lim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — мн-во всех ч.п.

Пример. $x_n = (-1)^n$, $x_{2n} = 1$; $x_{2n-1} = -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1; 1\}$.

Предложение.

Пусть $x_n \rightarrow \alpha$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha\}$, более того, Любо
подпослед-ть $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha$.

$\triangleleft$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) Дано: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, |x_n - \alpha| < \varepsilon$

Надо: $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_0, |x_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$.

Д-ем по индукции, что $n_k \geq k, \forall k \in \mathbb{N}$.

1) $n_1 \geq 1$

2) Пусть $n_k \geq k$, д-ем инд. переход:

$$n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k+1$$

Тогда в качестве k_0 возьмем n_0 . Действительно, $\forall k \geq n$
 $n_k \geq k \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - \alpha| < \varepsilon \triangleright$

Теорема (Больцано - Вейерштрасса о непустоте $\lim$).

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - посл-ть. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$, при этом
если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - оцр-на, то $\exists \alpha \in \mathbb{R}: \alpha \in \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\triangleleft$ 1) Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ принимает конечное число значений
 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$. Тогда, хотя бы одно из значений α_k принимается
бесконечное число раз, т.е. $\exists x_{n_k} = \alpha: n_1 < n_2 < \dots$

2) Мн-во значений x_n - бесконечно, будем считать, что x_n - оцр

12.22 По принципу б-в, $\exists$ пред-ая точка $\alpha \in \mathbb{R}$ для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Построим подп-ть $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$. Построим $\varepsilon_n > 0$.

Пусть $\varepsilon_1 > 0$. Тогда $x_n \in \overset{0}{U}_{\varepsilon_1}(\alpha)$. Пусть n_1 -наим. из $n \in \mathbb{N}: x_n \in (\alpha)$. Пусть $\varepsilon_2 = \min\{\frac{\varepsilon_1}{2}, |\alpha - x_{n_1}|\}$.

Для $\varepsilon_2, \exists x_n \in \overset{0}{U}_{\varepsilon_2}(\alpha)$. Пусть n_2 -наим. из $n \in \mathbb{N}: x_n \in \overset{0}{U}_{\varepsilon_2}(\alpha)$.

Ясно, что $n_2 > n_1$.

И т.д. по индукции: $\varepsilon_m = \min\{\frac{\varepsilon_{m-1}}{2}, |\alpha - x_{n_{m-1}}|\}$.

Т.о. $0 < |x_{n_m} - \alpha| < \varepsilon_m$, где $m \rightarrow \infty$ $\triangleright$

Верхний и нижний предел.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - посл-ть. Рассмотрим 2 новые посл-ти $u_n = \sup_{k \geq n} x_k$

- верхний предел, $l_n = \inf_{k \geq n} x_k$ - нижний предел.

$$u_{n+1} = \sup_{k \geq n+1} x_k = \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \leq \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \sup_{k \geq n} x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow \text{по Т. Вейерштрасса, } \exists u \in \overline{\mathbb{R}}, u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \text{ - гл.}$$

предел наз-ют верхним пределом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\text{Обозн: } u = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k.$$

Аналогично показывается, что $l_{n+1} \geq l_n$, и $\exists l \in \overline{\mathbb{R}}: l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$

- нижний предел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\text{Обозн: } \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k.$$

$$\text{Ясно, что } l_n = \inf_{k \geq n} x_k \leq x_n \leq \sup_{k \geq n} x_k = u_n \Rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Предложение.

$$\text{Если } \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

$\triangleleft$ по Т. о ограниченных посл-ях - очевидно $\triangleright$

Теорема (о наиб. и наим. част. пределах).

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — о.г.р. посл-ть, тогда мн-во $\text{Lim}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — о.г.р. и имеет наиб. и наим. эл-ты, причем $\max(\text{Lim}\{x_n\}) = \overline{\lim} x_n$ и $\min(\text{Lim}\{x_n\}) = \underline{\lim} x_n \Rightarrow \text{Lim}\{x_n\} \subseteq [\underline{\lim} x_n, \overline{\lim} x_n]$

◁ Для нижнего предела: Пусть $\alpha \in \text{Lim}\{x_n\}$, $\ell \in \underline{\lim} x_n$, ($\ell \neq \alpha$)

Таким образом, $\exists$ подп-ть $x_{n_k} \rightarrow \alpha$, $x_{n_k} \geq \ell_k$, зафиксируем n_1 , $\varepsilon_k \searrow 0$,

$\ell_{n_1} = \inf_{k \geq n_1} x_k$ по кр-ию $\exists x_{m_1}: m_1 \geq n_1$ и $x_{m_1} < \ell_{n_1} + \varepsilon_1$.

$n_2 = m_1 + 1$

$\ell_{n_2} = \inf_{k \geq n_2} x_k$ по кр-ию $\exists x_{m_2}: m_2 \geq n_2$ и $x_{m_2} < \ell_{n_2} + \varepsilon_2$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N}$

$m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$

$\ell_{n_k} \leq x_{m_k} < \ell_{n_k} + \varepsilon_k \Rightarrow n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

т.е. $x_{m_k} \rightarrow \ell = \underline{\lim} x_n$

Аналогично для $\overline{\lim} x_n$ ▷

Примеры.

1) $x_n = \{\sqrt{n}\}$, покажем, что $\text{Lim}\{\sqrt{n}\} = [0, 1]$.

$\forall x \in (0, 1)$, $0 = \{\sqrt{n^2}\} = x_{n^2}$.

$\exists p_k, q_k \in \mathbb{Q}: \frac{p_k}{q_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$, при этом, ясно, что $\frac{p_k}{q_k} \in (0, 1)$, p_k, q_k уходят на ∞ .

$$\text{Тогда } x_{p_k^2 + 2q_k} = \{\sqrt{p_k^2 + 2q_k}\} = \{\sqrt{p_k^2 + 2q_k} - p_k\} = \left\{ \frac{2q_k}{p_k + \sqrt{p_k^2 + 2q_k}} \right\}$$
$$12.24 \quad \left| \frac{2q_k}{p_k + \sqrt{p_k^2 + 2q_k}} \right| < 1.$$

$$\frac{q_k}{p_k} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 2 \frac{q_k}{p_k^2}}} \xrightarrow{\frac{p_k}{q_k} \rightarrow X} X \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 + X \cdot 0}} = X.$$

2) Субаддитивные посл-ти.

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, x_{n+m} \leq x_n + x_m$$

$$1) x_n = \sqrt{n}$$

$$2) x_n = -n^2$$

$$3) x_n = \ln \frac{1}{n!}$$

Лемма (90-е кете о суб-ых посл-ях).

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - субад. посл-ть. Тогда $\exists$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{x_n}{n}$.

$$\Delta 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \geq \inf_{n \geq 1} \frac{x_n}{n}, \quad l_n = \inf_{k \geq n} x_k \geq l_1 = \inf_{k \geq 1} x_k$$

$$2) \text{ Покажем, что для субад. } x_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq \inf_{n \geq 1} \frac{x_n}{n}.$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \geq \inf_{n \geq 1} \frac{x_n}{n} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}, \text{ но } \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}.$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n > pm + r, 0 \leq r \leq m-1$.

$$x_n = x_{pm+r} \leq x_{pm} + x_r \leq p \cdot x_m + x_r. \quad \frac{x_n}{n} \leq \frac{p x_m}{n} + \frac{x_r}{n} \leq \frac{p}{pm} + \frac{\max\{x_r\}}{n} \leq \frac{x_m}{m} + \frac{\max\{x_r\}}{n}.$$

$$\text{Пусть } \frac{x_{n_k}}{n_k} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n_k}}{n_k}, \text{ тогда } \frac{x_{n_k}}{n_k} \leq \frac{x_m}{m} + \frac{\max\{x_r\}}{n_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_m}{m}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq \inf_{m \geq 1} \frac{x_m}{m} - \text{топология на } \mathbb{R}$$

Опр. Пусть $x \in \mathbb{R}$, окр-ью $U(x)$ т. x наз-я любое мн-во $\mathbb{R}$, содержащее какую-нибудь эл. окр-ть т. x .

Опр. Мн-во $A \subset \mathbb{R}$ наз-я открытым, если оно явл. окр.

любой своей точки, т.е. $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$.

Опр. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, замыканием A наз-я мн-во $\bar{A} = A \cup \lim A$, где $\lim A$ - мн-во всех пред-ых точек A .

Опр. Мн-во A наз-я замкнутым, если $\bar{A} = A$, иначе $\lim A \subseteq A$.

Предложение (о св-ах окр-ей).

1) Пусть $U(x)$ и $V(x)$ - окр-ти т. $x \in \mathbb{R}$, тогда $U(x) \cup V(x)$ - окр-ть x и $U(x) \cap V(x)$ - окр-ть x .

2) $\exists$ фундаментальная система окр-ей $(\forall x \in \mathbb{R}) \{O_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

1) $O_1(x) \supset O_2(x) \supset \dots \supset O_n(x) \supset \dots$

2) $\forall$ окр-ть $U(x)$, $\exists n \in \mathbb{N} : U(x) \supset O_n(x)$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq y, \exists U(x), U(y) : U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

1) Пусть $x \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0 : (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset U(x), (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset V(x)$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, тогда $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U(x) \cap V(x) \subset U(x) \cup V(x)$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ положим $O_n(x) = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$, $x \in \mathbb{R}$, $O_n(+\infty) = (n, +\infty]$, $O_n(-\infty) = [-\infty, -n)$.

Для $x \in \mathbb{R} : (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \supset (x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1})$.

$\forall U(x), \exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U(x)$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$, $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U(x)$.

3) Очевидно $\triangleright$

12.26 Теорема (о св-ах открытых и замкнутых мн-в).

1) Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ - открытое, тогда $\mathbb{R} \setminus A$ - замкнуто.

2) Пусть $A_\alpha \subseteq \mathbb{R}, \alpha \in I$ - открытые мн-ва. Тогда $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ - открытое

3) $A_1, \dots, A_n$ - открытые, тогда $\bigcap_{k=1}^n A_k$ - открытое

4) Пусть $F_\alpha, \alpha \in I$ - замкнутое, тогда $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ - замкнутое

5) $F_1, \dots, F_n$ - замкнутые, $\bigcup_{k=1}^n F_k$ - замкнутое

6) $\emptyset$ и $\mathbb{R}$ - открыто-замкнутые

△ 1) Пусть от противного $\mathbb{R} \setminus A$ - не замкнутое. Тогда $\exists \alpha \in \lim(\mathbb{R} \setminus A)$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus A \Rightarrow \alpha \notin A \Rightarrow$ т.к. A открыто, то $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(\alpha) \subset A$, но по опр. пред. точки $U_\varepsilon(\alpha) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$, но $U_\varepsilon(\alpha) \cap (\mathbb{R} \setminus A) = \emptyset$ - противоречие.

2) $\alpha \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in I: \alpha \in A_{\alpha_0} \Rightarrow$ т.к. A_{α_0} - аткр, то $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(\alpha) \subset A_{\alpha_0} \Rightarrow U_\varepsilon(\alpha) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

3) $\alpha \in \bigcap_{k=1}^n A_k \Rightarrow \forall k=1, \dots, n, \alpha \in A_k \Rightarrow \exists \varepsilon_k > 0: U_{\varepsilon_k}(\alpha) \subset A_k$, положим $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k$, тогда $U_\varepsilon(\alpha) \subset U_{\varepsilon_k}(\alpha) \Rightarrow \forall k=1, \dots, n \quad U_\varepsilon(\alpha) \subset A_k \Rightarrow U_\varepsilon(\alpha) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$.

4) $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus F_\alpha) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha \in I} (\mathbb{R} \setminus F_\alpha)$.

5) Аналогично ▽

Примеры.

1) $(-\infty, a), (a, b), (b, +\infty), (-\infty, +\infty)$ - открытые

2) $[a, b]$ - замкнутое

3) $A_k = (-1 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k})$, $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = [-1; 1]$

7) Мн-во Кантора (дисконтинуум)

$$K_0 = [0, 1] - 2^0 \text{ мн-во длины } (1/3)^0$$

$$K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] - 2^1 \text{ мн-во длины } (1/3)^1$$

$$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] - 2^2 \text{ мн-во длины } (1/3)^2$$

$$K_n = \bigcup_{k=1}^n [,] \text{ длины } (1/3)^n$$

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n - \text{мн-во Кантора.}$$

Св-ва:

1) K - замкнутое, т.к. K_n - замкнутое, $\forall n \geq 1$

2) K не содержит внутр. точек, т.е. точек $a \in K: (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset K$ для любого $\varepsilon > 0$.

3) K - континуум

$$\begin{aligned} & \text{Посчитаем длины выкинутых интервалов: } \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1. \end{aligned}$$

Теорема (вписание откр. мн-ва в $\mathbb{R}$).

Всякое открытое мн-во $A \subset \mathbb{R}$ представляется, как не более чем счётное объединение откр. интервалов, т.е. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$.

Введём отношение экв-ти на A . $x, y \in A, x \sim y \Leftrightarrow \exists$ откр. интервал I и J , лежащий в A , $[x, y] \subset I$. Т.о. A распадается на класс экв-ти $A_\alpha: A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$.

2) Покажем, что A_α - открыто. $x \in A_\alpha \Rightarrow x \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$. $[y, x] \subset A \Rightarrow y \sim x \Rightarrow y \in A_\alpha \Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A_\alpha \Rightarrow A_\alpha$ - откр.

12.28

3) Покажем, что $A_\alpha = (\inf A_\alpha, \sup A_\alpha)$

1) $A_\alpha \subseteq [\inf A_\alpha, \sup A_\alpha]$, покажем, что $\inf A_\alpha \notin A_\alpha$ и $\sup A_\alpha \notin A_\alpha$.

Пусть от противного $\inf A_\alpha = l \in A_\alpha \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \subseteq A_\alpha$ - противоречие.

Если $l \in \mathbb{R}$, $l = -\infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow l \notin A_\alpha \subseteq \mathbb{R}$. Т.о. $A_\alpha \subseteq (\inf A_\alpha, \sup A_\alpha)$.

2) $\sup A_\alpha = u$, $\inf A_\alpha = l \Rightarrow (l, u) \subseteq A_\alpha$. $\forall x \in (l, u)$ по опр. $\inf$ и $\sup$. $\Rightarrow \exists y, z \in A_\alpha: l < y < x$ и $x < z < u$. $y \sim z \Rightarrow [y, z] \subseteq A_\alpha \Rightarrow x \in A_\alpha$.

4) В каждом интервале A_α можно выбрать по точке из $\mathbb{Q} \Rightarrow U$ - не более чем, счётно

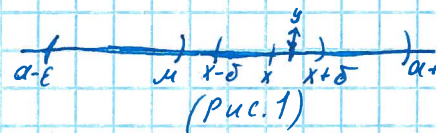
Теорема (о замкнутости предельных точек).

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$, тогда $\text{Lim } A$ - замкнутое мн-во в $\mathbb{R}$.

Δ Пусть $\alpha \in \text{Lim}(\text{Lim } A)$, тогда $\forall U_\varepsilon(\alpha), \exists x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(\alpha) \cap \text{Lim } A$; т.е. если $x \in \text{Lim } A$, то $\forall U_\delta(x), \exists y \in \overset{\circ}{U}_\delta(x) \cap A$. Возьмём $U_\delta(x) \subseteq U_\varepsilon(\alpha)$. Тогда $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(\alpha) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$ по опр. что $\alpha \in \text{Lim } A$. (рис.1)

Опр. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$, точка $\alpha \in A$.

наз-я изолированной, если она не



явл. для него предельной, т.е. $\exists U_\varepsilon(\alpha) \cap A \neq \emptyset$.

обозн: $\text{Isol}(A)$.

$A = (A \cap \text{Lim } A) \cup \text{Isol}(A)$.

Теорема (о замкнутости Lim).

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность, тогда мн-во $\lim \{x_n\}$ — замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$.

1) $\lim \{x_n\}_{n=1}^\infty = \lim A \cup \text{Isol } A$ ($A = \{x_n\}_{n=1}^\infty$) (из Т. Болл. — Вейерштрасса)

2) Покажем, что $\forall C, D \subseteq \overline{\mathbb{R}}, \lim(C \cup D) = \lim C \cup \lim D$.

$x \in \lim(C \cup D) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \dot{U}_\varepsilon(x) \cap (C \cup D) \neq \emptyset \Leftrightarrow (\dot{U}_\varepsilon(x) \cap C) \neq \emptyset \vee (\dot{U}_\varepsilon(x) \cap D) \neq \emptyset \Leftrightarrow \dot{U}_\varepsilon(x) \cap C \neq \emptyset$ или $\dot{U}_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \lim C$ или $x \in \lim D \Leftrightarrow x \in \lim C \cup \lim D$.

3) $\lim(\lim A) = \lim(\lim A \cup \text{Isol } A)$.

$\lim(\lim A) = \lim(\lim A) \cup \lim(\text{Isol } A) \subseteq \lim A \cup \lim A$.

Пусть $\alpha \in \lim(\text{Isol } A)$, $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in \dot{U}_\varepsilon(\alpha) \cap \text{Isol}(A)$.

$y \in \text{Isol } A \subseteq A$

$\exists y \in \dot{U}_\varepsilon(\alpha) \cap A \Rightarrow \alpha \in \lim A$.

Предел ф-ии.

Опр. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \text{лм } A$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Будем говорить что α - это предел ф-ии f при $x \rightarrow p$ по мн-ву A , если:

1) $p = -\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in A, x < -\delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

2) $p \in \mathbb{R}$, ~~$\alpha \in \mathbb{R}$~~ $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in A, |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

3) $p \in \mathbb{R}$, $\alpha = +\infty$:

$$\forall E > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in A, |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) > E.$$

4) $p = +\infty$, $\alpha = -\infty$:

$$\forall E > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A: x > \delta \Rightarrow f(x) < -E.$$

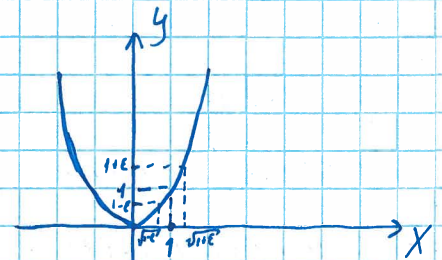
обозн. $\lim_{A \ni x \rightarrow p} f(x) = \alpha$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p, x \in A} \alpha$.

Примеры:

1) $\lim_{x \rightarrow 1, x \in \mathbb{R}} x^2 = 1$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ найдем } \delta > 0: \forall x \in \mathbb{R},$$

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$$



из рис. следует, что $\delta = \min \{ 1 - \sqrt{1 - \varepsilon}, \sqrt{1 + \varepsilon} - 1 \} \Rightarrow |x - 1| < \delta \Rightarrow$
 $\Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon.$

$$|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| < \delta \cdot |x + 1| < \delta(2 + \delta) < 3\delta = \varepsilon; \delta = \min \{ 1, \varepsilon/3 \}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty, x \in \mathbb{R}} x^2 = +\infty.$$

$$\forall E > 0, \exists \delta > 0: x > \delta \Rightarrow x^2 > E.$$

$$x^2 > \delta^2 = E, \delta = \sqrt{E}.$$

Утв. 1) Предел ф-ии единственен.

2) Пусть $\lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x) = \alpha$. Тогда $\exists U(p), \exists c > 0: \forall x \in U(p) \cap A, |f(x)| \leq c$.

Опр. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, p \in \lim A; B_+ = (-\infty; p) \cap A, B_- = A \cap (p, +\infty)$. Тогда пределью справа (слева) $f(x)$ при $x \rightarrow p+0$ (при $x \rightarrow p-0$) наз-ся предел: $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in B_+}} f(x)$ ($\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in B_-}} f(x)$).

обозн: $\lim_{\substack{x \rightarrow p+0 \\ x \in A}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow p-0 \\ x \in A}} f(x)$.

На языке ϵ - δ ($\alpha \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}$): $\alpha = \lim_{\substack{x \rightarrow p+0 \\ x \in A}} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in A \cap (p, p+\delta) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$.

$\alpha = \lim_{\substack{x \rightarrow p-0 \\ x \in A}} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in A \cap (p-\delta, p) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$.

Предложение (Критерий сущ. предела ф-ии в терминах правого и левого пределов):

Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, p \in \lim A$. $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow p-0} f(x) = \alpha$.

Д-во: $(\Rightarrow)$ очевидно; $(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha = \lim_{x \rightarrow p+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow p-0} f(x)$.

14 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0: \forall x \in A \cap (p, p+\delta_1) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon, \exists \delta_2 > 0$.

$\forall x \in A \cap (p - \delta_2, p) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Тогда для $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$
 $\forall x \in A$ и $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$ $\triangleright$

Предел и н-ва.

Теорема (о сохр. знака):

Пусть $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \lim A$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x)$,
 $\beta = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} g(x)$:

1) Пусть $\alpha < \beta$, тогда $\exists$ эл-т окр. $U(p)$: $\forall x \in U(p) \cap A$,
 $f(x) < g(x)$.

2) Если $\exists$ эл-т окр. $U(p)$: $\forall x \in U(p) \cap A$, $f(x) < g(x)$, тогда
 $\alpha \leq \beta$.

Д-во: $\Delta (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ 1) т.к. $\alpha < \beta$, то $\exists \varepsilon > 0$: $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \cap$
 $\cap (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) = \emptyset$. Тогда $\exists \delta_1$: $\forall x \in A$, $0 < |x - p| < \delta_1$, $\alpha - \varepsilon < f(x)$
 $< \alpha + \varepsilon$. $\exists \delta_2$: $\forall x \in A$, $0 < |x - p| < \delta_2$, $\beta - \varepsilon < f(x) < \beta + \varepsilon$. Тогда
 $\forall x \in U_\delta(p) \cap A$, $U_\delta = (p - \delta, p + \delta)$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow f(x) <$
 $< \alpha + \varepsilon < \beta - \varepsilon < g(x)$.

2) Аналогично пред. посл-ти $\triangleright$

Теорема (о зажатых ф-ях):

Пусть $f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \lim A$, $\alpha = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} f(x)$,
 $\alpha = \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in A}} g(x)$. Если $\exists$ эл-т окр. $U(p)$: $\forall x \in A \cap U(p)$, $f(x)$
 $\leq h(x) \leq g(x)$, то $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = \alpha$. □

Д-во: $\nabla 4/3$ опр. Предела и окр. нек-ой точки ∇

Примеры (асимптотические св-ва эксп. ф-ции):

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathbb{R}}} \exp(x) = 1 = \exp(0). \forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 1+x \wedge \exp(x) < \frac{1}{1-x} \Rightarrow \forall x < 1 \begin{cases} \exp(x) < \frac{1}{1-x} \\ \exp(x) > 1+x \end{cases} \text{ при } x \rightarrow 0, \exp(x) \rightarrow 1$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in \mathbb{R}}} \exp(x) = \exp(p).$$

$$0 \leq |\exp(x) - \exp(p)| = |\exp(x-p) \exp(p) - \exp(p)| = \exp(p) |\exp(x-p) - 1|.$$

$$\exp(p) = e^{p/q}, \exp(x) = e^x.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x < +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \forall x < 1, 0 < e^x < \frac{1}{1-x}.$$

Топологическое опр. Предела

У+В:

$f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, A \subseteq \overline{\mathbb{R}}, p \in \lim A$. Тогда $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \alpha, \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall$ эл-т окр. $U(\alpha), \exists$ эл-т окр. $U(p): \forall x \in \overset{\circ}{U}(p) \cap A \Rightarrow f(x) \in U(\alpha)$.

Теорема (Критерий Гейне):

$f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, A \subseteq \overline{\mathbb{R}}, p \in \lim A$. $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \alpha, \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall$ пос-ти $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (A \setminus \{p\}) \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha.$

16

= секвенциальный подход к опр. предела.

D-во: $\Delta(\Rightarrow)$ опр. предела пос-ти.

($\Leftarrow$) методом от противного $\triangleright$

Пример:

1) $\sin \frac{1}{x} = 1; \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \geq 0.$

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \wedge \quad \sin \frac{1}{x_k} = 1.$$

2) $\sin \frac{1}{x} = 0, \frac{1}{x} = \pi k, k > 0, x_k = \frac{1}{\pi k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \sin \frac{1}{x_k} = 0.$ По к.

Гейне предела не сущ.

Теорема (Критерий Коши для предела ф-ий):

Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, p \in \lim A$. Предел $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ $\exists$ и конечн

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ эл-т окр. } U(p): \omega(f(A \cap U(p))) < \varepsilon.$$

Опр. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, E \subseteq A$. Колебанием ф-ии на мн-ве E наз-я величина $OSC_f(E) = OSC(f; E) = \omega_f(E) :=$

$$:= \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)|.$$

D-во: $\Delta(\Rightarrow)$ Пусть $\alpha = \lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x), \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда по опр-ии

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \text{ эл. окр. } U(p): \forall x \in A \cap U(p) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Тогда}$$

$$\forall y, z \in A \cap U(p), |f(y) - f(z)| = |f(y) - \alpha + \alpha - f(z)| \leq |f(y) - \alpha| + |f(z) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) D-во сходимости по критерию Гейне $\triangleright$

Т. (об односторонних пределах монотонной ф-ии):

Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{R}$ - монот. ф-ия. Тогда

$\left[\begin{array}{l} \text{1.} \\ \text{2.} \end{array} \right]$

Э одност. пределы: $\forall \epsilon (\alpha, \beta)$

$$\lim_{x \rightarrow p+0} f(x) = \inf_{x > p} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow p-0} f(x) = \sup_{x < p} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow p+0} f(x) = \sup_{x > p} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow p-0} f(x) = \inf_{x < p} f(x)$$

D-во: < использовать критерий точных нижних грани.

I. (о пределе арифметических операций):

$$1) \lim_{x \rightarrow p} (f+g) = \lim_{x \rightarrow p} f + \lim_{x \rightarrow p} g, \text{ если: т.т. } \alpha = \lim_{x \rightarrow p} f(x); \beta = \lim_{x \rightarrow p} g(x)$$

$$1.1) \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$1.2) \alpha \in \{\pm\infty\}, \beta \in \mathbb{R} \text{ (и наоборот)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow p} (f \cdot g) = \alpha \cdot \beta, \text{ если}$$

$$2.1) \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$2.2) \alpha \in \{\pm\infty\}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ (и наоборот)}$$

$$2.3) \alpha, \beta \in \{\pm\infty\}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ если}$$

$$3.1) \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$$

$$3.2) \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \{\pm\infty\}$$

$$3.3) \alpha \in \{\pm\infty\}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Непрерывные ф-ии.

Опр. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = \text{Dom } f$, $p \in A$. Говорят, что f непрерывна в точке p , если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$
 $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Замечания: 1) Пусть $p \in \text{Isol}(A)$. Показать, что f -непрерывна в т. p ; т.к. $p \in \text{Isol}$, то $\exists \delta_0 > 0: (p - \delta_0, p + \delta_0) \cap A = \{p\}$
 $\forall \varepsilon > 0$ возьмем в качестве $\delta = \delta_0$, тогда $\forall x \in A, |x - p| < \delta$
 $\Rightarrow x = p \Rightarrow |f(x) - f(p)| = |f(p) - f(p)| = 0 < \varepsilon$.

2) Пусть $p \in \lim A$. Тогда f -непр. в $p \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$

3) Тополог. опр. непр-ти:

Пусть $p \in \lim A$. Тогда f -непр. в т. $p \Leftrightarrow \forall \varepsilon$ -окр. $U(f(p))$, $\exists \delta$ ε -окр. $U(p): \forall x \in A \cap U(p), f(x) \in U(f(p))$

Опр. Если f -непр. в каждой точке $p \in A$, то f наз. непр-ой на A . Мн-во таких ф-ий обозн. $C(A)$.

Опр. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = \text{Dom } f$, $p \in A$. Точка p - т. разрыва для f , если в ней f не явл-я непр-ой.

Классификация разрывов.

1 род: $\exists$ и конечны односторонние пределы, т.е. $f(p) \neq \lim_{x \rightarrow p-0} f(x); f(p-0) := \lim_{x \rightarrow p-0} f(x)$. И хотя бы один из них не равен $f(p)$.

1.

Если $f(p+0) = f(p-0) \neq f(p)$, то разрыв наз-ют устраним
в противном случае неустранимы.

2 род. Все остальные разрывы (т.е. хотя бы 1 из
односторонних пределов $\neq$ или $= \pm \infty$).

Замечание: Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = \text{Dom } f$, $p \in \text{lim } A$ или
 $p \in A$. Говорят, что f терпит разрыв (2 рода) в т.р., если
 $\forall$ расшир. f на т.р. (т.е. $g|_A = f$) т.р. - разрыв (2 рода).

Предложение: (о локальных св-вах непр-ых ф-ий):

Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $p \in A$ и f -непр. в т.р. Тогда:

- 1) $\exists \varepsilon$ -окр. $U(p): f|_{U(p)}$ - отр.
- 2) Если $f(p) \neq 0$, то $\exists \varepsilon$ -окр. $U(p): \forall x \in U(f(x)) > 0$.
- 3) непр-ть - это локальное св-во, т.е. если f -непр. в т.р., то
она может не явл-ся непр. в нек-ой окр. $U(p)$.

Д-во: 1) следствия конечности предела $\lim_{x \rightarrow p, x \in A} f(x) = f(p)$.

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in A, |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Берём
 $\varepsilon = \frac{f(p)}{2}$, то $f(p) - \frac{f(p)}{2} < f(x) < f(p) + \frac{f(p)}{2} \Rightarrow \forall x \in A: |x - p| < \delta$
 $f(x) \neq 0$.

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $p = 0$ - единств. точка непр-ти. $\triangleright$

Теорема (о разрывах монотонной ф-ии):

20 | Пусть $f: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ и f -монотонна, тогда

1) все её возможные разрывы явл-ся неустрашимыми раз-ми 1-го рода.

2) Мн-во т. разрыва не более чем счётно.

Д-во: Δ для определённости пусть $f \uparrow$.

1) мы знаем, что $\forall r \in (a, b) \exists$ и конечны односторон. пред
 $f(x) \leq f(r) \leq f(y)$, $\left(\begin{array}{c} x & y \\ \alpha & r \end{array} \right)$, $\forall x \leq r \wedge \forall y \geq r$.

При $x \rightarrow r-0$ и $y \rightarrow r+0$, $-\infty < f(r-0) \leq f(r) \leq f(r+0) < +\infty$. Если $f(r-0) \neq f(r+0)$, то имеем неустр. разрыв 1-го рода.

2) $\forall$ точки разрыва можно сопоставить интервал $[f(r-0), f(r+0)]$. Все такие отрезки не пересекаются: возьмём в каждом из них по Q точке... Δ

Глобальные св-ва непр-ой ф-ции.

Теорема (Вейерштрасса об отгр. непр-ой ф-ции.

Пусть $f \in [a, b]$, т.е. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. f - непр. $\forall$ точке. Тогда $\exists x_{\max}, x_{\min} \in [a, b]: \forall x \in [a, b]$,
 $f(x_{\max}) \leq f(x) \leq f(x_{\min})$.

Д-во: Δ Положим $u = \sup f(x)$, $u \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$. По Критерию Точки верхней грани $\exists x_n \in [a, b]: f(x_n) \rightarrow u$. По Т. Больцано-Вейерштрасса $\exists x_{n_k} \rightarrow p$, при $k \rightarrow \infty$, $\boxed{2}$

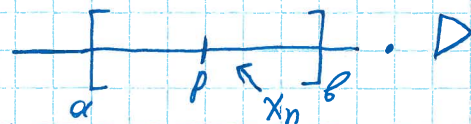
$p \in [\alpha, \beta]$, т.к. $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$, то $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$, но $f(x_k) \rightarrow f(p)$, т.к. $x_{n_k} \rightarrow p$ и f -непр. $\Rightarrow u = f(p)$. Δ

Теорема (Больцано-Коши) о промежуточных значениях непрерывной функции:

Пусть $f \in C[\alpha, \beta]$. Тогда $\forall y$, лежащего между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, найдется $x \in [\alpha, \beta]$: $f(x) = y$.

Д-во: Δ Пусть $f(\alpha) = f(\beta)$, тогда $y = f(\alpha) = f(\beta)$. Можно взять $x = \alpha$ или $x = \beta$. Пусть $f(\alpha) \neq f(\beta)$, для определенности $f(\alpha) < f(\beta)$, тогда $f(\alpha) \leq y \leq f(\beta)$. Рассмотрим мн-во $X = \{x \in [\alpha, \beta] \mid f(x) \leq y\}$. Ясно, что $\alpha \in X \Rightarrow X \neq \emptyset$. Положи $p = \sup X$, $p \in [\alpha, \beta]$. Покажем, что p — искомая точка.

Из критерия Т.В. $\exists x \in X: x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$. По непр-ти $f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(p)$. Тогда т.к. $f(x_n) \leq y \Rightarrow f(p) \leq y$ (п.т.о сохр. знак в пред. переходе). Если $p = \beta$, то $f(p) \leq y \leq f(\beta)$, т.е. $y = f(\beta)$; $x = \beta$. Если $p < \beta$, то выберем $\tilde{x}_n \in (p, \beta]: \tilde{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ т.к. f -непр., то $f(\tilde{x}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(p)$. Т.к. $\tilde{x}_n \notin X$, то $f(\tilde{x}_n) > y \Rightarrow f(p) \geq y$. Δ



Следствие 1 (о нулях непрерывной функции):

Пусть $f \in C[\alpha, \beta]$ и $f(\alpha) \cdot f(\beta) \leq 0$. Тогда $\exists c \in (\alpha, \beta): f(c) = 0$.

22

Д-во: Δ Поскольку $f(a) \cdot f(b) < 0$, то 0-лежит м/у $f(a)$ и $f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b]: f(c) = 0$, причем $c \neq a, c \neq b$. Δ

Следствие 2: Δ Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $f([a, b])$ — отрезок. f — непр. $f \neq \text{const}$.

Д-во: По Т. В. $\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]: \forall x \in [a, b], f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$, т.е. $f([a, b]) \subseteq [f(x_{\min}), f(x_{\max})]$.

Возьмем y м/у $f(x_{\min})$ и $f(x_{\max})$, тогда по Т. В. $\exists x$ м/у $x_{\min}$ и $x_{\max}: f(x) = y$. $[f(x_{\min}), f(x_{\max})] \subseteq f[x_{\min}, x_{\max}] \subseteq f[a, b] \Rightarrow f[a, b] = [f(x_{\min}), f(x_{\max})]$

Δ

Теорема (о непр-ти арифм. опер.):

Пусть $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, p \in A$ и f, g — непр. в т. p . Тогда $f \pm g, f \cdot g, f/g$ (при $g(p) \neq 0$) так же непр. в т. p .

Д-во: Δ 1) Если $p \in \text{isol}(A)$, то непр. по отр.

2) Если $p \in \text{lim } A$, то след. из следствия Т. о пределе арифм. опер., т.е. $\lim_{x \rightarrow p} (f \pm g) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow p} g(x) = f(p) \pm g(p) = (f \pm g)(p)$. Δ

Теорема (о непр-ти композиций):

Пусть $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow \mathbb{R}, A, B \subseteq \mathbb{R}, p \in A$. f — непр. в т. p . g — непр. в т. $f(p)$. Тогда $f \circ g$ — непр. в т. p . 2

Д-во: Δ 1) Если $p \in \text{isol}(A)$, то $g \circ f$ - непр в т.р.

2) Если $p \in \lim A$, то $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

3) Если $f(p) \in \text{isol} B \Leftrightarrow f$ локально явл-ся const в ε -окр. $V(p) \Rightarrow g$ -непр в т. $f(p)$, $f(x) = f(p)$.

4) Если $f(p) \in \lim B$, то $\lim g(y) = g(f(p))$. По т. о пред. пер. комп. $\lim_{x \rightarrow p} (g \circ f)(x) = g(f(p))$. Δ

Опр. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ - инъект. го-ия. Тогда она обратима, т.е. $\exists f^{-1} = f(A) \rightarrow A$ и опр-ая рав-ом $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. $f \circ f^{-1} = \text{id } f(A)$. $f^{-1} \circ f = \text{id } A$. $\square$

Лемма 1:

Пусть $f: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и f -строго монотонна, тогда f - инъективна.

Д-во: Δ Пусть $f \uparrow \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Δ

Лемма 2: (Признак Больцано строгой монотонности)

Пусть $f: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in C(\langle \alpha, \beta \rangle)$. f -инъективно $\Leftrightarrow f$ -строго монотонна.

Д-во: $\Delta (\Leftarrow)$ по л.1. $(\Rightarrow)$ Пусть $x_1 < x_2 < x_3$; $x_1, x_2, x_3 \in \langle \alpha, \beta \rangle \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \neq f(x_3)$. Покажем, что $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$ или $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$. Пусть Расема $[24]$ рим огр. $[x_1, x_3]$, $f \in C([x_1, x_3])$. Тогда для $y = f(x_1)$

$\exists p \in [x_1, x_3]: f(p) = y \cdot f(x_1)$, ясно, что $p \neq x_1$ - противоречие с инъект. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) \leq \Rightarrow f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$. Δ

Лемма 3:

Пусть $f: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f - строго монотонна. Тогда f - непр. $\Leftrightarrow$ образ $f(\langle \alpha, \beta \rangle)$ - интервал с концами $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ такого же характера, как α и β .

$\Rightarrow$ - во: Δ ($\Leftarrow$) f - строго монотонна, для опр-ти $f^\uparrow$ тогда $f(\langle \alpha, \beta \rangle) = \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle$. Пусть p - т. разрыва для f . По Т. о разрыве монотонной ф-ии в т.р имеет скачок, т.е. $(f(p-0), f(p+0))$ не лежит в $\langle \alpha, \beta \rangle$ - противоречие с тем, что образ $f(\langle \alpha, \beta \rangle)$ - интервал.

($\Rightarrow$) f - непрер. и для опр. $f^\uparrow$. $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$ - следствие 2 из Т. Б-К. $f([\alpha, \beta]) = f(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} [\alpha, \beta - \frac{1}{k}])$, $= \bigcup_{k=k_0}^{\infty} f[\alpha, \beta - \frac{1}{k}] = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} [f(\alpha), f(\beta - \frac{1}{k})] = [f(\alpha), f(\beta-0)]$; $f(\beta - \frac{1}{k}) \rightarrow f(\beta-0) \Delta$

Теорема (о непр-ти обратного отображения):

Пусть $f: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ - непрер-ая инъективная ф-ия. Тогда обратное отображ. $f^{-1}: f(\langle \alpha, \beta \rangle) \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle$ так же непрерывно.

Д-во: Δ По Л.2 f строго монотонна, по Л.3 $f(\langle a, b \rangle) = \langle f(a-0), f(b+0) \rangle$ - интервал.

Тогда имеем f^{-1} - строго монот. ф-ция, и $f^{-1}: \langle f(a-0), f(b+0) \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$. По Л.3 f^{-1} - непр.

Опр. Будем считать элемент. ф-ей $\forall$ ф-ию, полученную с помощью опер. "+", "•", "0", "÷", взятия обра. из основных элементарных ф-ий:

$e^x, \sin x, \cos x, x^2, a^x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \ln x, \operatorname{arcs} \operatorname{tg} x, \operatorname{arcs} \operatorname{ctg} x, \operatorname{arcsin} x, \operatorname{arccos} x$.

Предложение (о непр-ти эл. ф-ий):

Всякая эл. ф-ия непр-на на своей ООФ.

11.11.2022.

12

Нужно показать, что $y = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

было д-но: $\sin x \leq x, \forall x \geq 0 \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$

т.к. $\sin x$ - нечетная.

$\forall p \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: |x - p| < \delta$

$$|\sin x - \sin p| = 2 \left| \sin \frac{x-p}{2} \cos \frac{x+p}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-p}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-p}{2} \right| = |x-p| < \delta = \varepsilon.$$

Равномерная непрерывность:

Опр. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$. Ф-ция f называется равномерно непрерывной на мн-ве A , если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

1) @ f - равномерно-непрерывна на A , то f - непрерывна на A , $\mathcal{U}_f(A) \subset \mathcal{C}(A)$. ($\mathcal{U}_f(A)$ - мн-во р-н ф-ций на мн-ве A).

2) $\exists f \in \mathcal{C}(0, 1) \setminus \mathcal{U}_f(0, 1)$

Пример: $f(x) = \sin \frac{1}{x}; x \in (0, 1)$

отрицание р-н ф-ции: $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in (0, 1) (|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon)$

$$\Rightarrow |\sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2}| \geq \epsilon.$$

Теорема Кантора (о равномерной непрерывности,
 Всякая непрерывная на отрезке ф-ия будет
 равномерно-непрерывна, т.е. $C[a, b] = \bigcup C[a, b]_D$ -во:

Δ т.к. f - непрерывна в каждой т. $p \in [a, b]$, то
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon, p) > 0 \mid \forall x \in [a, b], |x - p| < \delta \Rightarrow$
 $\Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon/2.$

$$O_\delta(p) = (p - \frac{\delta}{2}, p + \frac{\delta}{2}) - \text{откр.}$$

$$[a, b] \in \bigcup_{p \in [a, b]} O_\delta(p) \Rightarrow \exists p_1, \dots, p_n \in [a, b] \mid [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^n O_{\delta_k}$$

$$\text{Возьмем } \delta := \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\delta_k}{2}.$$

Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $|x_1 - x_2| < \delta$. Пусть $x_1 \in O_{\delta_k}(p_k)$
 ~~$(\in (p_k - \delta_k, p_k + \delta_k))$~~ Тогда $|x_2 - p_k| = |x_2 - x_1 + x_1 - p_k| \leq |x_2 - x_1| +$
 $+ |x_1 - p_k| \leq \delta + \frac{\delta_k}{2} \leq \frac{\delta_k}{2} + \frac{\delta_k}{2} = \delta_k.$

Из непрерывности: $|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(p_k) +$
 $+ f(p_k) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(p_k)| + |f(x_2) - f(p_k)| \leq$
 $\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \triangleright$

Упр. Пусть $\omega: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < h \leq +\infty$.

функ-ия ω - модуль непрерывности для $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

если:

1) $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta) = 0$

2) ω - неубывающая, функ-ия

3) $\forall x_1, x_2 \in A: |x_1 - x_2| \leq h \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|)$

Теорема (критерий равномерной непрерывности,

функ-ия $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ - равномерно-непр. на

$A \Leftrightarrow$ у f есть модуль непрерывности ω .

Д-во:

$\Leftarrow$ Имеем: $\forall x_1, x_2 \in A: |x_1 - x_2| \leq h \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)|$

$\leq \omega(|x_1 - x_2|)$. Т.к. $\omega(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 0$, то $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$0 < t < \delta \Rightarrow \omega(t) < \varepsilon$. Тогда $\forall x_1, x_2 \in A: |x_1 - x_2|$

$< \frac{\delta}{2} < h \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|) \leq \omega(\frac{\delta}{2})$

$< \varepsilon$.

$(\Rightarrow) f \in U C(A)$. Положим $\omega(t) = \sup_{\substack{x, y \in A \\ |x - y| \leq t}} |f(x) - f(y)|$

$\omega: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, +\infty]$. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$. $\forall x_1, x_2 \in A,$

$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Возьмем $h = \delta(\varepsilon)$ и будем рассуждать $\square$ 2.

$\omega: [0, h] \rightarrow [0, +\infty)$, $|x_1 - x_2| \leq h \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(h)$
 $\Rightarrow \omega(h) \leq 1$. Покажем, что ω — неуб.

$$0 < t_1 < t_2 \leq h \Rightarrow \omega(t_1) = \sup_{\substack{x, y \in A \\ |x-y| \leq t_1}} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{\substack{x, y \in A \\ |x-y| \leq t_2}} |f(x) - f(y)| = \omega(t_2).$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < t < \delta$ (берём $\delta = \delta(\varepsilon)$ из окрестн. $\overline{UC}$).

$$\omega(f) = \sup_{\substack{x, y \in A \\ |x-y| \leq t}} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0+} \omega(t) = 0 = \omega$$

Пусть $|x_1 - x_2| \leq h \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(|x'_1 - x'_2|)$.
 (где $|x_1 - x_2| \leq |x'_1 - x'_2| \leq h$). Положим $x'_1 = x_1, x'_2 = x_2$.
 Тогда $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(|x_1 - x_2|)$. $\triangleright$

Примеры.

1) Пусть $\omega(t) = L \cdot t, t \in [0, h], h < +\infty$.

f наз-я Липшицевой, @ $\exists L > 0 \mid \forall x, y \in A, |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$.

2) Пусть $\omega(t) = H \cdot t^\alpha, \alpha \in (0, 1), t \in [0, h], h < +\infty$,

f наз-я Гёльдеровской @ $\exists H > 0 \mid \forall x, y \in A$
 $|f(x) - f(y)| \leq H |x - y|^\alpha$.

УМР. Показать, что:

$$Lip(\langle \alpha, \beta \rangle) \not\subset H_\alpha(\langle \alpha, \beta \rangle) \not\subset H_\beta(\langle \alpha, \beta \rangle) \not\subset \\ \not\subset UC(\langle \alpha, \beta \rangle) \not\subset C(\langle \alpha, \beta \rangle).$$

Пример: $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, $x \in [0, 1]$.

Функциональные ур-ия для основных эл. функ-ий.

1) лн. ф-ия: $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема Коши (о лн. функ-ии).

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непр-ая ф-ия, удовл ур-ию (*). Тогда $f(x) = \alpha x$, где $\alpha = f(1)$

$$(*) f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Д-во:

$$\Delta 1) x = y = 0 \mid f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$2) y = -x \mid f(x-x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

(нечет. ф-ия).

$$3) f(1) = \alpha$$

$$f(n) = \underbrace{f(1) + f(1) + \dots + f(1)}_n = \alpha n$$

$$f(-n) = -f(n) = -\alpha n$$

$$4) x = p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}: f\left(\frac{p}{q}\right) = \operatorname{sgn} p f\left(\frac{|p|}{q}\right) =$$

$$= \text{sgn } p \left(\underbrace{f\left(\frac{1}{q}\right) + f\left(\frac{1}{q}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{q}\right)}_p \right) = p \cdot f\left(\frac{1}{q}\right);$$

$$\alpha = f(1) = \underbrace{f\left(\frac{1}{q}\right) + f\left(\frac{1}{q}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{q}\right)}_q \Rightarrow f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\alpha}{q};$$

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = \alpha \cdot x.$$

По т. о плотности $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \exists x_n \in \mathbb{Q} \mid x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x, f(x_n) = \alpha \cdot x_n \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x. \triangle$

2) Показательная ф-ия:

$$y = a^x, a > 0. f(x+y) = f(x) \cdot f(y) (**)$$

Теорема о показательной ф-ии.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - н-пр-ая ф-ия, не равная нулю, удовл. (**). Тогда $f(x) = a^x$, где $a = f(1)$.

До-во:

$$\Delta) x = y = 0, f(0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow (f(0) = 0 \vee f(0) = 1)$$

$$(2) y = -x, f(0) = f(x) \cdot f(-x) \dots$$

$$2) x = 0, f(y) = f(0) \cdot f(y), @ f(0) = 0 \Rightarrow f(y) = 0 \text{ т.е. } f \text{ - нулевая, но это не так, } \Rightarrow f(0) = 1$$

$$3) x = -y; 1 = f(0) = f(x) \cdot f(-x) \Rightarrow f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4) x = \frac{z}{2} = y; f(z) = (f(\frac{z}{2}))^2 \geq 0 \dots$$

Теорема (функции. описание степенных ф-ий).

Пусть $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ — непрерывная нулевая ф-ия, удовлетворяющая ур-ю $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ $\forall x, y > 0$. Тогда $f(x) = x^\alpha$, для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. ($\alpha = \ln f(e)$).

Функциональное описание $\cos(x)$ и $\sin(x)$.

$$1) e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, x \in \mathbb{R}$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, z \in \mathbb{C}$$

Пусть $z = ix, x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \cdot x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos x + i \sin x.$$

Формула Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \text{гиперболический косинус,}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \text{гиперболический синус.}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1; \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \operatorname{cth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}; \sinh x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; e^x = \cosh x + \sinh x.$$

Теорема (описывает описание $\cos x$ и $\cosh x$).

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная ненулевая ф-ция, удовл. ур-ию $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$ (***)

Тогда, если $f(x) \leq 1$, то $f(x) = \cos(\alpha x)$ для нек-го $\alpha \in \mathbb{R}$

если $f(x) \geq 1$, то $f(x) = \cosh(\alpha x)$ для нек-го $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{Д-во: } \nabla x=0 \Rightarrow f(y) + f(-y) = 2f(0) \cdot f(y);$$

$$y=0 \Rightarrow 2f(x) = 2f(x) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1 \text{ (т.к. } f \text{ - ненулев.)}$$

$$\Rightarrow f(y) = f(-y), \text{ т.е. } f \text{ - чёткая.}$$

Т.к. f - непрерывна, то по Т. о сопр. знаков

$$\exists \varepsilon > 0: \forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad 1 \geq f(x) > 0, \text{ т.к. } f(0) = 1 > 0.$$

В том числе $0 < f(\varepsilon) \leq 1$. Тогда $\exists \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(\varepsilon) = \cos \theta$.

$$\text{Пусть } x=y=\frac{\varepsilon}{2} \text{ в (***)}. f(\varepsilon) + 1 = 2\left(f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^2 =$$

$$= \cos^2 \theta = \frac{\cos \theta + 1}{2} = f^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \cos \frac{\theta}{2} = f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ т.к. } f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$$

$$\cos \frac{\theta}{2} > 0.$$

По индукции, покажем, что:

$$f\left(\frac{c}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2^m}\right), m \in \mathbb{N}.$$

1°. $m=1$ — база индукции

2°. пусть для m верно, у-ем для $m+1$

возьмем в (****) $x=y=\frac{c}{2^{m+1}}$.

$$f\left(\frac{c}{2^m}\right) + 1 = 2 \left(f\left(\frac{c}{2^{m+1}}\right) \right)^2.$$

из предположения индукции получаем $\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2^m}\right) + 1}{2} =$
 $= f^2\left(\frac{\theta}{2^{m+1}}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\theta}{2^{m+1}}\right) = \cos\frac{\theta}{2^{m+1}}.$

$f\left(\frac{nc}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{n\theta}{2^m}\right)$ — покажем, что $\forall n \in \mathbb{N}$ рав-
-ство выполнено.

1° для $n=1$ — дак-но

$n=3, x=\frac{c}{2^m}, y=\frac{2c}{2^m}; f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y) \Leftrightarrow$
 $\Rightarrow f\left(\frac{3c}{2^m}\right) + f\left(\frac{c}{2^m}\right) = 2f\left(\frac{c}{2^m}\right) \cdot f\left(\frac{2c}{2^m}\right).$

$$f\left(\frac{3c}{2^m}\right) = 2f\left(\frac{c}{2^m}\right) \cdot f\left(\frac{2c}{2^m}\right) - f\left(\frac{c}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{3\theta}{2^m}\right).$$

2° Предположим, утв. дак-но для n , покажем для $n+1$.

$$x = \frac{nc}{2^m}, y = \frac{c}{2^m}. f\left(\frac{(n+1)c}{2^m}\right) + f\left(\frac{(n-1)c}{2^m}\right) = 2f\left(\frac{nc}{2^m}\right)f\left(\frac{c}{2^m}\right),$$

$$f\left(\frac{(n+1)c}{2^m}\right) = 2 \frac{\cos n\theta}{2^m} \cdot \frac{\cos \theta}{2^m} - \frac{\cos(n-1)\theta}{2^m} = \frac{\cos(n+1)\theta}{2^m} +$$

$$+ \frac{\cos(n-1)\theta}{2^m} - \frac{\cos(n-1)\theta}{2^m} = \frac{\cos(n+1)\theta}{2^m}.$$

Для x вида $x = \frac{n}{m} \cdot \frac{c}{2^m}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

$$f(x_{n,m} \cdot c) = \cos(x_{n,m} \cdot \theta).$$

Мн-во двоично-рациональных чисел $\{\frac{n}{2^m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$ (коки и $\mathbb{Q}$).

$\forall x \in \mathbb{R} \exists$ посл. $x_{n,m} \rightarrow x$.

По непрерывности f : $f(x \cdot c) = \cos(x \cdot \theta)$, где $f(x_{n,m} \cdot c) \rightarrow f(x \cdot c)$; $\cos(x_{n,m} \cdot \theta) \rightarrow \cos(x \cdot \theta)$.

$$f(y) = \cos\left(\frac{y \cdot \theta}{c}\right); \alpha = \frac{\theta}{c}.$$

Дифференциальное исчисление ф-ий одной $\mathbb{R}$ переменной.

опр. Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p \in (a, b)$. Производной ф-ии f в точке p наз-я предел $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(p + \Delta x) - f(p)}{\Delta x}$.

Если этот предел сущ. и конечен, то f наз-я

дифференцируемой в точке p .

Если f -дифф. в каждой точке $p \in (a, b)$, то она наз-я диф-ной на (a, b) ; обозн: $D(a, b)$ - мн-во p -ий дифф-ых на интервале (a, b) .

Будем говорить, что на концах интервала определены односторонние пределы, $\Leftrightarrow \exists$ пределы

$f'(a+0) := \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (при условии $f(a)$ - определена).

$f'_-(b) = f'_-(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ (при усл. $f(b)$ - опр.). Обозн: $f \in D([a, b])$, если $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D(a, b)$ и $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ - сущ. и конеч.

Теорема (Критерий дифференцируемости).

Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p \in (a, b)$.

Тогда f -дифф. в точке $p \Leftrightarrow$ когда сущ. лнн. отображение $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такое что $f(p+h) - f(p) = L(h) + o(h)$ при $h \rightarrow 0$.

Д-во: $\Delta(\Rightarrow)$ имеем конечный предел $f'_-(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$.

Возьмем $\alpha(h) = f(p+h) - f(p) - f'_-(p) \cdot h$

$$\frac{\alpha(h)}{h} = \frac{f(p+h) - f(p)}{h} - f'(p) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \text{ т.е. } \alpha(h) = o(h)$$

при $h \rightarrow 0 \Rightarrow f(p+h) - f(p) = f'(p)h + o(h)$, где
можно подставить $L(h) = f'(p) \cdot h$.

$$(\Leftarrow) f(p+h) - f(p) = L(h) + o(h).$$

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \frac{L(h)}{h} + o(1) \Rightarrow \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = L(1) = f'(p). \quad \Delta$$

обозначение производных: $f'(p)$, $\frac{df}{dx}(p)$, $Df(p)$,
 $D_x f(p)$.

Опр. Лин. отображение L в равенстве (*)

наз-я дифференциалом ф-ии f в т. p .

обозн: $L = dF(p)$.

$$(*) f(p+h) - f(p) = L(h) + o(h), \text{ при } h \rightarrow 0$$

$$dF(p)(h) = f'(p) \cdot h, \quad dF: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Следствие:

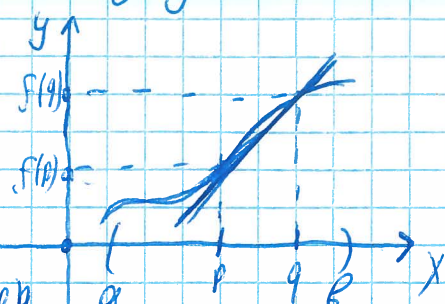
Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $p \in (a, b)$ и f -глад
в т. p .

$$D-во: \triangle f(p+h) - f(p) = h(f'(p) + o(1)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(p+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(p) \quad \Delta$$

1. Геометрический смысл производной.

$$\begin{cases} y = kx + b \\ f(p) = k \cdot p + b \\ f(q) = k \cdot q + b \end{cases}$$



$$k = \frac{f(p) - f(q)}{p - q}; \quad b = \frac{p \cdot f(q) - f(p) \cdot q}{p - q}$$

$$y = \frac{f(p) - f(q)}{p - q} x + \frac{f(q)p - f(p)q}{p - q}$$

Пусть f -диф. в т. p . Рассмотрим предельное положение секущей при $q \rightarrow p$.

$$y = f'(p) \cdot x + f(p) - f'(p) \cdot p = f'(p) \cdot (x - p) + f(p)$$

- касательная к графику f в т. p .

$f'(p) = \operatorname{tg} \alpha$ - Тангенс угла наклона касательной

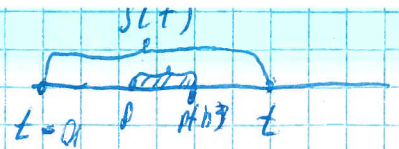
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p) \cdot (x - p) + o(x - p) \\ y &= f(p) + f'(p) \cdot (x - p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) - y = o(x - p)$$

$= o(x - p)$, при $x \rightarrow p$.

2. Механический смысл производной.

Пусть $S: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $S = S(t)$ - это длина пути, пройденного телом за время t .

$$\frac{S(h+p) - S(p)}{h} - \text{ср. скорость}$$



При $h \rightarrow 0 \Rightarrow S'(p)$ - мгновенная скорость.

Примеры:

1) Пусть $f(x) = \text{const}$, тогда $f'(x) = 0$. $p \in (a, b)$,

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

2) Пусть $f(x) = |x|$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h - 0}{h} = 1 \\ f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h - 0}{h} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0) \text{ не существует.}$$

не существует.

Теорема (о диф. арифмет. операций).

Пусть $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $p \in (a, b)$ и f, g - диф-мы в т.р. Тогда $f \pm g$, $f \cdot g$ и $\frac{f}{g}$

(при $g(p) \neq 0$) - диф-мы в т.р.

При этом:

(1) $(f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p)$, $d(f \pm g)(p) = df(p) \pm dg(p)$

(2) $(fg)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot g'(p)$.

$$(3) (f/g)'(p) = \frac{f'(p) \cdot g(p) - f(p) \cdot g'(p)}{g^2(p)}$$

Д-во: $\blacktriangleleft$

$$(1) f(p+h) - f(p) = f'(p) \cdot h + o(h) \quad (1')$$

$$g(p+h) - g(p) = g'(p) \cdot h + o(h) \quad (2')$$

$$f(p+h) \pm g(p+h) - (f(p) \pm g(p)) = (f'(p) \pm g'(p)) \cdot h + o(h); \text{ при } h \rightarrow 0 \Rightarrow f \pm g \text{ диф-на в т. } p \text{ и } (f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p).$$

$$(2) \text{ сделаем } g(p) \cdot (1') + f(p) \cdot (2'). \quad g(p) \cdot f(p+h) - g(p) \cdot f(p) + f(p) \cdot g(p+h) - f(p) \cdot g(p) = (g(p) \cdot f'(p) + f(p) \cdot g'(p))h + (g(p) + f(p)) \cdot o(h).$$

$$f(h+p) \cdot g(h+p) - f(p) \cdot g(p) = f(h+p) \cdot g(h+p) -$$

$$f(h+p) \cdot g(p) + f(h+p) \cdot g(p) - f(p) \cdot g(p) =$$

$$= f(h+p)(g(h+p) - g(p)) + g(p)(f(h+p) - f(p)) \stackrel{(1')}{\stackrel{(2')}}{=} \quad (1')$$

$$= f(h+p)(g'(p) \cdot h + o(h)) + g(p)(f'(p)h + o(h)) = g'(p) \cdot f(p)h + g(p) \cdot f'(p)h + (f(h+p) + g(p)) \cdot o(h) \stackrel{(1')}{\stackrel{(2')}}{=} (g'(p) \cdot f(p) + g(p) \cdot f'(p)) \cdot h + g'(p) \cdot f(p) \cdot h^2 + o(h) + o(h) =$$

$$= (g'(p) \cdot f(p) + g(p) \cdot f'(p)) \cdot h + o(h) \quad (g(p) + f(p)) \cdot o(h)$$

$$(3) \left(\frac{1}{g}\right)'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(p+h)} - \frac{1}{g(p)}}{h} = \frac{1}{g(p)^2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(p) - g(p+h)}{h} = -\frac{g'(p)}{g(p)^2} \quad g(p) \neq 0 \text{ в окр-сти } p \text{ так как } g \text{ непрерывна в т. } p.$$

$$(g') = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(p) - g(p-h)}{h} = \frac{-g'(p)}{g^2(p)}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = f' \cdot \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'(p)}{g(p)} + f(p) \cdot \left(-\frac{g'(p)}{g^2(p)}\right) =$$

$$= \frac{g(p) \cdot f'(p) - f(p)g'(p)}{g^2(p)}. \quad \Delta$$

Теорема (о диф. композиции)

Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \langle a, b \rangle$, $q = f(p) \in \langle c, d \rangle$. Пусть f - диф.-ма в т. p , g - g - диф.-ма в т. q . Тогда $g \circ f$ диф.-ма в т. p , и $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$.

$$d(g \circ f)(p) = d(g(f(p))) \cdot df(p).$$

$$\text{До-во: } \Delta f(p+h) - f(p) = f'(p) \cdot h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$g(y+q) - g(q) = g'(q) \cdot y + o(y), \quad y \rightarrow 0.$$

Пусть $y = f(p+h) - f(p) \rightarrow 0$, при $h \rightarrow 0$.

$y+q = f(p+h)$. Тогда:

$$g(f(p+h)) - g(f(p)) = g'(q)(f(p+h) - f(p)) + o(y),$$

при $y \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$).

$$(g \circ f)(p+h) - (g \circ f)(p) = g'(f(p)) \cdot (f'(p) \cdot h + o(h)) + o(y) = g'(f(p)) \cdot f'(p) \cdot h + g'(f(p)) \cdot o(h) + o(f(p+h) - f(p)), \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

$$(g \circ f)(p+h) - (g \circ f)(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p) \cdot h + o(h),$$

при $h \rightarrow 0$. Δ

Следствие: $(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)'(p) = f_1'(\dots) \cdot f_2'(\dots) \cdot \dots \cdot f_n'(p)$.

Теорема (о диф. обратного отображения).

Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p \in (a, b)$. Пусть

f^{-1} — обратная ф-ия и $q = f(p)$ — внутренняя точка в $f(\langle a, b \rangle)$. Пусть f — диф.-ма в т. p .

Тогда f^{-1} — диф.-ма в т. $q \Leftrightarrow 1) f'(p) \neq 0$;

2) f^{-1} — непрерывна в q . При этом $(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)}$.

Δ -во. Δ

$\Rightarrow$) Т.к. f^{-1} — диф.-ма в т. q , то f^{-1} — непрерывна в т. q . $(f^{-1} \circ f)(y) = y$ по т. о диф. композиции.
 $\forall y \in (a, b)$. $(f^{-1} \circ f)'(p) = (f^{-1})'(f(p)) \cdot f'(p) = 1$ ($y' = 1$),
 $f'(p) = \frac{1}{(f^{-1})'(q)} \neq 0$.

$\Leftarrow$) $(f^{-1})'(q) = \lim_{y \rightarrow q} \frac{f^{-1}(y+q) - f^{-1}(q)}{y} = \left\langle \begin{array}{l} x = f^{-1}(y+q) - f^{-1}(q) \\ \text{т.к. } f^{-1} \text{ — непрерывна} \end{array} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x+p) - f(p)} = \frac{1}{f'(p)}$

$\neq \infty \Rightarrow f^{-1}$ -гипер-мол в т.г. $\triangleright$

14

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ.

$$\begin{array}{lll} (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} & (\ln x)' = \frac{1}{x} & (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (a^x)' = a^x \ln a & (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} & (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\sin x)' = \cos x & (\sinh x)' = \cosh x & (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ (\cos x)' = -\sin x & (\cosh x)' = \sinh x & (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2} \end{array}$$

Д-во: $\triangleleft$

$$1) (e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$2) (a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x (x' \ln a + x \cdot (\ln a)') = a^x \ln a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$3) (\log_a x)' = \langle \text{т.о. диф. } f^{-1} \rangle = \frac{1}{(a^x)' (a^x)} = \frac{1}{(a^x)' a^x} = \frac{1}{a^x \ln a} \\ \left| y = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x, \forall x > 0, \text{ в частности } (\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0. \right.$$

$$4) (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot (\alpha' \ln x + \alpha (\ln x)') \\ = x^\alpha \left(\alpha' \frac{1}{x} \right) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, x > 0.$$

$$5) (\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos(x + \frac{h}{2})}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$5) (\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = -\sin x, x \in \mathbb{R} \dots$$

Необходимые условия экстремума для диф. ф-ий

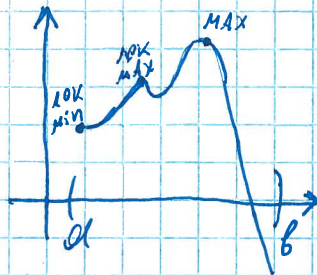
Опр. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Тогда т. $p \in A$ наз-я (строгим) минимумом ф-ии f на A , если $\forall x \in A$
 $f(x) \geq f(p)$ ($f(x) > f(p)$).

Аналогично опр. (строгий) максимум f на A .

Опр. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Т. $p \in A$ наз-я локальным минимумом, если $\exists$ окр. $U(p)$: $\forall x \in U(p) \cap A$,
 $f(x) \geq f(p)$.

Аналогично опр-я лок. максимум,

Пример:



Опр. Экстремум $\equiv$ Локальный максимум или лок. ми.

Теорема (Лемма Ферма о необ. условии экстр. д. дифо. ф-ии):

Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $p \in (a, b)$, f - дифо. -ма в т. p и p -экстремум. Тогда $f'(p) = 0$.

Д-во: Δ Пусть для опр-и p -лок. макс. Тогда по оп.

$\exists$ окр $U(p) \subset (\alpha, \beta)$ и $\forall x \in U(p), f(x) \leq f(p)$, т.к. f — g_n -макс, то $f'(p) = f'_+(p) = f'_-(p)$:

$$\left. \begin{aligned} f'_+(p) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \leq 0 \\ f'_-(p) &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(p) = 0. \triangleright$$

Теоремы о среднем.

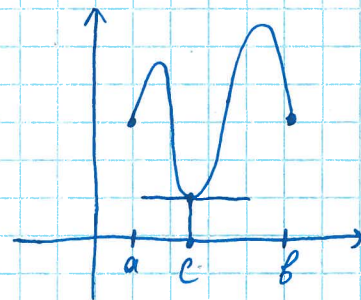
Теорема (Ролля):

Пусть $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ и

1) $f \in C[\alpha, \beta]$

2) $f \in D(\alpha, \beta)$

3) $f(\alpha) = f(\beta)$.



Тогда $\exists c \in (\alpha, \beta): f'(c) = 0$.

Д-во: 1) по т. Вейерштр. $\exists x_{\min}, x_{\max} \in [\alpha, \beta]: \forall x \in [\alpha, \beta], f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$. Пусть $x_{\min}, x_{\max} \in \{\alpha, \beta\}$ т.к. $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow f = \text{const} \Rightarrow f' = 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$, в качестве $c \in (\alpha, \beta)$ берём модуль.

2) Пусть хотя бы один из ^{найдённых} знач. $x_{\min}, x_{\max} \notin \{\alpha, \beta\}$. Тогда берём её в кач-ве c и по л. теорема $f'(c) = 0$.

Теорема (Лагранжа о конечных приращениях):

46 Пусть $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ и

$$1) f \in C[a, b]$$

$$2) f \in D(a, b).$$

$$\text{Тогда } \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$\text{Д-во: } \Delta \text{ рассмотрим ф-ию } F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

$$1) F \in C[a, b], \text{ т.к. } f \in C[a, b] \text{ и } (x - a) \in C[a, b].$$

$$2) F \in D(a, b), \text{ т.к. } f \in D(a, b) \text{ и } (x - a) \in D(a, b)$$

$$3) \left. \begin{array}{l} F(a) = f(a) \\ F(b) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0, \text{ т.е.}$$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Delta$$

Теорема (Коши о конечных пр-ых):

Пусть $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и

$$1) f, g \in C[a, b]$$

$$2) f, g \in D(a, b)$$

$$3) g(b) \neq g(a).$$

$$\text{Тогда } \exists c \in (a, b) : f'(c) = g'(c) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

$$\text{Д-во: } \Delta F(x) = f(x) - \frac{(f(b) - f(a))(g(x) - g(a))}{g(b) - g(a)} - yg - e?$$

$$\text{т. полн. } F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x), F'(c) = 0 =$$

$$= \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c). \quad \Delta$$

[4]

Следствия из Т. Лагранжа:

Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{D}(a, b)$. Тогда:

1) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ - неубывающая $\forall x \in (a, b)$.

2) $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ - возрастающая $\forall x \in (a, b)$

3) $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)$ - невозр-ая $\forall x \in (a, b)$

4) $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ - убывающая, $\forall x \in (a, b)$

5) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f = \text{const}, \forall x \in (a, b)$

Д-во: Δ 1) $\Rightarrow f'(x) \geq 0$, пусть $x < y$, тогда $f \in \mathcal{C}[x, y]$ и $f \in \mathcal{D}(x, y)$ по т. Лагранжа $\exists c \in (x, y): 0 \leq f'(c) \cdot (y - x)$
 $= f(y) - f(x)$. т.е. $f(x) \leq f(y)$, f - неуб.

($\Leftarrow$) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$.

2) Так же как в (1) $\Rightarrow$).

5) ($\Rightarrow$) $\forall x, y \in (a, b) \exists c$ м/у x и $y: 0 = f'(c)(y - x) =$
 $= f(y) - f(x) \Rightarrow f(x) = f(y)$. Δ

Следствие 2:

Пусть $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{D}(a, b)$ и $\exists c > 0: |f'(x)| \leq c$,
 $\forall x \in (a, b)$. Тогда f - липшецева.

Д-во: $\Delta \forall x, y \in (a, b) \exists c \in (x, y). |f(x) - f(y)| =$
 $= |f'(c)(x - y)| \leq c \cdot |x - y|$. Δ

следствие 3:

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{F}(a, b)$ и $\exists$ предел $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x)$

$A \in \mathbb{R}$. Тогда $\exists$ предел $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A$.

До-во: $\triangle \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c(h)) \cdot h}{h} = \lim_{c(h) \rightarrow a} f'(c(h)) = A$, где $c(h) \in (a, a+h)$, $0 < h \rightarrow 0 \Rightarrow c(h) \rightarrow a$. $\triangleright$

25.11.2021

Производная n-го порядка

опр. Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f \in \mathcal{F}(a, b)$. Если $1^{\text{я}}$ $x \mapsto f'(x)$ будет диф. в т. $p \in (a, b)$, то её производная в т. p наз-я второй производной f в т. p .

Обозн: $f''(p)$, $d^2 f / dx^2(p)$, $f_{xx}'(p)$

$$f''(p) = (f')'(p).$$

По индукции определяем производную n-го порядка.

$$\frac{d^n}{dx^n} f(p) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f \right)(p).$$

обозн: $f^{(n)}(p) = (f^{(n-1)})'(p)$, $n \geq 1$,

Примеры:

$$1) (e^x)^{(n)} = e^x, x \in \mathbb{R}, n \geq 1$$

$$2) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right), n \geq 1$$

$$3) (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} n\right), n \geq 1$$

$$4) (x^\alpha)^{(n)} = (\alpha x^{\alpha-1})^{(n-1)} = (\alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2})^{(n-2)} = \frac{\alpha!}{(n!)} =$$

14

$$= \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!} x^{\alpha-n}, \text{ если } \alpha \in \mathbb{Z} \vee (\alpha-n \geq 0 \wedge \alpha \in \mathbb{Z}); 0, \text{ если } \alpha \in \mathbb{Z}$$

$\wedge \alpha-n < 0$.

$$5) (\ln(1+x))^n = \left(\frac{1}{1+x} \right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+x)^n}, n \geq 1.$$

$$6) (\arctg x)^{(n)} = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(n-1)} = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(n-1)} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right) \\ = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} \right)^{(n-1)} - \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x+i} \right)^{(n-1)} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x-i)^n} - \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x+i)^n} = \\ = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x^2+1)^n} \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} \left(\frac{1-(-i)^k}{2i} \right) \dots \text{упр};$$

Теорема (формула Лейбница):

Пусть $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и $f, g \in \mathcal{D}^n(a, b)$. Тогда, $f \cdot g \in \mathcal{D}^n(a, b)$ и $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$.

Д-во: Δ индукцией по $n \in \mathbb{N}$;

$$n=1: (f \cdot g)' = f'g + g'f = C_1^0 f^{(1)} g^{(0)} + C_1^1 f^{(0)} g^{(1)} = \sum_{k=0}^1 C_1^k f^{(k)} g^{(1-k)}.$$

Предположим, что формула верна для $n-1$, g -ем для n :

$$(f \cdot g)^{(n)} = ((f \cdot g)^{(n-1)})' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)} g^{(n-1-k)} \right)' = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (f^{(k+1)} g^{(n-1-k)} + f^{(k)} g^{(n-k)}) = \\ = \sum_{m=1}^n C_{n-1}^{m-1} f^{(m)} g^{(n-m)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \triangleright$$

50

Формула Тейлора.

Опр. Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f \in \mathcal{F}^n(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$.

Мног-ен $P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ - наз-я n -ым мног-ом Тейлора qo -ии f в т. $x_0 \in (a, b)$.

$f(x) - P_n(x, x_0) = R_n(x, x_0)$ - остаточный член.

$f(x) = P_n(x, x_0) + R_n(x, x_0)$ - qo -ла Тейлора.

Теорема (qo -ла Тейлора с ост. членом в форм. Пеано):

Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f \in \mathcal{F}^n(a, b)$, $n \geq 1$, $x_0 \in (a, b)$.

Тогда $f(x) = P_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$.

Д-во: Δ Рассмотрим ост. $R_n(x, x_0) = f(x) - p(x, x_0) =$
 $= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$$R_n(x_0, x_0) = 0$$

$$R_n'(x_0, x_0) = 0 = f'(x) \Big|_{x=x_0} - 0 - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0) \Big|_{x=x_0} - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x-x_0)^{n-1} \Big|_{x=x_0}$$

$$\vdots$$
$$R_n^{(k)}(x_0, x_0) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Лемма:

Пусть $\varphi \in \mathcal{F}^n(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$ и $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \dots$

... = $\varphi^{(n)}(x_0)$. Тогда $\varphi(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$.

Д-во: Δ по индукции

БАЗА: $n=1$, $\varphi \in \mathcal{H}(a,b) \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ при $x \rightarrow x_0$.

предположим, что утв. верно для $n-1$, д-ем для n .

$$\varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$\varphi''(x_0) \quad \varphi'''(x_0) \quad \varphi^{(n)}(x_0)$$

по предположению инд. $\varphi(x) = o((x-x_0)^{n-1})$ при $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \alpha(x)(x-x_0)^{n-1}$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow x_0$. (в нек-ой окр. x_0)

$$\frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^n} \stackrel{\varphi(x_0)=0}{=} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x-x_0)^n} \stackrel{\text{Т. ЛАГРАНЖА}}{\underset{\exists \xi \in (x, x_0)}} = \frac{\varphi'(\xi)(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{\varphi'(\xi)}{(x-x_0)^{n-1}} = \frac{\varphi'(\xi)}{(x-x_0)^{n-1}} \stackrel{\xi \rightarrow x_0}{\rightarrow} 0$$

$$= \frac{\alpha(\xi)(\xi-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} \cdot \left| \frac{\alpha(\xi)(\xi-x_0)^{n-1}}{x-x_0} \right| \leq |\alpha(\xi)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad \Delta$$

Замечание. Пусть $f \in \mathcal{H}^n(a,b)$ и $x_0 \in (a,b)$ и $\exists$ нек-ый мног-ен $Q_n(x)$: $f(x) = Q_n(x) + o((x-x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда $Q_n(x) = P_n(x, x_0)$ - мног-н Тейлора.

Д-во: Δ $f(x) = Q_n(x) + o((x-x_0)^n) = f(x) = P_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n) \Rightarrow Q_n - P_n = o((x-x_0)^n)$.

$$c_0 + c_1(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)^n = o((x-x_0)^n) \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

1) Пусть $x \rightarrow x_0 \Rightarrow c_0 = 0$

2) сокращаем на $x - x_0$:

$$C_1 + C_2(x - x_0) + \dots + C_n(x - x_0)^{n-1} = o((x - x_0)^{n-1}) \text{ (при } x \rightarrow x_0 \text{)}$$

при $x \rightarrow x_0$, $C_1 = 0$ и т.д. Δ

Примеры:

1) $e^x = e^{x_0} + \frac{e^{x_0}}{1!}(x - x_0) + \frac{e^{x_0}}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$, если $x_0 = 0$: $e^x = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$, при $x \rightarrow 0$.

2) $\sin x = \sin 0 + \frac{\sin' 0}{1!}x + \frac{\sin'' 0}{2!}x^2 + \dots + \frac{\sin^{(2n-1)} 0}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{\sin^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$
 $= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$. Аналогично для $\cos x$.

3) упр. док-ть $(1+x)^\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $x=0$.

Остаточный член в форме Лагранжа и Коши.

Теорема:

Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{P}^n(a, b)$, $x_0, x \in (a, b)$ и $f^{(n+1)}(x_0)$ сущ. и конечно. В окр-ах x_0

Пусть $\varphi \in C[x_0, x]$ и $\varphi \in \mathcal{P}(x_0, x)$ и $\varphi'(y) \neq 0$, $\forall y \in (x_0, x)$

Тогда (A) $f(x) = P_n(x, x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(\varphi(x) - \varphi(x_0))}{\varphi'(x)}$,
 $\exists \xi \in (x_0, x)$.

Д-во: $\Delta F(t) = f(x) - P_n(x, t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n$, $t \in [x_0, x]$.

$$F \in C[x_0, X], F \in \mathcal{F}(x_0, X), \varphi \in C[x_0, X], \varphi \in \mathcal{F}(x_0, X).$$

$$\text{По Т. Коши } \exists \xi \in (x_0, X): \frac{F(X) - F(x_0)}{\varphi(X) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

$$F(X) = 0; F(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0, X) = r_n(X, x_0).$$

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)(-t+x) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) + \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

$$F'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(X-\xi)^n \Rightarrow r_n(X, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(X-\xi)^n \frac{\varphi(X) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)}.$$

▷

Частные случаи:

$$1) \varphi(t) = t$$

$$\varphi'(t) = 1 \neq 0, \forall t \in (x_0, X)$$

$$r_n(X, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(X-\xi)^n(X-x_0) - \text{остаток в форме Коши.}$$

$$2) \varphi(t) = (x-t)^{n+1}$$

$$\varphi'(t) = (n+1)(x-t)^n \cdot (-1) \neq 0, \forall t \in (x, x_0)$$

$$r_n(X, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(X-\xi)^n \frac{0 - (X-x_0)^{n+1}}{(n+1)(X-\xi)^n(-1)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(X-x_0)^{n+1} - \text{остаток}$$

в форме Лагранжа.

Таким образом,

$$f(X) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(X-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(X-x_0)^{n+1}$$

$$f(X) = f(X) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(X-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(X-x_0)^{n+1}.$$

54

Примеры:

$$1) e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \rightarrow 0, \text{ т.е. } e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$x \in \mathbb{R}$.

$$2) \sin x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{\sin^{(2n)}(\xi)}{n!} x^n, \quad \xi \in (0, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\left| \frac{\sin^{(2n)}(\xi)}{n!} x^n \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Аналогично $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$$3) \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \frac{(-1)^{n+1} \xi^n}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!} x.$$

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} (x-\xi)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot x \right| = \left| \frac{(x-\xi)^n}{1+\xi} \right| \cdot \frac{|x|}{(1+\xi)^n}.$$

Пусть $|x| < 1$.

$$\left| \frac{x-\xi}{1+\xi} \right| \leq \frac{|x-\xi|}{1-|\xi|} \leq \frac{|x|+|\xi|}{1-|\xi|} = \frac{|x|+|\xi|+|\xi|-|\xi|}{1-|\xi|} = \frac{|x|}{1-|\xi|} = |x|$$

$$\sim \frac{1}{1-|\xi|} < \frac{1}{1-|x|} < |x|. \text{ Таким образом, } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

$$|x| < 1. \text{ Аналогично, можно показать, что } (1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$|x| < 1. \quad \alpha \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot \binom{n}{k}.$$

Частные случаи:

$$\alpha = -1, \quad \binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-1-1)\dots(-1-n+1)}{n!} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$\frac{1}{1+X} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k X^k = 1 - X + X^2 - X^3 + \dots$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} = \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \dots \left(-\frac{2n-1}{2} \right)}{n!} =$$

$$= \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{n! \cdot 2^n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+X}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} X^k, \quad |X| < 1.$$

Достаточные условия экстремума.

Теорема (дост. усл. экстремума в терминах производной)

Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, $f \in C(a, b)$ и $f \in D(\overset{\circ}{U}(x_0))$, при этом, если $f'(x) \geq 0, \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ и $f'(x) \leq 0, \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, то x_0 - т. лок. макс.

если $f'(x) \leq 0, \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ и $f'(x) \geq 0, \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, то x_0 - т. лок. мин.

Д-во: $\Delta \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0), f'(x) \geq 0 \xRightarrow{\text{сл. т. Лагранжа}} f\text{-неуб.}, \text{ т.е. } \forall x < y < x_0$
 $x, y \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, при $y \rightarrow x_0, f(x) \leq f(x_0), \forall x < x_0, x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$

Аналогично, $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0), f'(x) \leq 0 \Rightarrow f\text{-невозр.}, \text{ т.е. } \forall x_0 < x < y; x, y \in \overset{\circ}{U}(x_0), f(x) \geq f(y)$, при $x \rightarrow x_0, f(x_0) \geq f(y)$
 $\Rightarrow \forall y \in \overset{\circ}{U}(x_0), f(x_0) \geq f(y)$, т.е. x_0 - т. лок. макс. Δ

Теорема (дост. усл. экстр. в терминах высших пр-ых)

56 Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ и f -диф-ма n -ра

во в окр. $U(x_0)$. При этом $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда 1) если n -нечётно, то x_0 -не явл. т. экс.
2) если n -нечёт чёт, то при $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 -лок. мин.,
при $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 -лок. макс.

Д-во: По др-ле Тейлора с ост. в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} + o((x-x_0)^n),$$

$\alpha(x) = o((x-x_0)^n)$
 $\alpha(x) \rightarrow 0$
при $x \rightarrow x_0$.

$$\forall x \in U(x_0).$$

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} + \alpha(x) \right).$$

$$\text{Пусть } V(x_0) \subset U(x_0) : \forall x \in V(x_0), |\alpha(x)| < \frac{1}{2} \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right) = \operatorname{sgn} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right).$$

$$\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sgn}((x-x_0)^n) \cdot \operatorname{sgn} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right) = \operatorname{sgn}(x-x_0)^n \cdot \operatorname{sgn} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right).$$

Если n -нечёт, то $\operatorname{sgn}(x-x_0)^n$ меняется с $+1$ на -1 при прохождении ч/з $x_0 \Rightarrow x_0$ не лок. экстр.,

т.к. $\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0))$ должен не меняться.

$$\text{Если } n\text{-чётно, то } \operatorname{sgn}((x-x_0)^n) = 1, \forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0), \text{ тогда } \operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sgn} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right).$$

Если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0, \forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0)$, т.е. x -лок. мин.

Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) - f(x_0) < 0, \forall x \in \overset{\circ}{V}(x_0)$, x_0 -лок. м.



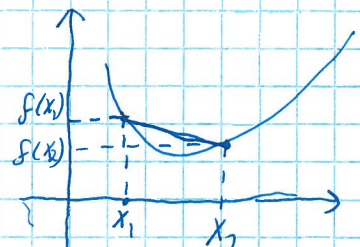
Выпуклые ф-ии.

Опр. ф-ия $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ наз-я выпуклой, если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $\forall \alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$; $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$. ф-ия - строго выпукла, е нер-во стро. $\forall x_1 \neq x_2$ и $\alpha, \beta \geq 0$.

фун-ия f - вогнутая, если $(-f)$ - выпуклая ф-ия.

Замечание:

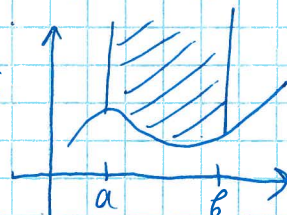
1) Выпуклость означает, что хорда, соединяющая 2 точки графика находится выше дуги графика.



$$x = \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

2) Выпуклость $\equiv$ подграфик ф-ии есть выпуклое мн-во. Выпуклое мн-во содержит отрезок $[x_1, x_2]$, $\forall x_1, x_2 \in$

Предложение (о непрерывности выпуклой ф-ии):



Выпуклая ф-ия $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\{(x, y) : x \in \langle a, b \rangle, f(x) \leq y\}$ непрерывна на (a, b) .

$$\text{До-во: } \begin{cases} x = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = (x - x_1) / (x_2 - x_1) \\ \alpha = (x_2 - x) / (x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$58 \quad f(x) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = ((x_2 - x) / (x_2 - x_1)) f(x_1) + ((x - x_1) / (x_2 - x_1)) f(x_2)$$

$$\bullet f(x_2); f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Пусть $x \rightarrow x_1 + 0$, $\lim_{y \rightarrow x_1 + 0} f(y) \leq f(x_1)$ (*).

Пусть $x_1 \rightarrow x - 0$. Тогда $f(x) \leq \lim_{y \rightarrow x - 0} f(y)$ (**).

Пусть $x \rightarrow x_2 - 0$, тогда $\lim_{y \rightarrow x_2 - 0} f(y) \leq f(x_2)$ (***)

Пусть $x_2 \rightarrow x + 0$, тогда $f(x) \leq \lim_{y \rightarrow x + 0} f(y)$ (****).

$$(*) \text{ и } (****) \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x + 0} f(y) \leq f(x) \leq \lim_{y \rightarrow x + 0} f(y). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{y \rightarrow x + 0} f(y) \quad (1)$$

$$(**) \text{ и } (***) \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x - 0} f(y) \leq f(x) \leq \lim_{y \rightarrow x - 0} f(y) \Rightarrow f(x) = \lim_{y \rightarrow x - 0} f(y)$$

$$(1) \text{ и } (2) \Rightarrow f(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y) \quad \triangleright$$

Критерий выпуклости.

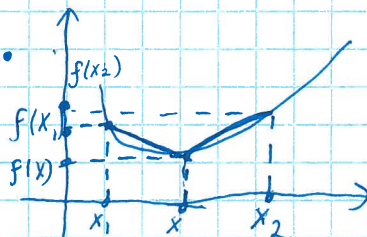
1) f - выпукла на (a, b) .

$$1. f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \quad 1. f(x) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} (f(x) - f(x_1)) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

$$\leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

2)



$K(x, x_1) \leq K(x_2, x) = K(x_1, x_2)$. Q -ия $K(x, y)$ - неуб.
 $\forall x \in (a, b)$. Таким образом $\exists$ односторонние пределы для
 $K(x, \cdot)$, $\forall x \in (a, b)$. Пусть $x_1 \rightarrow x-0$, $x_2 \rightarrow x+0$.

$K(x, x_1) \leq K(x_2, x)$ при $x_1 \rightarrow x-0$, $x_2 \rightarrow x+0$. $\Rightarrow f'_-(x) \leq f'_+(x)$
 $\forall x \in (a, b)$.

Пусть $x \rightarrow x_1+0$, $K(x, x_1) \leq K(x_1, x_2) \Rightarrow f'_+(x_1) \leq K(x_1, x_2) \leq$
 $K(\tilde{x}, x_2)$, $\tilde{x} \rightarrow x_2-0$, $x_1 < \tilde{x}$.

$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2).$$

$x_1 < x_2$

3) Теорема (критерий выпуклости в терминах произв.
 пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная ф-ия, тогда:

1) если $f \in D(a, b)$, то f - выпуклая $\Leftrightarrow f'$ - неуб.

2) если $f \in D^2(a, b)$, то f - выпуклая $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$

D -во: $\triangleright$

1)($\Rightarrow$) Пусть f - выпуклая и $f \in D(a, b)$, тогда мы по-
 лучим, что $\forall x_1 < x_2$, $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$
 $x_1, x_2 \in (a, b)$

т.о. f' - неуб.



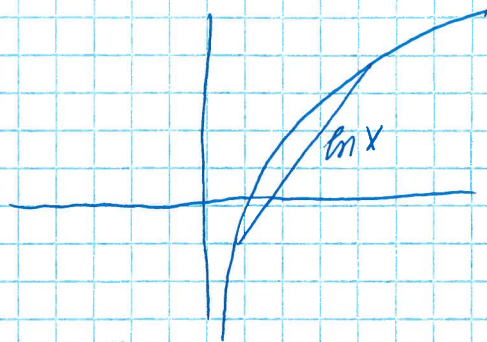
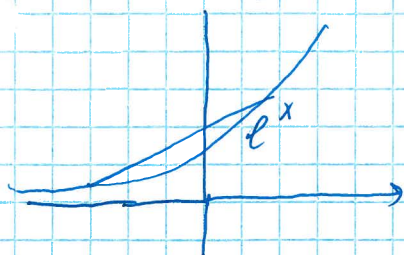
$$(\Leftarrow) \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi), \xi \in (x_1, x); f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$\eta \in (x, x_2) \Rightarrow f'(\xi) \leq f'(\eta)$, т.о. f - выпукла

60 | 2) очевидно. $\triangleright$

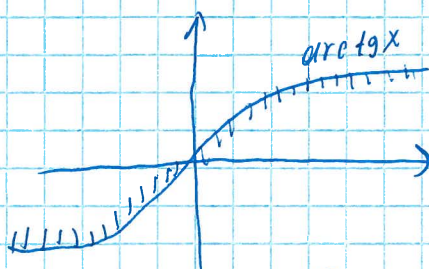
Пример: $f(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$, e^x - выпуклая

$f(x) = \ln x$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow \ln x$ - вогнутая.



$f(x) = \arctg x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{-x}{(1+x^2)^2} \geq 0$, $\forall x \in (-\infty;$

и $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in [0; +\infty)$.



Опр:

Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ - т. перегиба, если $\exists$ окр. $U_\delta(x_0)$: $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ - гр-ия выпуклая, $\forall x \in (x_0 + \delta, x_0)$ - гр-ия вогнутая, или наоборот.

В каких точках может быть перегиб:

1) $f''(x) = 0$

2) в т. не зад-ти гр-ии.

$f(x) = \sin x$, $f''(x) = -\sin x$. $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ - точки перегиба.

Теорема (Нер-ва Йенсена):

Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ - выпуклая ф-ия. Тогда $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b), \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

Равенство $\Leftrightarrow$ ^{для строго выпук.} $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, при $\alpha_i > 0$.

Д-во: Δ индукцией по числу точек.

$n=2$ - база - апр. выпуклости, и если $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, то f - лн. ф-ия $\Rightarrow$ не строго выпуклая.

Предположим, что утв. доказано для $n-1$, докажем n .

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n) = f(\underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}}_{\alpha} + \alpha_n x_n), \text{ где } \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}, \tilde{x} = \frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}}{\alpha}.$$

$$\alpha + \alpha_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$$

$$a < x_j < b; \quad \alpha a < \alpha_j x_j < \alpha_j b$$

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) a < \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} < (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) b.$$

$$a < \tilde{x} < b. \quad (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})$$

$$\alpha f(\tilde{x}) + \alpha_n f(x_n) = (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}}{\alpha}\right) + \alpha_n f(x_n) \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} f(x_1) + \frac{\alpha_2}{\alpha} f(x_2) + \dots \right)$$

$$+ \frac{\lambda_{n-1} f(X_{n-1})}{\alpha} + \lambda_n f(X_0) = \lambda_1 f(X_1) + \dots + \lambda_n f(X_n).$$

Если будет равенство, то $x_n = \tilde{x}_n$ и по макс. инд.
 $x_1 = \dots = x_{n-1} \Rightarrow x_n = x_{n-1} = \dots = x_1. \triangleright$

09.12.202

следствия (из нер-ва Йенсена):

1) Нер-во Юнга: $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n > 0, \forall \beta_1, \dots, \beta_n \geq 0, \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 1.$

$$\alpha_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{\beta_n} \leq \beta_1 \alpha_1 + \dots + \beta_n \alpha_n$$

Д-во: $f(x) = e^x$ — строго выпуклая, по нр нер-ву Йен
 ена $e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n} \leq \alpha_1 e^{x_1} + \dots + \alpha_n e^{x_n}.$

$$e^{\alpha_1 x_1} + \dots + e^{\alpha_n x_n} = e^{\alpha_1 x_1} \cdot \dots \cdot e^{\alpha_n x_n} = (e^{x_1})^{\alpha_1} \cdot (e^{x_2})^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (e^{x_n})^{\alpha_n}.$$

$$\text{Т.о. } e^{x_i} = \alpha_i, \beta_i = \alpha_i$$

$$\text{Равенства будет } \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n. \triangleright$$

частный случай:

$n=2$: $\beta_1 = \frac{1}{p}; \beta_2 = \frac{1}{q}; p \geq \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} = 1$ — Гёльдеровские
 сопряжённые числа.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ — равенство } \Leftrightarrow a^p = b^q.$$

2) Нер-во Гёльдера (для сумм): Пусть $x_1, \dots, x_n$
 $y_1, \dots, y_n \geq 0; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1$. Тогда: $\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$

Д-во: Δ Положим $A = \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{1/q}$. Тогда
 нер-ву Юнга $\forall k=1, \dots, n$; $\frac{x_k}{A} \cdot \frac{y_k}{B} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{x_k}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{y_k}{B} \right)^q$ (*)

Просуммируем (*) по k от 1 до n :

$$\frac{1}{A \cdot B} \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \frac{1}{p} \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{A^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{\sum_{k=1}^n y_k^q}{B^q} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq A \cdot B.$$

равенство $\Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, \left(\frac{x_k}{A} \right)^p = \left(\frac{y_k}{B} \right)^q. \Delta$

3) Нер-во Мinkовского (для сумм):

Пусть $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ и $p \in [1, +\infty)$. Тогда:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}.$$

Д-во: Δ 1) $p=1$ - очевидно

2) $p > 1$; $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} \cdot |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} \cdot$

$$\cdot |x_k| + \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1} \cdot |y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)r} \right)^{1/r},$$

$$\cdot \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} = \left\langle \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1, \text{ по н-у Гельдера} \right\rangle =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q} \left(\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} \right) \text{ разделим}$$

$$\text{на } \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

Δ

Упр: Показать, что равенство, $(\Leftrightarrow) \bar{x} \uparrow \uparrow \bar{y}$.

Построение графиков до-ий.

Пусть $f: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$; $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$:

1) Отпр-ть $\text{Dom } f$, $\text{Im } f$ ($\text{Range } f$).

2) Отпр-ть т. пересечения с осями Ox , Oy , т.е. $f(x) = f(0) = y$.

3) Посмотреть особенности (период-сть, чётность / нечётность).

4) Промежутки монотонности ($f' = 0$, f' не суц. $\Rightarrow \lim = \infty$)

5) Промежутки выпуклости ($f'' = 0$, f'' не суц. $\lim = \infty$, точки перегиба).

6) Поведение на границе обл. определения.

Вертикальные асимптоты: $x = x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = \pm \infty$

Наклонная асимптота при $x \rightarrow \pm \infty$: $y = kx + b$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - (kx + b)) = 0. \quad k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} - k \\ + \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{kx + b}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - kx.$$

Примеры:

1) $f(x) = x + \arctg x$

1) $D(f) = \mathbb{R}$

$$2) x=0 \Leftrightarrow y=0$$

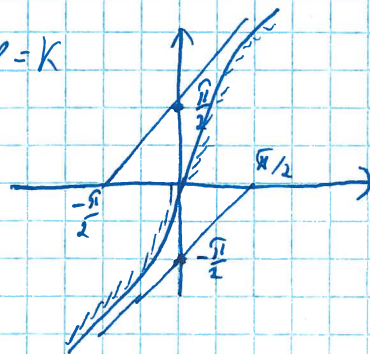
$$3) f(x) - \text{нечет}, f(-x) = -f(x)$$

$$4) f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow f \uparrow - \text{лок. экстр. нет.}$$

$$5) f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array}; \quad 0 - \text{точка перегиба}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \arctg x}{x} = l = k$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg x = \pm \frac{\pi}{2}$$

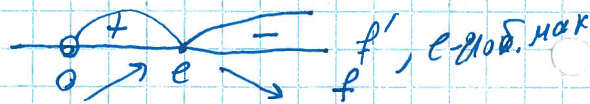


$$2) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

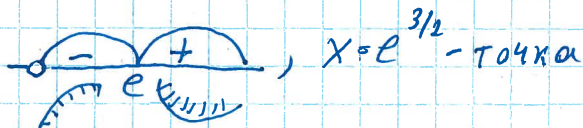
$$1) D(f) = \{x > 0\}$$

$$2) f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad \text{с осью перес. нет}$$

$$3) f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$



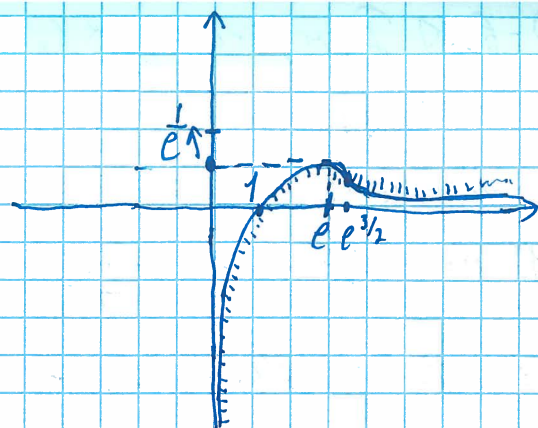
$$4) f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$



$$\text{перегиба } f(e^{3/2}) = \frac{3}{2e^{3/2}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty;$$

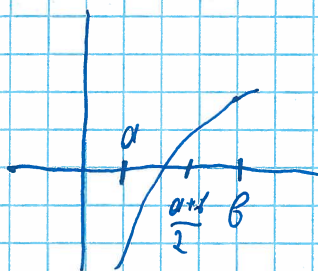
$$66) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0, \quad b=0. \quad y=0 - \text{асимптота } +\infty$$



Приближённое решение ур-я $f(x)=0$.

$f \in C[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists \psi \in (a, b): f(\psi) = 0$ (б-

1) Метод дихотомии:



1) если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ - корни

2) если $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, то выберем из $[\frac{a+b}{2}, b]$ и $[\frac{a+b}{2}, a]$ тот отрезок, значение ф-ии f на

концах разных знаков, Повторяем шаги с этим новым отрезком.

2) Метод Ньютона (метод касательных):

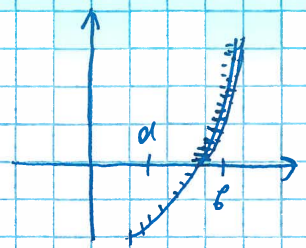
Т. (М. Ньютона): Пусть $f \in C[a, b]$ и $f \in D^2(a, b)$,

$f(a) \cdot f(b) < 0$ и $f''(x)$ - постоянного знака. f - монотонна. Тогда $\exists! \psi \in (a, b): f(\psi) = 0$ и $x_{n+1} = x_n$

- $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_n \rightarrow \psi$; $x_1 = \begin{cases} a, & f(a) \cdot f'(a) > 0 \\ b, & f(b) \cdot f'(b) > 0 \end{cases}$

6

D -во: ΔD -м, что $x_{n+1} < x_n$ и
и $\psi < x_{n+1}$.



По индукции:

$$1^\circ n=1. x_2 < x_1 \Rightarrow x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < x_1;$$

$$f(x_1) > 0; \text{ и } f'(x_1) > 0; x_1 > \psi > \psi - \text{верно}$$

2° пусть утв. верно для n , док-м для $n+1$: по формуле Тейлора на интервале $[\psi, x_n]$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(\psi) + \frac{f'(\psi)}{1!}(x-\psi) + \frac{f''(\zeta)}{2!}(x-\psi)^2, \zeta \in (\psi, x_n)$$

$$f(x_n) = f'(\psi)(x_n - \psi) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x_n - \psi)^2$$

подставим $x = \psi$

$$(2) 0 = f(x_n) + f'(x_n)(\psi - x_n) + \frac{f''(\zeta)}{2}(\psi - x_n)^2$$

$$(1) x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n) \Rightarrow 0 = f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) + f'(x_n)(\psi - x_n) + \frac{f''(\zeta)}{2}(\psi - x_n)^2$$

$$0 = f'(x_n)(\psi - x_{n+1}) + \frac{f''(\zeta)}{2}(\psi - x_n)^2 \Rightarrow \psi - x_{n+1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \psi < x_{n+1} \Rightarrow \text{по т. Вейерштрасса } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta.$$

$$\text{в (1) перейдем к пределу: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$C = C - \frac{f(C)}{f'(C)} \cdot \frac{f'(C)}{f'(C)} = 0, f(C) = 0 \Rightarrow C = \psi$ т.к. предел единствен. $\triangleright$

Правило Лопиталя

Теорема (пр-о Лопиталя):

Пусть $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, a, b \in \overline{\mathbb{R}}, f, g \in D(a, b)$ и $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Если выполняются одно из условий:

$$1) \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = \infty, \text{ то}$$

то из сущ-я предела $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ следует,

$$\text{что } \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

пример: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin x} = \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(x + \sin x)'} = \text{не сущ.}$

но с другой стороны $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 4x)} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos 3x} \cdot \sin 3x \cdot (-3)}{\frac{1}{\cos 4x} \cdot \sin 4x \cdot (-4)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Д-во: Пусть $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Доопределим f и g в точке $x = b$ и в пределах $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда на интервале $[x, b], x \in (a, b)$.

Выполняется т. Коши о конечных приращениях: $\exists \psi \in [x, b]$

$\epsilon(x, b)$:

$$\frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(\psi)}{g'(\psi)}$$

$g(x) - g(b) \neq 0$. Так иначе по Т. ролля на интервале $[\tilde{a}, b]$ существует $c \in [\tilde{a}, b]$: $g'(c) = 0$. Тогда:

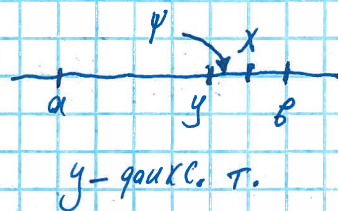
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\psi)}{g'(\psi)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(\psi(x))}{g'(\psi(x))} = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. (\psi(x) \rightarrow b-0, \psi \in (x, b)).$$

(2) Пусть теперь $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}$.

Пусть $A = 0$.

$$f(x) = f(x) - f(y) + f(y) = f(y) + \frac{f'(\psi)}{g'(\psi)} (g(x) - g(y)), \psi \in (y, x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\psi)}{g'(\psi)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right).$$



$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists \Delta_1 \in (a, b): \forall z \in [\Delta_1, b], \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| < \epsilon_1.$$

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists \Delta_2 > \Delta_1, \Delta_2 \in (a, b): \forall z \in [\Delta_2, b], \left| \frac{1}{g(z)} \right| < \epsilon_2.$$

Пусть $y = \Delta_1$. $\epsilon_2 = \min \left\{ \frac{1}{2|g(y)|}, \frac{1}{2|f(y)|} \right\} \cdot \epsilon_1$, можно сказать, что $g(y) \neq 0$ и $f(y) \neq 0$.

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \left| \frac{f(y)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f'(\psi)}{g'(\psi)} \right| \cdot \left| 1 - \frac{g(y)}{g(x)} \right| \leq |f(y)| \cdot \epsilon_2 + \epsilon_1 \cdot \left| 1 - \frac{g(y)}{g(x)} \right|,$$

$$x \in (\Delta_2, b); \left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| \leq |g(y)| \cdot \epsilon_2 \leq \frac{\epsilon_1}{2} < 1; \frac{\epsilon_1}{2} \leq \frac{\epsilon_1}{2} + \epsilon_1 \cdot 1 =$$

$$\frac{3}{2} \epsilon_1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

$$(2.2) \text{ Пусть } \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R} \quad (A \neq 0)$$

$$\text{Рассмотрим го-ию } F(x) = f(x) - Ag(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x) - Ag'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} - A = A - A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{F(x)}{g(x)} = 0.$$

$$(2.3) \text{ Пусть } \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty. \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \Delta_2 \in (a, b): \forall z \in [\Delta_1, b), \frac{f'(z)}{g'(z)} >$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \right). \quad \frac{1}{2} < 1 - \frac{g'(z)}{g'(x)} < 1. \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq -|f'(z)| \cdot \varepsilon_2 +$$

$$+ \frac{C}{2} \geq \frac{C}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \triangleright$$

го-го-ие параметрически заданных го-ий.

$$y = f(x), \quad x \in (a, b)$$

$$t \in (t_0, t_1) \Rightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\text{Пусть } x, y \in D(t_0, t_1) \text{ и } x'(t) \neq 0. \text{ Тогда } y \in D(a, b) \text{ и } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$D\text{-обл: } y = f(x) = y(x(t)) = y(t), \quad t \in (t_0, t_1).$$

$$\text{го-го-м по } t: y'_t(t) = y'_x(x(t)) \cdot x'_t(t) \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \triangleright$$

$$\text{Пусть } x, y \in D^2(t_0, t_1). \text{ Тогда } y \in D^2(a, b), \quad x'(t) \neq 0.$$

$$(y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t \cdot t'_x. \quad t'_x = \frac{1}{x'_t} \text{ по т. о диф. на обр.} \quad \boxed{7}$$

$$\text{отобр. } j \left(\frac{y_t}{x_t} \right)_t \cdot t'_x = \left(\frac{y_t}{x_t} \right)_t \cdot \frac{1}{x_t} = \frac{y''_t \cdot x_t - y'_t \cdot x'_t}{(x'_t)^2}.$$

Пример: решить ур-ие $x^y = y^x$; $x, y > 0$

Если $y = x$, то ур равенств. выполнено

$$\frac{y}{x} = 1+t > 0, t \neq 0, t > -1, t \neq 0.$$

$$y \ln x = x \ln y \Rightarrow \frac{y}{x} \ln x = \ln y.$$

$$(1+t) \ln x = \ln y, \ln x^{1+t} = \ln y \Rightarrow x^{1+t} = y = x(1+t) \Rightarrow$$

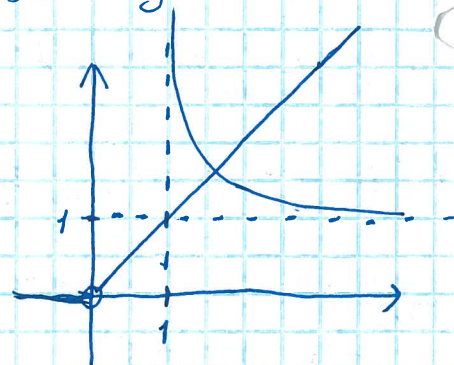
$$\Rightarrow x^t = 1+t \Rightarrow \begin{cases} y = (1+t)^{\frac{1}{t}+1} \\ x = (1+t)^{\frac{1}{t}} \end{cases}$$

$$t \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$t \rightarrow -1+0 \Rightarrow \begin{cases} x(t) \rightarrow +\infty \\ y(t) \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} x(t) \rightarrow 1 \\ y(t) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$y'_x(e) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \bigg|_{t_0=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'_t}{x'_t} = -1.$$



Задача интерполяции.

1) Пусть $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C[\alpha, \beta]$

Известны значения $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)$

Надо определить мн-н наим. степени L_i :

$$L_i(x_j) = f(x_j), i=0, \dots, m$$

Построим мн-н $L_m(x)$ степени $\deg L_m \leq m$.

72

$L_m(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_m x^m$ — $m+1$ неизв. казго.

$$\omega_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k), \quad 0 \leq k \leq m$$

$$\frac{\omega_m(x)}{x-x_k} = (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_m)$$

$$l_k = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_m)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_m)} \text{ — мн-н deg}$$

$$= m.$$

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} = \delta_k \text{ — символ Кронекера.}$$

$$L_m(x) = \sum_{k=0}^m f(x_k) l_k(x), \quad \deg L_m \leq m$$

$$L_m(x_j) = \sum_{k=0}^m f(x_k) l_k(x_j) = \sum_{k=0}^m f(x_k) \delta_{kj} = f(x_j) \text{ —}$$

— мн-н Лагранжа, $l_k(x) = \frac{\omega_m(x)}{(x-x_k)\omega'_m(x_k)}$, $\omega'_m = \sum_{k=0}^m \prod_{j \neq k} (x-x_j)$

$$\left(\omega'_m - \sum_{k=0}^m \right) \omega'_m(x_k) = (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_m)$$

(1) — разд. мн-н Лагранжа.

Теорема (интерполяционная ф-ла Лагранжа):

Пусть $f \in C^{(m+1)}(a,b)$, $\{x_j\}_{j=0}^m$ — узлы интерполяции и $L_m(x)$ — мн-н Лагранжа. Тогда $\forall x \in (a,b)$, $\exists \psi \in C(x) \in (a,b)$:

$$f(x) = L_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\psi)}{(m+1)!} \omega_m(x).$$

Д-во: 1) $\exists x \in \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, то за ψ берём любую точку. т.к. $\omega_m(x_j) = 0$ и $f(x_j) = L_m(x_j)$.

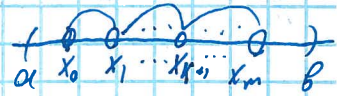
2) Пусть $X \in \{x_0, \dots, x_m\}$, тогда рассмотрим q_0 -ую

$$q_0(z) = f(z) - L_m(z) - k \cdot \omega_m(z)$$

Хотим найти $k \in \mathbb{R}$, что $q_0(x) = 0$.

$$q_0 \in D^{m+1}(\alpha, \beta) \text{ и } \begin{cases} q_0(x) = 0 \\ q_0(x_j) = 0, j=0, \dots, m \end{cases}, \text{ } m+2 \text{ нуля}$$

По Т. Ролля, $\exists m+1$ корней $q_0'(z)$ разл.



По Т. Ролля $\exists m$ разл. корней $q_0''(z)$

и так далее приходим к одному корню $\psi: q_0^{(m+1)}(\psi) = 0$.

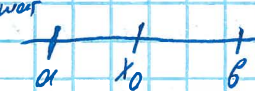
$$q_0^{(m+1)}(z) = f^{(m+1)}(z) - L_m^{(m+1)}(z) - k \omega_m^{(m+1)}(z) \Rightarrow f^{(m+1)}(\psi) - k(m+1)! = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{f^{(m+1)}(\psi)}{(m+1)!}, \quad f(x) = L_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\psi)}{(m+1)!} \cdot \omega_m(x) \quad \triangle$$

следствие: Пусть $\exists C > 0: |f^{(m+1)}(x)| \leq C, \forall x \in (\alpha, \beta)$. Тогда

$$|f(x) - L_m(x)| = \left| \frac{f^{(m+1)}(\psi)}{(m+1)!} \cdot \omega_m(x) \right| \leq \frac{C}{(m+1)!} |\omega_m(x)| \leq \frac{C}{(m+1)!} (\beta - \alpha)^{m+1}, \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

2) МН-Н Лагранжа в форме Ньютона.

0-й шаг  $L_0(x) = f(x_0).$

1-й шаг 
$$L_1(x) = f(x_0) \ell_0(x) + f(x_1) \ell_1(x) = \frac{f(x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)(x-x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0) + x-x_0}{x_1-x_0} (f(x_1) - f(x_0)) =$$

$$= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot \omega_0(x).$$

74

Опр. Пусть заданы узлы интерполации $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

разделённое разностью наз-ём:

$$1\text{-го порядка: } \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} = f(x_i | x_j)$$

$$2\text{-го порядка: } f(x_i | x_j | x_k) = \frac{f(x_i | x_j) - f(x_j | x_k)}{x_i - x_k}$$

$$\vdots$$

$$k\text{-го порядка: } \frac{f(x_i | x_{i_2} | \dots | x_{i_n}) - f(x_{i_2} | \dots | x_{i_n})}{x_i - x_{i_n}} \rightarrow$$

2-ой

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ & x_0 & x_1 & x_2 & & & \end{array}$$

$$L_2(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) = \frac{f(x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$+ \frac{f(x_1)(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = f(x_0) + f(x_0)(x-x_0)$$

$$\frac{-(x-x_0) + (x_0-x_2)(x-x_0) + (x-x_0)^2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \dots = f(x_0) + f(x_0 | x_1 | x_2) \omega_0$$

$$\omega_0 + f(x_0 | x_1 | x_2) \omega_2$$

$$L_m(x) = f(x_0) + f(x_0 | x_1) \omega_0 + f(x_0 | x_1 | x_2) \omega_2 + \dots + f(x_0 | \dots | x_m) \omega_m$$

3) Задача интерполяции с кратными узлами

Надо найти мн-н наим. ст. $H: H^{(k)}(x_j) = f^{(k)}(x_j), k=0, \dots, n$

Такой мн-н сущ. и наз-я мн-ам Эрмита.

$$H(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{N-1} x^{N-1}, \text{ неизв. } N\text{-коэфф.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x_n) \end{bmatrix}$$

7.

Теорема (интерполяционная ф-ла Эрмита),

Пусть $f \in \mathcal{D}^{(N)}(a, b)$, $\{x_0, \dots, x_m\}$ - кратные узлы интерполяции.

Тогда $\forall x \in (a, b)$, $\exists \psi = \psi(x) \in (a, b)$.

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(N)}(\psi)}{N!} \Omega_N(x), \text{ где } \Omega_N(x) = (x-x_0)^{n_0} (x-x_1)^{n_1} \dots (x-x_m)^{n_m}$$

Д-во: Δ 1) Если $x = x_j$, то ψ -любая

$$2) x \neq x_j. \phi(z) = f(z) - H(z) - p \Omega_N(z), p \in \mathbb{R}$$

По Т. Ролля ϕ' будет N -корней

$$\exists \psi \in (a, b): \phi^{(N)}(\psi) = 0.$$

$$\phi^{(N)}(z) = f^{(N)}(z) - H^{(N)}(z) - p \Omega_N^{(N)}(z).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(z) = 0 \\ \phi(x_0) = 0 - \text{корень } x_0 \text{ и } n_0 \\ \phi(x_1) = 0 - \text{корень } x_1 \text{ и } n_1 \\ \phi(x_m) = 0 - \text{корень } x_m \text{ и } n_m \end{array} \right.$$

$$z = \psi, 0 = f^{(N)}(\psi) - 0 - p \cdot N! \Rightarrow p = \frac{f^{(N)}(\psi)}{N!}. \Delta$$

МН-и Эрмита $\equiv$ (совпадает) МН-и Тейлора

$$r(x, x_0) = \frac{f^{(n_0)}(\psi)}{n_0!} (x-x_0)^{n_0}$$