

Суммирование рядов.

07.02.2023

Опр. Пусть задана числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ выражение $x_1 +$

$$+ x_2 + \dots + x_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ наз-ся (числовым) рядом.}$$

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, если существует конечный предел

$$\text{его частичных сумм: } S_n = \sum_{n=1}^n x_n.$$

Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ наз-ют суммой ряда и обозн. также

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall N \geq N_0, |S - S'| < \varepsilon.$$

$$\text{т.е. } \forall N \geq N_0, \left| \sum_{n=1}^N x_n - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| < \varepsilon.$$

Теорема (кр-ий Коши для ряда).
Ряд сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall N, M \geq N_0, \left| \sum_{n=N}^M x_n \right| < \varepsilon.$

Замечание кр-ий Коши. Если $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, то $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall$

$$N, M \geq N_0, \left| \sum_{n=N}^M x_n \right| < \varepsilon \quad \left(\sum_{n=N}^M x_n = \sum_{n=1}^M x_n - \sum_{n=1}^N x_n \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| S_{M-1} - S_{N-1} \right| = \left| \sum_{n=N}^M x_n \right| < \varepsilon \quad (M \geq N)$$

□

Примеры:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} x_n q, \quad q \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^N q^n = q + q^2 + \dots + q^N = q(1 + q + \dots + q^{N-1}) =$$

$$= q \cdot \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

$$\text{Если } |q| < 1, \text{ то } q^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \text{ и следовательно } \sum_{n=1}^{\infty} q^n \rightarrow \frac{q}{1 - q}.$$

$$\text{Если } |q| = 1, \text{ то } \sum_{n=1}^N q^n = N \text{ при } q = 1 \text{ и } S_n = \text{нет конечного предела, при } q = -1.$$

$$q^n, \text{ при } q = -1.$$

□

Если $|a| > 1$, то $|a^n| \rightarrow +\infty$ $\Rightarrow$ нет конечного предела.

Следствия из кр-ия Коши:

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сх-ся, то $x_n \rightarrow 0$.

$\triangle$ т.к. $|\sum_{n=N}^M x_n| = |x_N| < \varepsilon$

2) Матричное конечное число псевд. ряда не влияют на сх-ть.

Пример 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонический ряд. Ср. сарн. $(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} =$
 $= \left(\frac{a^5 + b^5}{2} \right)^{1/5}$, при $s = -1$. ср. гарн. $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n}$.

Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расх-ся.

Надо: $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n, m \geq N: \left| \sum_{n=m}^m x_n \right| \geq \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{3}$, возьмём $M = 2N_0, M = N_0$. Тогда

$$\sum_{n=N_0}^{2N_0} \frac{1}{n} = \frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_0+1} + \dots + \frac{1}{2N_0} > N_0 \cdot \frac{1}{2N_0} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Опр. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сх-ся абсолютно, если сх-ся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ расх-ся, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сх-ся, то говорят, что

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сх-ся условно.

Предложение:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ сх-ся, то $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сх-ся.

$\forall$ по кр-ию Коши: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N_0, \left| \sum_{n=m}^m x_n \right| <$
 $< \varepsilon. \left| \sum_{n=N}^M x_n \right| \leq \sum_{n=N}^M |x_n| < \varepsilon$, в т.с. по кр-ию Коши $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сх-ся.

2) Опр. Пусть $\Theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ - биекция. Перестановкой ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, параллельной Θ , каждая рз $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\Theta(n)}$.

Теорема (о перестановках абс-но сч-б рзгдк).

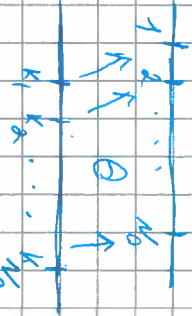
Пусть рзг $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сч-сз абсолютно, тогда любая его перестановка сч-сз и той же сумме $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

▷ Пусть $\Theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ - биекция.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall N \geq N_0, \sum_{n=N}^{\infty} |x_n| < \varepsilon$

$M_0 = \max_{1 \leq i \leq N_0} \{k_i\} \geq N_0$.

$\forall N \geq M_0, L = \max_{1 \leq j \leq N} \{\Theta(j)\} \geq N$



$\{\Theta(1), \dots, \Theta(N)\} \subseteq \{\Theta(1), \dots, \Theta(M_0)\} \supseteq \{\Theta(k_1), \dots, \Theta(k_{N_0})\} = \{1, \dots, N_0\}$.

$$\begin{aligned} L + \alpha_k, \forall \varepsilon > 0, \forall N \geq M_0 \text{ получим } & \left| \sum_{n=1}^N x_{\Theta(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{N_0} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} x_{\Theta(n)} + \sum_{n=N_0+1}^N x_{\Theta(n)} \right| \leq \varepsilon + \sum_{n=N_0+1}^N |x_n| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

по сб-бг абс-ой сч-ту!

$\forall \varepsilon > 0, \exists M_0 \in \mathbb{N} : \forall N \geq N_0, \sum_{n=N}^{\infty} |x_n| < \varepsilon$.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ - рзг не сходится абсолютно, потому

что рзг сходится условно.

$$\sum_{n=2N}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N}\right) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2N-1) \cdot 2N}$$

$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(2N-1) \cdot 2} < \text{const} \Rightarrow \sum_{2N}^{\infty} \rightarrow \sum^*$ по Т. Вейерштрасса

$$\sum_{2^N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^N}} \Rightarrow \sum_{2^N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^N}} \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2^N}} \rightarrow \sum_{N \rightarrow \infty}^*$$

Положительные ряды.

Телескопический признак.

Теорема (Телес. пр-к).

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, состоящий из неотрицательных членов,

т.е. $x_n \geq 0$ и $x_n \rightarrow 0$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сх-тз $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$

сх-ср.

Пример: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сх-ср $\Leftrightarrow p > 1$.

$p > 0, \frac{1}{n^p} \rightarrow 0$; $p \leq 0$ расх. $\frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \Leftrightarrow |q| < 1.$$

$$\Delta \sum_{n=1}^N x_n = T_N = \sum_{n=1}^N 2^{n-1} x_{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N 2^n x_{2^n}.$$

1) Покажем по индукции, что $\sum_{n=1}^N x_n \geq T_N$

$$N=1, \sum_{n=1}^1 x_n = x_1 + x_2 \geq x_2$$

$$T_1 = x_2$$

$$N=2, \sum_{n=1}^2 x_n = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + 2x_4 = T_2$$

$$T_2 = x_2 + 2x_4.$$

$$\sum_{n=1}^N x_n = x_1 + \dots + x_{2^{N-1}} + x_{2^{N-1}+1} + \dots + x_{2^N} \geq T_N$$

$$T_N = T_N + 2^N x_{2^N}$$

$$T.O. \text{ us } ex-tn \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Rightarrow (not \text{ being}) ex-tn \sum_{n=1}^{\infty} x_n''$$

$$2) X_1 + 2T_N \geq \sum_{i=1}^{N-1} 1$$

$$N=1, \quad x_1 + 2T = x_1 + 2x_2 \geq \sqrt{1-x_1} = \sqrt{2} = x_1 + x_2$$

$$N = 2, X_1 + 2T_2 = X_1 + 2X_2 + 4X_3 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} = S = X_1 + X_2 + X_3$$

$$N=3, \quad x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 \geq 5$$

$$S_{2+1} = S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

$$X_1 + 2T_{n+1} = X_1 + 2(T_n + 2^{n-1} X_{n+1}) = \underbrace{X_1 + 2T_n}_{X_{n+1}} + 2^{n+1} X_{n+1}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{5^{n-1}}} = \frac{5^{n-1}}{5^{n-1} + 1}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} x_i = \sum_{i=1}^{N-1} x_{i+1} + x_{N-1} + x_{N-2} + \dots + x_2 + x_1$$

10.02.2023

2) Матричные приращения.

Терпена (Полимер с-48).

$\exists M \in \mathcal{M}, \exists L > 0: \forall n \geq n_0, 0 \leq a_n \leq L \cdot n, T a z a$

Torga, cau pag $\int_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$, to pag $\int_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$,

from pag $\sum_{n=1}^8$ pack-18, to pag $\sum_{n=1}^8$ pack-18.

Влияние pH на χ -ср. по др.м. Налич. в χ -ср.

$$\exists M_0: \forall n, m \geq N_0, \sum_{k=n}^m \epsilon_k < \epsilon. \text{ Total } \sum_{k=N_0}^{\infty} \epsilon_k$$

$\prod_{k=n}^{\infty} a_k < 1 \Rightarrow$ no x.p.-u. Hall pag

$$\sum a_k - cr - c_9.$$

а) Препараты от простуды, что в их состав

тогда по 1) $\sum a_n$ — та же с.с.с. — противоречие $\triangleright$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}}$; $a_n = \frac{n}{n^2 + \sqrt{n}} \geq \frac{n}{n^2 + n} = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$ — расх.

7. (асимптотич-ий критерий)

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$. Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ с.с.с. и расх-ся одновременно (аналог-порт. рн.).

$\triangleleft$ Пусть $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, \frac{a_n}{b_n} \in (\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2})$

1) Пусть $a_n > 0$ и $b_n > 0$. Тогда

$$\frac{\alpha}{2} b_n < a_n < \frac{3\alpha}{2} b_n \text{ — оба ряда с.с.с.}$$

или расх-ся по признаку ср-ия.

2) $a_n, b_n < 0$, $\alpha \frac{\alpha}{2} b_n > a_n > \frac{3\alpha}{2} b_n \Rightarrow -\frac{\alpha}{2} b_n < -a_n < -\frac{3\alpha}{2} b_n$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(1+\frac{1}{n})^n}$.

$$\begin{aligned} e^{-(1+\frac{1}{n})^n} &= e^{-e^{n \ln(1+\frac{1}{n})}} = e^{-e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))}} = \\ &= e^{-e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}} = e^{-e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}} = \\ &= \frac{e}{2n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{e}{2n} \text{ — расх-ся} \Rightarrow \sum e^{-(1+\frac{1}{n})^n} \text{ — расх.} \end{aligned}$$

7. (критерий отношения)

Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Тогда, если ряд $\sum b_n$ с.с.с., то ряд $\sum a_n$ с.с.с., если ряд $\sum a_n$ расх-ся, то ряд $\sum b_n$ расх-ся.

$$\nabla \forall n \geq n_0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_{n_0}}, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Перемножив $\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_{n_0}}.$

Т.О. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_{n_0}}.$

$$0 < a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n, \forall n \geq n_0 + 1 - \text{гориз пр-х с-из } \nabla$$

Правила Коши и Ланжевара.

Т. (одобитный пр-х Ланжевара).

Пусть $a_n > 0$. Если

1) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то $\text{prg} \prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

2) Если $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то $\text{prg} \prod_{n=1}^{\infty} a_n$.

3) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то неясно.

$\nabla 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, \sup_{k \geq n} \frac{a_{k+1}}{a_k} < q + \epsilon$

$< q + \epsilon < 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0, \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \epsilon.$

$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} < (q + \epsilon)^{n-n_0}, a_n < (q + \epsilon)^n \cdot \frac{a_{n_0}}{(q + \epsilon)^{n_0}} \neq 0$

т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (q+\varepsilon)^n$ сх-ся, то и ряд $\sum a_n$ сх-ся.

2) $\forall n \geq n_0, a_{n+1} \geq a_n > 0 \Rightarrow a_n \neq 0$ значит ряд

$\sum a_n$ расх.

3) равенным $\sum \frac{1}{n^2}$ и $\sum \frac{1}{n^2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ $\triangleright$

Упр. Придумать ряд-ть верхний предел, который > 1 и ряд сх-ся.

Следствие (Красильский пр-к Даламбера)

Пусть $a_n > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$:

1) $q < 1$, тогда ряд ~~расх~~ сх-ся

2) $q > 1$, тогда ряд расх.

3) $q = 1$, тогда неясно

Т (обобщённый пр-к Коши)

Пусть $a_n \geq 0$:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд сх-ся

2) $\exists (n_k)_{k=1}^{\infty} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд расх.

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то неясно.

$\triangleright$ 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$
 $a_n < (q + \varepsilon)^n$, ряд $\sum (q + \varepsilon)^n$ $\frac{1}{q}$

сх-ся $\Rightarrow$ по пр-ку ср-ия $\sum a_n$ сх-ся.

8) 2) $a_{n_k} \geq 1 \Rightarrow a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0 \Rightarrow$ расх.

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n a_n.$$

$$a_{n+1} < \frac{1}{q-\varepsilon} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$$

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \text{ с.с.}, \text{ т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k a_k - c_{n+1} a_{n+1} =$$

$$= c_1 a_1 - c_2 a_2 + c_2 a_2 - c_3 a_3 + \dots + c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \rightarrow c_1 a_1 -$$

$$- \alpha, \quad n \rightarrow \infty$$

$$2) \frac{c_n a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n} \text{ т.к. ряд}$$

$\sum c_n$ - расх-ся, то по пр-ху ср-их атомически

$\sum c_n$ расх.

▷

Следствие: Признак Коши для $c_n = 1$ - это абс. пр-к

Далее.

$$1) D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \gamma_n = \frac{1 \cdot a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{D_n} - 1$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n > 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} D_n} > 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} D_n < 1$$

$$2) \gamma_n \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{D_n} \leq 1 \Leftrightarrow D_n \geq 1 \quad \forall n \geq n_0$$

▷

Т. (пр-к Раде, $c_n = n$).

Пусть $a_n > 0$ и $R_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$. Тогда, если $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с.с.

Если $\exists n_0 \forall n: n \geq n_0, R_n \leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх.

$$10) \gamma_n = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 = R_n - 1 \quad \triangleright$$

1) (np-x) берем, $c_n = n \ln n$

Иметь $a_n > 0$ и $\beta_n = \left(n / \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \ln n$.

если $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n > 1$, то ряд $\sum a_n$ с.с.

если $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ рас.с.

В np-x кумула берем $b_n = n \ln n$, вышло поле

равн, что $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ рас.с. $\Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n \ln n} = \frac{1}{\ln 2} \sum \frac{1}{n}$

- рас.с.

$\gamma_n = n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1) = n \ln a_n - n \ln n + (n+1)$

$\ln n - (n+1) \ln(n+1)$

$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \ln(n+1)$

$\gamma_n = \beta_n + \ln \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$

$\times \ln \frac{n}{n+1}$

14.02.2023

$\beta_n = \beta_n - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

то np-xy кумула:

если, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n > 0$, то с.с.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \ln(1 + \frac{1}{n}))^{n+1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n > 1$

2) если, $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, \gamma_n \leq 0$, то ряд рас.с.

$+ c \beta_n - \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leq 0$

$\beta_n \leq \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

$\frac{1}{n} \leq \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

11

если, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1 \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, \beta_n < 1 + \varepsilon < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\triangleright$

$\Rightarrow$ это ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - расх-ся.

Теорема (пр-к Гаусса).

Пусть $a_n > 0$ и $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \mu + \frac{\theta_n}{n^2}$, где

$|\alpha_n| < 1$. Тогда:

если, $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$ и $\mu > 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-ся

если, $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$ и $\mu \leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расх-ся.

$\langle 1 \rangle$ Пусть $\lambda \neq 1$. Тогда применим классический пр-к д'Ала

нбера: $\forall n \geq n_0, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \frac{\mu + \theta_n}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{\lambda} + 1$.

если, $\frac{1}{\lambda} < 1$, т.е. $\lambda > 1$, то ряд сх-ся

если, $\frac{1}{\lambda} > 1$, т.е. $\lambda < 1$, то ряд расх-ся.

2) $\lambda = 1$. Применим пр-к Рааде:

$$R_n = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} - 1 \right) = \mu + \frac{\theta_n}{n} \Rightarrow$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$.

если, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n > 1$, то ряд сх-ся, т.е. при $\mu > 1$

если, $\mu < 1$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, R_n \leq 1 \Rightarrow$ ряд расх.

3) Пусть $\lambda = 1 = \mu$, применим пр-к Бертраиа:

$$\beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{n}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{n} \rightarrow 0 < 1$, т.е. ряд расх. $\triangleright$

Законные ряды

Теорема / Рунда о перестановке $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно с.с.с. ряда.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно с.с.с. ряд. Тогда $\forall A \in \mathbb{R}$ найдется деяущая $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$.

1) Лемма. Пусть есть гда с.с.с. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n + \beta y_n$ с.с.с.

2) До: самостоятелно

2) Заменяем на порядок все попарные

Члены под-ти a_n и отрицательные $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$

$$p_n - a_{m_n} \neq 0$$

$$\text{Тогда } p_n \rightarrow 0 \text{ и } q_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$$

Докажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$. Тогда

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n - p_n - \text{с.с.с. (по лемме), но}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - p_n = - \sum_{n=1}^{\infty} q_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q_n - \text{с.с.с.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n) - \text{тоже}$$

$$\text{с.с.с.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \text{расх-с.с.с. - противоречие.}$$

3) Строим перестановку σ по A :

Видим $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $p_1 + \dots + p_m > A$.

Видим $l \in \mathbb{N}$ так, чтобы $(p_1 + \dots + p_m) - (q_1 + \dots + q_l) <$

$$< A. \text{ мы } l \text{ найм. с такой с.с.с.}$$

и так далее по индукции.

Пусть уже выбраны $m_1, \dots, m_{n-1}$ и $\ell_1, \dots, \ell_{n-1}$.

выберем m_n так, чтобы

$$(p_1 + \dots + p_m) - (q_1 + \dots + q_n) + \dots + (p_{m_{n-1}} + 1 + \dots + p_{m_n}) > A.$$

$$\underbrace{(p_1 + \dots + p_m)}_{< A} - \underbrace{(q_1 + \dots + q_n)}_{\leq p_m} + \dots + \underbrace{(p_{m_{n-1}} + 1 + \dots + p_{m_n})}_{\leq p_m} - \underbrace{(q_{\ell_{n-1}+1} + \dots + q_{\ell_n})}_{\leq p_m} < A$$

$$\underbrace{0 \quad p \quad p_m - q_1 - q_n}_{1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_{n-1} \quad m_n}$$

4) Нужно г-ть, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow A$.

Пусть $N = m_1 + \ell_1 + \ell_2 m_2 + \ell_2 t_1 + m_{n-1} + \ell_{n-1} + m_n$

$$\sum_{n=1}^N a_n = p_{m_1} - q_{\ell_1} + p_{m_2} - q_{\ell_2} + \dots + p_{m_{n-1}} - q_{\ell_{n-1}} + p_{m_n} > A$$

$$\sum_{n=1}^N a_n + a_{N+1} = B + p_{m_{n+1}} + p_{m_{n+2}} + \dots + p_{m_{n-1}} + p_{m_n} + p_{m_{n+1}} + p_{m_{n+2}} + \dots$$

$$B = p_{m_1} - q_{\ell_1} + p_{m_2} - q_{\ell_2} + \dots + p_{m_{n-1}} - q_{\ell_{n-1}}.$$

$$A - p_{m_n} < \sum_{n=1}^N a_n > A \Rightarrow A - p_{m_n} \rightarrow A \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow A.$$

Пусть теперь N — произвольное и не равное N

$$N = \underbrace{m_1 + \ell_1 + m_2 + \ell_2 + \dots + m_{n-1} + \ell_{n-1} + m_n}_{\text{любое}} + m_{n+1} + \ell_{n+1} + m_{n+2} + \ell_{n+2} + \dots + m_{n-1} + \ell_{n-1} + m_n + \ell_n + m_n$$

$$N = \underbrace{m_1 + \ell_1 + m_2 + \ell_2 + \dots + m_{n-1} + \ell_{n-1} + m_n}_{\text{любое}} + m_{n+1} + \ell_{n+1} + m_{n+2} + \ell_{n+2} + \dots + m_{n-1} + \ell_{n-1} + m_n + \ell_n + m_n$$

$$A < \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N a_n - q_{\ell_{n+1}} - \dots - q_{\ell_{n+1}} + j < \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow A.$$

Если $j = \ell_n - \ell_{n-1}$, т.е. $N = m_1 + \ell_1 + m_2 + \ell_2 + \dots + m_{n-1} + \ell_{n-1} + m_n + \ell_n$.

$$A - q_{\ell_n} < \sum_{n=1}^N a_n = p_{m_1} - q_{\ell_1} + p_{m_2} - q_{\ell_2} + \dots + p_{m_{n-1}} - q_{\ell_{n-1}} + p_{m_n} - q_{\ell_n} < A$$

Признаки сходимости, Абеля, Лебнессона:

1) Изучившие на частях (несог Абеля)

$$\sum_{k=n}^m a_k b_k = \sum_{k=n}^m (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=n}^m A_k b_k - \sum_{k=n}^m A_{k-1} b_k \quad \textcircled{=}$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$A_0 = 0, \quad a_k = A_k - A_{k-1}$$

$$\textcircled{=} \sum_{k=n}^m A_k b_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} A_k b_{k+1} = A_m b_m + \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) - A_{n-1} b_n$$

Теорема (пр-х Абеля и Лейбница).

Пусть выполнено одно из условий:

$$(A1) \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ с-с-я} \quad (B1) \text{ частичные суммы } \sum_{n=1}^m a_n \text{ о-р-б-т}$$

$$(A2) \text{ } b_n \text{ - монотонно о-р.} \quad (B2) \text{ } b_n \text{ монотонно стремится к нулю}$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ с-с-я

1) По критерию Коши надо $\forall \varepsilon > 0$ найти $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m \geq n_0, \left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| < \varepsilon$.

Пусть выполнены условия (B1) и (B2). Тогда $\exists n_0$

$$\forall n \geq 1, \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq L. \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |b_n| < \varepsilon$$

$$\forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=n}^m a_k b_k \right| = \left| \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_{n-1} b_n \right|$$

$$|b_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| + |A_m| |b_m| + |A_{n-1}| |b_n| \leq L \cdot$$

$$\left(\sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_m| + |b_n| \right) \leq L \cdot (|b_n| + |b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots + |b_m| + |b_m| + |b_n|) \leq L \cdot 15$$

$$+ |b_n|) \leq 4L|b_n| \leq 4L \cdot C$$

2) Пусть выполнено (A1) и (A2)

$$\downarrow \text{и, т. дейст-но}$$

$$(D1) \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : b_n - \beta \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Т.о. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n - cx - cy$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n$ для $\tilde{b}_n = b_n - \beta$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + a_n \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n - cx - cy.$$

17.02.2023

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ - точка.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ (D1)}$$

$$a_n = \sin(nx), \quad \left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq C \text{ (D2)}$$

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin(nx) \right| = \left| \sum_{n=1}^N \operatorname{Im} e^{inx} \right| = \left| \operatorname{Im} \sum_{n=1}^N e^{inx} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^N e^{inx} \right| = \left| \sum_{n=1}^N e^{inx} \right|$$

$$\sum_{n=1}^N q = \frac{q \cdot (1 - q^N)}{1 - q}, \quad \left| \sum_{n=1}^N q^n \right| = \frac{|q| \cdot |1 - q^N|}{|1 - q|} \leq \frac{|q| \cdot (1 + |q|^N)}{|1 - q|} =$$

$$= \frac{2}{2|\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

$$|q| = |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$$

$$|1 - q| = |1 - \cos x + i \sin x| = \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos x} = 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|,$$

$$\text{если } x = 2\pi k, \text{ то } \operatorname{prg} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n}, \quad x \neq 2\pi k \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos 2nx)}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot \sin nx}{n}, \quad x \neq 2\pi k - \text{условно}$$

16

расс. етог.

cx - cy.

Свойство (пр-к Лейбница).

Пусть $b_n > 0$ и $b_n \searrow 0$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ с.с.

Применим пр-к Дирихле: $a_n = (-1)^n$, $b_n = b_n \searrow 0(01)$

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n \in [-1, 0.5] \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^N (-1)^n \right| \leq 1 \quad (D2)$$

□

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^n}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)^n}$, $b_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$, $b_3 = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$.

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n(n+1)^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)(2n+1)} = -\text{с.с.}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^n}, b_n = \frac{1}{n(n+1)^n}, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)^n} = \text{расх.с.с.}$$

Операции над рядами

1) сложение

2) перестановки

3) слагаемые законы

4) производные

Пусть заданы ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и заданная точка $\mu_n \nearrow \infty$.

$$s_1 = a_1 + \dots + a_{\mu_1}$$

$$s_2 = a_{\mu_1+1} + \dots + a_{\mu_2}$$

⋮

$$s_m = a_{\mu_{m-1}+1} + \dots + a_{\mu_m}.$$

Теорема (Сопоставительный закон).

- (1) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх-тся к той же ^{сумме} сущ.
- (2) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет расх-ся
- (3) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся и все слагаемые в выражении $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ од-ого знака, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся к той же сумм.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow s$. Тогда $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N a_n$

$$= \sum_{n=1}^N a_n \rightarrow s$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ расх-ся $(-1+1)+(-1+1)+\dots$

$$a_1 = -1+1=0$$

$$a_2 = -1+1=0$$

$$a_3 = -1+1=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$$

(3) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + (a_{n+1} + \dots + a_n)$, $k < n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow s$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ если } > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ если } < 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow s$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \dots \right)$

$$+ \left(-\frac{1}{9} + \dots - \frac{1}{15} \right) + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{u+u} = \frac{1}{u} + \frac{1}{1+u} \geq \frac{1}{u+u}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{1 + \frac{u}{v}} = \frac{1}{1 + \frac{u + v}{v}} = \frac{v}{u + v}$$

$$S_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = A_2 \cdot b_2, \quad \sum_n = A_n \cdot b_n \rightarrow A \cdot B$$

Опр. Пусть даны $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ наз-я произв. рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ в форме Коши, если $c_n = \sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j = \sum_{i=0}^n a_i \cdot b_{n-i}$.

Теорема (Мертенса о произв. рядов)

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сх-ся к A , ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ абсолютно сх-ся к B . Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сх-ся к $A \cdot B$.

Δ Покажем, что $\sum_{n=0}^N c_n - \sum_{n=0}^N a_n \cdot b_n \rightarrow 0$.

$$\sum_{n=0}^N c_n - \sum_{n=0}^N a_n \cdot b_n = \sum_{n=0}^N \sum_{i=0}^n a_i \cdot b_{n-i} - \sum_{n=0}^N a_n \cdot b_n = \sum_{i=0}^N a_i \cdot \sum_{n=i}^N b_{n-i} - \sum_{n=0}^N a_n \cdot b_n$$

$$= \sum_{i=0}^N a_i \cdot \sum_{n=0}^{N-i} b_n - \sum_{n=0}^N a_n \cdot b_n$$

$$\cdot \left(\sum_{n=0}^N b_n \right) = \sum_{i=0}^N a_i \cdot \left(\sum_{n=0}^{N-i} b_n - \sum_{n=0}^N b_n \right) = - \sum_{i=0}^N a_i \cdot \sum_{n=N-i+1}^N b_n$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=n}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon$

Пусть $\varepsilon > 0$: $\left| \sum_{k=1}^N a_k \right| \leq C, \left| \sum_{k=1}^N b_k \right| \leq C, \forall n \geq 1$

$\forall N > 2n_0, \left| \sum_{n=0}^N a_n \cdot \sum_{n=N-i+1}^N b_n \right| = \left| \sum_{i=1}^N a_i \cdot \sum_{n=N-i+1}^N b_n \right| + \left| \sum_{i=N+1}^N a_i \cdot \sum_{n=N-i+1}^N b_n \right|$

$$\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n_0} |a_i| \cdot \left| \sum_{n=N-i+1}^N b_n \right|}_{\leq C \cdot \varepsilon} + \underbrace{\sum_{i=n_0+1}^N |a_i| \cdot \left| \sum_{n=N-i+1}^N b_n \right|}_{\leq \varepsilon \cdot C} \leq 2C \cdot \varepsilon$$

Теорема (Абеля о пр-ии рядов)

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$ (сх-приме в форме Коши)

Тогда $AB = C$.

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

$$C_0 + C_1 + \dots + C_n = A_0 B_0 + A_0 B_1 + \dots + A_n B_0$$

N

N

21.02.23

$$C_n = C_0 + C_1 + \dots + C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

$$\frac{C_0 + C_1 + \dots + C_n}{n+1} = \frac{A_0 B_0 + A_1 B_1 + \dots + A_n B_0}{n+1}.$$

$a_n b_0$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

!

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0$$

$$\text{1 шаг: если } C_n \rightarrow C, \text{ то } \frac{C_0 + C_1 + \dots + C_n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C \quad (\text{5 ПР})$$

$$\text{2 шаг: если } A_n \rightarrow A, \quad B_n \rightarrow B, \text{ то } \frac{A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \dots + A_n B_0}{n+1}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \cdot B \quad (\text{5 ПР})$$

Бесконечные пр-ва

▷

Лпр. Выведение вида $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ наз-я демонстрация

идеи проливаются. Бесконечные пр-ва $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ св-ва,

если $\varphi(n)$ конечный и не равный 0 предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$

его связанных пр-ва.

Теорема (Необх. пр-х св-ва дек. пр-ва).

Если дек. предел $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ св-ва, то $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$. Также

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

24

$$\Delta 0 \neq p = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n p_i \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^n p_i}{\prod_{i=1}^n p_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{p} = 1$$

$$= 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{p}{p} = 1$$

Теорема (кр-ий сх-ти бск. пр-их).

Пусть $p_n \geq 0$, бск. пр-ие $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сх-ся $\Leftrightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ сх-ся.

Δ Используя св-ва $\ln$ /мн-ты и $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$.

Получим $\ln \prod_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$. $\ln \prod_{n=1}^{\infty} p_n \rightarrow \ln p$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \rightarrow S \Rightarrow \ln p = S.$$

Теорема (асмпт. пр-к).

Пусть $p_n = 1 + d_n$, $d_n \rightarrow 0$ и d_n - одного знака. Тогда бск. пр-ие $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ сх-ся $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d_n$ сх-ся. Если d_n

меняет знак, то для сх-ти д.п. $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ достаточно сх-ти

рядов $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$.

Δ 1) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + d_n)$ сх-ся $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + d_n)$ сх-ся $\Leftrightarrow$ ас. пр-к

$\ln(1 + d_n) \sim d_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ сх-ся. (для d_n - пост. зм.)

$$\ln(1 + d_n) = d_n - \frac{d_n^2}{2} + o(d_n^2) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\frac{\ln(1 + d_n) - d_n}{-\frac{d_n^2}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + d_n) - d_n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{2} \text{ сх-ся, т.к. } \sum_{n=1}^{\infty} d_n - \text{сх-ся} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + d_n) \text{ сх-ся}$$

$$-a_2 = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{or} \quad -a_1$$

▷

Примеры:

1) 90-ая теорема гласит, что всякое натуральное число

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \left(\prod_{p \text{ prime}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right) \right)$$

можно выразить произведением простых чисел, т.е. $p_1=2, p_2=3,$

$$p_3=5, \dots$$

$$1) \text{ Покажем, что } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n^s} \right) = 1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \dots + \frac{1}{p_1^{ks}} + \dots + \frac{1}{p_1^{(k-1)s}} + \dots$$

$$\frac{1}{p_1^s - 1} = \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \dots + \frac{1}{p_1^{ks}} + \dots$$

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{p_1} \right)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_1} \right)^{ks} \quad (p_1 \text{ простое})$$

$$\Rightarrow \left(1 + \left(\frac{1}{p_1} \right)^s + \left(\frac{1}{p_1} \right)^{2s} + \dots \right) \dots \left(1 + \left(\frac{1}{p_n} \right)^s + \left(\frac{1}{p_n} \right)^{2s} + \dots \right)$$

$$= \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{p_n} \right)^s + \left(\frac{1}{p_n} \right)^{2s} + \dots \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

2) 90-ая теорема гласит, что произведение $\sin x$ в бесконечности

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\pi n} \right)^2 \right), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

3.1) Убедимся, что $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\pi n} \right)^2 \right) = \sin x$. Это так можно

$$\text{показать, что } \sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\pi n} \right)^2 \right) = \sin x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\pi n} \right)^2 \right)$$

3.2) Покажем, что $\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\pi n} \right)^2 \right)$, где $x \in \mathbb{R}$

73

P_n - некий мн-н степени n .

$$\sin(2n+1)x = \operatorname{Im} e^{i(2n+1)x} = \operatorname{Im} (\cos x + i \sin x)^{2n+1} = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\cos x)^{2n+1-k} (i \sin x)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k x (i \sin x)^{2n+1-k} = i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k x \sin^{2n+1-k} x$$

$$= i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k x \sin^{2n+1-k} x = i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k x \sin^{2n+1-k} x$$

$$= i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k x \sin^{2n+1-k} x = i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k x \sin^{2n+1-k} x$$

$$= i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k x \sin^{2n+1-k} x = i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k x \sin^{2n+1-k} x$$

$$= i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k x \sin^{2n+1-k} x = i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k x \sin^{2n+1-k} x$$

$$3) P_n(u) = A(u-u_1) \dots (u-u_n) = A(u-u_1) \dots (u-u_n)$$

$$\text{целые } \begin{cases} \sin(2n+1)x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}, (2n+1)x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, x_k = \frac{\pi k}{2n+1}, x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{т.о. } u_k = \sin^2 \frac{\pi k}{2n+1}, k = 1, \dots, n$$

$$\sin(2n+1)x = \sin x \cdot A \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}} \right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}} \right)$$

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2n+1, A = 2n+1$$

$$\text{Получим } \sin(2n+1)x = (2n+1) \sin x \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right)$$

$$\text{Заменим } z = (2n+1)x, x = \frac{z}{2n+1}, \sin z = \sin \frac{z}{2n+1} \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right)$$

$$1 \leq m \leq n, \frac{\sin \frac{z}{2n+1}}{\frac{z}{2n+1}} \cdot \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right) \cdot \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{z}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right) = \frac{D_m^n}{E_m^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_m^n = z \cdot \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right)$$

$$24) \sin z = E_m^n \cdot D_m^n, E_m^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_m, D_m^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D_m, \text{ т.к. } \exists \text{ предел } \frac{D_m^n}{E_m^n}$$

2

$$\sin^2 y < y, \sin^2 y > \left(\frac{2}{\pi} y\right)^2, y \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{121}{12m+11} \left(\frac{\sqrt{m}}{2m+1} \right) \frac{121}{5\pi m}$$

$$T > D_{\text{eff}}^n > \prod_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{\frac{2}{\gamma_1} \cdot \frac{2}{2^{k+1}}}{\frac{2}{\gamma_1 k} + 1} \right)^2 \right) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \left(\frac{\frac{2}{\gamma_1 k}}{2} \right)^2 \right)$$

$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\pi k} \right)^2 \right), \quad z \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\sqrt{(2x)^2 - 1}}{(2x)^2}$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{(2n-1)\pi}{(2n)\pi}$$

28.02.2023

прод и познгобдт ежности.

$$A \rightarrow \mathbb{R}$$

государственная

Page 199-208 of 208

фотон $\rho_{\mu\nu} \neq f_{\mu\nu}(k)$ с-с-а. М-до тауах соеах хоёв,

[illegible]

Последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ в $x_0 \in A$, если числовая последовательность $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$.

Опр. Пусть $f_n, f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$. Последовательность f_n

сходится равномерно на множестве A к функции f , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0, \text{ т.е.}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на A , если функция

каждая последовательность $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ сходится равномерно на A .

обозн: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{A} f$

Примеры:

$$1) f_n(x) = x^n, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & |x| < 1 \\ +\infty, & x > 1 \end{cases}$$

не существует, $x \leq -1$

Множество $A = (-1, 1]$, предельная функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$

$$\sup_{x \in (-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in (-1, 1]} \{ \sup_{x \in (-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| \}; \quad \{ |f_n(x) - f(x)| \}$$

$$= \sup_{x \in (-1, 1]} |x^n| = 1 \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

т.о. равномерной сходимости f_n к f на A нет.

Рассмотрим $E = (-a, a)$, $0 < a < 1$

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x| < a} |x^n| = a^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x|^n} = |x|$, $\text{exam } |x| < 1$, to pag ch-cg
 korun

$|x| > 1$, to pag pack-rq
 korun

$|x| = 1$, to pag pack-cg
 neobx.mp.

$x \in (-1, 1)$ - $\text{um-go ch-tu pag a.}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\sup_{x \in A} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in (-1, 1)} \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{|x| < 1} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $\text{path. ch-tu na id het.}$

$\text{lyarb } E = (-a, b)$, $\text{zge } -1 < a < b < 1$

$$\sup_{x \in E} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{a < x < b} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} = \max \left\{ \frac{|a|^{n+1}}{|1-a|}, \frac{|b|^{n+1}}{|1-b|} \right\}$$

$\rightarrow 0$, $\text{t.k. } |a|, |b| < 1 \Rightarrow \text{pag } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ ch-cg padknaprho}$

na E

cb-go:

1) $\text{lyarb } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{A} f$, $\text{tozga } \forall \epsilon \in A$, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} f$

2) $\text{lyarb } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{A} f$ $\wedge \exists C > 0$: $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq C$. Tozga

$$\sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty$$

$$\Delta |f(x)| = |f(x) - f_0(x) + f_0(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_0(x)| +$$

$$+ |f_n(x)| \leq \sup_{y \in A} |f(y) - f_0(y)| + C < \epsilon + C$$

$\text{tozga } n_0 =$
 $\text{tozga } \sup_{y \in A} |f(y) - f_0(y)| < \epsilon$
 $\Rightarrow 27$

Теорема (о ратм. пределе непр. ф-ий).

Пусть $f, f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$:

1) f_n - непр. на A

2) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{A} f$

Тогда f - непр. на A .

$$\begin{aligned} \triangleleft \text{Пусть } x_0 \in A, \text{ тогда } |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0) + f(x_0) - f(x)| + \\ &+ |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + \\ &+ |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{y \in A} |f(y) - f_n(y)| + \\ &+ |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon), \sup_{y \in A} |f(y) - f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, т.к. f_{n_0} - непр. то

$$\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon): |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \triangleright$$

I. (Фини о сити непр. ф-ий)

Пусть $f_n, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$:

1) $f_n, f \in C[a, b]$

2) f_n - монотон. по-л-ть

3) $\forall x \in [a, b], f_n(x) \rightarrow f(x)$

Тогда $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{гл}} f$.

$\triangleleft$ Пусть для оп-ти $f_n(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Тогда

по 3) $\forall x \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon): \forall n \geq n_0, 0 < f_n(x) -$

28 $- f(x) < \varepsilon$. т.к. $f_n - f$ - непр. ф-ия, то по Т.1 о сир.зн.

$\exists \text{ окр. } \tau_{f_n}(x) = (x - \delta(x), x + \delta(x))$: $\forall y \in \tau_{g(x)}(x), 0 < f_n(y) - f(y) < \varepsilon$.

3) $[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a, b]} \tau_{f_n}(x) \Rightarrow$ по лемме Вейерштрасса $\exists$ конечное покрывающее $[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^N \tau_{f_n}(x_j)$ т.е. $\exists x_1, \dots, x_N$ и числа $\delta_1, \dots, \delta_N > 0$.

4) Тогда $\forall y \in [a, b], \exists 1 \leq j \leq N: y \in \tau_{f_n}^{j}(x_j) \Rightarrow 0 < f_n(y) - f(y) < \varepsilon, \forall n > n_0(x_j, \varepsilon)$

$\tilde{n}_0 = \max_{1 \leq j \leq N} \{n_0(x_j, \varepsilon)\}$. Тогда $\forall n \geq \tilde{n}_0, \forall y \in A, 0 < f_n(y) - f(y) < \varepsilon$ □

Лемма (Кр-ий Коши) Пусть с-ти функ. f_n на $A \subset \mathbb{R}$. Тогда:

1) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0, \forall x \in A, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

2) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ с-сх расх. на $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall x \in A, \forall n \geq m \geq n_0, |\sum_{k=m}^n f_k(x)| < \varepsilon$.

3) $\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in A} |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n, m \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$

$\Leftrightarrow$ для пункт. $x \in A, f_n(x)$ - фундамент. послед. $\Rightarrow \exists$ предел

$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

$\forall \epsilon > 0, \forall m, n \geq n(\epsilon), |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$; при $m \rightarrow \infty, \forall \epsilon > 0$,

$\forall x \in A, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$. $\triangleright$

Пример:

$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg\left(\frac{x}{n^2}\right)$, функ. $x \in \mathbb{R}$, $\arctg\left(\frac{x}{n^2}\right) \sim \frac{x}{n^2}$, а ряд

$x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сх-ся, $\forall x \in \mathbb{R}$ - мн-во сх-ти ряда.

Покажем, что ряд не сх-ся равн. на $\mathbb{R}$, т.е.

$\exists \epsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists m \geq n \geq n_0, \exists x \in \mathbb{R}: \left| \sum_{k=n}^m \arctg\left(\frac{x}{k^2}\right) \right| \geq \epsilon$.

Пусть $n = m = n_0, x = n_0^2, \left| \sum_{k=n}^m \arctg\left(\frac{x}{k^2}\right) \right| = \arctg\left(\frac{n_0^2}{n^2}\right) = \arctg\left(\frac{n_0^2}{n_0^2}\right) = \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{8} = \epsilon$.

Теорема (Пр-к Вейерштрасса равн. сх-ти функ. ряда).

Пусть $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сх-ся, где $\sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq M_n$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх-ся равн. и абсолютно на A .

$\triangleright$ Надо $\forall \epsilon > 0$, найти $n_0 = n_0(\epsilon): \forall m \geq n \geq n_0, \forall x \in A$,

$\left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| < \epsilon$.

Дано: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon): \forall m \geq n \geq n_0, \sum_{k=n}^m M_k < \epsilon$.

$\left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^m M_k < \epsilon$. $\triangleright$

Пример:

$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg\left(\frac{x}{n^2}\right), E = (a, b); a, b \in \mathbb{R}, \sup_{x \in E} \left| \arctg\left(\frac{x}{n^2}\right) \right| = \max\left\{ \right.$

$\left. \arctg\left(\frac{|a|}{n^2}\right), \arctg\left(\frac{|b|}{n^2}\right) \right\} = M_n \sim \frac{C}{n^2}, \text{ где } C = \max\{|a|, |b|\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Теорема (М-к Абеля и Дирихле разл. ст-ти гл.р.).

Пусть $a_n, b_n: A \rightarrow \mathbb{R}$, таковы, что

(1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\sum_{k=1}^n a_k(x)| < +\infty$ (1) $\sum_{k=1}^n a_k(x)$ сл-ся разл. на A

(2) $b_n(x)$ монот. убав. на A (2) $b_n(x)$ монот. и разл. ст-р. на A , т.е. $\sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n(x)| < +\infty$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сл-ся равномерно на A .

□ УМР-112

03.03.23.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \quad cx-cx \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$E = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (-\varepsilon + \pi k, \varepsilon + \pi k), \quad \varepsilon > 0$$

т.е.м, что для $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ сл-ся равномерно на E , где

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$$

1) $b_n(x) = \frac{1}{n}, \quad a_n = \sin(nx)$

(2) $\sin b_n = \frac{1}{n}$ монотонно и равномерно на $E \rightarrow 0$

$$(1) \sup_{x \in E} \left| \sum_{n=1}^N \sin(nx) \right| \leq \sup_{x \in E} \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} < \infty$$

по т-м Дирхле для сл-ся разл-но на E

сл-ся. (4-56/ответить) разл. ст-ти на $\mathbb{R}$ при

таковы отрывные кр-на Коши.

Ф-ия Кантора

др название: Лестница Кантора, дьявольская лестница.

Напоминание: Мн-во Кантора $\mathcal{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$

$$K_0 = [0, 1] \quad \text{[diagram of interval [0,1]]}$$

$$K_1 = [0, 1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \text{[diagram of interval [0,1] with middle third removed]]}$$

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$$

$$\text{ф-ия Кантора } G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x)$$

св-ва:

$$1) G_n(x) \text{ монот. } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) G_n(x) - \text{непр-ая ф-ия}$$

Теорема (о св-вах ф-ии Кантора).

Ф-ия Кантора $G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$1) \text{ монот.}$$

$$2) \text{ непр.}$$

$$3) \forall x \in \mathcal{K}, G'(x) = 0$$

$$\Delta \quad 1) \text{ Д-м, что } \sup_{x \in [0, 1]} G_n(x) - G(x) \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ - метр.}$$

$$2), 3) \text{ очевидно}$$

Множ. св-ва ф-ии Кантора:

$$1) \forall x \in [0, 1], x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{3^n}, a_n(x) \in \{0, 1, 2\}$$

$N(x)$ - наиб. n : $a_n(x) = f$

$$G(x) = \frac{1}{2^{n(x)}} + \sum_{n=1}^{n(x)-1} \frac{a_n(x)}{2^n}, \quad \forall x \in [0, 1], x \in H.$$

$$a_n(x) \neq 1, \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow N(x) = \infty, \quad G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{2^n};$$

2) Теорема Нейнера (о точн. преед. qo -ин Кантора).

Пусть $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ неуб. qo -ин. угодн-ая ур-ям:

$$1) F(1-x) = 1 - F(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$2) F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2}$$

то F - qo -ин Кантора.

$$3) \sup_{x \in [0, 1]} |G(x) - G(y)| = G(\delta), \quad \forall \delta \in [0, 1]$$

$$4) G - \text{Гёмгерова функция, т.е. } \forall x \in [0, 1], |G(x) - G(y)| \leq |x - y|^s, \quad s = \frac{\log 2}{\log 3}, \left(\frac{1}{2}\right)^s \leq G\left(\frac{1}{3}\right) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^s$$

Прим-ие ниже не годн-ое qo -ин.

$$1) qo$$
-ин Вейерштраса $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta \cos(\alpha^n \pi x),$

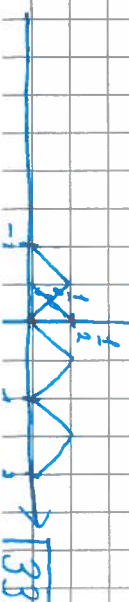
$$0 < \delta < 1, \quad \alpha - \text{какое-то.}$$

2) qo -ин Таксаги-Вангер Вайерена

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \frac{1}{2^k} \varphi_0(2^k x), \quad \text{где } \varphi_0(x) =$$

$$= |x - \mathbb{Z}| \quad \leftarrow \text{расстояние до } \mathbb{Z}.$$

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(x+1)$$



Д-м, что ряд с-х-я равномерно:

$$|\varphi_0(x)| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |\varphi_k(x)| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \text{ с-х-я}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \text{ — с-х-я равн. по } \varphi_1(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(2x)$$

пр-ку Вейерштрасса.

скажем по x и по y с $2^k p$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists k_n \in \mathbb{N}: \frac{k_n}{2^n} \rightarrow x \text{ . (учет } \frac{km}{2^n})$$

$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}$ — покажем, что не сущ. конечного предела

$$\lim_{y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow 0} \frac{\varphi(y_1) - \varphi(y_2)}{y_1 - y_2}, \quad y_1 = \frac{k_n}{2^n}, y_2 = \frac{k_n + 1}{2^n}; \quad y_2 - y_1 = \frac{1}{2^n}.$$

$$y_1 \rightarrow x$$

$$\varphi\left(\frac{u}{2^n}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j\left(\frac{u}{2^n}\right) = \left\langle \varphi_j\left(\frac{u}{2^n}\right) = \frac{1}{2^j} \varphi\left(\frac{u}{2^{n-j}}\right) = 0 \right\rangle_{\substack{j \leq n \\ 2^j \nmid u}} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j}.$$

$$u \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$$

$$\cdot \varphi\left(\frac{u}{2^n}\right).$$

$$\frac{\varphi(u_2) - \varphi(u_1)}{u_2 - u_1} = \frac{2^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} \left(\varphi\left(\frac{u_2}{2^{n-j}}\right) - \varphi\left(\frac{u_1}{2^{n-j}}\right) \right)}{u_2 - u_1} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{u_j}{2^{n-j}}\right)}{u_2 - u_1}.$$

$$-\varphi\left(\frac{u_1}{2^{n-j}}\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{m_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{ ряд расх-ся. } \frac{u_2 - u_1}{2^{n-j}} = \frac{1}{2^{n-j}}$$

Степенные ряды.

Опр Вещественный (комплексный) степенным рядом

наз-я функц. ряд б-да:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_n, x_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, c_n, z_0 \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}\right).$$

Теорема (О мн-ве сх-тх ст. рядов).

Пусть задан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ и $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R}$

$\sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда ряд сх-ся при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, расх.

при $|x_0 - x| > R$; $x = x_0 \pm R$ может сх-ся и расх-ся.

Опр. R -радиус сх-ты, $0 \leq R \leq \infty$

$(x_0 - R, x_0 + R)$ - внутренняя сх-та

(x) - фр-ла Коши-Адамар

Исследовать $|x_0 - x| < R$ по м-ту Коши и м-ту:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0| \cdot \frac{1}{R}$$

< 1 , т.е. расх-ся.

$$2) |x_0 - x| > R, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}, n \rightarrow \infty \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} (x-x_0)^n =$$

$$= |x-x_0| \sqrt[n]{|a_n|} > (x-x_0) \left(\frac{1}{R} - \delta\right) > 1 - \delta R > 1; \quad \triangleright$$

Теорема (Вейбшта-Принсейна).

Пусть задан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$:

1) $\infty > R > 0$ 2) $a_n \geq 0$

Тогда с т. $x = x_0 + R$ ряд расх-ся $(x_0 + R - \text{очевидно т. ряда})$

Пример:

$$1) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow R = \infty$$

$\Rightarrow$ сх-ся.

$$2) a_n(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(-1)^{n+1}}}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1, \quad R = \frac{1}{1} = 1$$

$$x = -1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot (-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad - \text{расх-ся}$$

$x = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сх-ся по пр-ку Лейбница.

Теорема (критерия для степен. рядов).

Пусть задан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, к-ый сх-ся в

т. $z = \zeta$; Тогда на отрезке $[z_0, \zeta] := \{z_0 + (\zeta - z_0) \cdot t, \quad$

$t \in [0, 1]\}$ ряд сх-ся равномерно.

Пусть $z = z_0 + (\zeta - z_0) \cdot t$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n ((\zeta - z_0) \cdot t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n (\zeta - z_0)^n}_{a_n(t)} \cdot \underbrace{t^n}_{b_n(t)}$$

A1) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\zeta - z_0)^n$ сх-ся (расч. на t)

A2) $b_n(t) = t^n$ — монотон. и расч. отг. ≤ 1 D

Следствие (из Т. Абеля для степен. рядов)

Пусть R — радиус сх-ти ст. ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ и ряд

сх-ся в некоторой т. $x_0 + R$ (или $x_0 - R$). Тогда сумма

ряда $S(x)$ определена в т. $x_0 + R$ (или $x_0 - R$). и $\lim_{x \rightarrow x_0 + R-0} S(x) =$

$$= S(x_0 + R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + R-0} S(x) = S(x_0 + R) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

36 Пусть $\zeta = a_0 + R$, тогда по Т. Абеля на отрезке $[x_0, \zeta]$

ряд с-сх равномерно. Тогда сумма ряда $S(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ - непрерывна на $[x_0, x_0+R]$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0+R-0} S(x) = S(x_0+R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

▷

Пример:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad |x| < 1, R=1, (-1, 1] \Rightarrow \delta x = 1,$$

$$A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Теорема (о разб. с-сх степен. ряда).

Пусть R -радиус с-сх ст. ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, тогда

в отрезке $[a, b] \subset (x_0-R, x_0+R)$ ряд с-сх сход.

на $[a, b]$. Поэтому сумма ряда $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ -

- непрерывна на интервале (крыл) с-сх.

$$\Delta r = \max\{|x_0-\delta|, |x_0-\alpha|\}$$

$$|x_0-R, x_0+R| \supset [x_0-\eta, x_0+\eta] \supset [a, b]$$

$$\sup_{x \in [x_0-\eta, x_0+\eta]} |a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n| r^n, \text{ ряд } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ с-сх,}$$

т.к. по гр-ку Коши $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = r < 1 \Rightarrow \text{по Т.}$

Вейерштрасса ряд с-сх сход. на $[a, b] \Rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

$(x-x_0)^n$ - непрерывна на $[a, b]$.

$$\frac{f}{x_0-R} \text{ --- } \frac{f}{x_0+R}$$

т.к. $[a, b] \subset (x_0-R, x_0+R) \Rightarrow S \in C(x_0-R, x_0+R)$ ▷

т. (а) - убо-уи поуха. рхгод).

Пусть задан функц. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$:

1) $f_n \in C[a, b]$, $f_n \in D(a, b)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ с-ся $\forall x \in (a, b)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ с-ся равномерно на любом интервале $(a, b) \subset (a, b)$.

Тогда сумма ряда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in D(a, b)$

и $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ (имеет место почленное диф.)

Опр. степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ наз-я рядом Тейлора (рядом Маклорена) функц f , если $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ($x_0=0$)

Теорема (о диф-ти степ. рядов)

Пусть $\rho < R$ - радиус с-ти ст. ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Тогда его сумма $S(x) \in C^{\infty}(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ и $S^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k!$ т.е. степ. ряд явл. рядом Тейлора функц $S(x)$

$C(a, b) \supset D(a, b) \supset C^1(a, b) \supset C^2(a, b) \supset \dots \supset C^{\infty}(a, b) = D^{\infty}(a, b)$.

Замеч. $k \in \mathbb{N}$, т.к. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)^{(k)}$ явл. степ. рядом, который явл. с-ся б-м

$(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, то по Т. (о диф-ти функц. ряда)

$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x - x_0)^{n-k}}{\sqrt[n]{|a_n| (n-k)!}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} =$$

$$\alpha^{(k)}(x_0) = \alpha_{\star} \cdot k(k-1) \cdot \dots \cdot 1 = \alpha_{\star} \cdot k!, \alpha_{\star} = \alpha^{(1)}(x_0)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Пример 1:

$$1) \arctan(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad R=1, (-1, 1)$$

$$\text{Taylor series} \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1$$

Тожд. при одинаковых степенях.

Crn h-1-He401, to $a_n=0$, T.C. $a_x=0$

$$E_{(n-1)\text{-term}}, \text{ to } n-1=2k, \text{ to } 2k \text{ } a_{2k+1}^{(2k+1)} = (-1)^k$$

$$\Rightarrow a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \Rightarrow a_{15} + q \cdot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{n+1}} \quad |x| < 1$$

$$x = 1 \quad \frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$2) f(x) = \arcsin x, |x| < 1$$

$$f(x) = \frac{f}{\sqrt{1-x^2}}; (1+y)^x = 1 + xy + \frac{d(1-y)}{2!}y^2 + \dots + \frac{d(1-y)^{(n-1)}}{(n-1)!}y^{n-1} + \dots$$

$$y + \dots, |y| < 1$$

$$\langle \alpha = -\frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} + \frac{3}{4\pi^2} + \frac{\gamma^2}{2} + \dots$$

$$= 87.$$

$$= \langle 2^n n! = (2n)! \rangle = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} y^n (*)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \langle y = -x^2 \rangle = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} (x^2)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

Если $n-1=2k$, то $a_n > 0$, т.о. $a_{2k+1} = 0$

$$\text{Если } n-1=2k, \text{ то } (2k+1) a_{2k+1} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

$$a_{2k+1} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{1}{2k+1}$$

$$a_k \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1, \quad (-1)!! = 1, \quad 0!! = 1$$

$$2) f(x) = \pm g(x), \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{привед. разоб.} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ где } c_n =$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Проверим, что $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

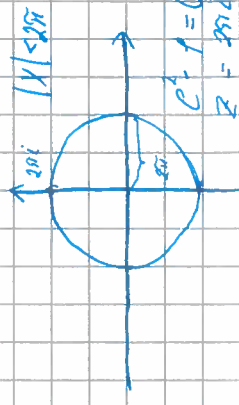
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$

Разрешим $\frac{x}{e^{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!}$, b_n — числа Бернулли

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{e^{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!}$$

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!} \right) =$$



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad C_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{B_{n-k}}{(n-k)!}$$

$$C_0 = 1 = B_0$$

$$C_n = 0, \quad \sum_{k=1}^n \frac{B_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} = 0$$

$$n=1, \quad 0 = B_1 + \frac{B_0}{2}, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_n \in \mathbb{Q}, \quad x = 1 - \frac{1}{2}x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!}$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1+x}{2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!}$$

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} - 1 = \frac{2x + x \cdot e^x - x - 2e^x + 2}{2(e^x - 1)} = \frac{x + 2 + e^x(x-2)}{2(e^x - 1)}$$

$$\left(\frac{x}{e^x - 1} = f(x) \right) \cdot \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} - 1 = \frac{2x + x \cdot e^x - x - 2e^x + 2}{2(e^x - 1)} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^{x+1}}{e^x - 1} = g(x)$$

$$g(x) = g(-x) = -\text{gerade Funktion}$$

$$\frac{x \cdot e^{x+1}}{2(e^x - 1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad |x| < 2\pi$$

$$x = i \cdot z, \quad (i^{2n} \cdot (-1)^n)$$

$$\frac{i^2}{2} = \frac{e^{i^2+1}}{e^{i^2-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} (i^2)^{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < 2\pi$$

$$\frac{e^{i^2+1}}{e^{i^2-1}} = -\cot\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\left(\frac{x}{2} \cdot \cot\left(\frac{z}{2}\right) \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < 2\pi$$

$$2 \cot \frac{z}{2} - \cot \frac{z}{2} = \frac{2 \cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} - \frac{\cos(\frac{z}{2})}{\sin(\frac{z}{2})} = \frac{\cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} = \frac{\cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2} \cdot \cos \frac{z}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{z}{2}} = -\cot\left(\frac{z}{4}\right)$$

$$= -\cot\left(\frac{z}{4}\right) = \frac{\cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{z}{2}} = -\cot\left(\frac{z}{4}\right)$$

$$z \rightarrow 2x, \quad \cot(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < 4\pi$$

при $|z| < 1$: $2 \operatorname{ctg} z - \frac{2}{z} \operatorname{ctg} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} B_{2n} (2^{2n} - 1)$
 $\frac{2}{z} = -\frac{2}{z} \operatorname{ctg} z, \Rightarrow \frac{2}{z} = x, |x| < 1$

$$\operatorname{ctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2 B_{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} x^{2n-1}$$

10.03.23

Интегрирование

1) Первообразная (неопр. интеграл, примитив, до-и-я)

Опр. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$ - открытое мн-во. F -ия

$F: E \rightarrow \mathbb{R}$ наз-я первообразной для f на E , если $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in E$.

Обозн: $F(x) = \int f(x) dx$

Замечание: Если F -первообразная для f на E , то $\forall C \in \mathbb{R}$, $F+C$ - тоже первообразная для f .

2) Если $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и F, G - первообразные для f на (a, b) . Тогда $\exists C \in \mathbb{R}: G = F + C$.

$\Delta G'(x) = f(x), F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$

$(G-F)'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ из след-их г. Лагранжа
 $\Rightarrow F - G = C = \text{const}, \forall x \in (a, b)$.

Т.О. общий вид первообразной на интервале

ссть $G(x) = \int f(x) dx + C$

3) $E = (-1, 1) \setminus \{0\}, f(x) = 0, F(x) = 1, G(x) =$

$= \operatorname{sgn} x. \quad F' = 0$
 $\varphi' \neq 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow \varphi - F = \operatorname{const}, \quad \forall x \in E.$

Сб-баз неопр. интеграла.

1) Таблица

f	$\int f dx$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x , x \neq 0$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x, -\operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcsin} x$ $-\operatorname{arcsin} x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

2) Лин. неопр. интеграл

Теорема (Лин. неопр. интеграла).

Пусть $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет первообразную F
 и G соответственно $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ имеет первообразную $\alpha F + \beta G$, т.е.

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

$$\Delta (\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g, \quad \forall x \in (a, b)$$

3) Интегрирование по частям

Теорема (инт. по частям).

Пусть $f, g \in D(a, b)$: f, g имеет первообразную.

Тогда $f \cdot g'$ имеет первообразную и она совпадает

со-ой:

$$\int f'g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$

$$\Delta (fg)' = f'g + fg' \Rightarrow fg = (fg)' - f'g \Rightarrow (fg)' = (fg)' + f'g$$

$$\int f'g \, dx = \int (fg)' \, dx - \int f'g \, dx$$

▷

Примеры: 1) $\int (x+2023)^2 \, dx = \int x^2 + 2 \cdot 2023x + 2023^2 \, dx =$

$$\int x^2 \, dx + 4046 \int x \, dx + 2023^2 \int 1 \, dx = \frac{x^3}{3} + 2023x^2 + 2023^2x + C.$$

2) $\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

$$\int \ln x \, dx = \left\langle x = v; u' = \frac{1}{x} \right\rangle = uv - \int u \, dv = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C.$$

4) Теорема (замена переменной).

Пусть $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет первообразную $F(x)$. Пусть

$\varphi: (c, d) \rightarrow (a, b)$ — биекция со-из. Тогда $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ имеет первообразную $F(\varphi(x))$.

Δ $\forall x \in (c, d), (F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \left\langle y = \varphi(x) \right\rangle \int f(y) \, dy = F(y) + C = F(\varphi(x)) + C$$

44

5) Теорема (0 может & неопр. интеграл).

Если $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi: (a, b) \rightarrow (a, b)$ - строго-нм, строго

монотон. ф-ция: $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ имеет первообразную

в $B(x)$. Тогда $F(x)$ имеет первообразную $G(\varphi^{-1}(x))$.

$$\nabla (G(\varphi^{-1}(x))) = G'(\varphi^{-1}(x)) (\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x))$$

$$\cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$$

▷

Примеры:

$$1) \int \sqrt{2x+1} dx = \left\langle \begin{matrix} y=2x+1 \\ dy=2dx \\ dy=y^{\frac{1}{2}} \end{matrix} \right\rangle \int \sqrt{y} \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int y^{\frac{1}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + C.$$

$$2) \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \int -\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\ln |\cos x| + C$$

Интерпретация первообразных ф-ций.

Опр. Первообразная $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ наз-ся разл. ф-цией

(график-первообразной), если P_n, Q_m - нм-нм или нм-нм.

Разл. ф-ция $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ наз-ся графической ф-цией, если $\deg P_n(x) < \deg Q_m(x)$.

Разл. ф-ция $R(x)$ наз-ся простым графиком, если

$$\deg P_n, R(x) = \frac{C}{(x-a)^n}; \text{ или } \deg R_n, R(x) = \frac{C}{(x-a)^n} \text{ или } R(x) =$$

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)^n}, P_n = p^2 - q^2 < 0.$$

45

Таблица (0) много интегральных

Всякая простая дробь имеет непр. интеграл на своей области определ. Вспомогат. и/з сл. 90-мч.

$$\int \frac{c}{x-a} dx = \left(\frac{x-a}{x-a} \right) = c \int \frac{dx}{x-a} = c \ln|x-a| + const.$$

$$\int \frac{c}{(x-a)^n} dx = \frac{c}{(x-a)^{n-1}} + const = \frac{c}{(x-a)^{n-1}} + const$$

$$2) m=1 \int \frac{dx}{x^2 + p^2} = \int \frac{1}{x^2 + p^2} dx = \frac{1}{p} \int \frac{1}{(\frac{x}{p})^2 + 1} \cdot \frac{1}{p} dx = \frac{1}{p} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{p} \arctan \frac{x}{p} + const.$$

$$= \frac{1}{p} \arctan \frac{x}{p} + const = \frac{1}{p} \arctan \frac{x}{p} + const$$

$$I = \int \frac{x^2 + p^2}{x^2 + p^2} dx = \int 1 dx = x + const$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + p^2)}{x^2 + p^2} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + p^2| + const = \frac{1}{2} \ln|x^2 + p^2| + const$$

$$+ px + q + const.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + p^2} = \frac{1}{p} \arctan \frac{x}{p} + const$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + p^2} = \frac{1}{p} \arctan \frac{x}{p} + const$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2 + p^2| + const$$

$$J_m = \frac{1}{i} \int \frac{dz}{(1+z)^m}$$

$$L_m = \int \frac{dz}{(1+z)^m}, \quad m \geq 1, \quad L_1 = \operatorname{arctg} z$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{(1+z)^m}, & dz &= d\zeta \\ u' &= \frac{-m \zeta}{(1+\zeta)^{m+1}}, & d\zeta &= \zeta \end{aligned} \right\} = \frac{\zeta}{(1+\zeta)^m} = \int \left(\frac{\zeta}{(1+\zeta)^{m+1}} \right) d\zeta$$

$$= 2m \int \frac{\zeta^{m+1-1}}{(1+\zeta)^{m+1}} d\zeta + \frac{\zeta}{(1+\zeta)^m} = \frac{\zeta}{(1+\zeta)^m} + 2m \int \frac{\zeta^m}{(1+\zeta)^{m+1}}$$

$$= \int \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^{m+1}}.$$

$$2m L_{m+1} = \frac{\zeta}{(1+\zeta)^m} + (2m-1) L_m.$$

$$\int L_{m+1} = \frac{1}{2m} \cdot \frac{\zeta}{(1+\zeta)^m} + \left(1 - \frac{1}{2m}\right) L_m$$

$$L_1 = \operatorname{arctg} z$$

▷

Теорема (о неопр. интегр. год. раз. го-ий).

Всякая раз. го-ия имеет неопр. интеграл на своей области опре-ия, представляющий н/з эл. го-ий.

Алгоритм:

$$\underline{1. \text{ШАГ:}} \quad R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{если нет в дробном числителе}$$

целую часть

2. ШАГ: разложить дробь

$$\frac{R(x)}{q(x)} = \frac{R_1(x)}{(x-a)^m} + \dots + \frac{R_n(x)}{(x-a)^{m_n}}$$

47

$$+ \frac{E}{(1-E)^2} d/E.$$

$$4E = A(1+E)(1-E)^3 + B(1-E)^3 + C(1+E)^2(1-E)^2 + D(1+E)^3(1-E).$$

$$-E) + E(1+E)^2.$$

$$E=1: 4=4E \Rightarrow E=1; E: -A+C=0 \Rightarrow A=C$$

$$E=-1: -4=8B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}; E^2: 0=A+B+C+D+E \text{ гравитация}$$

2. Истечение газа из сопла

$$\int x^n (a+bx^m)^p dx, \quad n, m, p \in \mathbb{Q}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$1) p \in \mathbb{Z}, \quad x = \text{НОК}(\text{знаменатель}, \text{знаменатель})$$

$$n = \frac{n_1}{n_2}, \quad m = \frac{m_1}{m_2}, \quad x = \text{НОК}(n_2, m_2), \quad x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$n = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} \right)^{1/2} (a + b \sqrt{x})^{1/2} dx = \int x^{1/4} (a + b \sqrt{x})^{1/2} dx$$

$$\text{гравитация } E = \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$2) \frac{n+1}{m} \in \mathbb{Z}, \quad \text{Пытаемся } y = a + bx^m,$$

$$x^m = \frac{y-a}{b}, \quad x = \left(\frac{y-a}{b} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad dx = \frac{1}{m} \left(\frac{y-a}{b} \right)^{\frac{1}{m}-1} \frac{1}{b} dy$$

$$\int x^n (a+bx^m)^p dx = \int \left(\frac{y-a}{b} \right)^{\frac{n}{m}} y^p \frac{1}{mb} \left(\frac{y-a}{b} \right)^{\frac{1}{m}-1} dy =$$

$$= \frac{1}{mb} \int \left(\frac{y-a}{b} \right)^{\frac{n+1}{m}-1} y^p dy = \frac{1}{mb} \int \left(\frac{y-a}{b} \right)^{\frac{n+1}{m}-1} \left(\frac{y-a}{b} \right)^{\frac{p}{m}} dy$$

$$= \int R(y, \sqrt[m]{y-a}) dy, \quad E = a + bx^m.$$

$$3) \frac{n+1}{m} + p \in \mathbb{Z}; \quad w = x^m, \quad x = w^{\frac{1}{m}}, \quad dx = \frac{1}{m} w^{\frac{1}{m}-1} dw$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2} d\omega d\omega_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2} d\omega = \frac{1}{2}$$

Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции):
Функция дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует единственное число A , такое, что:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

В этом случае $A = f'(x_0)$.

- 1) $r \in \mathbb{Z}$ и замена $t = x$, $x = \text{НОК}(\text{знамен. знам.})$
- 2) $\frac{m+1}{m} \in \mathbb{Z}$ и замена $t = a + b x^{\frac{m}{m+1}}$, где a - знаменател, b
- 3) $\frac{m+1}{m} + r \in \mathbb{Z}$ и замена $t = a x^{\frac{m}{m+1}} + b$, где $a = \text{зн. р.}$

3) Интегр квадратичных иррациональностей
 $\int \frac{R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})}{dx}$, где $R(x, y)$ — рац. ф-ция от
 2-х переменных, и мн-н ax^2+bx+c не имеет
 вещ. корней.

Подстановка Давира: 1) $\alpha > 0 \quad \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \pm \sqrt{\alpha} \cdot x$

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \pm^2 \pm 2\sqrt{\alpha} x \pm = \pm^2 \pm C.$$

$$x = \frac{t^2 - c}{c \pm 2\sqrt{a}t}, \quad dx = r(t)dt, \quad r = \text{parab. } 9a - 18a$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int \underbrace{R\left(\frac{t^2 - c}{c \pm 2\sqrt{a}t}, \frac{t^2 - c}{c \pm 2\sqrt{a}t}\right)}_{\text{parab. } 9a - 18a} dt$$

$$2) c > 0, \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x \pm \sqrt{c}$$

$$u_X + u = X t^{-1} + t^2 v, \quad X = -\frac{t}{a-t^2} \sqrt{c}, \quad aX = R(t) \frac{dt}{dt}$$

$$3) \sqrt{aX^2 + bX + c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1) \sqrt{a \frac{x-x_2}{x-x_1}}, \quad t = \sqrt{a \frac{x-x_2}{x-x_1}}$$

4) Интегрирование тригонометрических функций

$\int R(\cos x, \sin x) dx$, где $R(x, y)$ — произвольная д-ух переменных.

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad X = 2 \arctan t, \quad dx = 2 \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) 2 \frac{dt}{1+t^2}$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \left(t = \tan \frac{x}{2}, \quad dx = 2 \frac{dt}{1+t^2} \right) = \int \frac{2 \frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^3 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3 (1-t^2)^2} dt$$

$$= \frac{dt}{t^3}$$

$$\frac{dt}{t^3} = \frac{dx}{\sin^3 x}, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dt}{t^3} = \int \frac{1+t^2}{t^2} dt = \int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{t} + \ln |t| + C$$

$$= -\frac{1}{t} + \ln |t| + C = -\frac{1}{\tan \frac{x}{2}} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

Интеграл Римана

Опр. Пусть f — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда разность

$$\mathcal{D}(X) = \{x_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

отрезка $[a, b]$, где $n \in \mathbb{N}$.

Параметром разбиения $\mathcal{D}$ наз-я число $\tau(\mathcal{D}) = \max_{0 \leq k \leq n-1}$

$$|x_{k+1} - x_k|.$$

Разбиением $(\mathcal{D}, \xi)$ с выделенными точками $\xi = (\xi_1, \xi_2,$

$\dots, \xi_{n-1})$ наз-я разбиение $\mathcal{D}$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i \in$

$\in \{0, \dots, n-1\}$.

Опр. Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Число I наз-я интегралом

Римана ф-ции f на $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

для любого разбиения $(\mathcal{D}, \xi)$ с выделенными точками

$$\text{если } \tau(\mathcal{D}) < \delta \Rightarrow \left| I - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \right| < \varepsilon$$

Сумма $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$ наз-я интегральной суммой Римана.

$$\text{Обозн: } I = \int_a^b f(x) dx = (R) \int_a^b f(x) dx.$$

Мн-во $\mathcal{R}$ -ий интегрируемых по Риману на $[a, b]$ — $\mathcal{R}([a, b])$.

Замечание: Встр. предел:

$$I = \lim_{\tau(\mathcal{D}) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Пример: $\int_a^b 1 dx = b - a$, т.е. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall (\mathcal{D}, \xi) \in \mathcal{R}([a, b])$

$$L(f) < \delta \Rightarrow |x_n - \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{1}_{\text{с.о.}} (f(x_k) \Delta x_k)| = 0 < \epsilon.$$

Лемма Дарбу.

Опр. Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mathcal{D}$ -разделение отрезка $[a, b]$ верхней суммой Дарбу наз-я

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \right) \cdot \Delta x_k.$$

Минимум ^{с.о.} предель суммой Дарбу наз-я

$$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \right) \cdot \Delta x_k$$

Опр. Пусть заданы два разделения $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ отрезка $[a, b]$. Разделение $\mathcal{D}_2$ наз-я уменьшением разд. $\mathcal{D}_1$, если $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$. Одн.: $\mathcal{D}_1 < \mathcal{D}_2$

Предложение 10 с.с.-ах сумм Дарбу.

$$1/ \text{Если } \mathcal{D}_1 < \mathcal{D}_2 \Rightarrow s(f, \mathcal{D}_1) \geq S(f, \mathcal{D}_2)$$

$$S(f, \mathcal{D}_2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \right) \cdot \Delta x_k$$

$$\geq \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Теорема (Несох. пр-к инт. по Риману)

17.03.2023

Пусть $f \in R([a, b])$, тогда f -огр.

Δ Пусть f -неогр., например, неогр. сверху т.е.

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = +\infty.$$

$\forall \text{ разд. } \mathcal{D} \subset \tau(\mathcal{D}) < \delta, \exists \text{ интервал } [x_j, x_{j+1}] : \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)$

$$= +\infty$$

$$a = x_0 \quad \left| \quad x_j \quad \left| \quad x_{j+1} \quad \right| \quad x_n \right.$$

выберу $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, $f(\xi_j) > N / N - \text{заранее задано}$

имеем $\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k}_{\text{каждое число}} + \underbrace{f(\xi_n) \Delta x_n}_{\text{ком. число}} - \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_a \leq \varepsilon$

— противоречие

Предложение (о св-вах сум Дарбу).

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — огр. ф-ция. Тогда:

1) $S(f, P_1) \leq S(f, P_2)$ при $P_1 \leq P_2$

$S(f, P_1) \geq S(f, P_2)$ при $P_1 \leq P_2$

2) $S(f, P) = \inf_{P \leq P_1} S(f, P_1) = \sup_{P \leq P_2} S(f, P_2) = \sup_{P \leq P} S(f, P) = \sup_{P \leq P} S(f, P) = \sup_{P \leq P} S(f, P)$

1) Пусть $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$P_2 = \{a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b\}$

т.к. $P_1 \leq P_2$, то $\forall [x_j, x_{j+1}] \in P_1, \exists y_{k(j)} \in [x_j, x_{j+1}]$, $y_{k(j)} \in P_2$

$\in [x_j, x_{j+1}]$, $\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \leq \inf_{x \in [y_i, y_{i+1}]} f(x) \Rightarrow \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \leq \inf_{x \in [y_i, y_{i+1}]} f(x)$

$\dots + \Delta p_{k(j)} \leq \sum_{i=1}^m \inf_{x \in [y_i, y_{i+1}]} f(x) \Delta y_i$

2) $S(f, P) = \sup_{P \leq P_1} S(f, P_1) = \sup_{P \leq P_2} S(f, P_2) = \sup_{P \leq P} S(f, P) = \sup_{P \leq P} S(f, P)$

$f(x) \Delta x_k = S(f, P)$

$\forall \varepsilon > 0$. Надо: $\forall \varepsilon > 0, \exists P: \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k > S(f, P) - \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]: f(\xi_k) > \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) - \frac{\varepsilon}{b-a}$

Тогда $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k > \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \Delta x_k - \varepsilon$

$S(f, P) - \varepsilon$

снр. $\sup_{\mathcal{D}} S(f, \mathcal{D}) = I^*$ - миним. интервал $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}$

$\inf_{\mathcal{D}} \rho(f, \mathcal{D}) = I^*$ - верхний интервал $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}$

Следствие: Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - о.п. г.н. Тогда

А разделение $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$.

$$S(f, \varepsilon) \leq S(f, \mathcal{D}_1) \leq I^* \leq I^* \leq \rho(f, \mathcal{D}_2) \leq \rho(f, \varepsilon), \varepsilon = \frac{1}{n} \alpha < \delta$$

$\alpha < \delta$

Δ Расщепление разделение $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, где, что $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$;

$$\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2.$$

$$S(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \leq \rho(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \leq \rho(f, \mathcal{D}_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(f, \mathcal{D}) \leq \rho(f, \mathcal{D}_2) \Rightarrow \sup_{\mathcal{D}} S(f, \mathcal{D}) \leq \rho(f, \mathcal{D}_2) \Rightarrow I^* \leq I^*$$

$$\text{где } I^* \leq S(f, \mathcal{D}_2); I^* \leq \inf_{\mathcal{D}} \rho(f, \mathcal{D}_2).$$

$\triangleright$

Теорема (Кр-м Дарбу ит-тн на Рухан).

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - о.п. г.н.

$$f \in R([a, b]) \Leftrightarrow I^* = I^*. \text{ В этом случае } \int_a^b f(x)$$

$$dX = I^* = I^*. \text{ При этом } I^* = I^* \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0. \forall$$

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(\delta) < \delta \Rightarrow \rho(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}) < \varepsilon.$$

$$\Delta \inf_{\mathcal{D}} \rho(f, \mathcal{D}) = I^*, \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{D}_1: \rho(f, \mathcal{D}_1) < I^* + \varepsilon/2$$

$$\exists \mathcal{D}_2: \rho(f, \mathcal{D}_2) > I^* - \varepsilon/2.$$

$$\forall \mathcal{D} \geq \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, S(f, \mathcal{D}) - I^* < \varepsilon/2$$

$$- \rho(f, \mathcal{D}) + I^* \leq \varepsilon/2 \Rightarrow S(f, \mathcal{D}) -$$

$$- S(f, \mathcal{D}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

двигательного, условие $J(f, \xi) - J(f, \eta) < \epsilon$ при $\sigma(\eta) < \delta$.

$$2) C([a, b]) \subset R([a, b])$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) - \inf_{y \in [x_k, x_{k+1}]} f(y) \right) \Delta x_k$$

Δ по Т. Кантора любая неп. го-из разд. непрерывна

т.е. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/b - a$.

δ терм. разд. σ : $\forall \eta \subset \sigma(\eta) < \delta \Rightarrow \omega_\eta([x_k, x_{k+1}]) < \epsilon/b - a$. Тогда $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_\eta([x_k, x_{k+1}]) \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon/b - a \cdot \Delta x_k =$

$$= \epsilon.$$

Δ

3) Если f - ор. и монотон, то $f \in R([a, b])$

Δ 1) $f = \text{const}$, то $\int_a^b f dx = \epsilon(b - a)$

2) $f \neq \text{const}$, $\forall \epsilon > 0$ возьмем $\delta = \epsilon/(f(b) - f(a))$ ($f \nearrow$)

$\forall \eta$ с параметром $\sigma(\eta) < \delta$ найдем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_\eta([x_k, x_{k+1}]) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{f(b) - f(a)} \cdot \epsilon = \epsilon$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{f(b) - f(a)} \cdot \epsilon = \epsilon$$

Δ

Сб-ба интегрируемая Римана.

Теорема (О нек. инт. Римана)

Пусть $f, g \in R([a, b])$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g \in R([a, b])$ и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Δ Пусть $\alpha, \beta \neq 0$. Тогда $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0 : \forall \eta \in \sigma_1, \sigma_2$

с параметрами $\tau(P) < \delta_1$ и $\tau(P_2) < \delta_2$.

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \Delta g_k - \int_a^b g(x) dx \right| < \varepsilon / 2|\beta|$$

$$\forall P \subset \tau(P) < \min(\delta_1, \delta_2)$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k - (\alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx) \right| \leq |\alpha| \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k - \int_a^b f(x) dx \right| + |\beta| \left| \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \Delta g_k - \int_a^b g(x) dx \right|$$

$$\Delta x_k - \int_a^b g dx < |\alpha| \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon$$

▷

Теорема (о монотон. инт. Римана)

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — кнл. на Римане.

$$\text{Если } f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\text{Если } f > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$$

$$\Delta \quad 1) \int_a^b f(x) dx = \inf_P \int_a^b f(x) dx = \sup_P \sum_{k=1}^{n-1} \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \Delta x_k \geq 0$$

$$2) \text{ Пусть } f > 0, \text{ но } \int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow \forall [a, p] \subset [a, b], \int_a^p f(x) dx = 0$$

$$\text{Пусть } f > 0 \text{ (н-не из сб-ва афф-ти)} \text{ т.е. } \int_a^b f(x) dx > 0$$

Следует док-но противн.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall P \subset \tau(P) < \delta$$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \right| < \varepsilon / 2$$

$$\Rightarrow f(x_k, x_{k+1}) : |f(x_k) - f(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{т.н.} \quad \text{иначе вл. } \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k \geq \varepsilon$$

$$\text{т.н. } \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = 0 \Rightarrow \exists \text{ непрерывная } [x_k, x_{k+1}] \subset [x_k, x_{k+1}]$$

$$\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) < \frac{\varepsilon}{x_{k+1} - x_k} \quad \text{т.о. получим чет. бесконечное}$$

$$[x_k, x_{k+1}] \supset [\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}] \supset \dots$$

$$\exists \varepsilon\text{-образная гус. без аттракторов: } 0 < f(c) < \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, 0 < f(c) < \varepsilon\text{-противоположные}$$

Следствие:

$$1) \text{ Если } f, g \in R([a, b]) \text{ и } f \stackrel{(>)}{=} g, \text{ то } \int_a^b f(x) dx \stackrel{(>)}{=} \int_a^b g(x) dx$$

$$\nabla \varphi = f - g \in R([a, b]) \text{ и } \varphi \geq 0 (\varphi > 0) \Rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx \geq (>) 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0.$$

$$2) \text{ Если } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } f \in R([a, b]), \text{ тогда } |f| \in R([a, b])$$

$$\text{и } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\nabla \text{ т.н. } f \in R([a, b]), \text{ то по определению } \delta \text{ терм. коэф. } \forall \varepsilon > 0,$$

$$\exists \delta > 0: \forall \eta \text{ при } \eta(\eta) < \delta, \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k([x_k, x_{k+1}]) \Delta x_k < \varepsilon.$$

$$\text{т.н. } \|f(x) - f(y)\| \leq |f(x) - f(y)| \Rightarrow \omega_1([x_k, x_{k+1}]) \leq$$

$$\leq \omega_k([x_k, x_{k+1}]).$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k([x_k, x_{k+1}]) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k([x_k, x_{k+1}]) \Delta x_k < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f| \in R([a, b]). - |f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \stackrel{1)}{\Rightarrow} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Leftrightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Пример неинтегр. по Риману ф-ции.

1) $f_D(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - ф-ция Дирхле.

Пусть P - произвол. разбиение $[0,1]$

$$S(f_D, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f_D(x)}_{=0} \cdot \Delta x_k = 0 \Rightarrow I_* = 0$$

$$S(f_D, P) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f_D(x)}_{=1} \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_k = 1 \Rightarrow I^* = 1$$

т.к. есть
разл. точки

т.к. $I_* \neq I^*$, то $f_D \notin R([0,1])$

2) $f(x) = 2f_D(x) - 1 = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$|f(x)| = 1 \in R([0,1]).$$

Теорема об аддитивности инт. Римана.

Пусть $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < c < b$. Тогда $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f \in R([a,c])$ и $f \in R([c,b])$. При этом $\int_a^b f(x) dx =$
 $= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

$\Rightarrow f \in R([a,b])$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall P$ с параметром $\tau(P) <$

$$< \delta, \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f([x_k, x_{k+1}]) \Delta x_k < \varepsilon.$$

будем считать, что P содержит точку c , т.е.

$$P = \{a < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < b\}$$

"c"

$$\psi_1 - \text{зад } L(a, c), \quad \tau(\psi_1) \leq \tau(\varphi) < 0$$

$$\Omega_2 - \text{зад } L(a, b), \quad \tau(\Omega_2) \leq \tau(\Omega_1) < \delta$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_p(Lx_k, x_{k+1}) \Delta x_k + \sum_{k=2}^n \omega_p(Lx_k, x_{k+1}) \Delta x_k < \varepsilon$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_p(Lx_k, x_{k+1}) \Delta x_k < \varepsilon \quad \text{if } \sum_{k=k_0}^{n-1} \omega_p(Lx_k, x_{k+1}) \Delta x_k < \varepsilon$$

$$f \in R(L(a, c))$$

$$f \in R(L(a, b))$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall \varphi \text{ орн. } L(a, b) \subset \tau(\Omega_1) < \delta$$

$$\forall \Omega_2 \text{ орн. } L(a, b) \subset \tau(\Omega_2) < \delta$$

$$V \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon/2$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon/2$$

Рассмотрим выражение $\varphi = \varphi_1 \cup \varphi_2$ сг. Тогда L

$$\Omega_2 = \varphi_1 \cup \Omega_2 \setminus \{c\}.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k + f(x_k) (x_{k+1} - x_k) +$$

$$+ f(x_{k_0}) \Delta x_{k_0} + f(x_{k_0+1}) \Delta x_{k_0+1} - f(x_{k_0}) (x_{k_0+1} - x_{k_0})$$

$$\sum_{k=0}^n f(x_k) \Delta x_k = \text{сумма } S_1 + S_2, \text{ где } S_1 - \text{сумма Рунге}$$

$$f(L(a, b)), \quad S_2 = \text{сумма Рунге г.л. } f \in R(a, c).$$

$$\left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right| = \left| S_1 + S_2 - f(x_{k_0}) \Delta x_{k_0} - f(x_{k_0+1}) \Delta x_{k_0+1} + f(x_{k_0}) (x_{k_0+1} - x_{k_0}) - \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx \right| \leq$$

$$\leq \left| S_1 - \int_a^c f(x) dx \right| + \left| S_2 - \int_c^b f(x) dx \right| + \sup_{x \in (a, c)} |f(x)| \cdot 4\delta$$

$$\varepsilon \in L$$

$$\|f\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{4\delta} \quad \text{т.к. } f \text{ униф. Т.К.}$$

$$x_{k_0+2} - x_{k_0+1} \leq \delta, \quad \Delta x_{k_0+1} \leq \delta$$

$$\leq \varepsilon_2 + \varepsilon_2 + 4\delta \|f\|_{\infty} < 2\varepsilon. \quad \text{Идеально } \delta < \frac{\varepsilon}{4\delta} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{4\delta}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_b^b f(x) dx$$

Замечание: Если $a > b$, то пишут $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Теорема (о непр. и диро-ти интегр. Римана).

Пусть $f \in R[a, b]$. Рассмотрим $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, тогда F — непрерывна. Если f непрерывна в т. x_0 , то $F(x)$ дифференцируема в т. x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

1) Надо найти $C > 0$: $\forall x, y \in [a, b], |F(x) - F(y)| \leq C|x - y|$

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \int_y^x |f(t)| dt$$

$$\leq \int_y^x \|f\|_{\infty} dt = \|f\|_{\infty} |x - y|, \quad C = \|f\|_{\infty}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + x) - F(x_0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\int_a^{x_0+x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) =$$

$$\stackrel{\text{agg}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x_0+x} f(t) dt \stackrel{\text{agg}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x_0+x} (f(t) - f(x_0)) dt + f(x_0) \stackrel{\text{agg}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x_0+x} (f(t) - f(x_0)) dt + f(x_0)$$

$$f(x_0) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x_0+x} (f(t) - f(x_0)) dt = f(x_0) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x_0+x} (f(t) - f(x_0)) dt = f(x_0)$$

$$< \delta, \quad x > 0, \quad \int_{x_0}^{x_0+x} (f(t) - f(x_0)) dt \leq \int_{x_0}^{x_0+x} (f(t) + \varepsilon) dt$$

$$\frac{(f(x_0) - \varepsilon)(x_0 + x - x_0)}{x} \leq \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x_0+x} f(t) dt \leq \frac{(f(x_0) + \varepsilon)(x_0 + x - x_0)}{x}$$

$$\left| \frac{1}{x} \int_{x_0}^{x_0+x} f(t) dt - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Следствие:

1) Если $f \in C[a, b]$, то у неё есть первообразная

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad f \in C[a, b] \text{ и } F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

2) формула Ньютона-Лейбница:

$$\text{Пусть } f \in C[a, b], \text{ тогда: } \int_a^b f(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a),$$

с2

где φ - канонический первообразная функции.

$$\Delta F(x) = \int_a^x f(t) dt - первообразная. Пусть φ -есть одна из первообразных, тогда $F \in \mathbb{R}$.$$

$$\varphi(b) = F(b) - C = \int_a^b f(t) dt - C$$

$$\varphi(a) = F(a) - C = \int_a^a f(t) dt - C$$

Пример: $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{x=0}^{x=\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2$

Теорема (φ -на инт. по частям).

Пусть $f, g \in [a, b]$, $f, g \in C^1[a, b]$ (гладкая и пр-ые непрерывн.). Тогда $\int_a^b f'g' dx = f'g \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f g' dx$.

Для вып-я теор. инт. $\int f'g' dx = f'g - \int f g' dx$.

По пр-е Неймана-Лейбница:

$$\int_a^b f'g' dx = \varphi(b) - \varphi(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f g' dx$$

" $f'g \Big|_{x=a}^{x=b}$ "

Теорема (upper и lower $\hat{\pi}$)

$\hat{\pi}$ -upper.

Пусть $\hat{\pi} = \frac{a}{\varepsilon}$, где $a, \varepsilon \in \mathbb{N}$. Тогда $f(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - \delta x)^n$

$f(x) > 0$ на $[0, \hat{\pi}]$

$$f(x) \leq \left(\frac{a}{n!}\right)^n$$

$$f(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

$$f''(x) = f(x) - f^{(4)}(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)$$

$$F(x) + F''(x) = F(x)$$

$$F(x) \sin x + F''(x) \sin x = f(x) \sin x$$

$$(F'(x) \sin x - F \cos x)' = f(x) \sin x$$

$$\int_0^{\pi} (F'(x) \sin x - F \cos x)' dx = \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = F(\pi) + F(0)$$

$$F'(\pi) \sin \pi - F \cos \pi \Big|_0^{\pi}$$

"

$$F(\pi) + F(0), \text{ т.к. } f(x) \sin x > 0 \text{ на } (0, \pi), \text{ то } f(x) \leq \frac{\pi^n \alpha^n}{n!} \forall x \in (0, \pi);$$

$$0 < \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx \leq \int_0^{\pi} \frac{(\pi \alpha)^n}{n!} dx = \pi \frac{(\pi \alpha)^n}{n!} < 1 \text{ Выберем } n \in \mathbb{N}$$

"

$$\text{T.O. } 0 < F(\alpha) + F(\pi) < 1 \Rightarrow F(0) + F(\pi) \neq \pi$$

Но с другой стороны $F(0) + F(\pi) \in \mathbb{Z}$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k \alpha^k (-\delta x)^{n-k}}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \alpha^{n-k}}{n!} x^{2n-k} = \int_{\mathbb{Z}} x^{2n-k}$$

$$+ \int_{\mathbb{Z}} x^{2n-1} + \dots + C_n^n x^n, \text{ где } C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Rightarrow C_k = 0, \forall k \leq n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = C_k k!, \forall k \geq n \Rightarrow C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{n-k} \alpha^{n-k}}{k!}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$f(\pi - x) = \frac{(\pi - x)^n}{n!} (a - b(\pi - x))^n = \left(\frac{a}{b} - x \right)^n \underbrace{\left(\frac{b}{a} (\pi - x) + \delta x \right)^n}_{=1}$$

$$= \frac{(a - b x)^n}{n!} x^n = f(x). \text{ Тогда } f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x); f^{(k)}(0) =$$

$$= (-1)^k f^{(k)}(\pi) \Rightarrow f^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$$

▷

Теорема (1-ая Теорема о среднем):

Пусть $f, g \in R[a, b]$ и g имеет пост. знак на $[a, b]$.

Тогда $\exists \xi \in [a, b]$ такое, что $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Если при этом $f \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.

Пусть для отриц. $g(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$. Тогда $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x) = M$ -границы для $g(x) \Rightarrow m|g(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|g(x)|$.

По т. о монотонности $m \int_a^b |g(x)|dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b |g(x)|dx$.

Если $\int_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 = M \cdot 0, m \cdot 0$.

Если $\int_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$.

Если $f \in [a, b]$, то по т. Больцано-Вейерштрасса $\exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = M$.

Теорема (гр-х) Теорема с инт. ост. членом.

Пусть $f \in C^n([a, b]), x, x_0 \in [a, b]$. Тогда $\exists \xi$ между x и x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f^{(n)}(\xi) (x-\xi)^{n-1} d\xi}_{\text{инт. ост. член}} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n$$

Из гр-х $n-1$ инт. ост. член:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x_0) - \int_{x_0}^x f'(t)(x-t)' dt = f(x_0) - \int_{x_0}^x f'(t)d(x-t) = f(x_0) - \int_{x_0}^x f'(t)(x-t)dt$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f''(t)d(x-t)^2 = f(x_0) + f'(x_0)f(x-x_0) - \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi)(x-x_0)^3 + \dots$$

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} dx = \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} dx = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

□

Теорема (2-я Теорема о среднем).

Пусть $f, g \in R[a, b]$ и g — монотонна. Тогда $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx$$

□ Предположим, что $g(x) \geq g(a)$ и $g(x) \leq g(b)$. Тогда док-м, что

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx$$

1.1. Пусть $g \in R[a, b]$ и $g(x) \geq g(a)$ и $g(x) \leq g(b)$. Тогда док-м, что

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx$$

$$\text{Тогда } \left| \int_a^b f(x) g(x) dx - g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx - g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b f(x) (g(x) - g(a) \chi_{[a, \xi]}(x) - g(b) \chi_{[\xi, b]}(x)) dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x)| |g(x) - g(a) \chi_{[a, \xi]}(x) - g(b) \chi_{[\xi, b]}(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| |g(x) - g(a)| dx + \int_a^b |f(x)| |g(b) - g(x)| dx$$

$$\leq \int_a^b |f(x)| |g(x) - g(a)| dx + \int_a^b |f(x)| |g(b) - g(x)| dx \leq \|f\|_1 \|g - g(a)\|_{\infty} + \|f\|_1 \|g - g(b)\|_{\infty}$$

$$\leq \|f\|_1 (\|g - g(a)\|_{\infty} + \|g - g(b)\|_{\infty}) = \|f\|_1 (g(b) - g(a) + g(a) - g(b)) = 0$$

$$\leq \|f\|_1 \cdot \frac{\varepsilon}{\|f\|_1} = \varepsilon$$

$$\text{Т.о. } \left| \int_a^b f(x) g(x) dx - g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx - g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

$$1.2) \int_a^b g(x) f(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx$$

$$\int_a^b g(x) f(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx$$

$$= \sum_{k=0}^n b_k A_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k A_{k+1} = \sum_{k=0}^n b_k A_k - \sum_{k=1}^n b_{k-1} A_k = \sum_{k=0}^n b_k A_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} A_k$$

$$A_k = b_{n-1} A_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

$$A_k = \sum_{l=0}^k a_l = \sum_{l=0}^k \int_{x_l}^{x_{l+1}} f(x) dx = \int_a^{x_{k+1}} f(x) dx = F(x_{k+1})$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = \text{монотонно} \text{ на } [a, b] \Rightarrow \exists m, M: m \leq F(x) \leq M \Rightarrow m \leq A_k \leq M.$$

$$b_{n-1} m + \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) M \leq 1 \leq b_{n-1} M + \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) M =$$

$$b_{n-1} M + M(b_0 - b_{n-1}) = M b_0.$$

$$m g(a) \leq \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq M g(a) \Rightarrow m \leq F(x) \leq M$$

$$m \leq \frac{1}{g(a)} \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq M$$

$$\underbrace{F(\xi)}_{\exists \xi \in [a, b]}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = g(a) F(\xi) = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx$$

$$1.3) \left| \int_a^b f g dx - \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f g dx = g(a) \cdot$$

$$\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} g(a) \int_a^b f(x) dx.$$

2) Пусть $g(x) \rightarrow$ Тогда по теореме $G(x) = -g(x) + g(b), G(x) \downarrow$

$$G(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow g(b) \geq g(x).$$

$$\int_a^b f(x) G(x) dx = G(a) \int_a^{\xi} f(x) dx, \xi \in [a, b]$$

$$\int_a^b f(x) G(x) dx = \int_a^b f(x) (g(b) - g(x)) dx = (g(b) - g(a)) \int_a^{\xi} f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x)g(x)dx = g(c)\int_a^c f(x)dx + (g(a) - g(c))\int_a^c f(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx$$

$$dx + g(c)\left(\int_a^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx\right) = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(c)\int_c^a f(x)dx$$

Замена переменных в определителе интеграла.

Теорема (замена в интеграле Римана).

Пусть $f \in C[a, b]$, $\varphi \in C^1([a, b])$, $\varphi: [a, b] \xrightarrow{h_a} [c, d]$. Тогда

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_c^d f(y)dy$$

По то. о замене в неопр. интегр. для ор-и f есть первообр.

$G(\varphi(x))$, где $G(x)$ - первообр. для $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

По ор-и $H-1$:

$$\int_a^b f(y)dy = F|_a^b = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a)) = G(b) -$$

$$G(a) = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

Теорема (Подстановка в определителе интеграла).

Пусть $f \in R([a, b])$ и $\varphi: [a, b] \xrightarrow{h_a} [c, d]$ (строго монотон.

сюръекция), φ - строго монотон. Пусть $f \in R([c, d])$ и

$$\varphi \in C^1[a, b]. \text{ Тогда } \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(\varphi(x))|\varphi'(x)|dx.$$

Пусть $G(x)$ - первообр. для $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(x)|_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a) = G(b) -$$

$$(b) - G(\varphi^{-1}(a)). \text{ Пусть } \varphi \in C^1. \varphi(a) = a \Rightarrow \varphi' \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi'(x)| = \varphi'(x). G \circ \varphi^{-1}|_{y=a}^{y=b} = \int_a^b f(y)dy, G \circ \varphi^{-1} - \text{первообр. для } f.$$

Пример: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \left(\frac{x = \tan \varphi}{dx = \frac{1}{\cos^2 \varphi}} \right) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \ln(1+\tan \varphi) \cos^2 \varphi$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+2\cos\varphi} &= \frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \frac{\ln\left(\frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi}\right)}{\cos\varphi} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}\sin(\varphi+\pi/4)}{\cos\varphi}\right) d\varphi = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \ln\sqrt{2} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}\sin(\varphi+\pi/4)}{\cos\varphi}\right) d\varphi - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \ln(\cos\varphi) d\varphi \quad (*) \\
 &= \underbrace{\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi \ln 2}{8}\right)}_{=0} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \ln\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right) d\varphi &= \begin{cases} \psi = \varphi - \pi/4 \\ d\psi = d\varphi \\ \varphi = 0 \mapsto \psi = \pi/4 \\ \varphi = \pi/4 \mapsto \psi = 0 \end{cases} = \int_{\pi/4}^0 \ln\left(\sin\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)\right) d\psi = \\
 &= \int_{-\pi/4}^0 \ln(\cos\psi) d\psi = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos\varphi) d\varphi \quad (\text{т.к. } \cos \frac{\pi}{4} = \cos 0). \quad \text{Т.О.}
 \end{aligned}$$

$$(*) = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

Теорема (ф-ла Прямоугольников).

Пусть $f \in C^2([a, b])$ и пусть $\mathcal{D}$ - разбиение $[a, b]$, т.е.

$$\begin{aligned}
 a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad \text{и} \quad x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}. \quad \text{Пусть } \xi_k = \\
 = \frac{x_{k+1} + x_k}{2}. \quad \text{Тогда} \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) + R_n, \quad \text{где}
 \end{aligned}$$

$$R_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

По ф-ле Тейлора с ост. членом в форме Лагранжа на

$[x_k, x_{k+1}]$:

$$f(x) = f(\xi_k) + f'(\xi_k)(x - \xi_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x - \xi_k)^2, \quad \xi_k \text{ - лежит на } [x_k, x_{k+1}]$$

x и ξ_k , проинтегрируем на $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx &= \frac{b-a}{n} f(\xi_k) + f'(\xi_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - \xi_k) dx + \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k) (x - \xi_k)^2 dx \\
 &= \frac{b-a}{n} f(\xi_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - \xi_k)^2 dx
 \end{aligned}$$

$$- \xi_k)^2 dx$$

К9

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{b-a}{n} f(\xi_k) + \mu_k \int_{\xi_k}^{x_{k+1}} (x - \xi_k)^2 dx; \min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f''(x) \leq \mu_k \leq \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f''(x)$$

$$f'''(x)$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{b-a}{n} f(\xi_k) + \underbrace{\mu_k \int_{\xi_k}^{x_{k+1}} (x - \xi_k)^2 dx}_{\frac{2(b-a)^3}{(2n)^3}}; \quad x = x_k$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{b-a}{n} f(\xi_k) + \frac{\mu_k}{24n^2} (b-a)^3$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) + \underbrace{\mu_k \frac{(b-a)^3}{24n^2}}_{\mu}$$

$$\cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

$$\min_{x \in [a, b]} f''(x) = \eta \cdot \min_{x \in [a, b]} f''(x) \leq \mu \leq \eta \cdot \max_{x \in [a, b]} f''(x) = \max_{x \in [a, b]} f''(x)$$

$$\exists \eta \in [a, b]: \mu = f''(\eta) \text{ т.к. } f'' - \text{непр.}$$

$$\text{т.о. } R_n = \frac{f''(\eta)(b-a)^3}{24n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Кр-ий Лебега

Опр. Мно-во $A \subseteq \mathbb{R}$ наз-я мн-ом меры Моль (меры Лебега моль), если $\forall \varepsilon > 0, \exists$ Набор интервалов $I_n = (a_n, b_n)$,

$$n \geq 1: (1) A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

глава интервалов

Обозн. $\mu(A) = 0$ - мера Лебега моль

Используем: 1) $A = [x_0]$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mu([x_0]) = 0$, т.к. $\forall \varepsilon > 0$ $x_0 \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $\mu([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) = 2\varepsilon$.

2) $A = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$, $\mu(A) = 0$, т.к. $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}})$, $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}})) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

3) $\mu(A_n) = 0$, тогда $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ т.к. $A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$, $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(I_m) < \varepsilon / 2^{m+1}$. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_m$.

$\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} \mu(I_m)) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

4) $\mu(\mathbb{R}) = 0$ и $\mathbb{R} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ — ин-во Кантора.

Опр. Будем говорить, что какое-то аб-во μ выполняется почти всюду на $A \subset \mathbb{R}$, если $\mu \setminus \{A : \mu(A) = 0\} = \emptyset$.

Теорема (критерий Лебега или по Рунгу).

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ор-ца. Тогда $f \in R([a, b]) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f$ почти всюду непрерывна.

1) Лемма (о полном покрытии).

Пусть $[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_n = (a_n, b_n)$. Тогда $\exists \delta > 0$:

$\forall$ разд. $\mathcal{O}$ отрезка $[a, b]$ с параметром $\sigma(\mathcal{O}) < \delta \Rightarrow \mathcal{O}$ почти

целено покрываю, т.е. $\forall [x, x_{k+1}]$, $\exists I_n: [x, x_{k+1}] \subset I_n$.

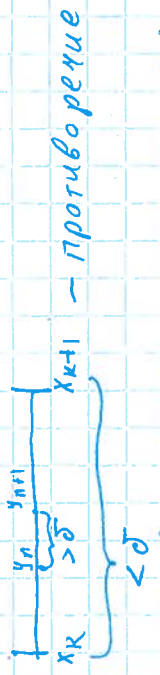
Пусть $y_k \rightarrow$ — это послед. начинающаяся концы инт. I_n , лемма

выу $\delta \in [a, b]$, $y_0 = a$, $y_n = b$.

$\delta = \min_{1 \leq k \leq n} (y_{k+1} - y_k)$

Пусть $\mathcal{O}$ — разд. с $\sigma(\mathcal{O}) < \delta$ и от противного предполож. 7.1

что $\exists [x_k, x_{k+1}]$, которая не покрывается мин. 2-мя инт.



2) $\Leftrightarrow f$ — не пр. п. в., т.е. $\mu(Dist f) = 0$, $Dist f$ — мин-бо т. разр

и в а, т.е. $\forall \varepsilon > 0, \exists I_n, m, n \in \mathbb{N}$ (1) $Dist f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) < \varepsilon / \|f\|_{\infty}$

$E = [a, b] \setminus Dist f$ — точка непр-ти.

$x \in E \Leftrightarrow \omega_f([x - \delta, x + \delta]) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0+} 0 \Leftrightarrow \exists \text{ инт. } P(x): \omega_f(P_n) < \varepsilon / (2(b-a))$

т.о. $[a, b] \subseteq \bigcup_{x \in E} P(x) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

по Т. Бореля-Лебега $\exists$ конечное подпокрытие:

$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^m P(x_k) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

$\exists \delta > 0$: $\forall$ разд. D с $\tau(D) < \delta$ это разд. будет попарно

покр. $(\bigcup_{k=1}^m P(x_k)) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n)$.

$\forall \varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$: $\forall$ разд. D с $\tau(D) < \delta$:

$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_f([x_k, x_{k+1}]) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\omega_f([x_k, x_{k+1}])}_{[x_k, x_{k+1}] \subset P(x_j)} \Delta x_k +$

$< \omega_f(P(x_j)) < \varepsilon / (2(b-a))$

$+ \sum_{[x_k, x_{k+1}] \subset I_p} \omega_f([x_k, x_{k+1}]) \Delta x_k$

$\leq 2 \|f\|_{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \leq 2 \|f\|_{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_n) \leq 2 \|f\|_{\infty} \cdot$

$\cdot \frac{\varepsilon}{4 \|f\|_{\infty} 2}$

3) $\Rightarrow t \in R([a, \delta])$ т.е. $\forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N}, \exists \delta > 0: \forall \text{ разд. } \mu$
 $\circ \tau(\mathcal{D}) < \delta, \sum_{k=0}^{m-1} \omega_p([x_k, x_{k+1}]) \Delta x_k < \varepsilon / 2^{m \cdot m}.$

$\text{Dis } f = \{x \in [a, \delta]: \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_p([x, x+\delta]) > 0\} = \{x: \omega_p(x) >$

$> 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in [a, \delta]: \omega_p(x) > \frac{1}{m}\} \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x_k\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k, x_{k+1}).$

$y \in (x_k, x_{k+1}) \Rightarrow \omega_p([x_k, x_{k+1}]) \geq \frac{1}{m}$

$\sum_{k=0}^m \omega_p([x_k, x_{k+1}]) \Delta x_k < \varepsilon / 2^{m \cdot m}$

$\sum_{k=0}^m \Delta x_k < \varepsilon / 2^m$

Отсюда следует, что $\mu(\omega_p(x) > 0) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon / 2^m = \varepsilon$

$\mu(\omega_p(x) > 0) = 0$

Следствие: $R[a, \delta]$ - есть атреда по-нй, т.е. $f, g \in R[a, \delta] \Rightarrow$

$\Rightarrow f+g, fg \in R[a, \delta].$

$\nabla f, g \in R[a, \delta] \Rightarrow f \cdot g - \text{отр.} \Rightarrow f \cdot g - \text{отр.} \Rightarrow f \cdot g - \text{непр. по нй } \& \infty$

$g \cdot \text{т.е. } \mu(\text{Dis } f) = 0, \mu(\text{Dis } g) = 0.$

$\text{Dis}(f \cdot g) \subseteq \text{Dis } f \cup \text{Dis } g \Rightarrow \mu(\text{Dis}(f \cdot g)) = 0 \Rightarrow f \cdot g -$

-непр. по нй $\& \infty$.

$C[a, \delta] \cap \mathcal{D} \subset R[a, \delta] \subset C[a, \delta] \subset R[a, \delta] \subset B[a, \delta] - \text{отр. по-}$

-нй на $[a, \delta]$ (принцип атреда по-нй)

Опр. Ф-ия $f: [a, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ наз-я абелъ. непрерывна

ноу гда f на $[a, \delta]$, ели

1) f - непрерывна

2) $f'(x) = f(x)$ п.в. на $(a, \delta).$

Пример: 1) $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$F(x) = |x|, |x|' = \operatorname{sgn} x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

↑
обобщ. первообр.

2) $f \in R[a, b]$, тогда $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ — обобщ. первообр. для f .

Теорема (о разности обобщ. производных).

Пусть $F_1, F_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — обобщ. первообр. для f на

$[a, b]$. Тогда $F_1(x) - F_2(x) = \operatorname{const}$.

$$\triangleleft G(x) = F_1(x) - F_2(x), G'(x) = 0 \text{ п.в. т.к. } F_1'(x) =$$

$= f(x)$ п.в. и $F_2'(x) = f(x)$ п.в. — зафиксируем $a \leq x < b$

$\leq b$. Пусть $E = \{x \in [a, b]: F_1'(x) \neq f(x) \text{ или } F_2'(x) \neq f(x)\} =$

$= \{x \in [a, b]: G'(x) \neq 0\} \subset \{x \in [a, b]: F_1'(x) \neq f(x)\} \cup \{x \in [a,$

$b]: F_2'(x) \neq f(x)\} \Rightarrow m(E) = 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists I_n \in \mathcal{I}_n$ — интервалы: $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon$.

Пусть $x \in [a, b] \setminus E \Rightarrow G'(x) = 0 \Rightarrow \exists$ интервал $U(x) =$

$$= (x - \delta(x), x + \delta(x)) : \forall y \in U(x), \left| \frac{G(y) - G(x)}{y - x} \right| < \varepsilon$$

т.о. $[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cup \bigcup_{x \in [a, b] \setminus E} U(x)$.

по Т. (Бореля — Лебега) E — конечное подпокрытие:

$$[a, b] \subset \left(\bigcup_{n=1}^N I_n \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^M U(x_k) \right)$$

По лемме о подчиненном разбиении $\exists \delta > 0 \forall$ разб

и отрезка $[x, \beta]$ с параметром $\tau(\delta) < \delta \Rightarrow [x_k, x_{k+1}] \subset I_n$

$$\text{и} \cup_{k=1}^n [x_k, x_{k+1}] \subset \cup_{j=1}^n [x_{j-1}, x_j]$$

Возьмем такое разбиение:

$$|G(\beta) - G(x)| = |G(x_n) - G(x_{n-1}) + G(x_{n-1}) - G(x_{n-2}) + \dots + G(x_1) - G(x_0)| \leq \sum_{j=1}^n |G(x_{k+1}) - G(x_k)| + \sum_{j=1}^n |G(x_{k+1}) - G(x_k)|, [x_k, x_{k+1}] \subset U(\bar{x}_j)$$

$$|G(x_{k+1}) - G(x_k)| \leq |G(x_{k+1}) - G(\bar{x}_j)| + |G(\bar{x}_j) - G(x_k)| \leq \varepsilon \cdot |x_{k+1} - \bar{x}_j| + \varepsilon |\bar{x}_j - x_k| = \varepsilon |x_{k+1} - x_k|$$

$$|G(y) - G(x)| \leq L|x - y| \leq \sum_{j=1}^I L|x_{k+1} - x_k| + \sum_{j=1}^{II} \varepsilon |x_{k+1} - x_k| \leq L \sum_{k=1}^n |x_{k+1} - x_k| + \varepsilon \sum_{k=1}^n |x_{k+1} - x_k| = \varepsilon(L + \beta - \alpha)$$

т.о. $\forall \varepsilon > 0, |G(\beta) - G(\alpha)| < \varepsilon(L + \beta - \alpha)$ т.к. ε — произвол.

то $G(\beta) = G(\alpha)$ т.к. β и α — произвол. $\in [\alpha, \beta] \Rightarrow G(x) = \text{const}$ ∇

Лемма (о-на Миттона — Лебница для абсцисс. непрерыв.).

Пусть $f \in R([a, b])$. Тогда $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, где

F — некая непрерывная первообр.

$$\int_a^b q(x) = \int_a^b f(t) dt - \text{абсцис. перм.}, \text{ тогда } F(x) = q(x) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(a) = q(a) + C = c, F(b) - F(a) = q(b) + C - c = q(b) = \int_a^b f(x) dx$$

Примечание.

Пусть $f \in R[a, b]$ и $\bar{f} \in R[a, b]$ и $N = \{x \in [a, b]: f(x) \neq \bar{f}(x)\}$

$$\text{имеет меру нуль (т.е. } f(x) = \bar{f}(x) \text{ п.в.). Тогда } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \bar{f}(x) dx.$$

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$, f - обобщ. произм. мер. обр.
 т.е. F -функция и $F'(x) = f(x)$ п.в. $\Rightarrow F'(x) = \bar{f}(x)$ п.в. $\Rightarrow F$ -
 -обобщ. для $\bar{f}$.

Замечание: Если $f \in R[a, b]$ и $\bar{f}$ -огр. и $\bar{f} = f$ п.в., то
 $\bar{f}$ может не оказаться инт. по Риману.

Пример: $f = 1$ на $[0, 1]$
 $\bar{f} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{a\} \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases} \Rightarrow \bar{f} \neq f$ на $\mathbb{Q}$, $\mu(\mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f = \bar{f}$ п.в.

$\bar{f}$ - разрывно всюду $\Rightarrow \bar{f} \notin R([0, 1])$.

Пределный переход по зн. инт. Римана.

1. (о равн. сх-ти интегралов).

Пусть $f_n \in R[a, b]$, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ср.}} f$, Тогда $f \in R[a, b]$ и

$$(1) \int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ср.}} \int_a^b f(t) dt$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

$\langle \rangle$ т.к. $f_n \in R[a, b] \Rightarrow f_n$ -огр. $\Rightarrow f$ -огр. (как равн. предел огр.
 ф-ий). Пусть $E_n = \text{Dis } f_n$, $\mu(E_n) = 0 \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$.

$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow f_n$ - непр. в т.х.
 $f_{n \rightarrow \infty} \xrightarrow{\text{ср.}} f \Rightarrow f$ - непр. ф-ия на $[a, b] \setminus E$ по

Т.о. равн. предель непр. ф-ий.

ЗЛ $\text{Dis } f \subset E \Rightarrow \mu(\text{Dis } f) = 0$, т.е. f -непр. п.в. $\Rightarrow f \in R[a, b]$.

$$2) \sup_{x \in [a, \delta]} \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq \sup_{x \in [a, \delta]} \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \sup_{x \in [a, \delta]} \int_a^x \mu_{\text{монот.}} dt \leq \sup_{x \in [a, \delta]} (x - a) \int_a^x \sup_{t \in [a, \delta]} |f_n(t) - f(t)| dt$$

$$\int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \sup_{t \in [a, \delta]} |f_n(t) - f(t)| \cdot \sup_{x \in [a, \delta]} \int_a^x dt$$

$$\text{Получим, что } 0 \leq \sup_{x \in [a, \delta]} \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq (x - a) \sup_{t \in [a, \delta]} |f_n(t) - f(t)|$$

$$- f(t) \Big|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

3) из разн. сч-ти $\Rightarrow$ поточечная; для $x = \delta$.

Следствия и примеры:

Сл. 1. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ с.с.с. разн. на $[a, \delta]$, $f_n \in R[a, \delta]$

$$\text{Тогда } \int_a^{\delta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\delta} f_n(x) dx$$

$$\nabla \text{ Возьмем } S_n(x) = \sum_{h=1}^n f_h(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с.с.с.}} \int_a^{\delta} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ и}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^{\delta} S_N(x) dx = \int_a^{\delta} S(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_a^{\delta} f_n(x) dx = \int_a^{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$$

$$\text{и разн. } \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\delta} f_n(x) dx$$

∇

Сл. 2. Степенные ряды можно почленно интегрировать:

Внутр. и на сч-ти.

Примеры:

$$1) \int_a^x \arctg x dx = \left(\arctg x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, |x| \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \text{пост. Катмаса}$$

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \text{пост. Катмаса}$$

2) $\int_0^x \frac{dx}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, группировка по-мн в нчге $x^{-x-x\ln x} \rightarrow 1$ $x \rightarrow 0+$

$\int_0^1 e^{-x\ln x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx$ сх-ра разн. на $[0,1]$

$\int_0^1 x^n \ln^n x dx = \int_0^1 x^n \ln x d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \int_0^1 x^n \ln x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} dx$

$= \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} \ln x dx = -\frac{1}{(n+1)^2} \int_0^1 x^{n+1} dx = -\frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$

$\int_0^1 x^n \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Сл.3 (о группов. и мн.)

Пусть $f_n \in C[a,b]$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ и $f_n'(x) \rightarrow g(x)$ на $[a,b]$.

Тогда $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx = f(b) - f(a)$.

$\int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx$

$\int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx = \int_a^b (f_n'(x) - f'(x)) dx = f_n(b) - f_n(a) - (f(b) - f(a))$

на $\forall x \in [a,b]$, $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

Сл.4: Пусть $f_n \in C^1[a,b]$ и

1) $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ сх-ра разн. на $[a,b]$.

1) Первоначальные сведения о мере.

Опр. Пусть $X \neq \emptyset$, $\Sigma \subseteq 2^X$, отображение μ , опр-ое на Σ , удовле. усл. аддитивности

$$A, B \in \Sigma$$

$$A \cup B \in \Sigma \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{если } A \cap B = \emptyset$$

Наз-я:

(Конечной) мерой, если $\mu: \Sigma \rightarrow [0, +\infty)$

бесконечной мерой, если $\mu: \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$

Закономерен. мерой (или зарядом), если $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$.

Примеры:

$$1) X = \mathbb{Z}, \Sigma = 2^{\mathbb{Z}}, \mu(A) = \#A \text{ — число эл-ов } A. \text{ —}$$

— дискр. мера, ее наз-т считающая мера.

$$2) X = \mathbb{R}, \Sigma = 2^{\mathbb{R}}, \mu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A \end{cases} \text{ — мера Дирака}$$

$$3) \text{ Мера Лебесга } X = \mathbb{R}^n, \Sigma \text{ — } \sigma\text{-алгебра } \mathcal{B}^n \text{ — мерных}$$

прямых $\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$. Тогда

$$\mu(\langle a_1, b_1 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

2) Площадь криволиней. Трапеции.



$$\mu(Q_f) = \int_a^b f(x) dx, \quad f \in [a, b].$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n m_k \chi_{[a_k, a_{k+1})}, \quad m_k = \min_{x \in [a_k, a_{k+1})} f(x)$$

79

$$g_2(x) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \chi_{(x_k, x_{k+1})}(x), \quad M_k = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), \quad \text{где } \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \tau(\mathcal{P}) < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g_1(x) dx \right| < \varepsilon -$$

- нижняя сумма Дарбу

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \tau(\mathcal{P}) < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g_2(x) dx \right| < \varepsilon - \text{верх-}$$

-няя сумма Дарбу.

$$q_{\varphi_2} > q_{\varphi_1} > q_{\varphi_1} \Rightarrow M_2(q_{\varphi_2}) \geq M_2(q_{\varphi_1})$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f(x) dx \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

3) Объём тела вращения.

Пусть $f \in [a, b]$, $\mathcal{U}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \tau(\mathcal{P}) < \delta, \left| \int_a^b f^2(x) dx - \int_a^b \varphi_2(x) dx \right| \leq \varepsilon, \quad \text{где } \varphi_2(x) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \chi_{(x_k, x_{k+1})}(x).$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \chi_{(x_k, x_{k+1})}(x)$$

$$\varphi_2(x) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \chi_{(x_k, x_{k+1})}(x).$$

$$\int_a^b \varphi_2(x) dx = \frac{\int_a^b \varphi_2(x) dx}{x}$$

$$U_2 \supset U_{\varphi_1} \Rightarrow M_3(U_{\varphi_2}) \geq M_3(U_{\varphi_1}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f^2(x) dx \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

4) Длина Кривой.

Опр. Непр. отображ. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ наз-я параметризованной

Кривой.

80

Опр. Если γ - непрерывное отображение из связного пространства X в метрическое пространство Y , то образ $\gamma(X)$ называется кривой Хордана.

Опр. Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то кривая замкнута. Если $\gamma(a) = \gamma(b)$ и γ - простая, то γ - простая замкнутая кривая Хордана.

Опр. Длиной кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ наз-ся величина $L(\gamma) = \sup_{0 \leq k < n} \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|_2$

$$= \sqrt{\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|_2^2} = \sqrt{(\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2 + \dots + (\gamma_n(t_{k+1}) - \gamma_n(t_k))^2}$$

Теорема (о длине изогнутых кривых)

Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ - изогнутая кривая, т.е. $\gamma_k(t) \in C^1([a, b])$

Тогда $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \dots + \dot{\gamma}_n(t)^2} dt$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ - коорд.

$\dot{\gamma} = (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dots, \dot{\gamma}_n)$ - скорость γ

$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 + \dots + \dot{\gamma}_n^2}$ - длина γ -ра ск-ти

$dL = |\dot{\gamma}| dt = \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 + \dots + \dot{\gamma}_n^2} dt$ - формула для подсчета

$L(\gamma) = \sup_{0 \leq k < n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2 + (\gamma_2(t_{k+1}) - \gamma_2(t_k))^2 + \dots + (\gamma_n(t_{k+1}) - \gamma_n(t_k))^2}$

т.е. $L(\gamma) = \sup_{0 \leq k < n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\gamma_1'(t_k) \Delta t_k)^2 + (\gamma_2'(t_k) \Delta t_k)^2 + \dots + (\gamma_n'(t_k) \Delta t_k)^2} = \sup_{0 \leq k < n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\gamma_1'(t_k))^2 + (\gamma_2'(t_k))^2 + \dots + (\gamma_n'(t_k))^2} \Delta t_k$

$\Delta t_k = \sup_{k \leq t < k+1} \sqrt{(\gamma_1'(t_k))^2 + (\gamma_2'(t_k))^2 + \dots + (\gamma_n'(t_k))^2} \Delta t_k$

• $\Delta t_k \rightarrow 0$, где:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'_1(\xi_k))^2 + (x'_2(\xi_k))^2} \cdot \Delta t_k - \sqrt{(x'_1(\xi_n))^2 + (x'_2(\xi_n))^2} \cdot \Delta t_n$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall \tau(\tau) < \delta \Rightarrow \sqrt{(x'_1(\xi_k))^2 + (x'_2(\xi_k))^2} - \sqrt{(x'_1(\xi_n))^2 + (x'_2(\xi_n))^2} < \varepsilon$$

$$\sqrt{(x'_1(\xi_k))^2 + (x'_2(\xi_k))^2} \leq \sqrt{p \cdot \varepsilon^2} \leq C \cdot \varepsilon, \text{ где } p - \text{кон-ста } k \rightarrow \infty$$

рдинат, $R_n < C \cdot \varepsilon \cdot (b-a)$. Таким образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x'_1(\xi_k))^2 + (x'_2(\xi_k))^2} \cdot \Delta t_k = \int_a^b \sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2} dt$$

Опр. Кривая спрямляема, если её длина конечна. $\triangleright$

Пример: (Длина эллипса).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b), \quad x = a \sin t, \quad y = b \cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$L(\Gamma) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt =$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt,$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} - \text{эксцентриситет.}$$

Если $e = 0$, то $a = b$ - окружность

$$L(\text{окр}) = 4a \int_0^{\pi/2} dt = 4a \pi - 2\pi a.$$

Если $e \neq 0$, интеграл не берётся в эл. ф-ях.

$$\text{Опр. ф-ии Вуда } E(k, q) = \int_0^q \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

$$F(k, q) = \int_0^q \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}} \quad (k \in [0, 1))$$

Наз-я эллиптический интеграл II и I рода (в более общем виде).

$$\left. \begin{aligned} F(k, \frac{\pi}{2}) &= F(k) \\ E(k, \frac{\pi}{2}) &= E(k) \end{aligned} \right\} \text{полные эллит. инт.}$$

$$L(\lambda) = {}_2F_1 \left(\frac{-\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \right).$$

Ф-ла Гаусса:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) = q$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \rightarrow H(a, b) \\ b_n &= \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Гип: } \frac{dt}{(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)^{1/2}} = \frac{d\theta}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}^{1/2}$$

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin t = \frac{2a \sin \theta}{(a+b) + (a-b) \cos^2 \theta}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)^{1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ т.е.}$$

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot a$$

$$\frac{F\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)}{a}$$

Ф-ла Ойера-Бернулли.

11.04.23

Опр. Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, и $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ — разд. отрезка $[a, b]$. Вариацией f на $\mathcal{P}$ наз-я величина $V_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$. Полной вариацией f на $[a, b]$ наз-я величина $V_a^b(f) = \sup_{\mathcal{P}} V_{\mathcal{P}}(f)$. Ф-ция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ наз-я ф-ей огр-ой вариации (или с огр-ым изменением), если $V_a^b(f) < \infty$, $f \in BV[a, b]$ — н-бо ф-ий огр. вариации.

Примеры:

- 1) Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонна. Тогда $f \in BV[a, b]$ и $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$
- 2) Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — липшицева, т.е. $\exists L > 0: |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in [a, b]$ и $V_a^b(f) \leq L(b - a)$.

Замечание: $BV[a, b] \subset B[a, b]$, т.к. $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)|$, т.о. $BV[a, b] \subset B[a, b]$.

- 3) $f(x) = f_0(x) - \chi_a(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \cap [0, 1] \\ 0, & x \notin Q \cap [0, 1] \end{cases} \Rightarrow V_0^1(f) = +\infty$

Теорема (об адд-ти полной вариации).

Пусть $f \in BV[a, c]$, $a < c < b$. Тогда $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

1) Пусть $\mathcal{P}_1 = \{a = x_0 < \dots < x_n = c\}$ — разд. $[a, c]$

$\mathcal{P}_2 = \{c = y_0 < \dots < y_m = b\}$ — разд. $[c, b]$

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ — разд. $[a, b]$.
 84] $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f)$ не то

$$+ V_e'(f)) V_a'(f) \equiv \sup_{\mathcal{D}_1} V_{\mathcal{D}_1}(f) = \sup_{\mathcal{D}_1} V_{\mathcal{D}_1}(f) + \sup_{\mathcal{D}_2} V_{\mathcal{D}_2}(f) = V_a'(f) + V_e'(f)$$

2) Пусть $\mathcal{D}$ -разд. $[a, b]$, $\mathcal{D}_e = \mathcal{D} \cup \{c\}$.

$$V_{\mathcal{D}}(f) \leq V_{\mathcal{D}_e}(f) = V_{\mathcal{D}_1}(f) + V_{\mathcal{D}_2}(f)$$

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq |f(x_{k+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_k)|, \quad \mathcal{D}_e = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2: V_{\mathcal{D}}(f) \leq V_a'(f) + V_e'(f)$$

$$V_a'(f) \leq V_e'(f) + V_e'(f)$$

Лемма. (О представлении функции из BV)

Пусть $f \in BV[a, b]$. Тогда $\exists f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ -неуд. и $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

▷ Полагая $f_1(x) = V_a^+(f)$, $x \in [a, b]$ -неуд., т.к. $x < y$

$$x < y, V_a^+(f) = V_a^+(f) + V_x^+(f) \geq 0$$

$$V_a^+(f) \geq V_a^+(f)$$

$$\text{Полагая } f_2(x) = V_a^-(f) - f(x).$$

Пусть $x < y$:

$$f_2(x) = V_a^-(f) - f(x) = V_a^-(f) - V_x^-(f) - f(x) =$$

$$= V_a^-(f) - f(y) + (f(y) - V_x^-(f)) \Rightarrow f_2(x) \leq f_2(y)$$

$$f(y) - f(x) \leq V_x^-(f)$$

$$f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| \leq V_x^-(f) \quad \triangleright$$

Т. (Лемма о гур-ти монотон. ф-ции).

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ -монотонная ф-ция. Тогда f -н.в. 185

дифференцируема.

Δ след. вектор; мо

▷

следствия:

- 1) q_0 -ия из $BV[a, b]$ дифференцируемы п.в. (и м.п.р. п.в.)
- 2) $BV[a, b] \neq R[a, b]$ (упр. Найти $f \in R[a, b] \setminus BV[a, b]$)
- 3) I. (Радонахера)

Липшицева норма на $[a, b]$ дифференцируема п.в.

I. (BV-алгебра)

Пусть $f, g \in BV[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g, fg \in BV[a, b]$ и при этом $V_a^\beta(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| V_a^\beta(f) + |\beta| V_a^\beta(g)$

$$V_a^\beta(fg) \leq \|f\|_\infty V_a^\beta(g) + \|g\|_\infty V_a^\beta(f).$$

Если $g(x) \geq c > 0$, $\forall x \in [a, b]$, то $\frac{1}{g} \in BV[a, b]$ и

$$V_a^\beta\left(\frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{c^2} V_a^\beta(g)$$

Δ Пусть $\mathcal{D}$ -разд. отрез $[a, b]$,

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{D}}(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha f(x_{k+1}) + \beta g(x_{k+1}) - \alpha f(x_k) - \beta g(x_k)| \leq \\ &\leq |\alpha| \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |\beta| \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = K \|V_{\mathcal{D}}(f) + \\ &+ |\beta| V_{\mathcal{D}}(g)\|, \text{ остальное брать по } \mathcal{D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) V_{\mathcal{D}}(fg) &= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \\ &\cdot |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_{k+1})| + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_k)g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| = \\ &= \|fg(x_k)\| \leq \|g\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \|f\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \\ &= \|g\|_\infty V_{\mathcal{D}}(f) + \|f\|_\infty V_{\mathcal{D}}(g) \end{aligned}$$

$$= \|g\|_{\infty} \varphi(t) + \|f\|_{\infty} \varphi(g), \text{ где } \sup_{\emptyset}.$$

$$3) \varphi\left(\frac{1}{g}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{1}{g(x_{k+1})} - \frac{1}{g(x_k)} \right| = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|g(x_{k+1}) - g(x_k)|}{|g(x_k)| |g(x_{k+1})|} \leq \frac{1}{g \geq c > 0} \frac{1}{c^2}.$$

$$\bullet \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \frac{\varphi(g)}{c^2}$$

▷

I. (кр-ую непрерывности кривой).

Пусть $\gamma = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ - кривая.

Тогда $L(\gamma) < \infty \Leftrightarrow \gamma \in BV[a, b], k=1, \dots, n$.

$$\Delta L(\gamma) = \sup_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|_2$$

$$\sqrt{\max_{j=1, \dots, n} (x_j(t_{k+1}) - x_j(t_k))^2} \geq \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\|_2 = \sqrt{\max_{j=1, \dots, n} (x_j(t_{k+1}) - x_j(t_k))^2}$$

$$= \sqrt{x_1(t_k)^2 + \dots + (x_n(t_{k+1}) - x_n(t_k))^2} \geq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |x_j(t_{k+1}) - x_j(t_k)|$$

$$\sqrt{N} \sum_{j=1}^N |x_j(t_{k+1}) - x_j(t_k)| \geq \sqrt{N} \sqrt{\max_{j=1, \dots, N} (x_j(t_{k+1}) - x_j(t_k))^2}.$$

$$\sqrt{N} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^N |x_j(t_{k+1}) - x_j(t_k)| \geq \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\| \gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k) \|_2}_{(*)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^N |x_j(t_{k+1}) - x_j(t_k)|$$

$$\sqrt{N} \sum_{j=1}^N \varphi(x_j) \geq (*) \geq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi(x_j)$$

||

$$\sqrt{N} \sum_{j=1}^N \varphi'_a(x_j) \geq L(\gamma) \geq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi'_a(x_j)$$

▷

Интеграл Римана-Стieltjesa

Опр. Пусть μ -конечная мера на отрезке $[a, b], f \in C[a, b]$

87

$\rightarrow \mathbb{R}$. Число $I \in \mathbb{R}$ наз-я интегралом ф-ции f по мере μ на $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall \text{ разб. } P \subset \pi(P) < \delta$ и $\forall$ набор ξ т. $(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ выделенных точек:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \mu([x_k, x_{k+1})) - I \right| < \varepsilon$$

обозн.: $I = \int_a^b f d\mu$

Пример: $\mu = \delta_c$ - δ -мера Дирака в т. $c \in (a, b)$.

$$\delta_c([x_k, x_{k+1})) = \begin{cases} 0, & c \notin [x_k, x_{k+1}) \\ 1, & c \in [x_k, x_{k+1}) \end{cases}$$

~~Пусть~~ Покажем, что $\forall f \in C[a, b], \int_a^b f d\delta_c = f(c)$.

Пусть P -разб. $[a, b]$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \delta_c([x_k, x_{k+1})) = f(\xi_{k_0}) ; \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \delta_c([x_k, x_{k+1})) = f(\xi_{k_0})$$

$$\xi_{k_0} \in [x_{k_0}, x_{k_0+1}) \rightarrow c \Rightarrow f(\xi_{k_0}) \rightarrow f(c).$$

Если мера μ порождена изм. ф-цией g , т.е.

$$\mu([a, \beta]) = g(\beta - a) - g(a - a)$$

$$\mu([a, \beta]) = g(\beta - a) - g(a - a)$$

$$\mu([a, \beta]) = g(\beta - a) - g(a - a)$$

$$\mu([a, \beta]) = g(\beta - a) - g(a - a)$$

$$\text{То } \int_a^b f d\mu = (F - f(a)) \int_a^b f dg$$

Опр. Пусть $f: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}$. Точку ω будем называть особой точкой, если:

1) $\omega = +\infty$ или

2) $\omega \in \mathbb{R}, f \in R([a, \delta]) \forall \delta \in (a, \omega)$ и f неогр. в окр. т. ω .

Аналогично опре-ся левая особая точка, где гдет $f: (\omega, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Опр. Несобственный интеграл Римана $\int_a^\omega f(x) dx \left(\int_a^b f(x) dx \right)$

наз-я предел $\lim_{b \rightarrow \omega-0} \int_a^b f(x) dx \left(\lim_{a \rightarrow \omega+0} \int_a^b f(x) dx \right)$, если

он сущ-т.

Подоб-т, что интеграл $\int_a^\omega f(x) dx \left(\int_a^b f(x) dx \right)$ сх-ст-я, если

предел конечен, иначе расх-ст-я (+ предел не сущ-т)

Опр. Несобств. инт. $\int_a^\omega f(x) dx$ сх-ст-я абсолютно, если

$$\int_a^\omega |f(x)| dx \text{ сх-ст-я}$$

Опр. Пусть $f: [a, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \leq b$ -

-особые точки. Тогда $\int_a^\delta f(x) dx := \int_a^{\omega_1} f(x) dx + \int_{\omega_1}^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{\omega_2} f(x) dx + \dots$

$\dots + \int_{\omega_n}^\delta f(x) dx$, где $\omega_i < c_i < \omega_{i+1}$ и $\int_a^\delta f(x) dx \text{ сх-ст-я} \Leftrightarrow \forall i,$

$$\int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} f(x) dx - cx - cx \text{ и } \int_{\omega_i}^{c_i} f(x) dx - cx - cx.$$

Пример 1:

$$1) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} 1 - e^{-b} = 1 < +\infty$$

$$2) \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_0^1 = \begin{cases} 1/(1-\alpha), & -\alpha+1 > 0 \\ (1/(1-\alpha)) \cdot (-\infty), & -\alpha+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/(1-\alpha), & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1 \end{cases}$$

При $\alpha=1$, $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = +\infty$.

T.O. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

$$3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}} = \left. \frac{x^{-\beta+1}}{-\beta+1} \right|_1^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\beta-1}, & -\beta+1 < 0 \\ \ln x \Big|_1^{\infty}, & -\beta+1 \geq 0 \end{cases}$$

T.O. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\beta}} < \infty \Leftrightarrow \beta > 1$.

Кр-ий Коши сх-ти несобств. инт:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ сх-ся} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (a, \infty): \forall b_1, b_2 \in [\delta, \infty), \omega, \\ \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Δ Это есть перенормированный кр-ий Коши для сущ. конечного предела $\lim_{b \rightarrow \omega-0} F(b)$, где $F(b) = \int_a^b f(x) dx$. Действительно, $\lim_{b \rightarrow \omega-0} F(b)$, F и конечен $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (a, \omega): \forall b_1, b_2 \in [\delta, \omega), |F(b_1) - F(b_2)| < \varepsilon$.

Ясно, что $\int_a^{\omega} f(x) dx < \infty$, то $\int_a^{\omega} f(x) dx < \infty$.

I. (пр-к ср-ия).

оп $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a; \gamma_n, \omega) \rightarrow 10^+ = \gamma_0 + \infty$;

1) Если $\exists \Delta \in [a, \omega): \forall b \in [\Delta, \omega), f(b) \leq g(b)$, то $\int_a^\omega g(x) dx$ имеет ∞ -ть $\int_a^\omega f(x) dx$ и наоборот $\int_a^\omega f(x) dx$ имеет ∞ -ть $\int_a^\omega g(x) dx$.

2) Если $\lim_{b \rightarrow \omega-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K \in (0, +\infty)$, то

$\int_a^\omega f(x) dx$ и $\int_a^\omega g(x) dx$ ∞ -и одновременно.

Δ Как для $p, q > 0$

Пример:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^q} \quad (p, q > 0) = \int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^p + x^q}.$$

$0, +\infty$ -ые осевые точки

$$\text{Пусть } p \geq q \quad \frac{1}{x^p + x^q} = \frac{1}{x^q} \cdot \frac{1}{(1 + x^{p-q})} \sim \frac{1}{x^q} \quad \text{т.о.} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^q} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^q} \Leftrightarrow q < 1.$$

$$\frac{1}{x^p + x^q} = \frac{1}{x^p} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x^{p-q}}} \sim \frac{1}{x^p} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^p + x^q} \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p > 1. \quad \text{Второе,} \quad \begin{cases} \min(p, q) < 1 \\ \max(p, q) > 1 \end{cases}$$

II. (Пр-к Абеля и Дирихле).

Пусть $f, g: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \omega$ -правая окрестность точки f и g .

Если выполнены условия (P1), (P2) или (A1), (A2), то

$\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ ∞ -и, где:

$$(A1) \quad \int_a^\omega f(x) dx \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad (P1) \quad F(b) = \int_a^b f(x) dx \text{ о.р.}$$

(A2) $g(x)$ монотон. $\nearrow 0$
при $x \rightarrow \omega - 0$

$g(x)$ - отг. и монотон.

в окр. ω . и

$g(x)$ - монотонна

(D2) $g(x)$ - монотонна $\rightarrow 0$
при $x \rightarrow \omega - 0$.

1) Надо: $\forall \varepsilon > 0$ найти $\Delta \in (a, \omega)$; $\forall b_1, b_2 \in [\Delta, \omega)$, $|\int_{b_1}^{b_2} f(x) \cdot g(x) dx| < \varepsilon$.

По 2-ой Т. о среднем $\exists \xi \in (b_1, b_2)$: $\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx = g(\xi) \cdot (\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx + g(b_2) \int_{\xi}^{b_2} f(x)dx) \cdot (*)$

2) Пусть (A1) и (A2).

(A2) $\Rightarrow \exists c > 0$: $|g(\xi)| \leq c$

(A1) $\Rightarrow \exists \Delta \in (a, \omega)$: $|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2c}$ & $|\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx| <$

$< \frac{\varepsilon}{2c}$

Тогда из (*) $|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx| \leq |g(\xi)| \cdot |\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| + |g(b_2)| \cdot |\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx|$

$\leq c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon$

3) Пусть (D1) и (D2):

из (D1), $\exists c > 0$: $|\int_a^x f(x)dx| \leq c$ & $|\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx| \leq c$

из (D2), $\exists \Delta \in (a, \omega)$: $\forall b \in [\Delta, \omega)$, $|g(b)| < \varepsilon/2c$.

Тогда из (*) $|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx| \leq |g(\xi)| \cdot |\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| + |g(b_2)| \cdot |\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx|$

$\leq \frac{\varepsilon}{2c} \cdot c + \frac{\varepsilon}{2c} \cdot c = \varepsilon$

1) Проверка (интеграл Дирихле):

$$1) I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \text{сх-ся} \text{ равномерно, } \omega = \infty - \text{сходимости.} \text{ } \omega = 0, \frac{\sin x}{x} \text{ геопр. 1, тогда}$$

т. $x=0$, $\frac{\sin x}{x}$ геопр. 1, тогда

$$(D1) f(x) = \sin x$$

$$F(x) = \int_0^x \sin x dx = -\cos x \Big|_0^x = -\cos x + 1$$

$$|F(x)| \leq 2$$

$$(D2) g(x) = \frac{1}{x} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

$$2) \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \infty. \text{ Пусть } \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty, |\sin x| > \sin x$$

$$\Rightarrow \text{по пр-ку ср-ух } \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} < \infty = \int \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} -$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx \leftarrow \text{сх-ся по Дирихле. расх.}$$

$$3) \sin(x) := \frac{\sin x}{x} - \text{коор. синус, геопр-ух отрезков.}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2}k}^{\frac{\pi}{2}(k+1)} \frac{\sin x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t + \frac{\pi}{2}k, x = \frac{\pi}{2}(k+1) \Rightarrow t = 0 \\ dx = dt, x = \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t + \frac{\pi}{2}k)}{t + \frac{\pi}{2}k} dt.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t + \frac{\pi}{2}k)}{t + \frac{\pi}{2}k} dt = (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t + \pi m} dt, k = 4\ell + 1, k = 2m,$$

$$\sin(t + \frac{\pi}{2} \cdot 2m) = \sin(t + \pi m) = \sin t \cdot (-1)^m$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t + \frac{\pi}{2}(2m+1))}{t + \frac{\pi}{2}(2m+1)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\xi(-1)^m)}{t + \pi m + \frac{\pi}{2}} dt = (-1)^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{-t + \frac{\pi}{2} + \pi m} dt =$$

$$= \left\langle u = t + \frac{\pi}{2} \right\rangle = (-1)^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n}{\pi(n+1)-u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u$$

$$= \left\langle \frac{1}{\pi m + u} - \frac{1}{\pi m - u} \right\rangle du.$$

Т.к. сх-ты равн. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left(\frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\pi m} + x - \frac{1}{\pi m - x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$

$$\text{ctg } x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\pi n - x} + \frac{1}{\pi n + x} \right).$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\pi n - x} - \frac{1}{\pi n + x} \right).$$

Интеграл Барвейна:

$$\int_0^{\infty} \text{sinc}(x) \cdot \text{sinc}(x/5) dx = \pi/2$$

$$\int_0^{\infty} \text{sinc}(x) \cdot \text{sinc}(x/3) \cdot \text{sinc}(x/5) dx = \pi/2$$

$$\int_0^{\infty} \text{sinc}(x) \cdot \dots \cdot \text{sinc}(x/13) dx = \pi/2$$

Связь с числовыми рядами.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можно интерпретировать как не собствен. интеграл Римана с $\omega = \infty$.

$$f(x) = a_n, \text{ если } x \in [n, n+1)$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Т. (Интегр. пр-к сх-ты числ. ряда или пр-к Коши -

18.04.23

Пусть $f: L(1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и f -удвигает, тогда cx -ть и p -х-ность $\int_1^\infty f(x) dx$ и $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ экв-мбл.

$$\Delta \quad f(n+1) \cdot 1 \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \cdot 1$$

$$\sum_{n=1}^\infty f(n+1) \leq \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^\infty f(n)$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=2}^\infty f(n) \leq \int_1^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) \quad \Delta$$

Пример: $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^p} \sim \int_2^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_2^\infty \frac{d \ln x}{\ln x} = \langle \ln x = t \rangle =$

$$= \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^p} < \infty \Leftrightarrow p > 1.$$

Замечание: В отличие от числовых рядов для cx -ти и $\int_a^\infty f(x) dx$ необходимо $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Интеграл будет конечного значения (по Коши).

Опр. Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\omega \in (a, b)$ -особая точка, т.е. $\forall \epsilon \in (a, \omega)$ и $\forall \delta \in (\omega, b)$, $f \in R[\epsilon, \delta]$ и $f \in R[\delta, b]$. Интеграл будет конечного значения $V.P. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{\omega-\epsilon} f(x) dx + \int_{\omega+\epsilon}^b f(x) dx \right)$, если он существует.

В ср-ии с несобст. и $\int_a^\infty f(x) dx$ Рундана:

$$(H \mathcal{Q}) - \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0+} \left(\int_a^{\omega-\epsilon_1} f(x) dx + \int_{\omega+\epsilon_2}^b f(x) dx \right).$$

Пример: $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{на } [-1, 2023] \setminus \{0\} \\ a, & x=0 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{2023} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2023} \frac{dx}{x} \right) = \int \frac{dx}{x} = \ln 2023.$$

Опр. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\forall a, b \in \mathbb{R}, f \in R[a, b]$. Тогда

$$\text{V. p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

Пример: $\text{V. p. } \int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-R}^R \cos x dx}_{2 \sin R} - \text{не сущ.}$

$$\text{V. p. } \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \sin x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Метрические пространства.

Опр. Метрические пр-ва — это пара (X, d) , где $X \neq \emptyset$,

$d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$, удовл. усл-ям:

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$

(d -метрика), $d(x, y)$ — расст. м/г точками x и y .

Примеры:

1) $X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$

1.2) $X = \overline{\mathbb{R}}, d(x, y) = |\arctg x - \arctg y|, \text{ где}$

ар $\arctg \pm \infty = \pm \pi/2$

$$1.3) X = \mathbb{R}^n = \{X = (x_1, \dots, x_n) \mid x_n \in \mathbb{R}\}$$

$$d_p(X, Y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \text{ — нормированное метрическое}$$

$$d_\infty(X, Y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| \text{ — равномерная метрика (метрика Чебышева)}$$

$$2) X = C[a, b], \quad d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Опр. Пусть (X, d) — метрическое пр-во. Тогда, что мы

— то $x_n \in X$ с-ся к $x \in X$, если $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0, d(x, x_n) < \varepsilon.$$

Например $X = C[a, b]$.

$$d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

— равн. с-х-ть.

Л. (Вейерштрасса о пот-м мн-ов в $C[a, b]$).

$\forall f \in C[a, b], \exists$ под-ть мн-ов $p_n(x) = a_n(n)x^n +$

$$\dots + a_1(n)x + a_0(n): p_n \xrightarrow{[a, b]} f \Leftrightarrow d(p_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Опр. Базисный мн-ом Вейштейна наз-я мн-м б-ва

$$B_{n, k}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \quad t \in [0, 1]$$

Мно-ом Вейштейна, порожд. по-ей $f \in C[0, 1]$

$$\text{наз-я мн-м } B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n, k}(t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot$$

$$C_n^k t^k (1-t)^{n-k}.$$

сб-ба $\beta_{n,k}(t)$:

$$(1) \sum_{k=0}^n \beta_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = (t + (1-t))^n = 1$$

$$2) \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

$$\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1} y^{n-k} = n(x+y)^{n-1}$$

доинтегрируя x

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k x^k y^{n-k} = n x (x+y)^{n-1}$$

$$\downarrow y = 1-x$$

$$\sum_{k=0}^n k \beta_{n,k}(x) = n x$$

$$(3) \sum_{k=2}^n k C_n^k x^k y^{n-k} = n x (x+y)^{n-1}$$

$$\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$\sum_{k=2}^n k^2 C_n^k x^{k-1} y^{n-k} = n(x+y)^{n-1} + n(n-1)(x+y)^{n-2} x$$

доинтегр. на x

$$\sum_{k=2}^n k^2 C_n^k x^k y^{n-k} = n x (x+y)^{n-1} + n(n-1) x^2 (x+y)^{n-2}$$

$$\downarrow y = 1-x$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \beta_{n,k}(x) = n x + n(n-1) x^2$$

$$(3) \sum_{k=0}^n (k^2 - n^2) \beta_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^n k^2 \beta_{n,k}(t) - 2 n t \sum_{k=0}^n k \beta_{n,k}(t)$$

$$= B_{n,n}(t) + n^2 \sum_{k=0}^n t^2 \beta_{n,k}(t) \stackrel{(1)/(2)}{=} n t + n(n-1) t^2 - 2 n t n \cdot t + n^2 t^2 \cdot 1 = n(t - t^2)$$

Т. (Бернштейна).

$$\overline{a_0} \quad B_n(t) \stackrel{(1)/(2)}{\rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}: \forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \frac{1}{m^{1/3}} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/2.$$

$$M = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| < \infty, \exists n \in \mathbb{N}: n \geq m: \frac{M}{n^{1/3}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0: \forall x \in [0, 1], |B_n(f)(t) - f(t)| &= \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} - f(t) \right| \leq \\ &= \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{\left| \frac{k}{n} - t \right| < \frac{1}{n^{1/3}}} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \sum_{\left| \frac{k}{n} - t \right| \geq \frac{1}{n^{1/3}}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{\left| \frac{k}{n} - t \right| < \frac{1}{n^{1/3}}} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \sum_{\left| \frac{k}{n} - t \right| \geq \frac{1}{n^{1/3}}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \end{aligned}$$

$$B_{n,n} \left(\frac{1}{2} + \frac{2M}{n^{1/3}} n(t-t^2) \right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{n^{1/3}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(Без $B_{n,k}$)

$\mathcal{D}$ -оо (т. Внестрациона):

$$\Delta \varphi: [0, 1] \rightarrow [a, b], \varphi(t) = a(1-t) + t b, \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} \varphi \in [a, b], \varphi(t) &= a + t(b-a) \in [a, b] \Rightarrow \exists p_n: p_n(t) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi(t). \text{ Тогда } p_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \end{aligned}$$

21.04.23

Крутые безе.

Опр. Пусть в $\mathbb{R}^2$ заданы $n+1$ -точек: $p_0, \dots, p_n, \text{ где}$

указано ор-ии круто безе δ :

$$\delta(p_0, p_1)(t) = t p_1 + (1-t) p_0, t \in [0, 1]$$

$$\delta(p_0, \dots, p_n)(t) = t p_n + (1-t) \delta(p_0, \dots, p_{n-1})(t) \in [0, 1] \quad \underline{9.9}$$

$$\dots, p_n(t).$$

Предположение: $\gamma(p_0, \dots, p_n)(t) = \sum_{k=0}^n p_k B_{n,k}(t)$

$$\Delta(B_{n,k}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}) \text{ по индукции.}$$

База $n=1$: $\gamma(p_0, p_1) = t p_0 + (1-t) p_1 = p_0 \underbrace{B_{1,0}(t)}_{1-t} + p_1 \underbrace{B_{1,1}(t)}_t$

n -верно

$$\gamma(p_0, \dots, p_n)(t) = t \gamma(p_1, \dots, p_n)(t) + (1-t) \gamma(p_0, \dots, p_{n-1})(t)$$

$$= t \cdot \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} B_{n-1,k}(t) + (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} p_k B_{n-1,k}(t)$$

$$p_k B_{n-1,k}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} C_{n-1}^k t^k (1-t)^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k C_{n-1}^k t^k (1-t)^{n-1-k}$$

$$+ (1-t)^{n-1-k} \cdot 1 \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\sum_{k=0}^n p_k C_{n-1}^{m-1} t^m (1-t)^{n-m} + \sum_{m=0}^{n-1} p_m C_{n-1}^m t^m (1-t)^{n-m} = p_n(t)$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} p_m (C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m) t^m (1-t)^{n-m} + p_n t^n = \sum_{m=0}^n p_m C_n^m t^m (1-t)^{n-m}$$

$$\cdot (1-t)^{n-m}$$



Топологические моменты в метр-ом пр-ве.

Опр: Пусть (X, d) — м.п. Открытым шаром радиуса

$r > 0$ в точке $x \in X$ наз-х мн-во $B(x, r) = \{y \in X :$

$d(x, y) < r\}$.

Примеры:

$$1) (R^3, dp), 1 \leq p < \infty$$

$$2) B_2(0, 1) = \{x \in R^2 : d((x, y), 0) < 1\} = \{x \in R^2 : |x| < 1\}$$

Т.О. $X = \text{int } A \sqcup \text{ext } A \sqcup \text{Fr } A$.

Опр. Мн-во A наз-я открытым, если $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subset A$, т.е. $A = \text{int } A$.

Предложение (о сл-ах открытых мн-в)

(1) A_α -открытое $\Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha$ -открыто

(2) $A_1, \dots, A_n$ -открыто $\Rightarrow \bigcap_{k=1}^n A_k$ -откр.

(3) $\text{int } A = \bigcup_\alpha A_\alpha, A_\alpha \subseteq A$ - открыто.

□ 1) ~~$x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$~~ Пусть $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0: x \in A_{\alpha_0}, A_{\alpha_0}$ -откр.
 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup_\alpha A_\alpha \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha$ -откр.

2) Пусть $x \in \bigcap_{k=1}^n A_k \Rightarrow \forall k=1, \dots, n, x \in A_k \Rightarrow \exists \varepsilon_k > 0:$

$B(x, \varepsilon) \subset A_k$. Пусть $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k$, тогда $B(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{k=1}^n A_k$.

$B(x, \varepsilon) \subset A_k, \forall k=1, \dots, n$

$B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n A_k$ -откр.

(3) $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ -откр. по (1) $\Rightarrow A \subseteq A \Rightarrow \text{int } A \subseteq A$, но

$\text{int } A \subset A$.

$x \in A \Rightarrow x \in A_\alpha$ -откр. $\subset A \Rightarrow \exists B(x, \varepsilon) \subset A_\alpha \subset A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \in \text{int } A \Rightarrow A \subseteq \text{int } A \Rightarrow A = \text{int } A$. $\triangleright$

Опр. Мн-во A -замкнуто, если $X \setminus A$ -открыто. Тогда

~~Тогда~~ $x \in X$ наз-ся предельной точкой для A , если $\forall \varepsilon > 0$,

$$(B(x, \varepsilon) \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Обозн: $\lim A$.

Замкнутая мн-ва A наз-я мн-во $\in \mathcal{P}A = \mathcal{P}U \lim A$
(множ-ва 1)

Предложение 10 замкнутых мн-вах).

(1) A_α -замкн. $\Rightarrow \bigcap_\alpha A_\alpha$ -замкн.

(2) $A_1, \dots, A_n$ -замкн $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k$ -замкн.

(3) $\lim A$ -замкнуто

(4) A -замкнуто $\Leftrightarrow A = \text{cl} A (\Leftrightarrow \lim A \subset A)$

В (1) и (2) след. из сб-б откр. мн-в и протн где Морган

$$X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha)$$

$$X \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha)$$

(3) Нужно г-ть, что $X \setminus \lim A$ -открыто. Пусть $x \in$

$X \setminus \lim A$, т.е. $x \notin \lim A$. Пусть δ от протнбного

$\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap \lim A \neq \emptyset$. $\Rightarrow x \in \lim A$ -протнбное.

(4) Пусть A -замкнуто, г-н, что $\lim A \subset A$. Пусть

$\exists x \in \lim A$ и $x \notin A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

$x \in X \setminus A$ -откр. $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$: $B(x_0, \varepsilon_0) \subset X \setminus A$ -протн.

$\Leftrightarrow$ Пусть $\lim A \subset A$, покажем, что A -замкнуто.

$\forall x \in X \setminus A \Rightarrow x \notin \lim A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ 103

т.е. $B(x, \epsilon) \subset X \setminus A$ - открыто

Пример: $\mathbb{R}^n$ - замкнутое мн-во

Опр. Пусть (X, d) - м.п. Пусть $x_n \in X$ наз-я фундаментальной, если $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq n_0, d(x_n, x_m) < \epsilon$.

М.п. (X, d) наз-я полным, если всякая фундаментальная с-ся, т.е. $\exists x \in X: x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Примеры:

1) $X = \mathbb{R}^n, d = d_\infty, x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ - с-я

$\forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}: \forall p, q \geq m_0, d_\infty(x^{(p)}, x^{(q)}) < \epsilon$

$\forall 1 \leq k \leq n, |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \epsilon \Leftrightarrow \max_{1 \leq k \leq n} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \epsilon$

т.е. $\{x_k^{(m)}\}_{m \geq 1}$ - с-я. В $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists x_k \in \mathbb{R}: x_k^{(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} x_k$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$d_\infty(x^{(m)}, x) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k^{(m)} - x_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ - полно.

2) $X = C[a, b], d_\infty$ - полное

с-я. $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq n_0, \max_{t \in [a, b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon$

$< \epsilon$

~~Пример не полного пр-ва:~~

Пр. $X = C[0, 1], d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$

- Вернем отвлечение эвб-ти на $\delta([a, \delta])$:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ п. в. (оде интегрируемости по Риману)}$$

$$\delta([a, \delta]) \int_a^b d([f], [g]) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Модифицируемое мн-во Кантора.

25.04.23

$$F_0 = [0, 1] - \text{отрезок}$$

$$F_1 = B_1^{(11)} \cup B_1^{(12)} \quad \begin{array}{c} 0 \quad \frac{1-\delta}{3} \quad 1 \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} B_1^{(11)} \\ B_1^{(12)} \end{array} \quad \begin{array}{c} (записи. \delta \in (0, 1)) \end{array}$$

$$F_2 = B_2^{(11)} \cup B_2^{(12)} \cup B_2^{(13)} \cup B_2^{(14)} \quad \begin{array}{c} 0 \quad \frac{1-\delta}{3} \quad \frac{2(1-\delta)}{3} \quad \frac{1-\delta}{3} \quad 1 \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} B_2^{(11)} \\ B_2^{(12)} \\ B_2^{(13)} \\ B_2^{(14)} \end{array}$$

$$\vdots$$

$$F_n = \bigsqcup_{k=1}^{2^n} B_n^{(k)}$$

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$$

$$\delta - \text{модиф. мн-во Кантора наз-ся } F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n.$$

Примечание (о эвб-ти мод. мн-ва Кантора).

1) F - замкнутое мн-во

2) F - состоит только из граничных точек, конца отрезка $B_n^{(k)}$ лежат в F .

$$3) \mu(F) = \delta.$$

$$\Delta \quad 3) \mu(F_n) = 1 - \frac{1-\delta}{3} - 2 \cdot \frac{1-\delta}{3^2} - \frac{2^2(1-\delta)}{3^3} - \dots - \frac{2^{n-1}(1-\delta)}{3^n} =$$

$$= 1 - \frac{1-\delta}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = 1 - \frac{1-\delta}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - (1-\delta) \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) \quad \text{1105}$$

$$M(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$2) \text{ Пусть } \exists f \in R[0,1]: f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \text{ т.е. } \int_0^1 |f_n - f| dx \rightarrow$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \text{ Покажем, что } f = 0 \text{ п.в.}$$

$$(\alpha, \beta) \subset [0,1] \setminus F.$$

$$\text{т.к. } \int_0^1 |f_n - f| dx \rightarrow 0 \Rightarrow \int_0^1 |f_n - f| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\langle f_n|_{[0,1] \setminus F} = 0 \rangle = \int_0^1 |f| dx = 0$$

$$\Rightarrow f|_{(\alpha, \beta)} = 0, \text{ п.в. } \Rightarrow f|_{[0,1] \setminus F} = 0, \text{ п.в.}$$

$$F = E \cup D, \quad E = \{x \in F: f(x) = 0\}$$

$$D = \{x \in F: f(x) \neq 0\}$$

$$y \in D, f(y) \neq 0, \text{ но т.к. } y \in F \Rightarrow y - \text{граница глас } F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists (y - \varepsilon, y + \varepsilon): \exists z \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon), z \notin F,$$

$$f(z) = 0. \Rightarrow y - \text{точка разрыва глас } f \Rightarrow \text{т.к. } f \in$$

$$C(R[0,1]), \text{ то } M(D) = 0 \Rightarrow f = 0 - \text{п.в. на } [0,1].$$

$$3) 0 < \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f_n(x) - f(x) dx = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_0^1 x_{f_n}(x) dx \quad \text{— противоречие}$$

$$M(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



Непрерывность.

Опр. Пусть $(X, d_1), (Y, d_2)$ - м.п., $A \subseteq X$, $f: A \rightarrow Y$, $x_0 \in \lim A$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y, y \in Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$\forall x \in X \cap A, 0 < d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), y) < \varepsilon.$$

Опр. Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) - м.п., $A \subseteq X, x_0 \in \lim A$ и $f: A \rightarrow Y$ наз-я непр. в т. x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ т.е.}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in X \cap A, d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Пример: (X, d) - м.п., $x_0 \in X$

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = d(x, x_0) - \text{непр. } \forall x \in X.$$

$y \in X$ - фикс.

$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \underset{\text{непр. со}}{\leq} d(x, y) < \delta$$

"

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

полным $\delta = \varepsilon$.

Опр. Пусть $(X, d_1), (Y, d_2)$ - м.п. отображение

$$f: X \rightarrow Y \text{ наз-я:}$$

- непр-м на X , если f непр. $\forall x \in X$

- непрерывно, если $\exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in X, d_1(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

100 - Но наст-ии если f - непр-м, то $d_1(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

$$\leq d(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

- Сжимающим, если f -линейн, и $L < 1$.

- Устойчивый, если $d_1(f(x_2), f(x_1)) = d(x_1, x_2)$

Пр-п сжимающих отображений. Банаховская теорема.
 $\forall x_1, x_2 \in X$

Теорема (о неподв. точке для сжимающих отображений)

Пусть (X, d) - полное метр. пр-во и $F: X \rightarrow X$

- сжим. отображ. Тогда $\exists!$ неподвижная точка для

$$F, \text{ т.е. } F(x) = x.$$

Δ Возьмем произвольн. т. $x_0 \in X$, положим:

$$x_1 = F(x_0), \quad x_2 = F(x_1) = F \circ F(x_0) = F^{(2)}(x_0) \quad (\text{не путать})$$

$$x_{n+1} = F(x_n) = F^{(n+1)}(x_0) \quad (\text{не путать, а комп.})$$

Покажем, что x_n - фундамент.

$$d(x_n, x_m) \stackrel{(m>n)}{=} d(F(x_{n-1}), F(x_{m-1})) \leq L d(x_{n-1}, x_{m-1})$$

$$\leq L^2 d(x_{n-2}, x_{m-2}) \leq L^n d(x_0, x_{m-n})$$

$$d(x_0, x_k) \stackrel{(k \geq 0)}{\leq} d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)$$

$$x_k \leq d(x_0, x_1) + L d(x_0, x_1) + L^2 d(x_0, x_1) + \dots + L^{k-1} d(x_0, x_1)$$

$$= d(x_0, x_1) (1 + L + L^2 + \dots + L^{k-1}) < \frac{1}{1-L} d(x_0, x_1).$$

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{L^n}{(m-n)^{1-L}} d(x_0, x_1) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \text{ т.к. } L \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

т.к. (X, d) - полно, то $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x, x \in X$.

$F(x)$ перейдем к пределу по $m \rightarrow \infty$.

$$d(x, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1).$$

$$d(F(x), x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(F(x_n), x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = x.$$

Пусть $\exists$ ещё одна непозв. $y = f(y)$. Тогда

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y), \text{ если } d(x, y) \neq 0,$$

$$\text{то } L \geq 1, \text{ но } L < 1 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y. \quad \triangle$$

Примеры:

1) Вязность полноты М.П. в т. боннах.

$$X = (0, 1], f(x) = \frac{1}{2}x$$

$$\|f(x) - f(y)\| = \frac{1}{2}|x - y|, L = \frac{1}{2}$$

но X не полно по метрике $d(x, y) = |x - y|$

непозв. $f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}x, x = 0 \notin X$.

2) Вязность снатию в т. боннах.

$$f(x) = x - \arctg x + C, C >> \frac{\pi}{2} \text{ (много больше)}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$|f(x) - f(y)| = |x - \arctg x - (y - \arctg y)| \stackrel{\text{т. Лар.}}{=} \left(1 - \frac{1}{1+C^2}\right) |x - y| = \frac{C^2}{1+C^2} |x - y| \leq |x - y| \quad \exists c(x, y)$$

Непозв. точки: $f(x) = x: \arctg x = C$.

Опр. Окрестностью точки x будем наз-ть любое открытое

мн-во, сог. X , т.е. $V(x)$ -окр-ть т. $x \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B$

$$: B(x, \varepsilon) \subset V(x).$$

Предложение (о с. экв. непрерывности).

Пусть $(X, d_1), (Y, d_2)$ — м. п., $A \subseteq X, x_0 \in \text{Lim} A$, $f: A \rightarrow Y$. Тогда экв. непрерывности экв. к:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$$

$$2) \forall \text{ окр. } V(y), \exists \text{ окр. } U(x_0): f(V(x_0) \setminus \{x_0\}) \subset U(y)$$

$$3) \forall \text{ послед. } x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$$

$$\Delta 1) \Rightarrow 2) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in X \cap A, 0 < d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), y) < \varepsilon.$$

$$2) \Rightarrow 1) \forall \text{ окр. } V(y), \exists \varepsilon > 0: B(y, \varepsilon) \subset U(y), \text{ для этого } \varepsilon > 0$$

$$\text{возмем } \delta > 0 \text{ по 1) и в качестве } U(x) = B(x, \delta).$$

$$\text{Тогда } f(V(x_0) \setminus \{x_0\}) = f(B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subset B(y, \varepsilon) \subset U(y).$$

$$\text{Таким образом, } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: f(B(x, \delta) \setminus \{x_0\}) \subset B(y, \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X \cap A: 0 < d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), y) < \varepsilon$$

$$1) \Rightarrow 3): \text{ очевидно}$$

$$3) \Rightarrow 1): \text{ от противного: Пусть неверно, что } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y, \text{ т.е. } \exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0, \exists x \in A \cap X, 0 < d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), y) \geq \varepsilon.$$

$$u) \geq \varepsilon.$$

возьмем $\delta_n = \frac{1}{n}$, тогда $\exists x_n \in A \cap X: 0 < d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ и при этом $d_2(f(x_n), y) \geq \varepsilon$
 $x_n \neq x_0 \Rightarrow f(x_n) \not\rightarrow y \subseteq$

$\Downarrow$

противоречие.

▷

Следствие (опр. непрерывности в терм. окр.):

Пусть $f: A \rightarrow Y, A \subseteq X, x_0 \in \text{int} A$. Тогда f непр. в т.
 $x_0 \Leftrightarrow \forall \text{ окр. } V(f(x_0)), \exists \text{ окр. } U(x_0): f(U(x_0)) \subseteq V(f(x_0)).$

Теорема (критерий непрерывности в целом)

Пусть $(X, d_1), (Y, d_2)$ — м.п., $f: X \rightarrow Y$. Тогда орг.

усл. экв-ны:

(1) $f \in C(X, Y)$, т.е. f непр. в каждой т. $x_0 \in X$.

(2) $\forall \text{ окр. } G \ni Y, f^{-1}(G) - \text{откр. в } X$

(3) $\forall$ замкн. $F \subseteq Y, f^{-1}(F)$ — замкнуто в X

◁ 1) $\Rightarrow$ 2) Возьмем откр. мн-во $G \ni Y, f(x_0) \in G$

(иначе $f^{-1}(G) = \emptyset$ — откр. в X), т.е. G — окр.

т. $f(x_0)$. Тогда, так как f — непр. в т. x_0 , то $\exists$

окр. $V(x_0)$ — откр., $f(V(x_0)) \subseteq G \Leftrightarrow V(x_0) \subseteq f^{-1}(G)$

т.е. $\forall x_0 \in f^{-1}(G), \exists \text{ окр. } U(x_0) \subseteq f^{-1}(G) \Rightarrow$ по опр.

$f^{-1}(G)$ — откр.

2) $\Rightarrow$ 1): по следствию Возьмем в качестве $G = V(f(x_0))$

117 ~~мн-во~~ — ико т. $f(x_0)$, тогда $f^{-1}(G)$ — откр. $f^{-1}(f(x_0))$

$$f(V \setminus f(x)) \ni x_0.$$

$$(3) f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus (Y \setminus F)) = X \setminus \underbrace{f^{-1}(Y \setminus F)}_{\substack{\text{откр. } \varnothing Y \\ \text{откр. } \varnothing X}} \Rightarrow F\text{-замкн.}$$

Компактные мн-ва



Опр. Пусть (X, d) -м.п., мн-во $A \subseteq X$ наз-я:

-отр-ым, если $\exists$ шар $B(x_0, r) : A \subset B(x_0, r)$

-близке отр-ым, если $\forall \varepsilon > 0, \exists$ конечная ε -сеть, т.е.

$$\exists x_1, \dots, x_n \in X : A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

Упр. Если A -близке отр., то центр x_k можно найти в A .

-компактным, если $\forall$ из любого открытого покр

-ия A , т.е. $A \subset \bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$, G_{α} -откр., можно выбрать

конечное подпокрытие, т.е. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : A \subset \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}$.

-Полным, если м.п. (A, d) -полно.

Опр. Система мн-в F_{α} наз-я центрированной в $A \subseteq X$, если $\forall n \in \mathbb{N}, \bigcap_{k=1}^n F_{x_k} \cap A \neq \emptyset$.

Теорема (кр-ий компактности)

Пусть (X, d) -м.п., $A \subseteq X$, Тогда след. экв.

(1) A -компактно

(2) Любое центр. в A семейство замкнутых [113

мн-в F_α имеет непустое пересечение с A , т.е.

$$\bigcap_{\alpha} F_\alpha \cap A \neq \emptyset$$

(3) Из любой послед-ти $x_n \in A$ можно выбрать подпослед-ть x_{n_k} сходящуюся к $x \in A$.

(4) A - полно и вполне огр-мо (критерий Хаусдорфа)

1) $\Rightarrow$ 2): Пусть $\{F_\alpha\}$ - центр. в A семейство замк. мн-в. Пусть $\bigcap_{\alpha} F_\alpha \cap A = \emptyset$, т.е. $A \subset X \setminus \bigcap_{\alpha} F_\alpha = \bigcup_{\alpha} (X \setminus F_\alpha)$ -откр. Т.к. A - компактно, то $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n: A \subset \bigcup_{k=1}^n (X \setminus F_{\alpha_k}) \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k} \cap A = \emptyset$ -против. с центр F_α в A .

2) $\Rightarrow$ 3): Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$, $F_n = \text{cl}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ -

-замкн, $F_n \supseteq F_{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{k=1}^n F_{n_k} \cap A \supset F_{\max\{n_k\}} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow F_\alpha$ - центр.

в A сем. замкнм. Тогда $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \cap A \neq \emptyset$, т.е. $\exists x \in A$ и

$x \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n \Rightarrow \begin{cases} \text{любо } x_n = x, \forall n \geq n_0, \text{ т.е. } \exists x_{n_k} \text{ сходящаяся} \\ \text{любо } \exists x_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \end{cases}$

и $x \in A$.

3) $\Rightarrow$ 4): Предположим, что A не явл. вполне огр., т.е.

$\exists \varepsilon > 0: \forall x_1, \dots, x_n \in X, A \not\subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$.

Построим послед-ть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ индуктивно, выбирая

$x_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$. $\{x_n\}$ - не фундам., т.к. $d(x_n,$

$x_m \geq \varepsilon, \forall m \Rightarrow x_n$ и $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$ не имеет с.с.х., это противоречит усл(3).

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ -folge. пока-ть $B(A, d)$, из(5)

$\exists$ поглоща-ть $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in A, x_n$ -folge $\Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

4) $\Rightarrow$ 1): Дано: A -полно и более ор. Пусть $A \subset \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$, B_{α} -откр. и пусть от противного A не покр. конечная поглоткр.

Пусть $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ и $x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)} \in A: A \subset \bigcup_{k=1}^{k_n} B(x_k^{(n)}, \varepsilon_n)$

Всегда нар $B(x_k^{(n)}, \varepsilon_n)$, которое не покрывается конечным набором н-т B_{α} . Обозначим $y_n = x_{k_n}^{(n)}$.

Покажем, что y_n образуетfolge. Пока-ть $B(A)$.

$B(y_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset B(y_n, 2\varepsilon_n)$. $d(y_n, y_{n+1}) < 2\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

Тогда, если $m > n \Rightarrow 0, d(y_m, y_n) \leq d(y_m, y_{m-1}) + d(y_{m-1}, y_{m-2}) + \dots + d(y_{n+1}, y_n) \leq \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$

$< \varepsilon$. Т.к. A -полно, то y_n с.с.х. к $y \in A$. Имеем,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq \tilde{n}_0, y_n \in B(y, \varepsilon)$, следовательно,

$\exists n > \tilde{n}_0: B(y_n, \varepsilon_n) \subset B(y, \varepsilon), y \in A \subset \bigcup_{\alpha} B_{\alpha} \Rightarrow \exists \alpha_n: y \in$

$B_{\alpha_n} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: B(y, \varepsilon) \subset B_{\alpha_n} \Rightarrow B(y, \varepsilon) \subset B_{\alpha_n}$ -поглоткр

Заверше: Пусть $(X, d_1), (X, d_2)$ -м.п.

- (1) Если $A \subseteq KX$ (компактно в X), то A -замкнуто в X
- (2) Если $A \subseteq KX$, и B -замкнуто, $B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq KX$
- (3) Если $f: X \rightarrow Y$ -нпр., то $A \subseteq KX \Rightarrow f(A) \subseteq Y$.
- 1) Пусть $x_n \in A$, и $x_n \rightarrow x$, то $x \in X$. По п.3 т.
 $\Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in A \Rightarrow x = x_0 \in A$.
- 2) Пусть $B \subseteq A \subseteq KX$. Пусть $x_n \in B \subseteq A \Rightarrow \exists x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in A$
 т.к. B -замкнуто $\Rightarrow x \in B \Rightarrow$ по 1) $B \subseteq KX$
- 3) Пусть $f(K) \subseteq \bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$, G_{α} -откр. в $Y \Rightarrow$
 $\Rightarrow K \subseteq f^{-1}(\bigcup_{\alpha} G_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(G_{\alpha}) \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n: K \subseteq \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_k}) \Rightarrow f(K) \subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}$ D

Презюмение (компактность бдвк-м пр-ии).

Пусть (X, d) , (Y, ρ) -м.п., $A \subseteq KX$, $B \subseteq KY$. Тогда
 в м.п. $(X \times Y, r)$, $A \times B \subseteq K(X \times Y)$, где $r((x, y_1), (x_2, y_2)) = (d(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2))^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$.

□ Пусть (x_n, y_n) -послед-ть в $A \times B$, т.к. $x_n \in A$, то $\exists x_{n_k}$
 сгущ. к $x \in A$, т.к. $y_{n_k} \in B$, то $\exists y_{n_{k_m}}$ сгущ. к $y \in B$.

$$(x_{n_{k_m}}, y_{n_{k_m}}) \xrightarrow{p} (x, y) \in A \times B$$

Теорема (кр-ий компактности в $\mathbb{R}^n$) 05.05.23

Пусть $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$.

л.л. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ компактно $\Leftrightarrow A$ -замкнуто и A -огр.

$$D \Rightarrow) H \subset K \stackrel{\text{ш}}{\Rightarrow} H\text{-замкнуто}$$

$$A\text{-близне-отражительно} \Rightarrow A\text{-отр.}$$

$$\Leftrightarrow) A\text{-замкн. и отр-но.}$$

$\exists$ парализующий: $A \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$;

— компактно в $\mathbb{R}^n$ т.к. есть замкнут. пр-ие компактных мн-в. Т.к. A -замкнуто, то A -компактно $\triangleright$

Теорема (Вейерштрасса) в м.п.

Пусть (X, d) — м.п., $k \in X$, $f: k \rightarrow \mathbb{R}$ — непр.

гд-я. Тогда $\exists x_0, y_0 \in k: f(x_0) = \sup f(k) < \infty$

$$f(y_0) = \inf f(k) > -\infty$$

Δ т.к. $k \in X$, $f: k \rightarrow \mathbb{R}$ — непр-на, то $f(k)$ —

— компактно в $\mathbb{R}$. Стало быть, что $\sup_{f(k) \text{ отр.}} f(k) < \infty$

$$f(k)\text{-замкн.} \Rightarrow \sup f(k) \in f(k)$$

$$\inf f(k) \in f(k), \text{ значит, } \exists x_0, y_0 \in$$

$$k, f(x_0) = \sup f(k).$$

$$f(y_0) = \inf f(k).$$

Опр. $(X, d_1), (X, d_2)$ — м.п. $f: X \rightarrow Y$ наз-я равн.

непр., если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in X: d_1(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Теорема (Кантора в м.п.)

Пусть (X, d) - м.п., $K \subseteq X$ и $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ - непр. ф-я.
 Тогда f - равн. непр-ва $f: (K, d) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$.

связное мн-во

Опр. Пусть (X, d) - м.п., $(A \subseteq X)$ оно наз-я связным, если не сущ. откр. не пустое мн-во G_1 и $G_2: X = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Опр. $A \subseteq X$ наз-я связным, если (A, d) связно

Откритое мн-во $V(A, d)$ может быть не откр. $V(X, d)$

Опр. Пусть (X, d) - м.п., $A \subseteq X$. A наз-я лин-но связным, если $\forall x, y \in A, \exists$ непр. отобр. $\gamma: [a, b] \rightarrow A, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y$

Теорема (о св-ти образа непр-ой ф-ции).
 Пусть $(X, d_1), (Y, d_2)$ - м.п., $A \subseteq X$ - связное мн-во.
 $f: A \rightarrow Y$ - непр. Тогда $f(A)$ - связное мн-во в Y .

Предположим, что это не так, т.е. тогда
 $f: (A, d_1) \rightarrow (f(A), d_2)$ - непр. отобр.
 $f(A) = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$
 $G_1, G_2 \neq \emptyset, G_1, G_2$ - откр. в $(f(A), d_2)$

л.р. По т.12 (л.р.) мн-во $f(A)$ связно $f^{-1}(G_1)$

$f^{-1}(G_2) - \text{откр. в } A.$

$$A = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2), \quad \emptyset \neq G_1 \subset f(A)$$

$$f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) = \emptyset \quad \emptyset \neq G_2 \subset f(A)$$

$$f^{-1}(G_1) = \emptyset$$

$\Rightarrow A$ -не связно-противоречие

$$f^{-1}(G_2) \neq \emptyset$$



Теорема (о сд-ти в $\mathbb{R}$)

Для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, < \alpha, \beta >$ - связно.

1) Д-н, что $X_A, A \subset X, (X, d)$ - м.п. - непр. отк.

$X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда и тогда тогда, когда A - открыто и замкнуто одновременно.

$$\text{Пример: } X \neq \emptyset, d(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$$

Тогда, точка - открыто - замкнутое нм-бо.

$$\Rightarrow) X_A - \text{непр-ое}, X_A^{-1}((\frac{1}{2}, 2)) = A - \text{откр.}$$

$$X_A^{-1}((-1, \frac{1}{2})) = X \setminus A - \text{откр} \Rightarrow A - \text{замкн.}$$

$\Leftrightarrow$ Пусть A - откр. и A - замкнуто.

$$X_A(G), G - \text{откр. в } \mathbb{R}$$

$$0, 1 \in G \Rightarrow X_A^{-1}(G) = G - \text{откр}$$

$$0 \notin G, 1 \in G \Rightarrow X_A^{-1}(G) = A - \text{откр}$$

$$1 \in G, 0 \notin G \Rightarrow X_A^{-1}(G) = X \setminus A - \text{откр.}$$

$$0, 1 \in G \Rightarrow X_A^{-1}(G) = X - \text{откр}$$

$\Rightarrow X_A$ - непр.

2) Предположим, что $\langle a, b \rangle$ не связное мн-во.

Тогда $\exists G_1, G_2$ - открытые в $(\langle a, b \rangle, ||)$, $\langle a, b \rangle = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1, G_2 \neq \emptyset$.

$$\chi_{G_1}: (\langle a, b \rangle, ||) \rightarrow (\mathbb{R}, ||)$$

G_1 - откр. - замкнутое $\Rightarrow \chi_{G_1}$ - непр. отобра. $\Rightarrow$ По Т. Бля

наис-Коши для непр. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \exists x \in$

$\in \langle a, b \rangle: \chi_{G_1}(x) = \frac{1}{2}$ - противоречие. Δ

Теорема (о связности связностей)

Пусть (X, d) - м.п., $A \in X$ - лнм. связное мн-во,

тогда A - связно. обратное, в общем случае, неверно.

Δ от противного.

Пусть A не связно, т.е. $\exists G_1, G_2$ - откр. в A , $G_1, G_2 \neq \emptyset$,

$G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $A = G_1 \cup G_2$. Пусть $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ непр. отобра. $\gamma: [a, b] \rightarrow A$, где $\gamma(a) = x_1$

$$\gamma(b) = x_2.$$

$\gamma^{-1}(G_1), \gamma^{-1}(G_2)$ - откр. $[a, b] = \gamma^{-1}(G_1) \cup \gamma^{-1}(G_2)$,

$\gamma^{-1}(G_1) \cap \gamma^{-1}(G_2) = \emptyset$, $\forall a \in \gamma^{-1}(G_1) = \emptyset, b \in \gamma^{-1}(G_2)$

$= \emptyset \Rightarrow [a, b]$ - не связен - против. Δ

Пример. $X = \mathbb{R}^2$, $d((x, y)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

$$A = \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{0\} \times [y, 1]$$

упр. Обсуждать ~~нужно~~ связность / несвязность данного при
мера.

Теорема (Больzano - Коши в $\mathbb{R}^n$)

Пусть (X, d) - м.п., $A \subset X$ - связное мн-во, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ - непр. отобр. Тогда $\forall y_1, y_2 \in f(A)$, $\forall t$, лежащая
между y_1 и y_2 , $\exists x \in A: f(x) = t$.

∇ Пусть $y_1 < y_2$ и $t \in (y_1, y_2)$, $t \notin f(A)$

$$G_1 = (-\infty, t)$$

$$G_2 = (t, +\infty)$$

$$f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2) - \text{откр. в } A.$$

$$1) \text{ ~~нужно~~ } A = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2), f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) = \emptyset$$

$$f^{-1}(y_1) \in f^{-1}(G_1) \neq \emptyset$$

$$f^{-1}(y_2) \in f^{-1}(G_2) \neq \emptyset \Rightarrow \text{противоречие.}$$

Структура окруж. пространства $\mathbb{R}^n$.

1) Лин. структура - задана 2 операциями:

$$1.1) "+", \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$1.2) " \cdot ": \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Аксиомы.

$$1) x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$2) x + y = y + x$$

$$3) \exists 0 = (0, \dots, 0): 0 + x = x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$4) \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \cancel{x + (-x)} = 0 \quad \exists -x \in \mathbb{R}^n; \quad x + (-x) = 0.$$

$$5) \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$6) \alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$$

$$7) 1 \cdot x = x$$

$$8) (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x$$

12.03.23

2) Метрическая структура в $\mathbb{R}^n$.

Опр. Пусть V -линейное пространство над $\mathbb{R}$, отображение $\|\cdot\|: V \rightarrow$

$[0, +\infty)$ наз-я нормой, если:

$$1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\text{-нейтр. элемент в } V.$$

$$2) \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$3) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{неравенство треугольника})$$

$(V, \|\cdot\|)$ - нормированное пространство.

Пример: $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Норма порождает метрику: $d(x, y) = \|x - y\|, \quad d_p(x, y) =$

$$= \|x - y\|_p, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$2) \text{ в } C[a, b], \quad d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty$$

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \text{ - норма.}$$

Опр. Пусть V -линейное пространство, на котором задана норма

$\|\cdot\|, \|\cdot\|_*, \|\cdot\|^*$. Эти нормы наз-я эквивалентными, если

$$\exists A, B > 0$$

$$\forall x \in V, \|x\|_* \leq A \|x\|$$

$$\|x\|_* \leq B \|x\|_*$$

Теорема (об экв.-норм в $\mathbb{R}^n$)

Век норма в $\mathbb{R}^n$ экв.

Пусть задана норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$. Д-н, что она экв.,

например, $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$.

Пусть $e_k, k=1, \dots, n$ - станд. базис в $\mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq \underbrace{\|x_1 e_1\| + \dots + \|x_n e_n\|}_{\text{нераб.}} =$$

$$= |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\| (|x_1| + \dots + |x_n|)$$

$$\stackrel{0 < A < \infty}{\Rightarrow} \|x\|_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq A \|x\|_1.$$

2) Покажем, что отображ. $F: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$,

$$F(x) \rightarrow \|x\| - \text{норм-на,}$$

$$|F(x) - F(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \underbrace{\|x-y\|}_{\text{нераб.}} \leq \|x-y\|.$$

Рассмотрим $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$ - ед. сфера в $\mathbb{R}^n$

на норме $\|\cdot\|_1$, - компактна в $\mathbb{R}^n$, т.к. озр. и замкнута

$$(S = F^{-1}(B(0,1))).$$

$$\exists \min_{x \in S} \|x\| = B \text{ (по Т. Вейерштр. для } F(x) = \|x\| \text{ на компакте } S)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \tilde{x} \in S, \|\tilde{x}\|_1 = 1, \|x\| = \frac{1}{\|\tilde{x}\|_1} \cdot \|x\|_1 \geq B \Rightarrow \|x\| \geq \frac{1}{A} \|x\|_1$$

$$\geq B \|x\|_1.$$

Замечание: Пусть на $\mathbb{R}^n$ задана $\|\cdot\|$. Тогда $x \mapsto y \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall k=1, \dots, n, \quad x_k \mapsto y_k.$

$$\triangleright \exists u_0: \forall m \geq m_0, \|x_m - u\| < \varepsilon \Rightarrow \|x_m - u\|_0 = B \cdot \varepsilon$$

$$= \max_k |x_k^m - u_k| < B \cdot \varepsilon \Rightarrow |x_k^m - u_k| < B \cdot \varepsilon, \quad \forall k=1, \dots, n. \triangleright$$

3) Структура скалярного (внутр.) пр-я.

Опр. Пусть V -лин. пр-во над $\mathbb{R}$, скалярное (внутр.) пр-ие - это отобра. $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовл. след. св-м:

- 1) $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $(\alpha \cdot x, y) = \alpha(x, y), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (x+y, z) = (x, z) + (y, z)$;
- 3) $(x, y) = (y, x).$

Пример: 1) $\mathbb{R}^n, \quad (x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$

2) $M_n(\mathbb{R}), \quad (A, B) = \text{tr}(A \cdot B^T)$

Теорема (пер-во Коши-Буняковского-Шварца.)

Пусть $(V, (\cdot, \cdot))$ -пр-во со скал. пр-ем, тогда $\forall x, y \in V, \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, где $\|z\| = \sqrt{(z, z)}$

(ч.пр. проверить, что $\|z\| = \sqrt{(z, z)}$ - норма).

$$\triangleright t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq (x + tz, x + tz) \stackrel{2)}{=} (x, x) + t(x, z) + t^2(z, z) \\ + t^2(y, y) \Rightarrow D = 4(x, z)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \quad \triangleright$$

Компакты в $\mathbb{R}^n$.

Лемма Монтеля: Если $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset H(\mathbb{R}^n)$ неустойчиво

компакт в $\mathbb{R}^n$ метр-а

$$d_H(A, B) = \max_{x \in A} \{d(x, B), d(A, x)\}, \text{ где } d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y), \text{ } d\text{-евкл. расст. в } \mathbb{R}^n.$$

Теорема о полноте $(H(\mathbb{R}^n), d_H)$.

$(H(\mathbb{R}^n), d_H)$ - полное метр. пр-во

1) d_H -метрика (шпр.)

$$2) d_H(A, B) < \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B^\varepsilon \text{ и } B \subset A^\varepsilon, \varepsilon\text{-расст-ие.}$$

$$C \subset \mathbb{R}^n, C^\varepsilon = \bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) - \text{откр. окр-сть}$$

3) Пусть $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \dots$; K_m - непустой компакт

$$K = \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m - \text{непустой компакт (т.к. } K_m \text{ замкнуты)}$$

в K_1 .

$$d_H(K_m, K) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}: \forall m \geq m_0, d_H(K_m, K) < \varepsilon.$$

т.е. $K_m \subset K^\varepsilon$ и $K \subset K_m^\varepsilon$. Ясно, что $K \subset K_m \subset K_m^\varepsilon, \forall m \geq 1$.

Дополним, что $\exists \varepsilon > 0: \forall m_0 \in \mathbb{N}, \exists m \geq m_0: \exists x \in K_m,$

$$x \notin K.$$

$$\text{т.к. } x_m \in K_1 \Rightarrow \exists \text{ под-ть } x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x \in K_1, \text{ то } d(x, K) \geq \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(x, K) \geq \varepsilon, \text{ т.е. } x \notin K.$$

$$\text{С другой стороны, } \forall x_{m_0} \in K_{m_0} \Rightarrow x \in K_{m_0} \Rightarrow x \in \bigcap_{m_0=1}^{\infty} K_{m_0} = K$$

$x \in K$.

4) Пусть $A_m \in H(\mathbb{R}^n)$ - гоним. показать, т.е. $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}_0$,

$$\forall m, p, q \geq m_0, d_H(A_p, A_q) < \varepsilon.$$

Покажем, что сужд. $\exists M > 0: \forall p \in \mathbb{N}, d_H(A_p, A_1) \leq M$.

Возьмем $q = m_0(1)$, мы знаем, что $\forall p \geq q, d_H(A_p, A_q) < 1$

$$d_H(A_p, A_1) \leq d_H(A_p, A_q) + d_H(A_q, A_1) \leq \max_{1 \leq p \leq q} d_H(A_p, A_1) + \underbrace{d_H(A_q, A_1)}_M$$

$$A_p \leq A_1^M, \forall p \geq 1.$$

$K_m = \text{cl}(\bigcup_{p=m}^{\infty} A_p)$ - замкнуто (очевидно) и озр. (т.к.

$$\bigcup_{p=m}^{\infty} A_p \subset A_1^M).$$

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_m \supset \dots \quad K := \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$$

из 3) $d_H(K_m, K) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}: \forall m \geq m_0$,

$$d_H(K, K_m) < \varepsilon \text{ или } K_m \subset K^\varepsilon.$$

Покажем, что $d_H(A_m, K) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall m \geq m_0, A_m \subset K^\varepsilon \text{ и } K \subset A_m^\varepsilon$$

$$A_m \subset \bigcup_{p=m}^{\infty} A_p$$

$$A_m \subset \text{cl}(\bigcup_{p=m}^{\infty} A_p) = K_m \subset K^\varepsilon$$

(снова) т.к. A_m - гоним, то $d_H(A_p, A_q) < \varepsilon, \forall p, q \in \mathbb{N}_0$, т.е.

$$\boxed{12.6} \quad A_p \subset A_1^\varepsilon \text{ и } A_1 \subset A_p^\varepsilon, \forall m \geq m_0, \bigcup_{p=m}^{\infty} A_p \subset A_1^\varepsilon \Rightarrow K \subset K_m \subset A_1^\varepsilon \quad \triangleright$$

Итерированной

Эпр. Итерированной системой го-ий на-ён конечный

набор $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ - с-матий в $\mathbb{R}^n$ т.е. $\exists L_k < 1, \forall 1 \leq k \leq m$

$$d(F_k(x), F_k(y)) \leq L_k d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

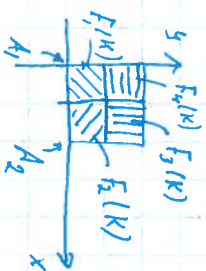
Пример аттрактор:

16.05.23

1) F_i - с-матие $\mathbb{R}^2$ с центром в точке A_i в 2 раза по

$$Ox \text{ и } Oy: F_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$$

$$K = F_1(K) \cup F_2(K) \cup F_3(K) \cup F_4(K)$$



2) Любой bounded многогранник, есть аттрактор некой итер. с-м.

Ф.

3) м-бо Кантора K , $K = F_1(K) \cup F_2(K)$

F_1 - с-матие от-е. 0 в 3 раза

F_2 - с-матие от-е. 1 в 3 раза

4) Известная Кантора - з-р-е-и Кантора G

F_1 - с-матие от-е. (0,0) в 2 раза по Y , в 3 раза по X

F_2 - с-матие от-е. (1,1) в 2 раза по Y , в 3 раза по X

F_3 - с-матие от-е. (1,1) в 2 раза по Y , в 3 раза по X

$\mathcal{F}$ - известная проекция на ось $Y = \frac{1}{2}$, с-матие от-е. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ в 3 раза по X

$\mathcal{F}$ - известная ось аттр. итер. с-м. го-ий.

Тогда $\exists$ аттрактор $K \neq \emptyset$ для $\mathcal{F}$.

Δ В метр. пр-е $(H(\mathbb{R}^n), d_H)$ рассмотрим от-е, $\mathbb{N}^2$

$$\chi_{\mathcal{F}}: H(\mathbb{R}^n) \rightarrow H(\mathbb{R}^n).$$

$$\chi_{\mathcal{F}}(K) = \bigcup_{j=1}^m F_j(K) - \text{компакт в } \mathbb{R}^n.$$

Достаточно $\mathcal{F}$ -ти, что $\chi_{\mathcal{F}}$ - это сдвиг в $(H(\mathbb{R}^n), d_H)$. Тогда по Т. Банныха о непрерыв. точке $\exists! K \in H(\mathbb{R}^n)$: $\chi_{\mathcal{F}}(K) = K$ - это и есть аттрактор.

Покажем, что 1) $d_H(F_j(A), F_j(B)) \leq L_j d_H(A, B)$, $A, B \in H(\mathbb{R}^n)$, $L_j < 1$

2) $d_H(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{d_H(A, C), d_H(B, D)\}$, $\forall A, B, C, D \in H(\mathbb{R}^n)$.

$$d_H(\chi_{\mathcal{F}}(K_1), \chi_{\mathcal{F}}(K_2)) = d_H\left(\bigcup_{j=1}^m F_j(K_1), \bigcup_{j=1}^m F_j(K_2)\right) \stackrel{(2)}{\leq} \max_{1 \leq j \leq m} d_H(F_j(K_1), F_j(K_2)) \stackrel{(1)}{\leq} \max_j L_j d_H(K_1, K_2) = L d_H(K_1, K_2), \text{ где } L = \max_{1 \leq j \leq m} L_j < 1, K_1, K_2 \in H(\mathbb{R}^n).$$

Д-м 1): $d_H(F_j(A), F_j(B)) = \max_{x \in A, y \in B} \{d(F_j(x), F_j(y))\} \leq d(F_j(A), F_j(B))$

$$d(F_j(A), F_j(B)) = \inf_{y \in B} d(F_j(x), F_j(y)) \leq \inf_{y \in B} L_j d(x, y)$$

$$= L_j d(x, B). d(F_j(A), F_j(B)) \leq L_j d(A, B).$$

$$\Leftrightarrow \max_{x \in A, y \in B} \{L_j d(x, y)\}, L_j d(A, B) = L_j d_H(A, B).$$

Д-м 2): $d_H(A \cup B, C \cup D) = \max_{x \in A \cup B, y \in C \cup D} d(x, y)$

$$\boxed{128} \leq \max\{ \max_{x \in A, y \in B} d(x, y), \max_{x \in C, y \in D} d(x, y) \} = \max\{d(A, B), d(C, D)\}.$$

$$d(A \cup B, C) \leq \max_{x \in A} d(x, C), \max_{y \in B} d(y, C), \max_{y \in C} d(A, y), \max_{y \in B} d(B, y) \} \Leftrightarrow (d(X, E \cup F) \leq d(X, E))$$

$$\Leftrightarrow \max \{d_A(A, C); d_B(B, D)\}.$$

D

Гомеоморфизм М.П.

Опр. Пусть $(X, d_1), (Y, d_2)$ - м.п. Отобр. $\varphi: X \rightarrow Y$ -

- гомеоморфизм, если:

1) φ - биекция

2) φ, φ^{-1} - непрерывны

В этом случае (X, d_1) и (Y, d_2) - гомеоморфные м.п.

Замечание: Гомеоморфизм может не сохр. полноту

м.п.-а, однако сохр. открытость, замкнутость, компактность образные м.п.-а.

Пример: $(\mathbb{R}, 1.1), ((-\frac{\sqrt{e}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2}), 1.1)$

$\varphi(x) = \arctg x$ - гомеоморфизм.

Но $(\mathbb{R}, 1.1)$ - полно, а $((-\frac{\sqrt{e}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2}), 1.1)$ - не полно.

Т (о гомеоморфизме).

Пусть $(X, d_1), (Y, d_2)$ - м.п., пусть (X, d_1) - компакн

и $\varphi: X \rightarrow Y$ - непрер.-ое инъективное отобра. Тогда

φ - гомеоморфизм X на $\varphi(X)$.

Δ Ного: $\varphi^{-1}: \varphi(X) \rightarrow X$ - непрер.-ое отобра.

- сдвигное, что необходимо, т.к. вложение в сдв. сдвигность.

Опр. Круглой Леман наз-я сюръективное непрерыв. отображ. $\varphi: [0,1] \rightarrow$

$$\xrightarrow{\text{на}} [0,1] \times [0,1]$$

Вопрос: Сущ-т ли круглая Леман? (да нет)

$\prod (0$ сущ. круглой Леман).

Круглая Леман сущ-т.

Δ 1) Построим непрерыв. сюръективное отображ. $\varphi: K \xrightarrow{\text{на}} [0,1]^2$, K -мн-во Кантора.

$\varphi = g \circ f: K \rightarrow [0,1]^2$, где $f: K \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \mid x_n \in \{0,1\}\}$.

$g: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0,1]^2$ - сюръекция

$g((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (X, Y), X \in [0,1], Y \in [0,1]$

$X = 0, x_2 x_4 x_6 \dots$
 $Y = 0, x_1 x_3 x_5 \dots$ } глобальная запись числа из $[0,1]$

Мы-то Кантора K в трапеци. сист. счисления имеет в качестве таково $\{0, \frac{1}{2}\}^2$.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}, \quad x_k \in \{0,1,2\}$$

$$f(x) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \dots\right) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \leftarrow \text{сюръекция}$$

Значит, $\varphi = g \circ f$ - сюръекция

Напр-ть $\varphi: |x-y| < \frac{1}{3^n} \Rightarrow$ в трапеци. системе x и y

сближаются первые $2n$ координат.

$$|g(f(x)) - g(f(y))| = |g(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, \dots) - g(x_1, \dots, x_{2n}, \dots)| = |(x, y)_x - (x, y)_y| = O\left(\frac{1}{2^n}\right) = |g(x) - g(y)|.$$

Д-м, что $\exists$ непр. сюръективное отобра. $\varphi: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{нр}} [0,1] \times [0,1]$. [0,1] 19.05.23

$$\left(\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} I_n(\alpha, \epsilon), & \alpha, \epsilon \in \mathbb{K} \end{cases} \right) \quad [0,1] = K \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$I_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \cap \mathbb{Z}$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in K \\ \frac{t-\alpha}{t-\epsilon} \varphi(\epsilon), & t \notin K, \quad t \in (\alpha, \epsilon) = I_n \end{cases} \quad I_n = (\alpha, \epsilon), \alpha, \epsilon \in K$$

Отобр. $\tilde{\varphi}$ - сюръективно и непр-но α . ▷

Замечание: $r: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(t) = (t, \tilde{\varphi}(t))$

Лин-ые отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Опр. Отобр. $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ наз-я лин-ым, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

Л. (о непр-ти лин. отобра.)

Пусть $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ и $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$. Тогда лин. отобра. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ будет непр. и $(x) \|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \infty$.

▷ Пусть $e_1, \dots, e_n$ - какой-нибудь базис в $\mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \equiv x^i e_i, \quad x^i \in \mathbb{R}$.

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^n x^i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x^i A e_i.$$

199 Тогда $\forall x \neq 0, \quad \|Ax\| = \left\| \sum_{i=1}^n x^i A e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x^i| \|A e_i\| \leq$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|A e_j\|_2 \right) = \|X\|_2 \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|_2 = \|X\|_2 \sum_{j=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha \cdot \rho < \infty \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|A(x-y)\| \leq \alpha \|x-y\|$$

$\cdot \|x-y\|$, следует из (*). Таким образом, A -линейность $\Rightarrow \Rightarrow A$ -линейн.

Опр. Вспомогательные $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ наз-ся операторной

нормой отл. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Прегл. (од опер. норм)

Справедлива сл-ва: $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$

$$1) \|A\| \geq 0 \text{ и } \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$2) \|A\| = \sqrt{\lambda_1(A^T A)}, \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

$$3) \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\| \|A\| - \|B\| \| \leq \|A-B\|$$

$$4) \|C \circ A\| \leq \|C\| \|A\|$$

$$\Delta 3) \|A+B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| (A+B)x \|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|$$

$$\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|$$

$$4) \|C \circ A\| = \|C \circ A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|C(Ax)\|}{\|x\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|Cy\|}{\|y\|} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|C\| \|A\|$$

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_1(A^T A)}$$

Предл. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|$ - полное нормированное пр-во.

Зафикс. базиса $e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^n$ и $f_1, \dots, f_m$ в $\mathbb{R}^m$.

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Ax = \sum_{i=1}^n x^i A e_i = \sum_{i=1}^n x^i \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j =$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x^i a_{ij} \right) f_j$$

згс $A e_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A - матрица $m \times n$

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

$$\downarrow \text{гомеоморфизм} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Обратимость $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

A - обратима $\Leftrightarrow (x=y \Rightarrow Ax=Ay) \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax=0\} = \{0\}$.

Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ инвертируемо, значит есть A^{-1} .

Тогда $A^{-1}A = I_{\mathbb{R}^n} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rk } I_{\mathbb{R}^n} = n \leq \text{rk}(A) \leq \min(n, m) \\ A \cdot A^{-1} = I_{\mathbb{R}^m} = m \leq \text{rk}(A) \leq \min(n, m) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow m=n$.

Зпр. Найти неточности в рассуждениях