

08.02.2022.

Интегралы, зависящие от параметров

1) Реллановна задача

Пусть $(X, \mathcal{M}, \mu)$ — м-во с σ -кон мерой.

$A \in \mathcal{M}$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ — м-во параметров

$f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ т.о. $F(y) = \int_A f(x, y) d\mu(x)$ $f_x \in L^1(A)$ существует,

т.е. определено отображение $F: Y \rightarrow \mathbb{R}$ — интеграл, зависящий от параметра

Вопрос: $F \in C(Y)$, $F \in D(Y)$, $F \in L^1(X)$

Теорема (о непрерывности ИЗОП)

Пусть $F(y) = \int_A f(x, y) d\mu(x)$, $y_0 \in Y$, т.е. $\exists$ окр. $U(y_0)$ со св-вом

1) $\forall$ н.в. $x \in A$ $f(x, y)$ непрерывна в.т. y_0 , т.е.

$f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} f(x, y_0)$ н.в. на A

2) $\exists g \in L^1(A)$: $\forall y \in U(y_0)$ и $\forall$ н.в. $x \in A$ $|f(x, y)| \leq g(x)$

Тогда $F(y)$ непрерывна в.т. y_0 , т.е. $F(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} F(y_0)$

$$\text{Д.в.е. } F(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} F(y_0) \Leftrightarrow \forall y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0 \Rightarrow F(y_n) \rightarrow F(y_0)$$

Вспомогат. послед-сть $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0$ и будем считать, что

$y_n \in U(y_0)$ $\forall n \geq 1$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f(x, y_n) d\mu(x) = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n) d\mu(x) \quad (*)$$

$$= \int_A f(x, y_0) d\mu(x) = F(y_0)$$

(*) По т. Лебега в.т.с. предель в.т.с. в.т.с. $y_n \rightarrow y_0$

$$|f(x, y_n)| \leq g(x), g \in L^1(A) \text{ и } 1) f(x, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x, y_0) \text{ н.в. } x \in A$$

Теорема (о диф-ции ИЗОП)

Пусть $F(y) = \int_A f(x, y) d\mu(x)$ — ИЗОП, $y_0 \in Y$, т.е. $\exists U(y_0)$:

1) $\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)$ существует $\forall y \in U(y_0)$ и $\forall$ н.в. $x \in A$

2) $\exists g \in L^1(A)$, т.е. $|\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y)| \leq g(x)$ $\forall y \in U(y_0)$ и $\forall$ н.в. $x \in A$
(где нект $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, возможно, для всех, но x и y одни и те же)

Тогда выч. $\frac{\partial F}{\partial y_j}(y_0)$ (где $j \in \overline{1, n}$, где 4^8 берется условие)

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(y_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_0) d\mu(x)$$

Д.воз $\frac{\partial F}{\partial y_j}(y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y_0 - te_j) - F(y_0)}{t} =$ по кр-ю t берется (фикс. параметр)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(y_0 - t_n e_j) - F(y_0)}{t_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_A (f(x, y_0 + t_n e_j) -$$

$$- f(x, y_0)) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(x) d\mu(x), \text{ где}$$

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x, y_0 + t_n e_j) - f(x, y_0)}{t_n} \text{ считаем, что } y_0 + t_n e_j \in U(y_0) \text{ } \forall n \in \mathbb{N}$$

Проверим выполн усл м. Лебега о маж. эк-н для послед-ств. φ_n

$$|\varphi_n(x)| = \left| \frac{1}{t_n} (f(x, y_0 + t_n e_j) - f(x, y_0)) \right| = \left| \frac{1}{t_n} \right| \left| \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_0 + \theta_n e_j) \right|$$

$$= \left| \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_0 + \theta_n e_j) \right| \leq g(x) \text{ где } y_0 + \theta_n e_j \in U(y_0) \text{ } \theta_n \in (0, t_n)$$

$\leq g(x)$ по усл. (считаем, что $U(y_0)$ - шарик, т.е. линейно связано, т.е. все отрезки y_0 $y_0 + t_n e_j$ содержится в $U(y_0)$)

Тогда предель вынужд: $\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) d\mu(x) =$

$$= \int_A \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_0) d\mu(x) \text{ что более мощ. теорема верна } \forall y_0 \in U(y_0)$$

Пример: 1) $F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+y}, x > 0$

$$F'(y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+y} \right)'_y dx = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{(x+y)^2} dx = \left. -\frac{1}{x+y} \right|_{x=0}^{x=+\infty} = -\frac{1}{y}$$

То $F(y) = +\infty$
 $\ln(x+y) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \ln\left(\frac{a+y}{y}\right) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} +\infty$

2) Интегралы Эйлера

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx - \text{Бетта-функция (инт. Эйлера 1-го рода)}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx - \text{Гамма-функция (инт. Эйлера 2-го рода)}$$

Сб.воз 1) $D(\Gamma) = \mathbb{R}_{>0} = \{a > 0\}$

2) $D(B) = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} = \{a, b > 0\}$

Д.воз 1) $\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad \textcircled{a > 0}$

$$\left\{ \begin{aligned} & \bullet |x^{a-1} e^{-x}| \leq c \Rightarrow x^{a-1} e^{-x} \leq c e^{-x/2}, \int_0^{+\infty} c e^{-x/2} dx < +\infty \quad \forall a \\ & \bullet x^{a-1} e^{-x} \sim x^{a-1} \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \left(\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx < +\infty \Leftrightarrow 1-a < 1 \right) \end{aligned} \right. \quad \textcircled{a > 0}$$

$$\bullet x^{a-1} e^{-x} \sim x^{a-1} \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \left(\int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx < +\infty \Leftrightarrow 1-a < 1 \right) \quad \textcircled{a > 0}$$

2) $\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$

$$\int_0^{1/2} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^{1/2} x^{a-1} dx < +\infty \text{ при } \textcircled{a > 0}$$

$$\int_{1/2}^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \xrightarrow{x \rightarrow 1} \int_{1/2}^1 (1-x)^{b-1} dx < +\infty \text{ при } \textcircled{b > 0}$$

3) $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$, $\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^n x^{a-1} e^{-x} dx$, $n \geq 0$

Д. В. 1

$n=1$ $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{a-1} e^{-x}}_{f(x,a)} dx$

Проверим упр. теорему

$f'_a(x,a) = (\ln x) x^{a-1} e^{-x}$

$a > 0$ $\frac{1}{0} \frac{a_0}{a_0-\varepsilon} \frac{1}{a_0+\varepsilon}$

$V(a_0) = (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$

Возьмем мансрану $g(x) = \sup_{a \in V(a_0)} |\ln x \cdot x^{a-1} e^{-x}| =$

$= |\ln x| e^{-x} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \begin{cases} x^{a_0-1+\varepsilon}, & x > 1 \\ x^{a_0-1-\varepsilon}, & x \leq 1 \end{cases}$

$\int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx + \int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_0^1 |\ln x| e^{-x} x^{a_0-1-\varepsilon} dx +$

$+ \int_1^{+\infty} |\ln x| e^{-x} x^{a_0-1+\varepsilon} dx < +\infty$ (сначала надо было дать непрерывность пот. аналогично)

$|\ln x \cdot e^{-x/2}| \leq c \int_1^{+\infty} e^{-x/2} \cdot \frac{1}{x^{a_0-1+\varepsilon}} dx \leq c \Gamma(a_0 + \varepsilon) < +\infty$

$\int_0^1 |\ln x| e^{-x} x^{a_0-1-\varepsilon} dx \leq \int_0^1 |\ln x| x^{a_0-1-\varepsilon} dx =$

$= \int_0^1 \ln \frac{1}{x} x^{a_0-1-\varepsilon} dx = \int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{x} x^{a_0-1-\varepsilon} dx = \int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{x} x^{a_0-1-\varepsilon} dx = \int_0^{+\infty} \ln \frac{1}{x} x^{a_0-1-\varepsilon} dx =$

$= \int_0^{+\infty} t e^{-t(a_0-\varepsilon)} dt = \frac{1}{(a_0-\varepsilon)^2} \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = \frac{1}{(a_0-\varepsilon)^2} \Gamma(2) < +\infty$

и $|f'_a(x)| \leq g(x) \quad \forall a \in V(a_0)$ $\Rightarrow$ по теореме о непрерывности Γ

$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} (\ln x) x^{a-1} e^{-x} dx$

Аналогично по аналу $\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^n x^{a-1} e^{-x} dx$

4) $\Gamma(a+1) = a \Gamma(a)$, $a > 0$ — для почисления

Д. В. 1 $\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} x^{a+1-1} e^{-x} dx =$ по расщ.

$= \int_0^{+\infty} x^a (-de^{-x}) = -x^a e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} a x^{a-1} dx = a \Gamma(a)$

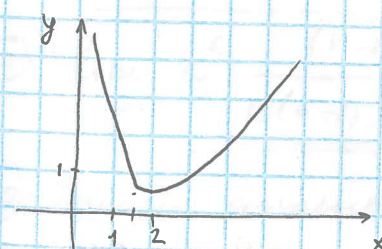
5) если $n \in \mathbb{N}$ $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \dots = n(n-1) \dots \Gamma(1) = n!$, так $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

6) Γ — выпуклая функция, имеющая единств. миним.

Д. В. 1 $\Gamma''(a) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^2 x^{a-1} e^{-x} dx \geq 0$, $\Rightarrow$ выпуклая

$\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(1) = \Gamma(1) = 1 \Rightarrow$ по теореме на интервале $a \in (1, 2)$ $\exists \xi: \Gamma'(\xi) = 0 \Rightarrow$ лок. минимум.

Почему минимум? Можно показать тем. методом, что $\xi \approx 1,46$, $\Gamma(\xi) \approx 0,88$



7) $\Gamma(a+1) = a \Gamma(a)$
 $\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \sim \frac{1}{a}$ $a \rightarrow +\infty$ асимптотика

$\exists n: \Gamma(a) > \Gamma(n+1)$ или $a > n+1$
"n!" $\Rightarrow \Gamma(a) \rightarrow +\infty$ $a \rightarrow +\infty$

$\Gamma(a) \sim \sqrt{2\pi a} \left(\frac{a}{e}\right)^a$ $a \rightarrow +\infty$ формула

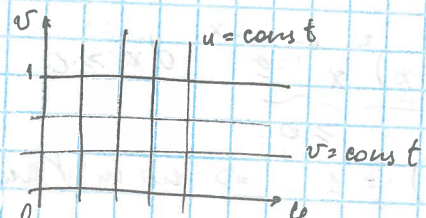
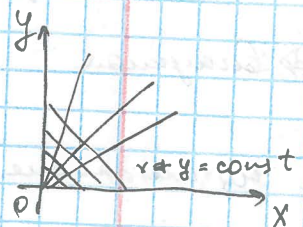
уточнение: $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x (1 + O(x^{-1}))$ $x \rightarrow \infty$

Используя формулу $\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}$ можно определить на $(-1, 0)$, затем на $(-2, -1)$ и т.д.

(7) $B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Доказ. $\Gamma(a) \Gamma(b) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^{\infty} y^{b-1} e^{-y} dy =$
 $= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{a-1} y^{b-1} e^{-u} dx dy$
 $= \int_0^{\infty} \int_0^1 e^{-u} (u(1-v))^{a-1} (uv)^{b-1} u du dv =$

$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u + uv = u.$



$\frac{x+y}{y} = \frac{1}{v} = \text{const}$
 $y = \alpha x$
 $u \in [0, \infty)$
 $v \in [0, 1]$

$= \int_0^{\infty} u^{a+b-1} e^{-u} du \cdot \int_0^1 v^{b-1} (1-v)^{a-1} dv = \Gamma(a+b) B(a, b)$

(8) Свойства: $B \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0})$
 $B(a, b) = B(b, a)$

(9) Формула Эйлера-Гauss

$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx = \int_1^{\infty} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{a-1} \cdot \left(-\frac{dt}{t} \right) =$

$= \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{a-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n (1-t)^{1/n} dt =$

$\ln \frac{1}{t} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{1-t^\alpha}{\alpha} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{-\ln t \cdot t^\alpha}{1} =$

$n(1-t)^{1/n} \rightarrow \ln \frac{1}{t}$

$n = \frac{1}{\alpha}$ монотонно возрастает

$\Rightarrow$ по м. Б. Леви заменим местами знак интеграла и пределы

$\varphi(\alpha) = \frac{1-t^\alpha}{\alpha}$ монотонно? убывает при $\alpha \rightarrow 0$
 $\varphi'(\alpha) = \frac{-\ln t \cdot t^\alpha \cdot \alpha - (1-t^\alpha)}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} (t^\alpha (1 - \ln t) - 1) < 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-1} \int_0^1 (1-t)^{1/n} dt = \left\langle \frac{t=s^n}{dt = n s^{n-1} ds} \right\rangle =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \int_0^1 (1-s)^{a-1} s^{n-1} ds = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a B(a, n) =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{\Gamma(a) \Gamma(n)}{\Gamma(a+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{(n-1)! \Gamma(a)}{(a+n-1)(a+n-2) \dots a \Gamma(a)} =$

$\Gamma(a+n) = (a+n-1) \Gamma(a+n-1) = \dots = (a+n-1)(a+n-2) \dots a \Gamma(a)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{(n-1)!}{a(a+1) \dots (a+n-1)}$

(10) Формула дополнения: $\forall a \in (0, 1) \quad \Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$

Доказ. $\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{(n-1)!}{a \dots (a+n-1)} \cdot n^{1-a} \frac{(n-1)!}{(1-a)(2-a) \dots (n-a)} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(\frac{a}{2}+1) \dots (\frac{a}{n-1}+1)} \cdot \frac{1}{(1-\frac{a}{2})(1-\frac{a}{3}) \dots (1-\frac{a}{n-1})} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \frac{a^2}{1^2})(1 - \frac{a^2}{2^2}) \dots (1 - \frac{a^2}{(n-1)^2})} = \frac{1}{a} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{a^2}{n^2}} \quad (*)$$

$$\sin \pi a = \pi a \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{a^2}{n^2}), \quad a \notin \mathbb{Z}$$

из II свойства

$$\text{Следует } \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$$

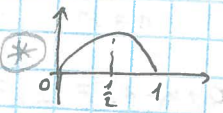
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sqrt{x})^{-1} dx = \left\langle \begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ dx = 2t dt \end{matrix} \right\rangle = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

11) Теорема Лежандра

$$B(a, a) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{a-1} dx = \int_0^1 (x-x^2)^{a-1} dx =$$

$$= 2 \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right)^{a-1} dx = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} \sqrt{t} \\ -dx = \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t \right)^{a-1} \left(-\frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right) = \frac{1}{2^{2a+2}} \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{\frac{1}{2}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{2^{2a+2}} B(a, \frac{1}{2}) \quad \text{или } (*)$$


симметричная

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(a) \Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-2}} \frac{\Gamma(a) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} \Rightarrow \Gamma(a) \Gamma(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-2}} \Gamma(2a)$$

Замечание: можно доказать, что если $F \in C^1(\mathbb{R}_{>0})$ то следует

$$1) F(a) F(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad a \in (0, 1)$$

$$2) F(a) F(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-2}} F(2a), \quad a > 0$$

3) а $F(a) = F(a+1)$, $a > 0$
то $F \equiv \Gamma$ (функция Гамма)

можно (и 2) след
заменить на формулу
логарифмического производ

Теорема (формула Лебница)

Пусть $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ - непрерывная на $[a, b] \times [c, d]$
функция $\alpha, \beta: [c, d] \rightarrow [a, b]$ - функции. Тогда

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \text{функция и}$$

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\beta(y), y) \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \alpha'(y)$$

Доказательство: Пусть $\Phi(\alpha, \beta, y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx : \Phi: [a, b] \times [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

Докажем, что Φ - функция (докажем непрерывность)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right)'_{\beta} = f(\beta, y) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \left(- \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right)'_{\alpha} = -f(\alpha, y)$$

по формуле Ньютона-Лейбница
и дифференцируем как функции верхнего предела

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right)'_y = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad \text{по теореме о дифференцировании интеграла}$$

м.к. $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq C, \quad y \in [c, d], x \in [a, b]$ и $\int_a^b C dx = C(\beta - \alpha) < +\infty$
по м. Веберштрасса $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывно $\Rightarrow$ существует макс. значение

Тогда $F(y) = \Phi(\alpha(y), \beta(y), y)$ - функция как композиция функций

$$F'(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \cdot \alpha'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \cdot \beta'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\beta(y), y) \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \alpha'(y)$$

Пример $F_n(x) = \int_0^x \frac{f(t)(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dt, n \geq 1, f \in C(\mathbb{R})$

$F_n^{(n)}(x) = f(x)$ По индукции:

$F_1^{(1)}(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)'_x = f(x)$

$F_n^{(1)}(x) = \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} f(t) (n-1) (x-t)^{n-2} dt +$

$+ \frac{f(x)(x-x)^{n-1}}{(n-1)!} x'_n = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x f(t) (x-t)^{n-2} dt = F_{n-1}(x)$

$\Rightarrow F_n^{(n)}(x) = F_{n-1}^{(n-1)}(x) = f(x)$

$f(x) = D^{(n)} I_n f(x)$

производная порядка n от интегрального оператора I_n от f

$I_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} dt$

$D^{(\alpha)} I_\alpha = I_\alpha^{-1}$

дробные производные

Вычисления интегралов дифференцированием по параметру

Пример $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2021x} - e^{-2022x}}{x} dx$

$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2021x} - e^{-ax}}{x} dx$

$I(2021) = 0$

$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x} dx = \frac{1}{a}$

$\Rightarrow I_a(a) = \ln a + C$

$0 = \ln 2021 + C$

$\begin{array}{c} a-\varepsilon \quad a+\varepsilon \\ \hline 0 \quad a_0 \\ -ax \quad -(a_0-\varepsilon)x \\ e^{-ax} \leq e^{-(a_0-\varepsilon)x} \\ \forall x \in (a_0-\varepsilon, a_0+\varepsilon) \end{array}$

$I(a) = \ln \frac{a}{2021}$

Несобственный интеграл Римана, зависящий от параметра.

15.02.2021
НУЗ.П.

Пусть $f: (a, \omega) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Считаем, что $y \in Y$
 $f(x, y)$ интегрируема в несобств. смысле, т.е. определено
собр.е $F(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx$. Здесь ω - особая точка.

Опр. Функция $\int_a^\omega f(x, y) dx$ с-ся равномерно на мн.ве Y ,

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, \omega): \forall b \in (\delta, \omega) \forall y \in Y \left| \int_b^\omega f(x, y) dx \right| < \varepsilon$

Пример. 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2}$ с-ся равномерно на $Y = \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (1, +\infty): \forall b \in (\delta, +\infty) \forall y \in \mathbb{R}$

$\int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2} < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_b^{+\infty} = \frac{1}{b} < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$, т.е. $\Delta(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$

2) Отрицание равномерной с-с-ы интеграла:

$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta \in (a, \omega) \exists b \in (\delta, \omega) \exists y \in Y: \left| \int_b^\omega f(x, y) dx \right| \geq \varepsilon$
 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ с-ся равномерно на $Y = [y_0, +\infty)$, $y_0 \in (0, +\infty)$
и не с-ся равномерно на $Y = [0, +\infty)$

$$1) \int_b^{+\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y} (-e^{-xy}) \Big|_{x=b}^{x=+\infty} = \frac{1}{y} e^{-by} = \frac{1}{y_0} e^{-by_0} < \frac{1}{y_0} e^{-\Delta y_0} \xrightarrow{\Delta \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \text{сх-ся равномерно на } [y_0, +\infty)$$

$$2) \int_b^{+\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y} e^{-by} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} +\infty \Rightarrow \text{не сх-ся равномерно на } (0, +\infty)$$

Теорема (критерий Коши равномерной сх-сти Н.И.Золотаренко)

Пусть $y \in Y$, интеграл $\int_a^w f(x, y) dx$ сх-ся равномерно по $y \in Y$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (0, w) : \forall b_1, b_2 \in (\Delta, w) \forall y \in Y \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$

Д.Вос. Р/м $\Phi(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx$

Тогда сх-сть $\int_a^w f(x, y) dx$ эквивалентна равномерной сх-сти

$\Phi(b, y) \xrightarrow[b \rightarrow w]{y} \int_a^w f(x, y) dx$, по кр-ю Коши для предела

$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (0, w) : \forall b_1, b_2 \in (\Delta, w) \forall y \in Y |\Phi(b_1, y) - \Phi(b_2, y)| < \varepsilon$

Сл.вие Пусть $f: [a, w) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$, $Y = [c, d]$

Пусть $\forall y \in (c, d) \int_a^w f(x, y) dx$ сх-ся, а в одной из $\{c, d\}$ расх-ся

$f \in C([a, w) \times [c, d])$ (не любой интеграл, а только расх-ся)

Тогда $\int_a^w f(x, y) dx$ не сх-ся равномерно на (c, d)

Д.Вос. Отпр. крит. Коши: (пусть c - точка, в к-т интеграл расх-ся)

для $\int_a^w f(x, c) dx : \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \Delta \in (0, w) \exists b_1, b_2 \in (\Delta, w) : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, c) dx \right| \geq \varepsilon_0$
З/м: $\Phi(y) = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx$ непрерывно по y

$$\Rightarrow |f(x, y)| \leq \max_{\substack{x \in [b_1, b_2] \\ y \in [c, d]}} |f(x, y)| = M \Rightarrow$$

$$\exists \delta > 0 : \forall y \in (c, c+\delta) |\Phi(y)| \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists b_1, b_2 \in (\Delta, w) \exists y \in Y = (c, d) \left(y \in (c, c+\delta) \right) \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| \geq \varepsilon$$

Признаки равномерной сх-сти несобств. интеграла

Теорема (Вейерштрасса/маторантинго)

Пусть $f, g: [a, w) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ и $|f(x, y)| \leq g(x, y)$

$\forall (x, y) \in [a, w) \times Y$ и $\int_a^w g(x, y) dx$ сх-ся равномерно по Y

Тогда $\int_a^w f(x, y) dx$ сх-ся абсолютно и равномерно по Y

Д.Вос. Т.к. $\int_a^w g(x, y) dx$ сх-ся равномерно по Y , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (0, w) : \forall b_1, b_2 \in (\Delta, w) \forall y \in Y \left| \int_{b_1}^{b_2} g(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

$$\text{Тогда } \int_{b_1}^{b_2} |f(x, y)| dx \leq \int_{b_1}^{b_2} g(x, y) dx < \varepsilon$$

Теорема (Абеле и Дирихле)

Пусть $f, g: [a, w) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда для равн.-сх-сти по Y интеграла $\int_a^w f(x, y) g(x, y) dx$ достаточно:

(D₁) $F(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx$ равномерно ограничена, т.е.
 $\exists c > 0: \forall b \in (a, \omega) \forall y \in Y \quad |F(b)| \leq c$

(D₂) $g(x, y)$ монотонно по x для $\forall y \in Y$, $g(x, y) \xrightarrow{x \rightarrow \omega} 0$
 или (A₁) $\int_a^b f(x, y) dx$ сходится равномерно по y

(A₂) $g(x, y)$ монотонно по x для $\forall y \in Y$ и равномерно ограничена, т.е. $\exists c > 0: |g(x, y)| < c \quad \forall x \forall y$

Д. 601. По крит.ю Коши надо $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, \omega)$
 $\forall b_1, b_2 \in (\Delta, \omega) \forall y \in Y \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| < \varepsilon$

По второй теореме о среднем (т.к. $g(x, y)$ монотонно по x)
 $\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) g(x, y) dx = \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right) \cdot g(\xi, y) + \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right) g(\xi, y)$
 $\exists \xi \in (b_1, b_2)$

$$1) (D_1) \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x, y) dx \right| \leq 2c \quad \text{и} \quad \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x, y) dx \right| \leq 2c$$

(D₂) $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, \omega): \forall x > \Delta \forall y \in Y \quad |g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4c}$

$$\Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| \leq |g(\xi, y)| \cdot \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x, y) dx \right| +$$

$$+ |g(\xi, y)| \cdot \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4c} \cdot 2c + \frac{\varepsilon}{4c} \cdot 2c = \varepsilon$$

2) (A₁) $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta \in (a, \omega): \forall b_1, b_2 \in (\Delta, \omega) \forall y \in Y$

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2c} \quad \Rightarrow \quad \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| \leq$$

$$(A_2) \quad |g(x, y)| < c$$

$$\leq |g(\xi, y)| \cdot \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x, y) dx \right| + |g(\xi, y)| \cdot \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x, y) dx \right| \leq$$

$$\leq c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon$$

т.е.

Пример 1) $\int_0^{\infty} e^{-yx} \frac{\sin x}{x} dx, \quad y \geq 0$ сх-ся равномерно, по признаку Абеля

(A₁): $\int_0^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сх-ся равномерно на Y

(A₂): $g(x, y) = e^{-yx} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, \quad |e^{-yx}| \leq 1$

2) $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$ Когда можно проинтегрировать предел?

Пусть $f(x, y) = \begin{cases} 1/y, & x \in [a, y] \\ 0, & x > y \end{cases} = \frac{1}{y} \chi_{[a, y]}(x)$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(x, y) dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{1}{y} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\int_0^{\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x, y) - 0| =$$

$$= \sup_{x \in [a, y]} \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0; \quad \int_0^{\infty} f(x, y) dx \text{ сх-ся равномерно на } [E, +\infty)$$

Лекции
по
математическому
анализу

Подвигин
Иван
Викторович

Синдентин
г.р. 20114
Мончик Тамара
1 место ММФ НГУ

Теорема (о перестановке пределов)

17.02.22

Пусть $G(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, $x_0 \in \text{lim } X$, $y_0 \in \text{lim } Y$ и

$$1) G(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \rightarrow x_0} G_0(x)$$

$$2) \forall y \in Y \quad \lim_{x \rightarrow x_0} G(x, y) \text{ существует.}$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} G(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} G(x, y) \right)$$

Доказ. По критерию Коши равномерн. сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ окр-сть } U(y_0): \forall y_1, y_2 \in U(y_0) \cap Y \quad \forall x \in X$$

$$|G(x, y_1) - G(x, y_2)| < \varepsilon \quad (*)$$

$$U(y_0): |G(x_0, y_1) - G(x_0, y_2)| \leq \varepsilon \quad \forall y_1, y_2 \in U(y_0) \cap Y$$

по определению предела и ариф. опер. из $(*)$

$$\text{Т.е. } \exists \lim_{y \rightarrow y_0} G(x_0, y) = A \text{ по крит-ию Коши сущ-ние предела (груп. помер-ств)}$$

$$\forall y_1 \in U(y_0) \cap Y \quad \forall x \in U(x_0) \cap X$$

$$|G(x, y_1) - G(x_0, y_1)| < \varepsilon \quad \text{по определению предела } (**)$$

$$|G_0(x) - A| \leq |G_0(x) - G(x, y_1)| +$$

$$+ |G(x, y_1) - G(x_0, y_1)| + |G(x_0, y_1) - A| \leq \varepsilon \quad \text{или } \exists A = \lim_{y \rightarrow y_0} G(x_0, y)$$

$$\Rightarrow \text{по определению } G_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A.$$

Теорема (о предельном переходе для НЧЗоп)

Пусть $f: [a, \omega) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируема в несобств. см на $[a, \omega)$ по x для $\forall y \in Y$ и вообще уек: $y_0 \in \text{lim } Y$

$$1) f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \varphi(x) \quad \forall b \in [a, \omega)$$

2) $\int_a^w f(x, y) dx$ равномерно эк-се на Y .

Тогда $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^w f(x, y) dx = \int_a^w \varphi(x) dx$.

Доказ. Р/м $G(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $b \in [a, w]$

из 2) $G(b, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^b \varphi(x) dx$.

из 1) $G(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^b \varphi(x) dx \quad \forall b \in [a, w]$

т.к. интеграл собственный и все равно эк-се

$G(b, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx$

$\int_a^b \varphi(x) dx \xrightarrow{b \rightarrow w} \int_a^w \varphi(x) dx$

Предельное существование и равно по т. о. непрерывности предельных

$f \in C[Y], |f(x, y)| \leq C \quad \forall x, y$

Можно убрать + напомним

Лемма (о непрерывности НЧЗоп)

Пусть $f: [a, w] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывно по x , по y

и $\int_a^w f(x, y) dx$ эк-се равномерно на $Y = [c, d]$ Тогда

$F(y) = \int_a^w f(x, y) dx$ - непрерывна на $[c, d]$

Доказ. $\Phi(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx$ - непрерывная ф-ция по y .

Непрерывна $\Rightarrow$ равномерно непрерывна $\Rightarrow \exists C > 0, |f(x, y)| \leq C$ на компакте $[a, w] \times [c, d]$ по т. Кантора

$\Rightarrow g(x) = C$ - мажоранта $\Rightarrow$ т. о. непрерывности собствен. интегр.

$\Phi(b, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx \Rightarrow F(y) = \int_a^w f(x, y) dx$ эк-се

непрерывной ф-цией как предел равномерно эк-се послед-сти ф-ций, непрерывных на $X \times Y$.

Пример $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ I - непрерывна на $[0, +\infty)$ и $\lim_{y \rightarrow +\infty} I(y) = 0$.

1) $f(x, y) = \frac{\sin x}{x} e^{-xy}$ непрерывна

на $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$. (доопределим при $x=0$ $f=0$)

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ эк-се равномерно на $[0, +\infty)$

$\Rightarrow$ по т. о. непрерывности НЧЗоп $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx =$

$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (можно также воспользоваться эк-сью и т. Кантора) $\sup_{x \in [0, +\infty)} |1 - e^{-xy}| \rightarrow 0$ по т. Кантора

2) Р/м $\frac{\sin x}{x} e^{-xy} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$ и $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ эк-се равномерно $\Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = 0$

Возвращаемся к интегралу Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0)$

$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ Р/м $I(y)$ как интеграл Лебег, дифференцируем по y

$I'(y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} e^{-xy} \right)' dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} (-x e^{-xy}) dx =$

$= - \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \frac{1}{1+y^2}$ (по частям), $y > 0$.

$\Rightarrow I(y) = - \int \frac{dy}{1+y^2} + C = -\arctg y + C$

$0 = \lim_{y \rightarrow +\infty} I(y) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctg y + C = C - \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

$I(y) = \frac{y}{2}$ - атожд $y, y > 0$ и $I(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} I(0) = \frac{5}{2}$ всему непрерывно

Почему можно дифференцировать?

$\int_0^{y_0+\varepsilon} e^{-xy} dx = \frac{1}{y} (1 - e^{-y(y_0+\varepsilon)})$ $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$

и производная существует $\forall y \in U(y_0)$ и $\forall x \in [0, +\infty)$ интегрируемая функция

Теорема (о дифференци НУЗОН)

Пусть $f: [a, \omega) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ т.е. $f(x, y), f'_y(x, y)$ - непрерывны на $[a, \omega) \times [c, d]$. Интеграл $\int_a^x f'_y(x, y) dx$ с.с. равномерно на U , интеграл $\int_a^x f(x, y) dx$ с.с. x/d в одной точке $y_0 \in [c, d]$. Тогда $F(y) = \int_a^x f(x, y) dx$ дифференцируема на $[c, d]$ и $F'(y) = \int_a^x f'_y(x, y) dx$, причем

$\int_a^x f(x, y) dx$ с.с. равномерно на $U = [c, d]$

Д-во Пусть $\Phi(b, y) = \int_a^b f(x, y) dx$

$\Phi'_y(b, y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$ (по правилу Лейбница или директ. инт. следств.)

Имеем $\Phi'_y(b, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^b f'_y(x, y_0) dx$ из равномер с.с. $\left. \begin{array}{l} \text{равномер с.с.} \\ \text{неособенность} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Phi(b, y_0) \xrightarrow{b \rightarrow \omega} F(y_0)$ из с.с. x/d в одной точке

$\Rightarrow F$ - дифференцируема и $F' = \int_a^x f'_y(x, y) dx$ т.е. дифференцируем

т.е. дифференцируем равномерно с.с. с.с. в.о. ф-ция дифференцируема $\left[\begin{array}{l} \text{в точках } c, d \text{ будут} \\ \text{существовать односторонние производные} \\ \text{и определяться как пределы} \end{array} \right]$

Теорема (об инт. НУЗОН)

Пусть $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$ и $\int_a^x f(x, y) dx$ с.с. равномерно. Тогда $F(y) \in R[c, d]$ (где $F(y) = \int_a^x f(x, y) dx$)

$\int_c^d \left(\int_a^x f(x, y) dx \right) dy = \int_a^x \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ если по с.с. дифференцируема

Д-во $\forall b \in [a, \omega)$ имеем по теореме Фубини

$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$

При $b \rightarrow \omega$: $\lim_{b \rightarrow \omega} \int_c^d F(b, y) dy = \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx =$

$\int_a^x \lim_{b \rightarrow \omega} F(b, y) dy = \int_a^x \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ (в свойств. интеграла по равномер с.с. с.с.)

Свёртка

$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy, \quad dy = dy^1 \dots dy^n$

Пример (Ньютонов/Кулонов потенциал)

$\mathbb{R}^3$  $V \subset \mathbb{R}^3$ Распределение масса/заряд с плотностью $g(x)$ на V .

$dM = g(x) dx \quad dQ = g(x) dx$

действует на точку (создает гравитационное или электр. поле) на расстоянии $\|x-y\|$ Потенциал $d\Phi = \frac{dM(y)}{\|x-y\|}$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \iiint_V \frac{g(y)}{\|x-y\|} dy \quad \text{Дополним нулем: } \tilde{g}(y) = g(y)\chi_V(y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \iiint_{\mathbb{R}^n} \frac{\tilde{g}(y)}{\|x-y\|} dy \quad - \text{ посылочная в точке } x.$$

Опр Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ п-локально интегрируема, $1 \leq p \leq \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \exists V(x): \int_{V(x)} |f(y)|^p dy < \infty$

Эквив: $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ компакт $\int_K |f(y)|^p dy < \infty$

Обозн: $L_{p,loc}(\mathbb{R}^n)$ - мн-во p-локально инт. ф-ций

Зам: $L_p(\mathbb{R}^n) \subset L_{p,loc}(\mathbb{R}^n)$

Опр Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ п-принципальная, е её носитель (можно даже $f, g \rightarrow \mathbb{C}, g \subset \mathbb{R}^n$ открытое)

$\text{supp } f$ - наименьшее мн-во (замкнуто) (замкнуто) (открыто) (граница)

$\{x \in G: f(x) \neq 0\}$ замкнутое мн-во всех точек, где функция не тожд. ноль

Обозн: $C_0(G)$ - мн-во непрерывных принципно ф-ций

Зам: $C_0(\mathbb{R}^n) \subset L_{p,loc}(\mathbb{R}^n)$

Опр Пусть $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$. Положим $E(f, g) =$

$= \{x \in \mathbb{R}^n: y \mapsto f(x-y)g(y) \notin L_1(\mathbb{R}^n)\}$. Тогда определим

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad (f * g)(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy, & x \notin E(f, g) \\ 0, & x \in E(f, g) \end{cases}$

Теорема (о простейших св-вах свёртки)

Пусть $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

(1) $f * g$ - измеримая по Лебегу ф-ция $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(2) $f \sim f', g \sim g' \Rightarrow E(f, g) = E(f', g')$ и $(f * g)(x) = (f' * g')(x)$

(3) $E(f, g) = E(g, f)$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad (f * g)(x) = (g * f)(x)$

(4) Если одна из ф-ций f или g ~~принципальная~~ $\in C_0(\mathbb{R}^n)$, то $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Д-во 2) очевидно (из опр. св-ва свёртки (простейшие св-ва))

1) Дел. док-ва

3) Заприм $x \in \mathbb{R}^n \quad f_x(y) := f(x-y), \quad \varphi_x(y) = x-y$

Получим $\varphi_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - диффеоморфизм, $|\det(\varphi_x)'| = 1$

Тогда $((f_x * g) \circ \varphi_x)(y) = (g * f)(y) \quad (= f(x - (x-y))g(x-y))$

Значит, из м. о замене перемен-х в инт. Лебег

$\mathbb{R}^n \setminus E(f, g) = \mathbb{R}^n \setminus E(g, f)$ и $(f * g)(x) = (g * f)(x) \quad \forall x \notin E(f, g)$

4) Пусть g - принципно. и непр.

$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right| = \left| \int_{\text{supp } g} f(x-y)g(y) dy \right| \leq \int_{\text{supp } g} |f(x-y)| A dy =$

$= A \int_{\text{supp } g} |f(z)| dz < \infty, \text{ т.к. } f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n),$
 $x - \text{supp } g$ $(x - \text{supp } g)$ - компакт.

$x - B = \{x \in \mathbb{R}^n: \exists y \in B: z = x-y\}$ $A = \max_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)|$, т.к. непрер. в $\text{supp } g$

Теорема (перво Юнга)

Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$ и $f \in L_p(\mathbb{R}^n), g \in L_q(\mathbb{R}^n), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$

Тогда $\lambda(E(f, g)) = 0$ и $(f * g) \in L_r(\mathbb{R}^n)$, при этом $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Прегн (всинак нер-во)

Дукум (X, m, μ) и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ - кр-во с б-кон. мераме

Тога $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ и

$$(1) \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} = \sup_{\substack{g \in L_q(Y, \nu) \\ \|g\|_q = 1}} \left| \int_X f(x) g(x) d\mu(x) \right|$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$(2) \left(\int_Y \left(\int_X |h(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y) \right)^{1/p} \leq \left(\int_X \left(\int_Y |h(x, y)|^p d\nu(y) \right)^{1/p} d\mu(x) \right)^{1/p}$$

$1 \leq p < \infty$

Д. во

1) В ерхуване... $\|f\|_1 = \sup_{f \in X, \|f\|_1 = 1} |f(x)|$

2) $p=1$ - равенство из м. Йонана

$1 \leq p < \infty$. Показати $\int_Y \left(\int_X |h(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y) = \mathbb{C}$,

$\varphi(y) = \int_X |h(x, y)| d\mu(x)$, кучо $g \in L_q(Y, \nu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\left| \int_Y \varphi(y) g(y) d\nu(y) \right| \leq \int_Y \left(\int_X |h(x, y)| d\mu(x) \right) |g(y)| d\nu(y) =$$

нер-во Гельдера

$$= \int_X \left(\int_Y |h(x, y)| \cdot |g(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \leq \int_X \left(\int_Y |h(x, y)|^p d\nu(y) \right)^{1/p} \cdot \|g\|_q d\mu(x) =$$

$$= \|g\|_q \cdot \int_X \left(\int_Y |h(x, y)|^p d\nu(y) \right)^{1/p} d\mu(x) \quad *$$

$$P/\mu \left(\int_Y \left(\int_X |h(x, y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y) \right)^{1/p} = \| \varphi \|_p \stackrel{\text{из 1)}}{=} \| \varphi \|_p$$

$$= \sup_{\substack{g \in L_q(Y) \\ \|g\|_q = 1}} \left| \int_Y \varphi(y) g(y) d\nu(y) \right| \leq \int_X \left(\int_Y |h(x, y)|^p d\nu(y) \right)^{1/p} d\mu(x) \stackrel{\text{из 1)}}{=} \|g\|_q$$

Д. во (нер-во Хунга)

1) $r = \infty \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow |(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q dy \right)^{1/q} =$

нер-во Гельдера

$$= \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (\text{коче замена нер-х для } f)$$

2) $r < \infty \Rightarrow 1 \leq p, q < \infty \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$

Дукум $h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy$

$$P/\mu |h(x)|^q = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{1-\lambda} |f(x-y)|^{1-\lambda} |g(y)|^q dy \right)^{q/q'} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\lambda)q'} dy \right)^{q/q'} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^q dy \right)^{1/q'}$$

нер-во Гельдера

$$\cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\lambda)q} |g(y)|^q dy \right)^{1/q} = \|f\|_p^{pq/q'} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\lambda)q} |g(y)|^q dy$$

$\frac{pq}{q'} = \lambda q$

Пусть $S = \frac{r}{q} \geq 1 \Rightarrow |h(x)|^{qS} \leq$

$$\leq \|f\|_p^{\lambda q S} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\lambda)q} |g(y)|^q dy \right)^S$$

Пусть $\|h\|_r^q = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^r dx \right)^{q/r} =$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^{qS} dx \right)^{1/S} \leq \|f\|_p^{\lambda q} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\lambda)q} |g(y)|^q dy \right)^S dx \right)^{1/S}$$

из пред. $\leq \|f\|_p^{\lambda q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\lambda)qS} |g(y)|^{qS} dx \right)^{1/S} dy = \|f\|_p^{\lambda q} \cdot \|f\|_p^{\frac{q}{r}}$

$\cdot \|g\|_q^q = \left(\|f\|_p \cdot \|g\|_q \right)^q$ $(1-\lambda)qS = (1-\lambda)r = p$ $(\lambda + \frac{p}{r})q = q$ так как $\lambda \geq 0$

24.02.22. Равенство: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$ и $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

① $p=q=1=r \Rightarrow * : L_1 \times L_1 \rightarrow L_1$

$\Rightarrow L_1(\mathbb{R}^n)$ с опер. $*$ образует банахову алгебру

Сб-ка $(f * g) * h = f * (g * h)$

Д-ва: Восп-ся м. Точности и Фурье • непрерывные, • функции св.

Теорема (о непрерывности свёртки)

Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $f * g$ — ограниченная равномерно непрерывная функция на $\mathbb{R}$

Теорема (Соболева о непрерывности в среднем в L_p)

Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда

$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx = 0$. Если $f \in L_{p,loc}(\mathbb{R}^n)$, то (*)

$\lim_{y \rightarrow 0} \int_B |f(x-y) - f(x)|^p dx = 0 \quad \forall \text{ отрезка } B \subset \mathbb{R}^n$

без сом. ва

Д-ва м. о непрерывности. Лемма: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \|x-y\| < \delta \Rightarrow |(f * g)(x) - (f * g)(y)| < \varepsilon$

З/м: $f * g$ ограничена из леммы

Из м. Соболева (*): $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|y\| < \delta \Rightarrow$

$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx < \frac{\varepsilon^p}{\|g\|_q^p}$

Возьмем $\forall x \in \mathbb{R}^n: \|z\| < \delta \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$|(f * g)(x+z) - (f * g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x+z-y)g(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right|$ пер-во Гельфанда, р. 9

$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z-y) - f(x-y)| |g(y)| dy \leq$

$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z-y) - f(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \cdot \|g\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t+z) - f(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot \|g\|_q$ так как $dt = |(-1)^n| dy$
 можно $\det \Phi$

$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t+z) - f(t)|^p dt \leq \frac{\varepsilon^p}{\|g\|_q^p} \cdot \|g\|_q = \varepsilon$

т.е. $|f * g(x+z) - (f * g)(x)| < \varepsilon$ как только $\|x+z-x\| = \|z\| \leq \delta \Rightarrow$ равномерн. непрерывность. итог

Теорема (о гур-су свёртывания) $\exists D^\alpha f \neq 0 \text{ } |\alpha| \leq m$
 Пусть $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_0^{(m)}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq m \leq \infty$.

Тогда свёртка $f * g \in C^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ и выполняется α

$$D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g$$

Дока: $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$

Пусть $D^\alpha (f * g)(x) = D^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right) =$
 $= D^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right) = D^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g(x-y) dy =$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ м. о гур-су $|\alpha| \leq m$, т.е.

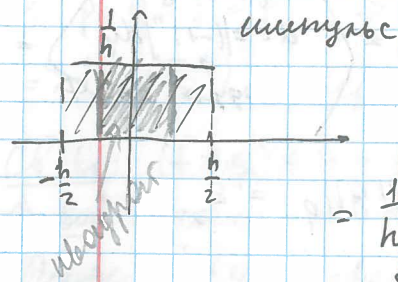
$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ $\left| \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g(x-y) \right| \leq \tilde{g}$

прогнози

$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (D^\alpha g)(x-y) dy = D^\alpha g * f$

Пример (Среднее по Стирнову)

Пусть $\Delta_h(x) = \frac{1}{h} \chi_{[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]}(x)$ Пусть $f \in \mathcal{R}(-\infty, +\infty)$,
 $f \in L_{1,loc}(-\infty, +\infty)$



$(f * \Delta_h)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \Delta_h(x-y) dy =$

$= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} f(y) dy = \frac{1}{h} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(y) dy$

$\text{supp } \Delta_h(x-\cdot) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| \leq \frac{h}{2}\}$

$x - \frac{h}{2} \leq y \leq x + \frac{h}{2}$

то f непрерывна
 равно непрерывно по Риману!

Опр Семейство функций $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\Delta_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, @

δ -образности семейств при $\alpha \rightarrow \alpha_0$, $\alpha_0 \in \text{dim } A$, или
 аппроксимативной единицы, @ $\forall \alpha \in A \Delta_\alpha \geq 0$

и 1) $\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_\alpha(x) dx = 1$, и 3) $\Delta_\alpha \geq 0$ в окр-сти $\nu(0) \in \mathbb{R}^n$
 $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_\alpha(x) dx = 1$. @ $A = \mathbb{N}$, то δ -образная
 последовательность

Примеры 1) $\Delta_h(x) = \frac{1}{h} \chi_{[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]}(x)$ - δ -образное семейство
 при $h \rightarrow 0$

1) и 2) мы проверяем, 3) возьмем $\nu(0) = (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Тогда $\exists h > 0$: $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \subset (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow$

$\int_{\nu(0)} \Delta_h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \Delta_h(x) dx = 1$, т.е. $\text{supp } \Delta_h \subset (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

2) $\Delta_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$ при $y \rightarrow +\infty$ Определить 1)
 где $y > 0$.

2) $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{y} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{\pi} = 1$

3) $\nu(0) = (-p, p)$, $p > 0$.

$\frac{1}{\pi} \int_{-p}^p \frac{y dx}{y^2 + x^2} = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{y} \Big|_{-p}^p = \frac{2}{\pi} \arctg \frac{p}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} 1$

3) Пусть $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $w \geq 0$, $\text{supp } w = B(0, 1)$ и

$\int_{\mathbb{R}^n} w(x) dx = 1$. Тогда $\Delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} w(\frac{x}{\varepsilon})$ - δ -образное
 семейство при $\varepsilon \rightarrow 0$

1) мы $w \geq 0$ и $\varepsilon > 0$

2) $\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} w(\frac{x}{\varepsilon}) dx = \left\langle t = \frac{x}{\varepsilon} \right\rangle =$
 $\int_{\mathbb{R}^n} w(t) dt = 1$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^n} \cdot \omega(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(t) dt = 1. \quad \text{supp } \Delta_\varepsilon = B(0, \varepsilon) \text{ носитель сосредоточен}$$

3) $\forall U(0) \in \mathbb{R}^n \exists \varepsilon > 0: \text{supp } \Delta_\varepsilon \subset U \Rightarrow$

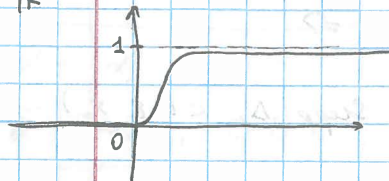
$$\int_U \Delta_\varepsilon dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Пример 1) пример
Рассмотрим $\omega = 1, \text{supp } \omega = [-1, 1]$
 $\varepsilon = h/2$

Пример (шаровая Соболева)

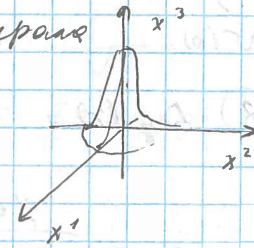
$\exists \omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \omega \geq 0, \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } \omega = B(0, 1)$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega dx = 1. \text{ Пусть } f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad f \in C^\infty(\mathbb{R})$$



Определим $\omega(x) = C f(1 - \|x\|^2)$,
C определяется из условия

$$C^{-1} = \int_{\mathbb{R}^n} f(1 - \|x\|^2) dx$$



Теорема (о равномерном приближении)

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ограниченная, свертываемая
равномерно непрерывная на $E \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ -
 δ -образное семейство при $\alpha \rightarrow \alpha_0$, $\alpha_0 \in \lim A$. Тогда

$$(f * \Delta_\alpha)(x) \xrightarrow[\alpha \rightarrow \alpha_0]{\varepsilon} f(x)$$

Доказательство. Имеем $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x, y \in E, \|x - y\| < \delta \Rightarrow$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\text{П/ч } |(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \Delta_\alpha(y) dy - f(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \Delta_\alpha(y) dy \right| = \left| \int_{V_\delta} (f(x-y) - f(x)) \Delta_\alpha(y) dy + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbb{R}^n \setminus V_\delta} (f(x-y) - f(x)) \Delta_\alpha(y) dy \right| \leq \varepsilon \cdot \int_{V_\delta} \Delta_\alpha dy + 2M \int_{\mathbb{R}^n \setminus V_\delta} \Delta_\alpha(y) dy$$

из оценок
 $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$= \varepsilon + 2M \int_{\mathbb{R}^n \setminus V_\delta} \Delta_\alpha(y) dy \leq 2\varepsilon$$

при $\alpha \rightarrow \alpha_0 \quad \int \Delta_\alpha \rightarrow 0$

числ

Сл.вещ. Если $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - δ -образное семейство при $\alpha \rightarrow \alpha_0$,
 $\alpha_0 \in \lim A$, f - свертываемая и x - точка непрерывности f ,
то $(f * \Delta_\alpha)(x) \xrightarrow[\alpha \rightarrow \alpha_0]{} f(x)$

01.03.22

Опр. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ - выпуклый многоугольник, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ и
гармоническая в G , $\partial f \in C^2(G)$ и $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$

Пример. $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

нормальная в G

$$g(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} - \text{гармон. в } G.$$

Пример (гармонические в полуплоскости функции)

Докажем, что $\partial G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: y > 0 \}$, то есть

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, y) = f(x), \quad f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \text{непр. свертываемая функция} \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u(x, y) = (f * \Delta_y)(x)$, где

$$\Delta_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad y > 0 \quad \text{при } y \rightarrow 0+$$

Уточним, 1) $\lim_{y \rightarrow 0+} (f * \Delta_y)(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ по сл.вещ.

2) $u(x, y) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

Надо $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(z)(y-z)}{x^2 + (y-z)^2} dz$ или Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f * \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta y = f * 0 = 0$$

$= 0, \text{ т.к. } \Delta y = 0$

Упр. Почему можно ввести диф. в центре? (найти инт. матрицы)
для $\frac{\partial^2}{\partial x^2} g + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g$, где $g = \frac{y}{x^2 + y^2}$

Теорема о плотности C_0^∞ в L_p

Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ — отк. мн-во, тогда $\forall f \in L_p(G)$ существует $\varphi_n \in C_0^\infty(G)$, т.е. $\|\varphi_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Д. во 1) Пусть $G = \mathbb{R}^n$. Возьмем $\tilde{\varphi}_m(x) = f * \omega_{\varepsilon_m}$, где ω_{ε_m} — δ -обр. с мн-во, генерируемое малостью Соболева
т.е. $\omega_{\varepsilon_m}(x) = \frac{1}{\varepsilon_m^n} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon_m}\right)$. Покажем, что $\|\tilde{\varphi}_m - f\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Из то. непрерывности свертки $\tilde{\varphi}_m \in C^\infty(G)$

$$p/\text{м } \|\tilde{\varphi}_m - f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\varphi}_m(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \omega_{\varepsilon_m}(y) dy - f(x) \right|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_{\varepsilon_m}(y) dy$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \omega_{\varepsilon_m}(y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

вспомог. лем. во

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \omega_{\varepsilon_m}^p(y) dy \right)^{1/p} dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \omega_{\varepsilon_m}(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} dy =$$

$$= \int_{B(0, \varepsilon_m)} \omega_{\varepsilon_m}(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} dy \leq$$

$$\leq \sup_{\|y\| \leq \varepsilon_m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot 1 < \varepsilon$$

$y \in B(0, \varepsilon_m)$

$$\text{Из то. Соболева } \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx = 0$$

2) $\forall f \in L_p \exists g_m \in L_p$: $\text{supp } g_m$ — компакт и

$$\|f - g_m\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{теперь требуем более сильное условие})$$

$$p/\text{м } g_m = f(x) \cdot \chi_{B(0, m)}, \quad \text{supp } g_m \subseteq B(0, m),$$

$$\|g_m - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, m)} |f|^p dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{т.к. } \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, m)} |f|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, m)} dx$$

$$\left| |f|^p \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, m)}(x) \right| \leq |f|^p \in L(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$$

и следств. о мажорир. эк-ств инт-ств

3) $G \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x \in G \\ 0, & x \notin G \end{cases}$ Получится новая конструкция, найдены $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Можно добиться $\text{supp } \varphi_n \subset G \Rightarrow \|\varphi_n - f\|_p \rightarrow 0$ или $\|\varphi_n - f(x)\|_p \xrightarrow{\mathbb{R}^n} 0$

Ф. Вей (и Соболев) о непрерывности в целом в L_p

1) Достаточно доказать теорему для функций f с компактным носителем (распределений или в ч.з. предпр. т.)

$$\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_p \leq \|f(\cdot - y) - g(\cdot - y)\|_p + \|g(\cdot - y) - g(\cdot)\|_p + \|g(\cdot) - f(\cdot)\|_p$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \|g(\cdot - y) - g(\cdot)\|_p$$

где $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } g$ - компакт и $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ (можно найти g из предпр. т.)

2) Зафиксируем $\varepsilon > 0$, т. $f \in L_p$ и $\text{supp } f \subset B(0, r)$, то

1° $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\lambda(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f|^p dx < \frac{\varepsilon^p}{2}$ (так как f непрерывна, можно выбрать)

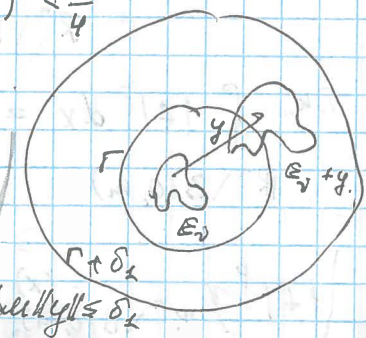
2° $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$: $\lambda(B(0, r + \delta_1)) - \lambda(B(0, r)) < \frac{\varepsilon^p}{4}$

3° $\exists$ компакт $E_\delta \subset B(0, r)$: f - непрерывна на E_δ и $\lambda(B(0, r)) - \lambda(E_\delta) < \frac{\varepsilon^p}{4}$

Тогда $K = \int |f(x-y) - f(x)|^p dx \leq$

$$\int_{E_\delta \cap E_\delta + y} |f(x-y) - f(x)|^p dx \leq \omega_f(E_\delta \cap E_\delta + y) \cdot \lambda(E_\delta \cap E_\delta + y)$$

или $f(x-y) \in C(E_\delta + y)$
 $f(x) \in C(E_\delta)$



здесь $\omega_f = \sup |f(x') - f(x'')|$ на множестве $x', x'' \in E_\delta \cap E_\delta + y$

Тогда $\exists \delta_2 < \delta_1$: $\forall \|y\| < \delta_2 \Rightarrow K \leq \frac{\varepsilon^p}{2}$ или f непрерывна, или δ_2 не зависит от $\lambda(E_\delta \cap E_\delta + y) \leq \text{const}$

$$\begin{aligned} \text{П/ч. } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx &= \int_{B(0, r + \delta_1)} |f(x-y) - f(x)|^p dx = \\ &= \int_{B(0, r)} |f(x-y) - f(x)|^p dx + \int_{B(0, r + \delta_1) \setminus B(0, r)} |f(x-y) - f(x)|^p dx \leq \\ &\leq 2^{p-1} \varepsilon^p \text{ из 1° и 2°} \end{aligned}$$

$$\leq 2^{p-1} \varepsilon^p + \int_{B(0, r) \setminus (E_\delta \cap E_\delta + y)} |f(x-y) - f(x)|^p dx + K \leq \varepsilon^p (2^{p-1} + \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} \text{Оценим } \lambda(B(0, r) \setminus E_\delta \cap E_\delta + y) &= \\ &= \lambda((B(0, r) \setminus E_\delta) \cup (B(0, r) \setminus E_\delta + y)) \leq \\ &\leq \lambda(B(0, r) \setminus E_\delta) + \lambda(B(0, r) \setminus E_\delta + y) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^p}{4} + \lambda(B(0, r + \delta_1) \setminus E_\delta + y) \leq \frac{\varepsilon^p}{4} + \frac{\varepsilon^p}{4} = \frac{\varepsilon^p}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varepsilon^p}{4} + \lambda(B(0, r)) - \lambda(E_\delta + y) + \lambda(B(0, r + \delta_1) \setminus B(0, r)) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^p}{4} + \lambda(B(0, r) \setminus E_\delta) + \frac{\varepsilon^p}{4} \leq \frac{\varepsilon^p}{4} + \frac{\varepsilon^p}{4} + \frac{\varepsilon^p}{4} < \varepsilon^p \end{aligned}$$

или $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, r + \delta_1)$ $\Rightarrow f = 0$

или

03.03.22 Глава 11. Гармонический анализ (ряды Фурье)

[1] Ряды Фурье над полем F ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Опр. Нормированное пр-во $(H, \|\cdot\|)$ в предгильберта-
евом, $\odot$ норма порождается скалярным произвед-м, т.е.
 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $x \in H$

1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$, $(x+z, y) = (x, y) + (z, y)$

3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

Пример. $L_2(G, \mu)$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathcal{M}_\mu$ измеримое
отн. к μ

$\{f: G \rightarrow F: \int_G |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty\}$

$\|f\|_2 = \left(\int_G |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} = \sqrt{\int_G f(x) \cdot \overline{f(x)} d\mu(x)}$

Определим $(f, g) := \int_G f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$ Проверим
аксиомы ск. пр.

1, 2 очевидно, 3: $\int_G f(x) \overline{g(x)} d\mu(x) = \overline{\int_G g(x) \overline{f(x)} d\mu(x)}$

разбиваем на h_+ и h_- применяем сопряженности,
для них верно, $\Rightarrow$ проясниваем 2/3 предс.

Опр. Полное предгильбертово пр-во в импедертовом

З/м. Если $d\mu(x) = \omega(x) dx$, то $L_2(G, \mu) = L_2(G, \omega)$ -
весовое импедертово пр-во. Тогда ск. пр-ние опис-ся

$(f, g) = \int_G f(x) \overline{g(x)} \omega(x) dx$

Опр. Пусть H - предгильбертово пр-во,
 x ортогонален $y \Leftrightarrow (x, y) = 0$

Система векторов $E = \{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ в ортогональн.

$\odot (e_\alpha, e_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$

- ортонормированной (ортонормальности), $\odot (e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$

Опр. Пусть $E \subseteq H$ - ортонормир. система векторов,
 $x \in H$. Тогда $\lambda_\alpha = (x, e_\alpha)$, $\alpha \in I$ в коэф-ты Фурье
вектора x по системе E , а ряд $\sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha e_\alpha$ - ряд
Фурье

Обозн: $x \sim \sum_{\alpha \in I} (x, e_\alpha) e_\alpha$

З/м $\odot$ система ортогональная, но не нормированная, то
система $\left\{ \frac{e_\alpha}{\|e_\alpha\|} \right\}_{\alpha \in I}$ ортонормированная $\Rightarrow$

$x \sim \sum_{\alpha \in I} (x, \frac{e_\alpha}{\|e_\alpha\|}) \frac{e_\alpha}{\|e_\alpha\|} = \sum_{\alpha \in I} \left(\frac{(x, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)} \right) e_\alpha$

Пример 1) Вещественная
тригонометрическая система

$H = L_2([- \pi, \pi], dx)$, $E = \{1, \sin nx, \cos nx, n \geq 1\}$

Опр. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \delta_{nm} \cdot \pi$, $n, m \geq 1$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$, $n \geq 1, m \geq 0$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \delta_{nm} \cdot \pi$, $n, m \geq 1$

Коэф-ты Фурье: $\frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx := \frac{a_0}{2}$

$\frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n$, $n \geq 1$

$\frac{(f, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = b_n$, $n \geq 1$

$$f \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

2) Каноническая тригонометрическая система

$$H = L_2([-l; l], dx) \quad \int_{-l}^l e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \int_{-l}^l e^{i(n-m)x} dx = 2l \delta_{nm}$$

$$E = \{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Косинус Фурье} \quad \frac{(f, e^{inx})}{(e^{inx}, e^{inx})} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-inx} dx =: C_n$$

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

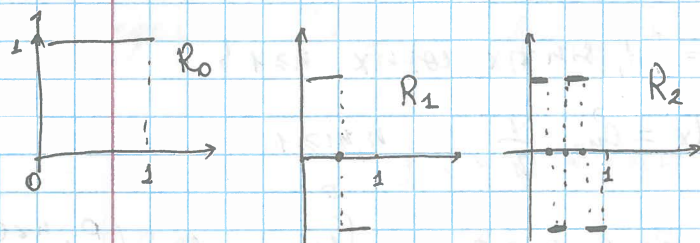
3) Функции Раджадхера

$$H = L_2([0, 1], dx)$$

$$E = \{R_n(x), n \in \mathbb{N}\}$$

$$R_0(x) = 1$$

$$R_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x), n \geq 1$$



Ортонормированная система
произведение $R_n \cdot R_m$
— уменьшение
(точное кол-во узлов)
 $= S = S_0 - S_n = 0$

Функции Гамма

$$W_{n_1, \dots, n_k} = R_{n_1} \cdot \dots \cdot R_{n_k} \quad \text{ортонорм система}$$

$$4) \begin{cases} u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) & x \in (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad q \in C^\infty(a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

$$\text{О } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ то } (u_1, u_2) = 0: \int_a^b u_1(x) u_2(x) dx =$$

$$D = \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

оператор

$\Rightarrow \lambda_1$ и λ_2 — собств. числа

$$= \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b (u_1'' + q u_1) u_2 dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1} \left(\int_a^b u_1'' u_2 + \int_a^b q u_1 u_2 dx \right) \stackrel{(\text{I})}{=} 0$$

$$\textcircled{1} \int_a^b u_1'' u_2 dx = \int_a^b u_2 du_1' = \underbrace{u_2 u_1'}_0 \Big|_a^b - \int_a^b u_1' u_2' dx =$$

из упр. 4 сч.

$$= - \int_a^b u_2' du_1 = \underbrace{-u_2 u_1'}_0 \Big|_a^b + \int_a^b u_1 u_2'' dx$$

$$\stackrel{(\text{II})}{=} \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b u_1 (u_2'' + q u_2) dx = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_a^b u_1 u_2 dx$$

$$\Rightarrow \lambda_1 (u_1, u_2) = \lambda_2 (u_1, u_2) \Rightarrow (u_1, u_2) = 0$$

5) Многочлены Лежандра

$$H = L_2([-1, 1], dx)$$

$$\{1, x, x^2, \dots\} \Rightarrow \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$$

орт. Грасс-Шмигга

$$\text{Стереогрива при Раджма: } P_n(x) = C_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

Докажем ортогональность:

$$\forall 0 \leq k \leq n-1 \quad (P_k, P_n) = 0 \iff (x^k, P_n) = 0 \quad \forall k \leq n-1$$

$$\int_{-1}^1 x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx = \int_{-1}^1 x^k d \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n =$$

$$= \underbrace{x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n}_{=0} \Big|_{-1}^1 = k \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n dx =$$

$$= (-1)^k k! \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2-1)^n dx = (-1)^k k! \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (x^2-1)^n \Big|_{-1}^1 = 0$$

аналогично = 0

Аппроксимация и проекция

Души $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — ортонорм сист в H

$$L_E = \{ \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \} = \{ x \in H : x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \}$$

$$\forall x \in H \text{ рли } x_E = (x, e_1) e_1 + \dots + (x, e_n) e_n, \quad x_E \in L_E$$

Ортогональная проекция вектора x на L_E

Покажем, что $\forall y \in L_E, \quad y \perp (x - x_E)$

$$y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, x - x_E) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i (e_i, x - x_E) = \sum_{i=1}^n \alpha_i ((e_i, x) - (e_i, x_E)) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i ((e_i, x) - (e_i, (x, e_i) e_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i ((e_i, x) - (e_i, x) (e_i, e_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i ((e_i, x) - (e_i, x)) = 0$$

Лемма (об аппроксимации)

Пусть $L_E = \{ \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \}$, где $E = \{ e_1, \dots, e_n \}$ - орт. норм. сист.

$$\text{Тогда } \forall x \in H \quad \|x - x_E\| = \inf_{y \in L_E} \|x - y\|$$

Д-во 1) По т. Биргана

$$\text{пусть } \{x_1, x_2, \dots, x_n\} - \text{орт. система, где } (x_i, x_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$x = x_1 + \dots + x_n \Rightarrow \|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

$$\text{Для } \{x_1, x_2\}: \|x\|^2 = (x, x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2) =$$

$$= (x_1, x_1) + 2(x_2, x_1) + (x_1, x_2) + (x_2, x_2) = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

$$\text{Зли } \forall y \in L_E \quad \|x - y\|^2 = \|x - x_E + x_E - y\|^2 =$$

$$= \|x - x_E\|^2 + \|x_E - y\|^2 \geq \|x - x_E\|^2$$

Теорема (перво Бесселя)

Пусть H - гильбертово пр-во, $E = \{ e_n \}_{n=1}^{\infty}$ - ортонорм. сист.

$x \in H$. Тогда существует $x_E = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, \quad x_E \in H$ и

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

$$\text{Д-во 1) } E_N = \{ e_1, \dots, e_N \}, \quad x_{E_N} = \sum_{n=1}^N (x, e_n) e_n -$$

орт. проекция x на E_N

$$h = x - x_{E_N} \perp \forall x_{E_N}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

$$\text{По т. Биргана } \|x\|^2 = \|x_{E_N} + h\|^2 = \|x_{E_N}\|^2 + \|h\|^2 \geq$$

$$\geq \|x_{E_N}\|^2 = (x_{E_N}, x_{E_N}) = \sum_{n=1}^N |(x, e_n)|^2 \quad \forall N \geq 1$$

$$\text{2) при } N \rightarrow \infty \text{ получаем } \|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

3) Д-во, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ с-с-е в H ; т.ч. H полно, то дост-но док., что $S_N = \sum_{n=1}^N (x, e_n) e_n$ - фундамент. в H , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N_0: \|S_n - S_m\| < \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$\text{пусть } n > m \quad \left\| \sum_{k=m+1}^n (x, e_k) e_k \right\|^2 \leq \sum_{k=m+1}^n |(x, e_k)|^2 < \varepsilon^2$$

Получим $\exists x_E \in H$: не о-р-у пределу т.ч. ряд с-с-е и хвост с-с-е и нулю

$$x_E = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

$$\text{4) Покажем также, что } \|x_E\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

(из непр. ск. пр-тия или ф-ции двух арг-ов)

$$\left. \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \\ y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \end{array} \right\} \Rightarrow (x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$$

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| =$$

$$= |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \leq$$

$$\leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq$$

$$\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| < \varepsilon_2 C_1 + \varepsilon_2 C_2$$

$$\rightarrow 0 \quad \rightarrow 0$$

Тогда $\sum_{n=1}^N |(x, e_n)|^2 = \|x_E\|^2 = (x_E, x_E) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (x, x) = \|x\|^2$

○ базисные эк. принци
 $\neq 0$ или $e_n = e_m$, - т. $n=m$
 и орт. и не орт. системы

Опр Пусть H - гильбертово пр-во, $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонорм. сист. Тогда E - ∞ рав-во Паретована

- замкнутой сист., @ $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$

- ортонормированном базисом (базис Гильберта), @
 $\forall x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$

Опр Пусть H - гильбертово пр-во. Система векторов $V = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ - полная в H , @ $\forall x \in H \quad x \in \text{cl} \text{lin } V = H$.

Пусть $W \in H$. Ортогональным дополнением в H к W
 @ мн-во $W^{\perp} = \{x \in H : (x, w) = 0 \quad \forall w \in W\}$

Лемма Пусть H - гильбертово пр-во. Тогда $V = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ полная $\Leftrightarrow V^{\perp} = \{0\}$ иногда исп. коэф. α_n и β_n сур. α_n и β_n

Д-во $\Rightarrow$ Пусть $\exists h \in V^{\perp}, h \neq 0$

Р/м $\|h - \sum_{n=1}^N \alpha_n v_n\|^2 = \|h\|^2 - \|\sum_{n=1}^N \alpha_n v_n\|^2 \geq \|h\|^2 > 0$

т. Пифагора

т.е. $h \notin \text{cl} \text{lin } V$ не можем приблизить, т.е. ограничена сверху кон. числом, но H -полна разность не стремится к нулю противоречие полноты H не исп.

$\Leftarrow$ Редуцируем до мин. нез. сист. $V = \{v_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \tilde{V} = \{\tilde{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$ мин. нез. сист. $\Rightarrow$ бесконечная алгебра

$\text{lin } V = \text{lin } \tilde{V} \xrightarrow[\text{базис-Минковского}]{\text{процесс}} E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - орт. норм. сист.

$\text{lin } \tilde{V} = \text{lin } E \quad (\text{lin } \{v_1, \dots, v_n\} = \text{lin } \{e_1, \dots, e_n\})$

$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n + h$

↑ первое Бесселя (исп. полноту H)

Имеем $h \perp e_n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow h \perp v_n \Rightarrow h \in V^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \Rightarrow \forall x$ выраж. и $\forall \{v_n\} \Rightarrow$ система полная

Теорема (критерий базисности)

Пусть H - гильбертово пр-во и $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - орт. норм. сист.

Тогда СУЗ: (1) E -полная (2) E -базис (3) E -замкнут.

Д-во (1) $\Rightarrow$ (2) $\forall x \in H \quad \|x - \sum_{n=1}^N (x, e_n) e_n\| \leq$ по лемме об отпр. α_n

$= \|x - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ из полноты $\exists \alpha_n$. Тогда $\|x - \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

т.е. $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ - базис по сур.

(2) $\Rightarrow$ (3) $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \Rightarrow \|x\|^2 = (x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$ так же, как в 4.8 и. первое Бесселя

(3) $\Rightarrow$ (1) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \quad \forall x \in H$

Возьмем $x \in E^{\perp} \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ $\Rightarrow E^{\perp} = \{0\} \Rightarrow$ в полном пр-ве $\Rightarrow$ эквив. полноты

Примеры 1) $\ell_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots), \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$

$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ - гильбертово, $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$

$E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}, e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ - базис Гильберта $\uparrow$ n -ое место

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \Leftrightarrow \|x - \sum_{n=1}^N x_n e_n\|_2^2 = \\ = \|(0, 0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)\|_2^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

2) Теорема (о полноте тригонометр. системы)

В $L_2[-\pi; \pi]$ системы $\{1, \cos nx, \sin nx, n \geq 1\}$ и $\{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ - полн. *и в дальнейшем*

След-но, справедливо рав-во Парсивала, к-е для этой системы и равенством Лебнува

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, e_n)|^2}{(e_n, e_n)}, \quad f \in L_2[-\pi; \pi],$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n \geq 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \geq 1$$

$$f(x) \underset{L_2[-\pi; \pi]}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad a_n, b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ и т.д.}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad \text{приближение по норме } L_2 \text{ или } L_2 \text{ абсолютно}$$

Поточечное представление тригонометрическим рядом Фурье

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{этот ряд определен в } f \in L_1[-\pi; \pi] \text{ даже (где } \pm \text{ и т.д. по Лебелю)}$$

Теорема (Канторович)

$\exists f \in L_1[-\pi; \pi]$: ряд Фурье для f расх-ся в почти в. $[-\pi; \pi]$.

Теорема (Карлесон-Хан)

$f \in L_p[-\pi; \pi]$, $p > 1$, ряд Фурье для f с.с.е. и $f(x)$ для п.в. $x \in [-\pi; \pi]$.

Теорема (лемма Римана-Лебега)

Пусть $f \in L_1(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos px \, dx = 0 \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin px \, dx = 0$$

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(a, b): \|f - \varphi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$ *и т.д. аппрокс. в L_1 функциями*

$$\text{П/и } \left| \int_a^b f(x) \sin px \, dx \right| = \left| \int_a^b (f - \varphi_\varepsilon) \sin px \, dx + \int_a^b \varphi_\varepsilon \sin px \, dx \right| \leq \\ \leq \|f - \varphi_\varepsilon\|_1 + \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon \sin px \, dx \right| \leq \langle \text{по рас-ам} \rangle \leq \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon + \left| \int_a^b \varphi_\varepsilon \cos px \, dx \right| \leq \varepsilon + \left| -\frac{1}{p} \varphi_\varepsilon \cos px \Big|_a^b + \frac{1}{p} \int_a^b \cos px \, \varphi_\varepsilon' \, dx \right|$$

$$\leq \varepsilon + \frac{1}{|p|} \int_a^b |\varphi_\varepsilon'| \, dx < 2\varepsilon \quad \text{при } p > C \quad \text{и т.д. } \varphi_\varepsilon' \text{ ограничена} \Rightarrow \text{оп. н.б.}$$

Численный Дифференциал

15.03.22

1. Пусть $f \in L_2[-\pi; \pi]$, $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Частичная сумма ряда Фурье:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \\ + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \right) \cos nx + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \right) \sin nx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx}_{\cos n(t-x)} \right) dt \quad (\equiv)$$

Положим $t-x=u$:

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nu \right) \sin \frac{y}{2} = \frac{1}{\sin \frac{y}{2}} \left(\frac{\sin \frac{y}{2}}{2} + \cos u \sin \frac{y}{2} + \dots + \cos nu \cdot \sin \frac{y}{2} \right)$$

$$= \left\langle \text{м.в.} \cos nu \sin \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \left(\sin \left(nu + \frac{y}{2} \right) - \sin \left(nu - \frac{y}{2} \right) \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \frac{y}{2}} \left(\frac{\sin \frac{y}{2}}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{5y}{2} + \dots + \frac{1}{2} \sin \frac{2N+1}{2} y - \frac{1}{2} \sin \frac{2N-1}{2} y \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2N+1}{2} y}{\sin \frac{y}{2}} \quad (\equiv) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2N+1}{2} u}{\sin \frac{y}{2}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t) D_N(x-t)}{2\pi} dt$$

Получили $D_N(u) = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}}$ — N-ое ядро Дирихле

[2] $f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$, $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L[-\pi; \pi]$

$$S_N = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{n=-N}^N e^{inx} e^{-int} \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt$$

Формулы локализации

Теорема Пусть $f \in L[-\pi; \pi]$, $x \in (-\pi; \pi)$. Тогда если

lim $S_N(x)$ существует, то он зависит лишь от значения f в окрестности x (точнее, от $U_\varepsilon(x)$).

Лемма (о свойствах ядра Дирихле)

1) $D_N(u)$ — четная, Δ период 2π

2) $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(u) du = 1$ 3) $\forall \delta > 0 \quad \int_{\delta}^{\pi} D_N(u) du \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

Д.601 1) м.в. сумм периодов и период 2π

2) из вып: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos Nu \right) du =$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1.$

3) $\int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin \frac{2N+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} du = \int_{\delta}^{\pi} g(u) \sin(p_N u) du \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{лемма Римана-Лебега}} 0$

где $p_N = \frac{2N+1}{2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$, $g(u) = \frac{1}{\sin \frac{u}{2}} \in L[-\pi; \pi]$

Д.60 теорема: $S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt =$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \right) f(t) D_N(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t) D_N(x-t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} \right) \quad (\equiv)$$

на основе гомотетии и периодичности

Продолжим f с периодом 2π на $\mathbb{R} \Rightarrow \tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) D_N(x-t) dt =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} t-x=s \\ t=x+s \\ dt=ds \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \tilde{f}(s+x) D_N(s) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(s+x) D_N(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \tilde{f}(s+x) D_N(s) ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} \tilde{f}(s+x) D_N(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \tilde{f}(s+x) D_N(s) ds =$$

$t = -s$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(s+x) D_N(s) ds + \frac{1}{2h} \int_{\varepsilon}^{\pi} (\tilde{f}(s+x) + \tilde{f}(x-s)) D_N(s) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(s+x) D_N(s) ds + O(1), \text{ при } N \rightarrow \infty, \text{ так по лемме Римана-Лебега}$$

$$\frac{\tilde{f}(s+x) + \tilde{f}(s-x)}{\sin \frac{s}{2}} \sin \frac{2N+1}{2} s = g(s). \sin \frac{2N+1}{2} s,$$

$$g(s) \in L_1[\varepsilon; \pi], \quad \frac{2N+1}{2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$$

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} |g(s)| ds \leq C \cdot \int_{\varepsilon}^{\pi} |\tilde{f}(s+x) + \tilde{f}(s-x)| ds < +\infty$$

Получим $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2h} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t-x) dx =$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2h} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t) D_N(t-x) dx + 0 \Rightarrow \frac{1}{2} f(x)$$

замена переменной
или же в вып-сх
или

Условие Дини

Пусть $x \in \mathbb{R}$, $f: U(x) \rightarrow \mathbb{C}$; f удовлет. усл. Дини, $\varnothing$ в точке x

- (1) $\exists$ непрерывное отрез. непрер. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x \pm \varepsilon) = f(x \pm 0)$
 - (2) $\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} dt$ и $\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} dt$ $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ одновременно
- или же по нек-т $\varepsilon > 0$

З/ч из (1) и (2) следует: существование интеграла

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-0)}{\varepsilon}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{f(x-\varepsilon) - f(x-0)}{\varepsilon} \quad ???$$

Теорема (о дост. усл. эквив. пред. Рунге в точке)

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ - функ. с периодом 2π , $f \in L_1[-\pi; \pi]$, $x \in \mathbb{R}$
Если f удов. усл. Дини в м. x , то $S_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

Д-во:

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) D_N(s) ds = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} \right) f(s+x) D_N(s) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(s+x) + f(x-s)) D_N(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+0) + f(x-0)) D_N(s) ds$$

$$+ \frac{1}{2h} \int_0^{\pi} (f(s+x) - f(x+0)) D_N(s) ds + \frac{1}{2h} \int_0^{\pi} (f(x-s) - f(x-0)) D_N(s) ds =$$

$$= \frac{1}{2h} \cdot \pi \cdot (f(x+0) + f(x-0)) \text{ по лемме о св-вах } D_N.$$

$I_1 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ и $I_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ по л. Римана-Лебега

$$\int_0^{\pi} g(s) \sin \frac{2N+1}{2} s ds = \int_0^{\pi} \frac{f(s+x) - f(x+0)}{s} \cdot \frac{s}{\sin \frac{s}{2}} \cdot \sin \frac{2N+1}{2} s ds$$

$$g \in L_1[\pi; \pi], \text{ т.к. } \int_0^{\pi} |g(s)| ds \leq C \cdot \int_0^{\pi} \frac{f(x+s) - f(x+0)}{s} ds < \infty$$

или

Примеры ф-ций, удов. усл. Дини

- 1) Липовские: $f: U(x) \rightarrow \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$.
 $\forall t_1, t_2 \in U(x) \quad |f(t_1) - f(t_2)| \leq |t_1 - t_2|^{\alpha}, \quad \alpha \in [0, 1]$

- а) $f(x \pm \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} f(x)$, т.к. $f \in C(U(x))$

$$\delta) \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{f(x \pm t) - f(x)}{t} \right| dt \leq \int_0^{\varepsilon} \frac{|x \pm t - x|^{\alpha}}{t} dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{t^{1-\alpha}} < \infty$$

- 2) Односторонние липовские ф-ции: $f: U(x) \rightarrow \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\cdot \forall t_1, t_2 \in (x-\varepsilon, x) \quad |f(t_1) - f(t_2)| \leq |t_1 - t_2|^{\alpha}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

$$\cdot \forall t_1, t_2 \in (x, x+\varepsilon)$$

$$\cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(x \pm \varepsilon) = f(x \pm 0)$$

существование
и непрерыв

а) из вып

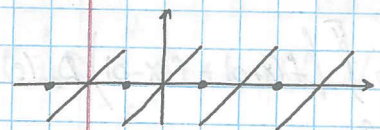
б) из вып, аналогично

- 3) Кусочно-липовые ф-ции

17.03.2022

Примеры

1) $f(x) = x$ на $(-\pi, \pi)$ и продолжим периодически в точках стыка положим 0



По сур. $f(x)$ кусочно-линейная

Проверим: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0$, т.к. x - нечетная, $\cos$ - четное

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x d(\cos nx) = -\frac{2}{\pi n} x \cos nx \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{2}{\pi n} \pi (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

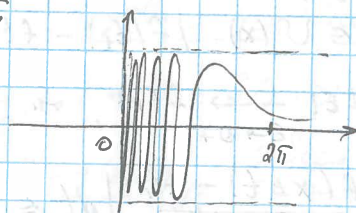
Ряд Фурье: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx = x$ $\forall x \in (-\pi, \pi)$

При $x = \pm \pi$ имеем по усл. Дирихле $\Sigma = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = 0$

При $x = \frac{\pi}{2}$: $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n \frac{\pi}{2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} (-1)^{k+1} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ при $x = \frac{\pi}{4}$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

$$2) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 2\pi) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

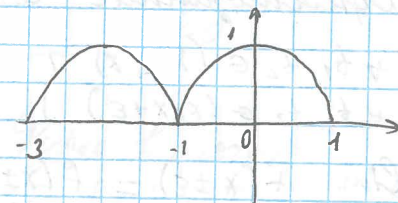


В точке $x=0$ не выполн. усл. Дирихле: $f(0 \pm 0)$ не сущ. ест.

3) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x \in [-1, 1]$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{f(1-t)}{t} dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{\sqrt{1-(1-t)^2}}{t} dt =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{\sqrt{2t-t^2}}{t} dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{\sqrt{2-t}}{t^{1/2}} dt < +\infty$$



$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = 0$

Условие Дирихле выполн. в т.к. f м. $\neq 0$ и $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$

Теорема Рунге

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ - ф-ция с периодом 2π и $f \in L_1[-\pi, \pi]$. Если f равномерно непрерывна на $E \subseteq \mathbb{R}$, то

$$\frac{S_0 + S_1 + \dots + S_N}{N+1} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} f(x) \quad \text{или } E = \{x\} \text{ или } \emptyset \text{ или } \mathbb{R}$$

$$\text{Д.б.с.} \quad \frac{S_0 + \dots + S_N}{N+1} = \frac{1}{N+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \sum_{k=0}^N D_k(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t) dt, \text{ где } F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(t) =$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{2k+1}{2} t \right) - \cos \left(\frac{2k+1}{2} t + \frac{1}{2} t \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \frac{\cos kt - \cos (k+1)t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \langle \text{телескопирование} \rangle$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1 - \cos (N+1)t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{N+1} \frac{2 \sin^2 \frac{(N+1)t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

Определим $A_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} F_N(x), & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & x \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$ - δ -образная по мере с.б. т.к.

1) $\Delta_N \geq 0$ $\forall x$, т.к. $F_N \geq 0$

$$2) \int_{\mathbb{R}} \Delta_N(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} F_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^N \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^N \frac{1}{N+1} = 1 \quad 3) \int_{\mathbb{R}} \Delta_N(x) dx = \frac{1}{N+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt$$

$$\leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\pi n^2 \frac{\pi}{2}} < \infty \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Тогда $\frac{S_0(x) + \dots + S_N(x)}{N+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \bar{F}_N(t) dt =$
 $= \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \Delta_N(t) dt = (f * \Delta_N)(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\epsilon} f(x)$ по т.о. равномерн. приближен. свёрточн. ядром

Сл. вкл. 1° Пусть f - непрер. ф-ция в м. $x \in \mathbb{R}$ и её ряд Фурье с.с. в м. $x \in \mathbb{R}$. Тогда ряд Фурье с.с. к $f(x)$.

Д.вкл. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_0(x) + \dots + S_N(x)}{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) \in \mathbb{R}$
 ср. ариф. предел

2° (т. Вейерштрасса) Пусть $f \in C[-\pi; \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$

Тогда $\exists$ послед. ст. тригоном. полиномов

$$T_N = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx, \text{ т.ч. } T_N(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{[-\pi; \pi]} f(x)$$

Д.вкл. $T_N = \frac{S_0 + \dots + S_N}{N+1}$ - тригонометр. м.п.

$\Rightarrow$ по т. Дибера и т. равномерн. непрер. $f(x)$ по т. Кантора

3° (полная тригонометрическая система в $L_2[-\pi; \pi]$)

$\forall f \in L_2[-\pi; \pi] \exists T_N: \|T_N - f\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

Д.вкл. $\forall N \in \mathbb{N}$ найдём $g_N \in C^\infty(-\pi; \pi): \|g_N - f\|_2 \leq \frac{1}{N}$
 по т.о. приближении функциями

Тогда $\exists T_{M(N)}: \|T_{M(N)} - g_N\|_\infty < \frac{1}{N}$
 по т. Вейерштрасса равномерная метрика

Отсюда $\|T_{M(N)} - g_N\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|T_{M(N)} - g_N\|_\infty < \frac{\sqrt{2\pi}}{N}$

т.к. $\|T_{M(N)} - g_N\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |T_{M(N)}(x) - g_N(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

Возьмём $\|T_{M(N)} - f\|_2 \leq \|T_{M(N)} - g_N\|_2 + \|g_N - f\|_2 \leq \frac{\sqrt{2\pi} + 1}{N}$, устремим $N \rightarrow \infty$

Свойство сходимости рядов Фурье

1° Пусть м.п. a_n, b_n, c_n

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cos |n|x + i \sin nx) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos |n|x dx + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx =$$

$$= \frac{a_{|n|}}{2} + i \sin n \frac{b_{|n|}}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n = C_n + C_{-n}, \quad b_n = i(C_n - C_{-n}), \quad n \in \mathbb{N}$$

2° Теорема (о разл. Фурье где f')

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ - непрер. в. с периодом 2π ф-ция, кусочно-шаговая, $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$. Тогда

$$f' \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} i n C_n e^{inx} \quad (\text{можно формально почленно})$$

Д.вкл. $C_n' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \dots + \int_{x_m}^{\pi} \right) f' e^{-inx} dx$
 $= \frac{1}{2\pi} \left(f(x) e^{-inx} \Big|_{x=-\pi}^{x=x_1} + \int_{-\pi}^{x_1} f(x) i n e^{-inx} dx + \dots + f(x) e^{-inx} \Big|_{x=x_m}^{x=\pi} + \int_{x_m}^{\pi} f(x) i n e^{-inx} dx \right) =$
 $= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{x_1} + \dots + \int_{x_m}^{\pi} \right) f(x) i n e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \left(f(x_1-0) e^{-inx} - \dots - f(x_m-0) e^{-inx} + f(\pi-0) e^{-inx} - f(-\pi+0) e^{-inx} \right)$

$$\begin{aligned}
 & -f(-\pi)e^{i n \pi} + f(x_2 - 0)e^{-i n x_2} - \frac{f(x_1 + 0)e^{-i n x_1}}{+ \dots} \\
 & + f(\pi)e^{-i n \pi} = \frac{i n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx + (f(-\pi) - f(\pi)) \cdot (-1)^n = \\
 & = i n C_n = C_n'
 \end{aligned}$$

в силу пер-ей и период-ей, все сопр-ся

Сл-ствие. Если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ - период с периодом 2π и $f \in C^{(m-1)}$ и $f^{(m)}$ - кусочно-интегрируемая, то $C_n^{(m)} = O(\frac{1}{n^m})$, $n \rightarrow \infty$

Д-во: $C_n^{(m)} = i n C_n^{(m-1)} = (i n)(i n) \dots (i n) C_n \Rightarrow$

$$C_n = \frac{C_n^{(m)}}{i^m n^m} = O\left(\frac{1}{n^m}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ т.е.}$$

$$C_n^{(m)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ т.к. } f^{(m)} \in L_2[-\pi; \pi] \Rightarrow \text{из леммы Дирхле}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n^{(m)}|^2 < \infty \Rightarrow C_n^{(m)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{т.к.}$$

Теорема (о скорости сходимости ряда Фурье) $m \geq 1$
 Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ - с периодом 2π , $f \in C^{(m-1)}$ и $f^{(m)}$ - кус. инт-руемая, $m \geq 1$. Тогда ряд Фурье с.с. на $\mathbb{R}$ равномерно к f и $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^{m+1/2}}\right)$, $n \rightarrow \infty$

22.03.22. Д-во: 1) Покажем $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} f$.

дост-но при $m \geq 1$. По т. о с.с. ряда Фурье

$$S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ т.к. } f \text{ устр. усл. Дини. Получим}$$

последнюю с.с., покажем равномер. с.с. функции ряда S_n .

По т. Вейерштрасса (мажор. признак) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n'| + |b_n'|}{n} \leq \quad \text{вспомогат. } C_n' = (i n) C_n$$

$$\stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|a_n'| + |b_n'|)^2}{1}} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \cdot \sqrt{2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n'|^2 + |b_n'|^2} =$$

равно Парсевале

$$|b_n'|^2 + 2|a_n'||b_n'| + |b_n'|^2 \leq \text{перво о ср. } \frac{a^2+b^2}{2} \geq 2ab$$

$$\leq 2(|a_n'|^2 + |b_n'|^2)$$

$$\leq \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx} < \infty \Rightarrow \text{ряд Фурье с.с. равномерно на } \mathbb{R}$$

т.к. $f \in C^1 = L_2[-\pi; \pi]$

2) Пусть $\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right| \leq$

здесь берем сумму $x \in \mathbb{R}$

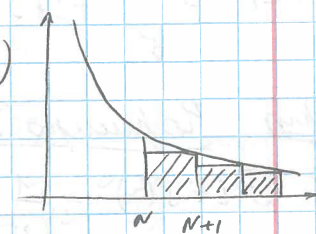
$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a_n^{(m)}|}{n^m} + \frac{|b_n^{(m)}|}{n^m} \leq \text{перво о среднем}$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a_n^{(m)}|^2 + \left(\frac{1}{n^m}\right)^2}{2} + \frac{|b_n^{(m)}|^2 + \left(\frac{1}{n^m}\right)^2}{2} \leq \text{КБШ}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n^{(m)}|^2 + |b_n^{(m)}|^2)} \cdot \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}} \leq$$

анал. рассужд или в.н.1
 где $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ ряд с.с.
 $\Rightarrow x \text{ б.с.} < \varepsilon \Rightarrow = O(1)$

$$O\left(\frac{1}{n^{m+1/2}}\right)$$



пр. Коши-Майоране (с.с. ряда $2/3$ с.с. интеграла)

$$\text{т.к. } \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{x^{-2m+1}}{-2m+1} \Big|_N^{+\infty} = -\frac{N^{-2m+1}}{-2m+1} =$$

$$\leq O(1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot \frac{1}{N^{m-1/2}} \text{ при } N \rightarrow \infty$$

т.к.

Преобразование Фурье

1) Пусть f - с периодом 2π ,
 $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, где $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

Пусть $\ell \rightarrow \infty \Rightarrow$ периодичность пропадет, будем f на $\mathbb{R}$

$f(x) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} C(x) e^{ixy} dy$, где $C(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy$

интеграл, но это не совсем так, по хитро по формуле Римана, но на $(-\infty, +\infty)$

2) Определим $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ функ., т.е. f интегрир. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ixy} dy$ в смысле м.зн. по Коши. Тогда преобразованием Фурье функ. f на функ. $\hat{f}(x) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

Если $\hat{f}(x)$ существует н.в. $x \in \mathbb{R}$, то интегрир. (в смысле м.зн. по Коши) не Лебег

$f(x) \sim \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{ixy} dx$ на интегралом Фурье (непр. аналог. коэф. Фурье и ряда)

Определим нормированное преобразование Фурье функ. f

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

Если $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, то $\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(x,y)} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$

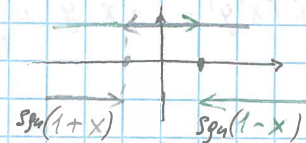
Пример. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, координатный синус/синус от нуля
 $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, но $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = (\sin \beta) \cdot \frac{\pi}{2}$ интеграл Дирихле

$$\hat{f}(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \frac{\sin y}{y} e^{-ixy} dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \left(\frac{\sin y \cos xy}{y} - \right.$$

$$- \frac{i \sin y \sin xy}{y} \Big) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin y \cos xy}{y} dy =$$

т.к. $(-R, R)$ симм. относительно 0, функ. нечетная, т.е. первое слагаемое - четное

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+x)y + \sin(1-x)y}{2y} dy =$$



$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(1+x) + \operatorname{sgn}(1-x)) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1) \\ 0, & |x| > 1 \\ 1/2, & |x| = 1 \end{cases}$$

Теорема (о непр-ти преобр. Фурье)

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ и $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

1) $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$

$$2) \|\hat{f}\|_{\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1$$

$$3) \hat{f}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Обозн. $\hat{f}(x) = \hat{F}[f](x)$

непр-е функ. для функ. или по Лебегу (сильнее) или по Коши

$$\text{Дока. } 2) \|\hat{f}\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(x,y)} dy \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1$$

линейно-есть sup
всегда sup, т.к.
непрерывна

1) По м.о. непр-ея ЧЗП т.к. $f(y) e^{-i(x,y)}$ непр. по x и $y \in \mathbb{R}^n$

$$\text{и } |f(y) e^{-i(x,y)}| = |f(y)| \in L_1(\mathbb{R}^n) - \text{инт. мажоранта}$$

$\Rightarrow \hat{f}(x)$ - непр. $x \in \mathbb{R}^n$ и н.в. с.зн. совпадает

3) Лемма Римана-Лебега

$$\text{для } n=1 \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 0$$

с н.в. Лебегу или по Риману (сильнее)
или по Коши
и по Коши

Для $n > 1$: $\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(x,y)} dy = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y', y_n) e^{-i x_n y_n} dy_n \right) dy'$

$e^{-i(x'y' + \dots + x''y^{n-1})} dy' \dots dy^{n-1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{случ: } x \rightarrow \infty \quad (\Rightarrow) \\ \text{или } \|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow \\ \exists i \in \mathbb{N}: x_i \rightarrow \infty \\ \text{иначе } i=1 \end{array} \right\}$

$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \right)}_{x \rightarrow \infty \rightarrow 0} e^{-i(x'y' + \dots + x''y^{n-1})} dy' \dots dy^{n-1}$ почему можно бесконечность $\rightarrow \infty$ вынести?

лучше как при $n=1$: $|f(y) e^{-i(x,y)}| \leq |f(y)|$ — мажоранта

Пример $f(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$
 $f \in L_1(\mathbb{R})$ $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$
 эквивалентно $e^{-ixy} = \cos xy - i \sin xy$
 интеграл от $\sin$ равен 0

$\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos xy dy = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos xy dy}_{I(x)}$

Найдем $I(x)$ групп-леммой по параметру,

$I'(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} (-\sin xy) \cdot y dy = - \int_{\mathbb{R}} y \sin xy e^{-x^2/2} dy =$
 $= \sin(xy) e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} x \cos xy dy = -x I(x)$

$\frac{dI}{dx} = -x I \Rightarrow \frac{dI}{I} = -x dx \Rightarrow \ln I = -\frac{x^2}{2} + c$

$I = c e^{-x^2/2}$, но $I(0) = c = \sqrt{2\pi} \Rightarrow I(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2} \Rightarrow$

$\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](x) = e^{-x^2/2} \Rightarrow$ функция не меняется при преобразовании Фурье,
 т.е. $f(x)$ — собственная функция, 1 — собствен. зн. Ф.