

# Электричество и магнетизм

## Часть 1. Электрическое поле в вакууме.

Погосов Артур Григорьевич

Уважаемые студенты!

Предлагаю вашему вниманию иллюстративный материал к лекциям по электричеству и магнетизму.

Обратите внимание: эти лекции читаются классическим способом ("мелом по доске"), сопровождаются комментариями, выводами формул и пояснениями, как это обычно принято. Представленный же материал лишён этого всего, содержит лишь иллюстрации и основные формулы, что можно рассматривать как "фонное" сопровождение лекций, но никак не замену самих лекций и ваших конспектов.

В то же время, я рассчитываю, что этот материал поможет хотя бы некоторым из вас лучше усвоить содержание лекций, вспомнить логику и последовательность изложения. Кроме того, такой сверхкраткий экстракт иногда позволяет по-другому взглянуть на курс: охватить его в целом, увидеть взаимосвязь частей.

А.Г.Погосов.

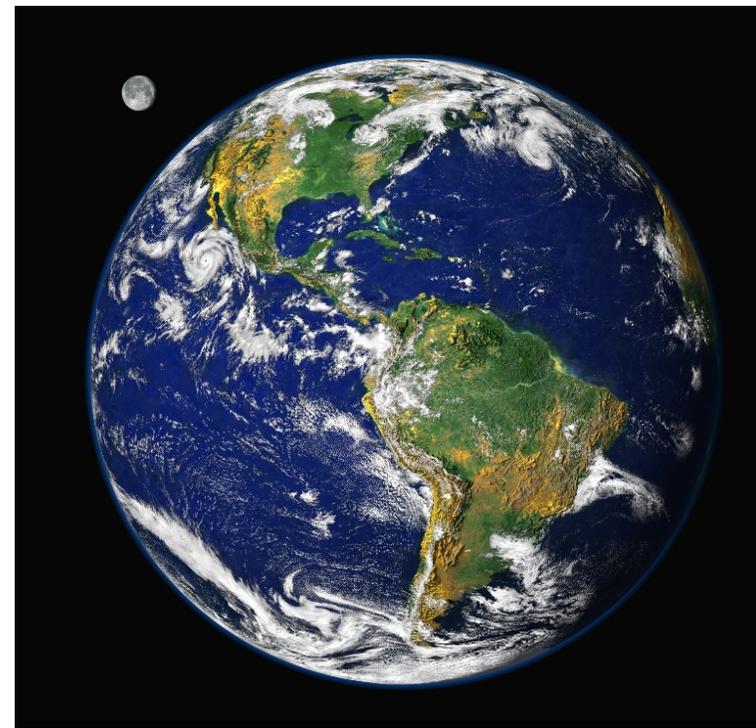
P.S. К настоящему времени подготовлена 1-я часть, затем последуют другие.

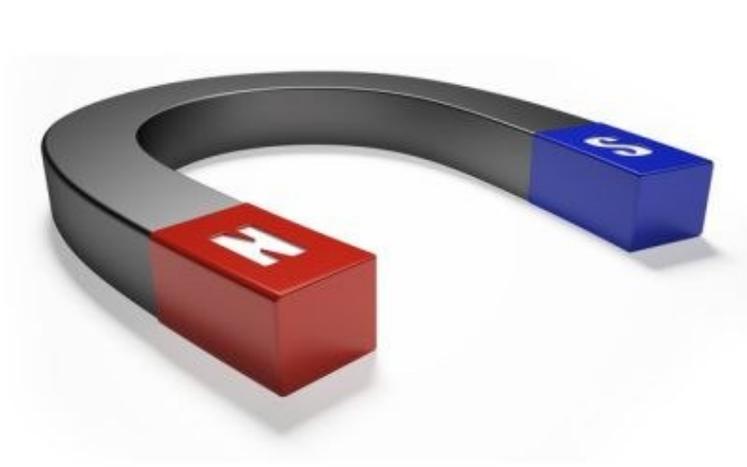
# Существует 4 типа взаимодействий:

1. Гравитационное
2. Электромагнитное
3. Слабое
4. Сильное

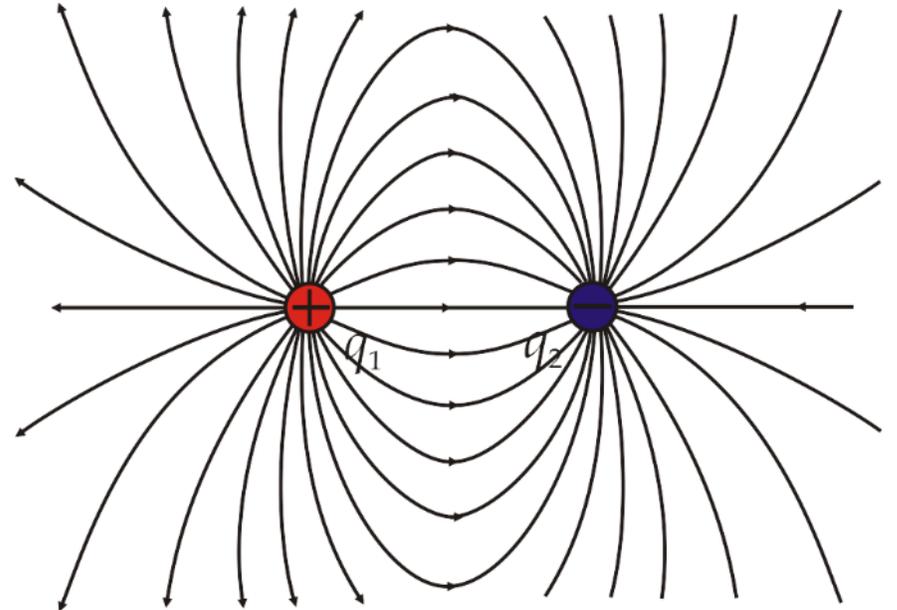


В повседневной жизни играют роль в основном первые два типа взаимодействий. Причём, гравитационное требует наличия массивных тел. Рядом с нами два массивных тела — Земля и Луна, с которыми связаны, соответственно, земное притяжение и приливы.



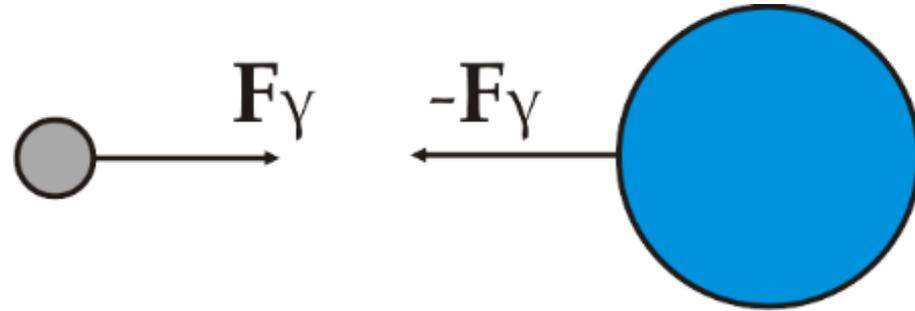


**Большинство же явлений повседневной жизни — электромагнитной природы.**



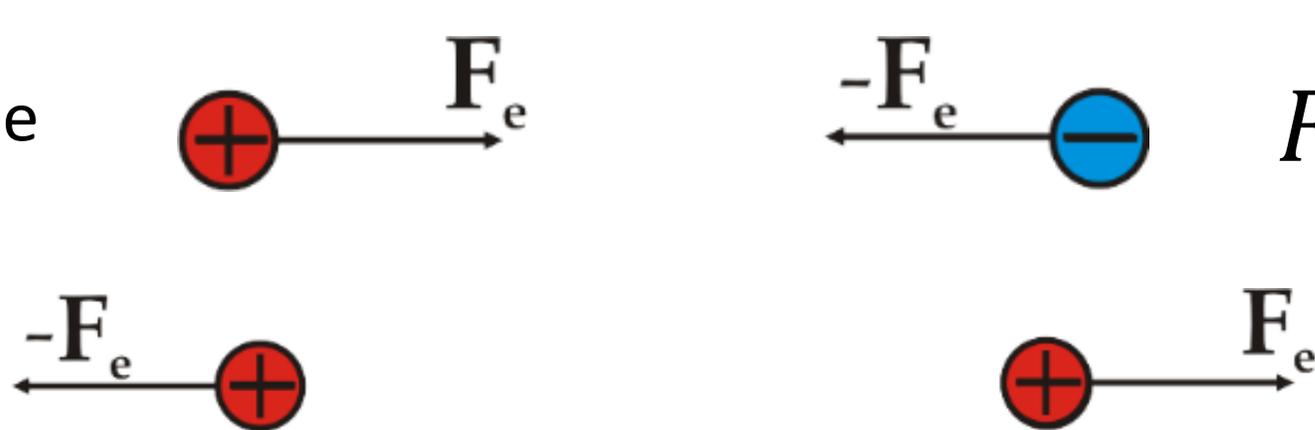
# Взаимодействие между телами

- Гравитационное



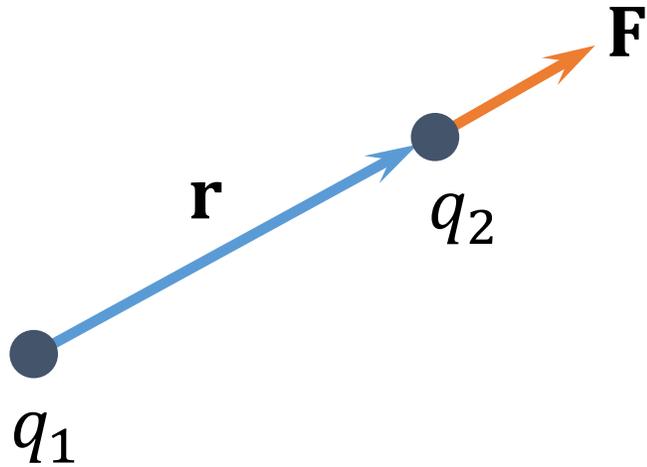
$$F_\gamma \propto \frac{1}{r^2}$$

- Электрическое

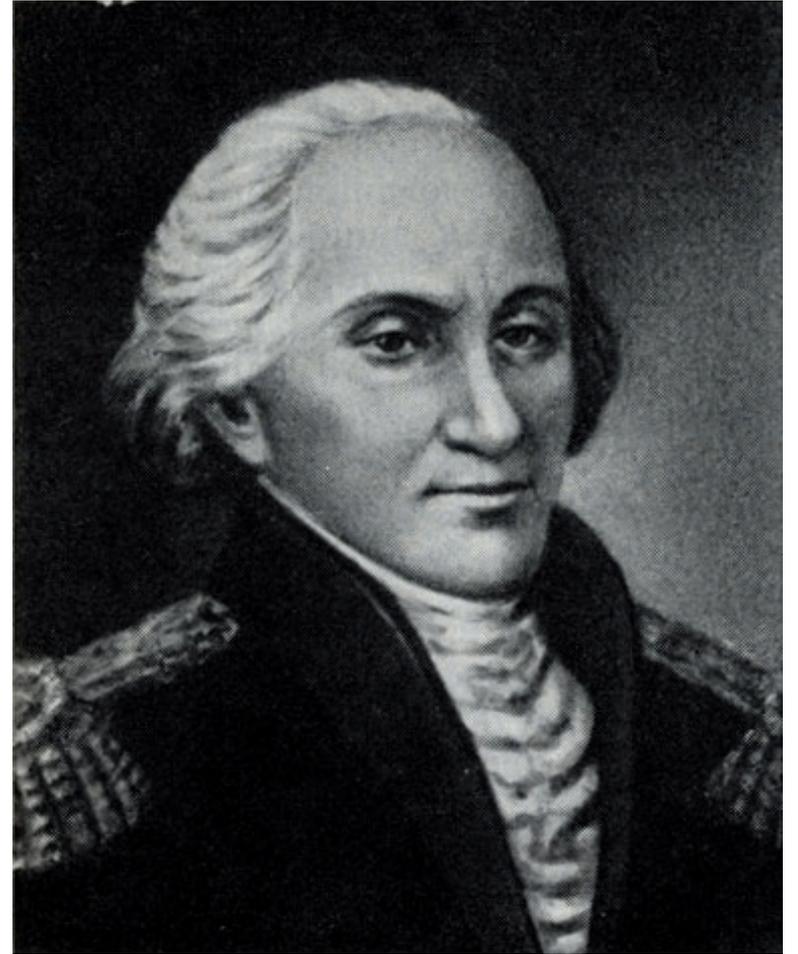


$$F_e \propto \frac{1}{r^2}$$

# Закон Кулона



$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$



**Шарль Огюстен де Кулон**  
**Charles-Augustin de Coulomb**  
**(1736 – 1806)**

масса электрона  $m_e = 9 \cdot 10^{-28} \text{ з}$

масса протона  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ з}$

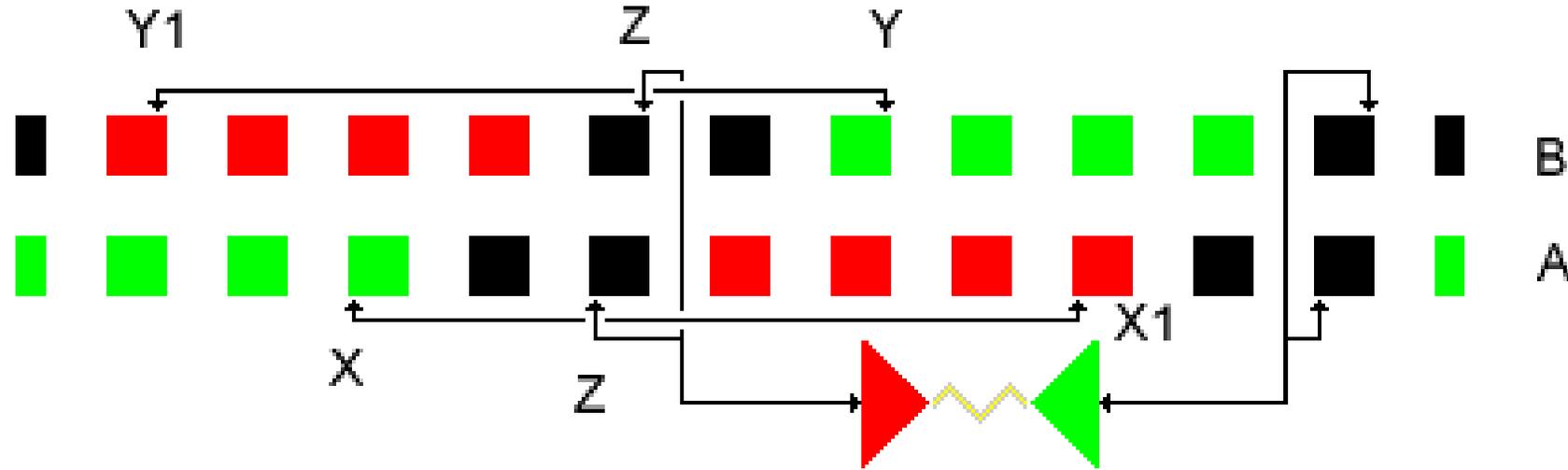
заряд электрона  $q_e = -4,8 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ} = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$

заряд протона  $q_p = |q_e|$

$$\left| \frac{F_e}{F_\gamma} \right| = \left| \frac{q_e q_p}{\gamma m_e m_p} \right| = \frac{25 \cdot 10^{-20}}{6,67 \cdot 10^{-8} \cdot 1,67 \cdot 10^{-24} \cdot 9 \cdot 10^{-28}} \approx 2 \cdot 10^{39}$$

Наименование единицы	Соотношение между единицами	
	СГС	СИ
Сила	1 дин	$10^{-5}$ Н
Энергия	1 эрг	$10^{-7}$ Дж
Сила электрического тока	1 СГС (СГСЭ)	$3,33564 \cdot 10^{-10}$ А
Электрический заряд	1 СГС (СГСЭ)	$3,33564 \cdot 10^{-10}$ Кл
Напряженность электрического поля	1 СГС (СГСЭ)	$2,997825 \cdot 10^4$ В/м
Электрическое напряжение, электрический потенциал, ЭДС	1 СГС (СГСЭ)	$2,997925 \cdot 10^2$ В
Электрическая ёмкость	1 СГС (СГСЭ)	$1,11265 \cdot 10^{-12}$ Ф
Напряженность магнитного поля	эрстед (Э)	79,5775 А/м
Магнитная индукция	гаусс (Гс)	$1 \cdot 10^{-4}$ Тл
Магнитный поток	максвелл (Мкс)	$1 \cdot 10^{-8}$ Вб
Индуктивность. Взаимная индуктивность	1 СГС (СГСМ)	$1 \cdot 10^{-9}$ Гн
Магнитный момент (амперовский)	1 СГС (СГСМ)	$1 \cdot 10^{-3}$ А·м <sup>2</sup>
Магнитный момент (кулоновский)	1 СГС (СГСМ)	$1 \cdot 10^{-10}$ Вб/м
Намагниченность	1 СГС (СГСМ)	$1 \cdot 10^3$ А/м
Электрическое сопротивление	1 СГС (СГСЭ)	$8,98755 \cdot 10^{11}$ Ом
Электрическая проводимость	1 СГС (СГСЭ)	$1,11265 \cdot 10^{-12}$ См

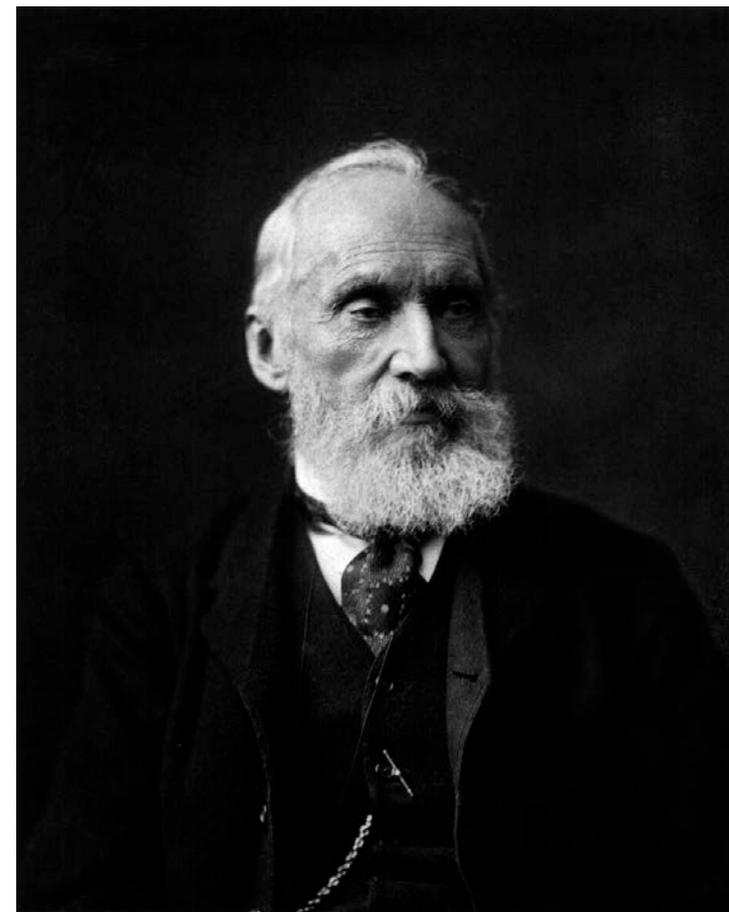
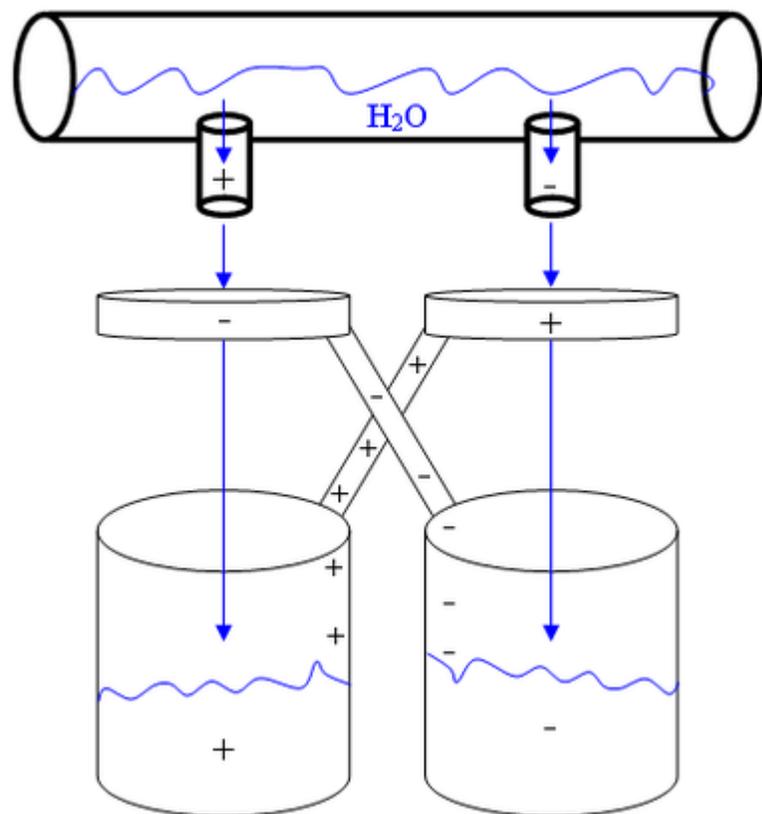
# Электрофорная машина (Wimshurst machine)



Википедия. Author: Grandfatherclock

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Электрофорная\\_машина](https://ru.wikipedia.org/wiki/Электрофорная_машина)

# Капельница Кельвина

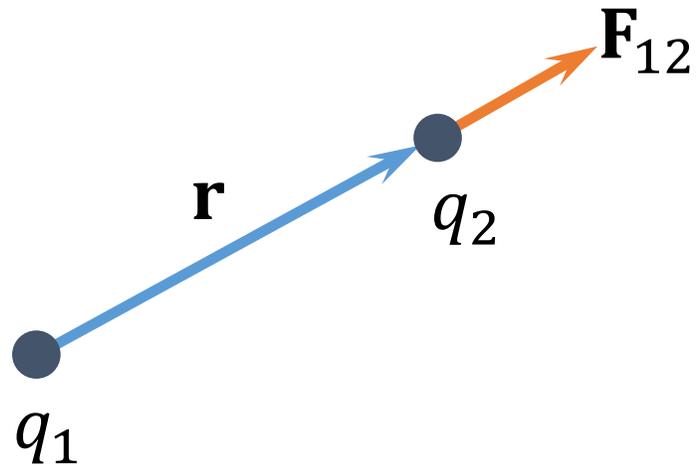


**Уильям Томсон, лорд Кельвин**  
**William Thomson, 1st Baron Kelvin**  
**(1824 – 1907)**

Википедия.

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Капельница\\_Кельвина](https://ru.wikipedia.org/wiki/Капельница_Кельвина)

# Электрическое поле



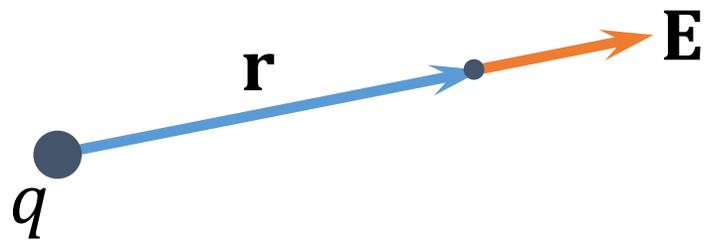
Вместо

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

и

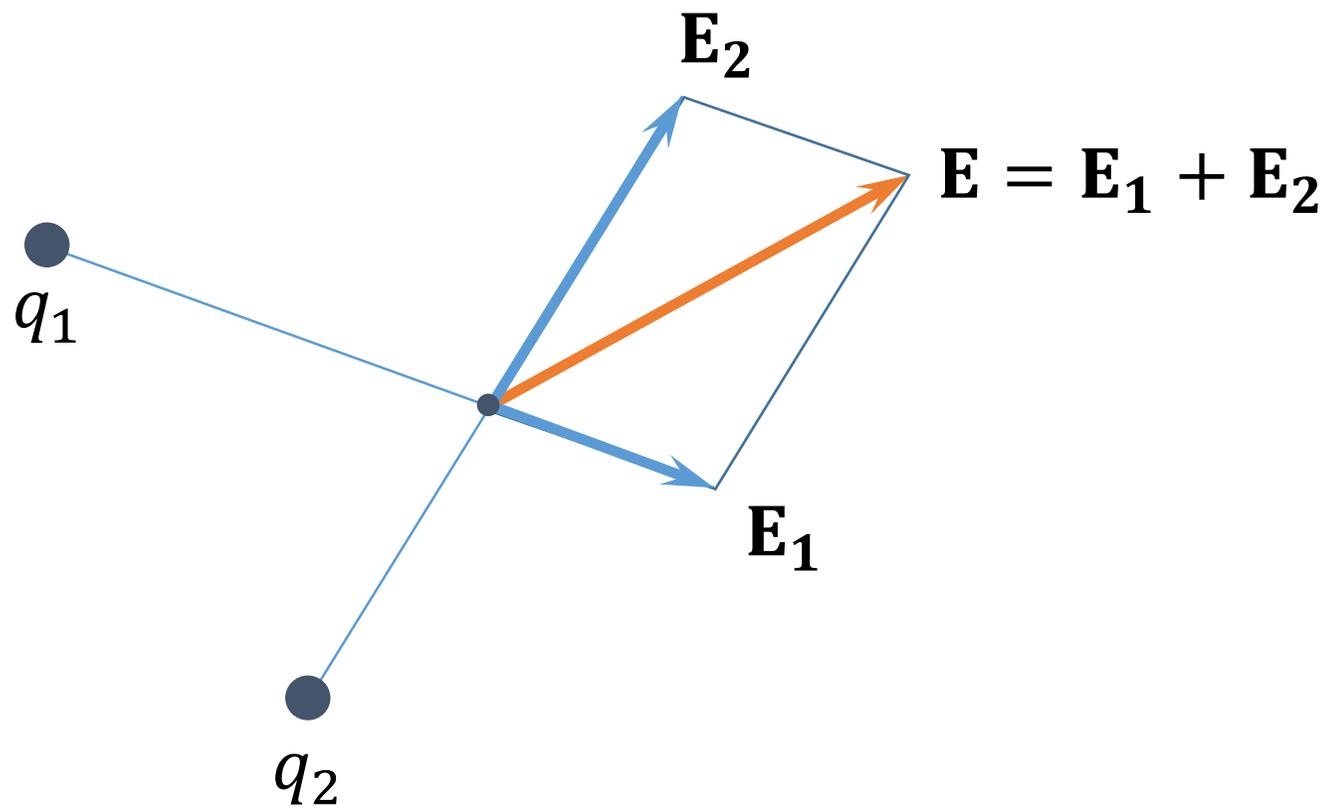
$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \mathbf{E}_1$$



Поле точечного заряда

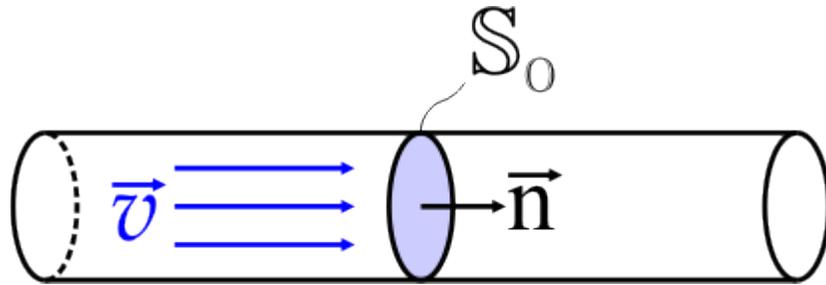
$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

# Принцип суперпозиции

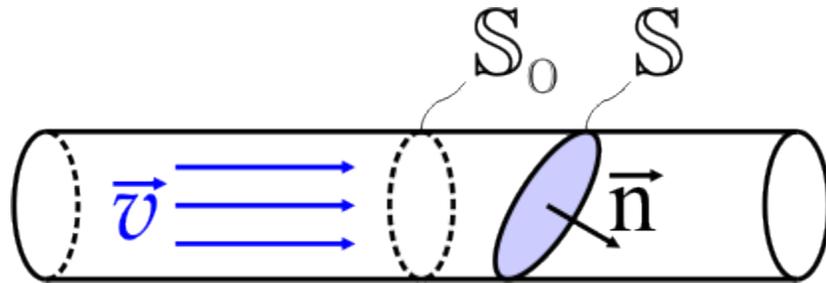


# Поток

Поток несжимаемой жидкости:

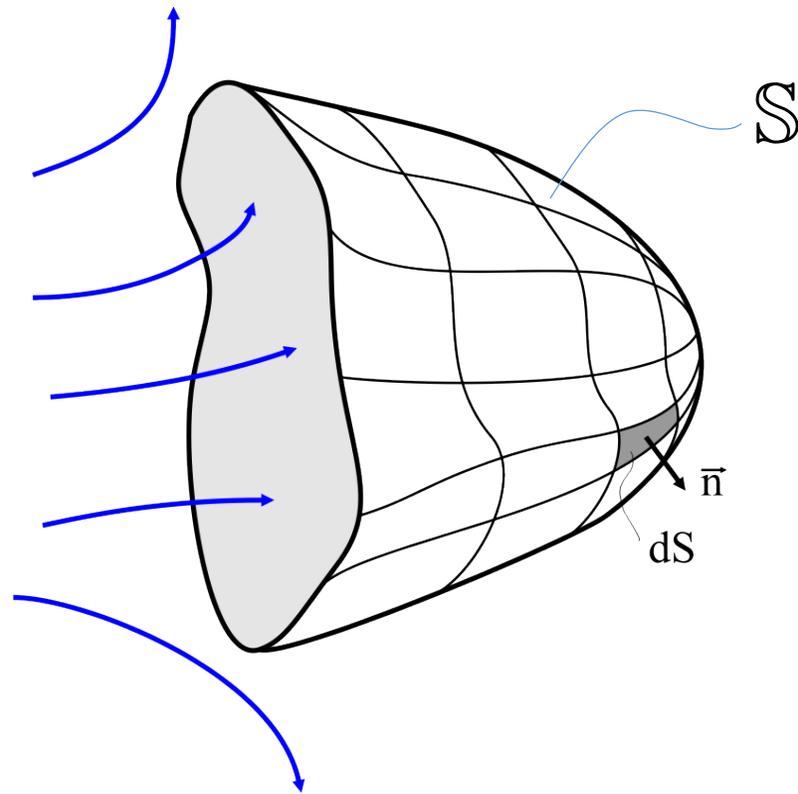


$$\Phi = \vec{v} \cdot \mathbf{S}_0$$

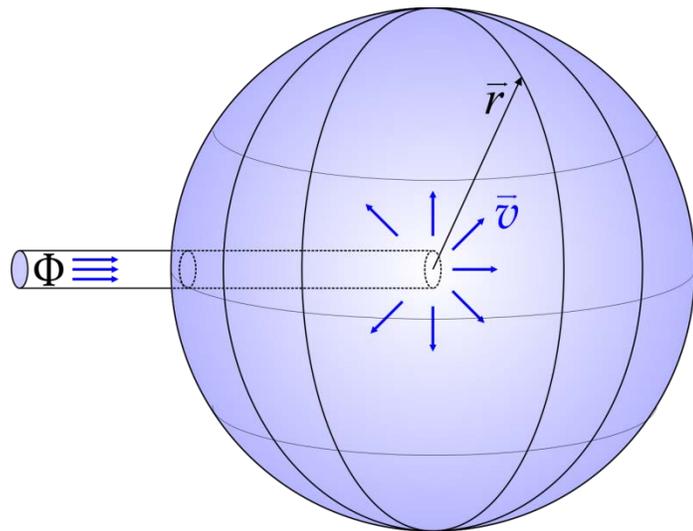


$$\Phi = \vec{v} \cdot \mathbf{S}_0 = \vec{v} \cdot \mathbf{S}$$

Поток через произвольную поверхность:



$$\Phi = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\Phi = 4\pi r^2 v(r) \quad v(r) = \frac{\Phi/4\pi}{r^2}$$

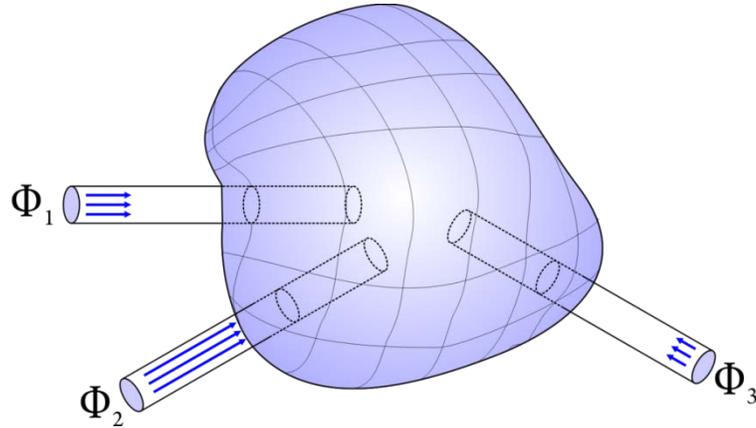
$$v = \frac{\Phi/4\pi}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Аналогия:

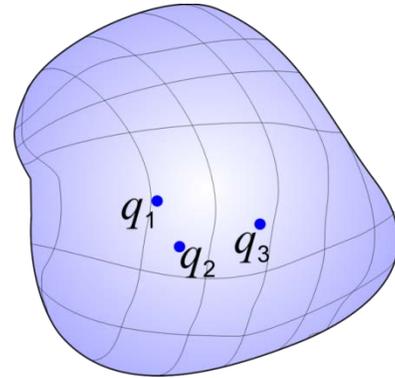
$$v \longleftrightarrow \mathbf{E}$$

$$\Phi/4\pi \longleftrightarrow q$$





$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \oiint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$



$$4\pi(q_1 + q_2 + q_3) = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

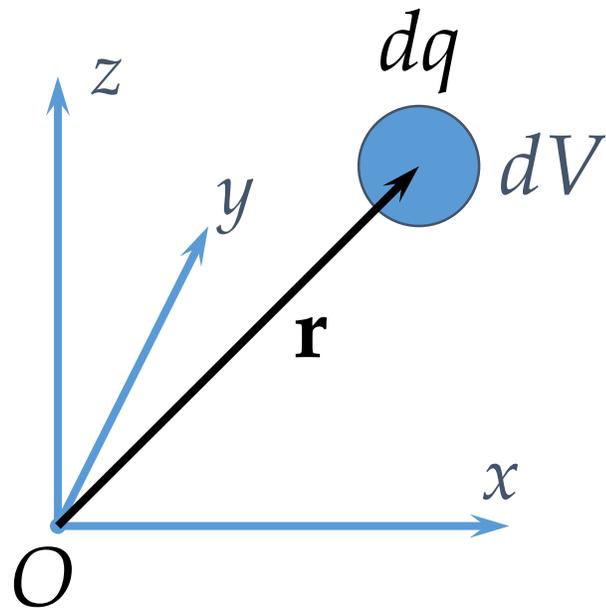
Поток вектора  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность равен  $4\pi Q$

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$$

где  $Q = q_1 + q_2 + \dots$  — полный заряд внутри поверхности

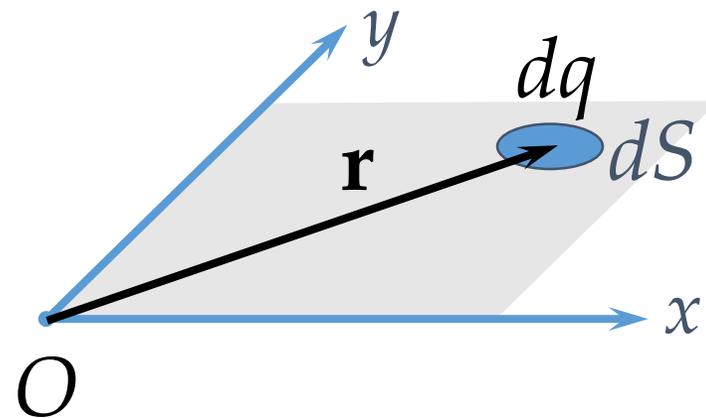
# Распределенный заряд

объёмный



$$dq = \rho dV$$

поверхностный



$$dq = \sigma dS$$

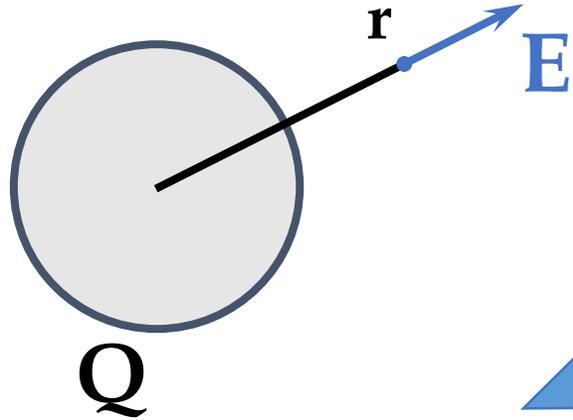
линейный



$$dq = \kappa dl$$

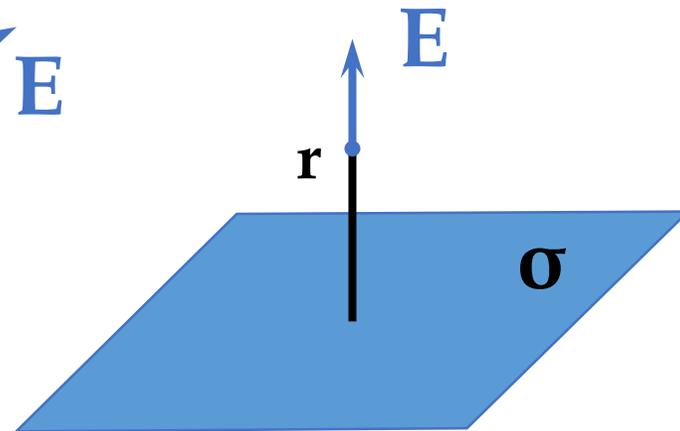
# Примеры задач на теорему Гаусса

сфера



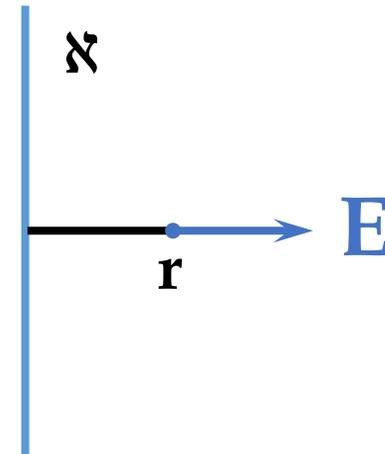
$$E = \frac{Q}{r^2}$$

плоскость



$$E = 2\pi\sigma$$

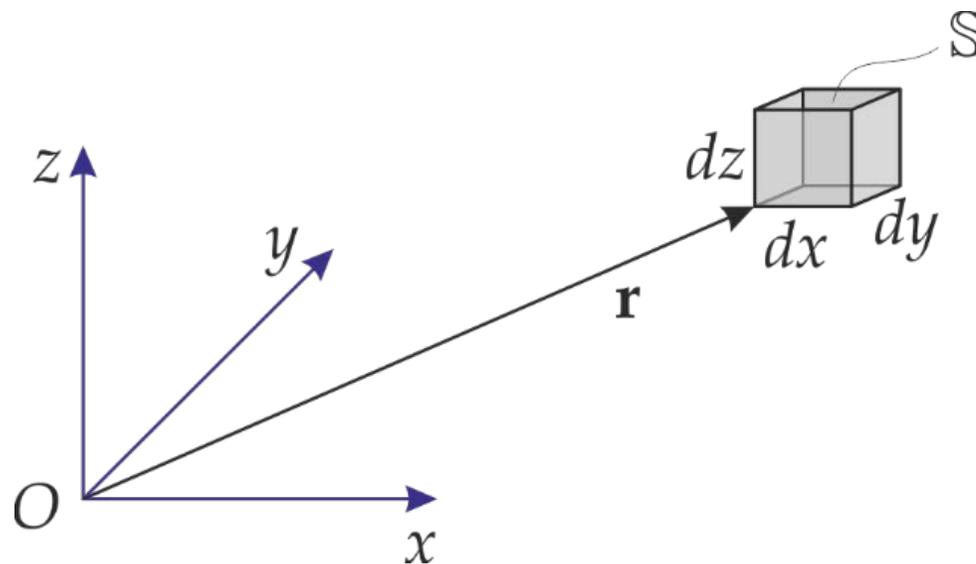
нить



$$E = \frac{2\lambda}{r}$$

# Дивергенция

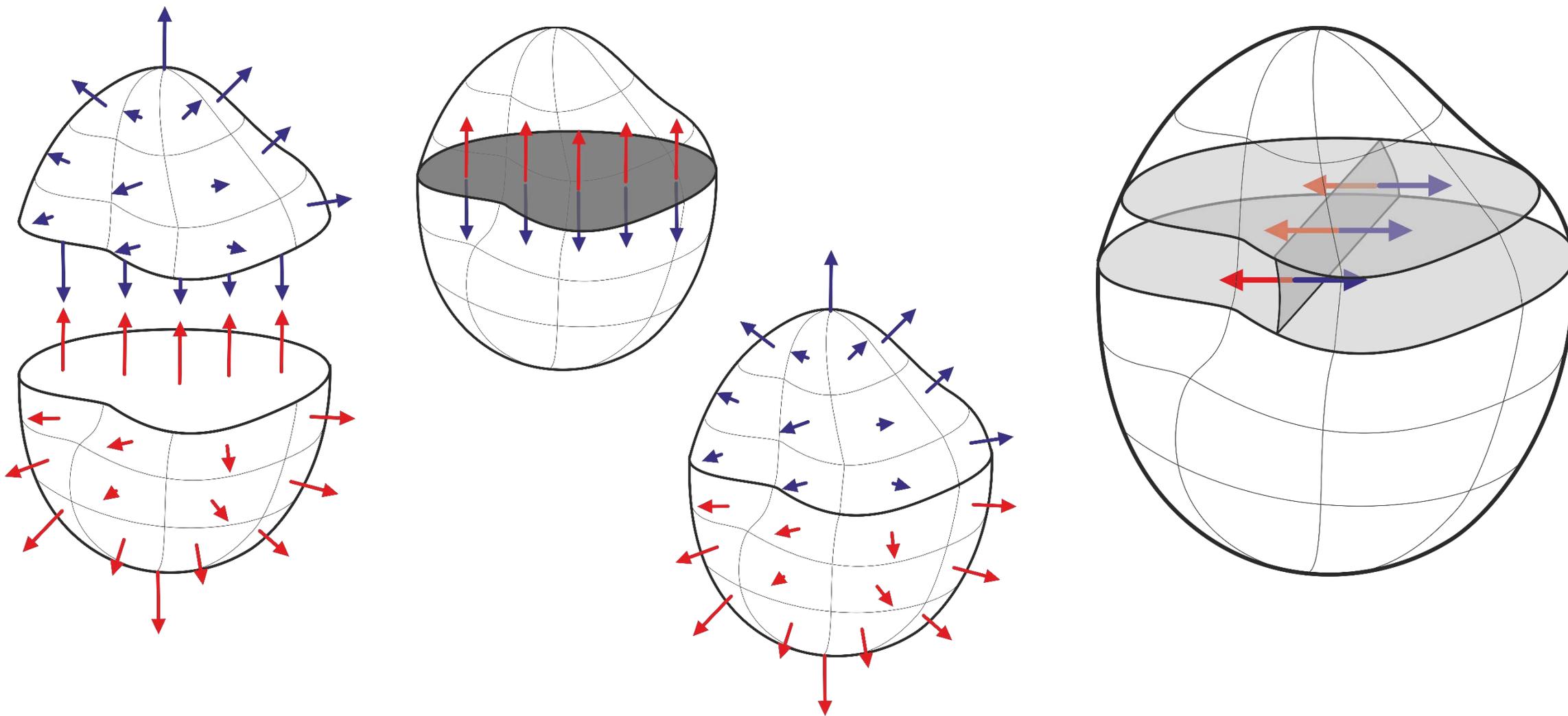
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\oiint_S \mathbf{E} d\mathbf{S}}{dV}$$



Оператор набла  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$

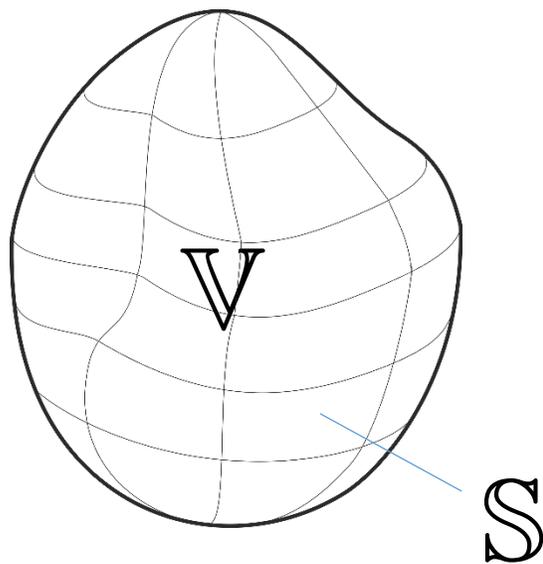
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \mathbf{E}$$

# Аддитивность потока

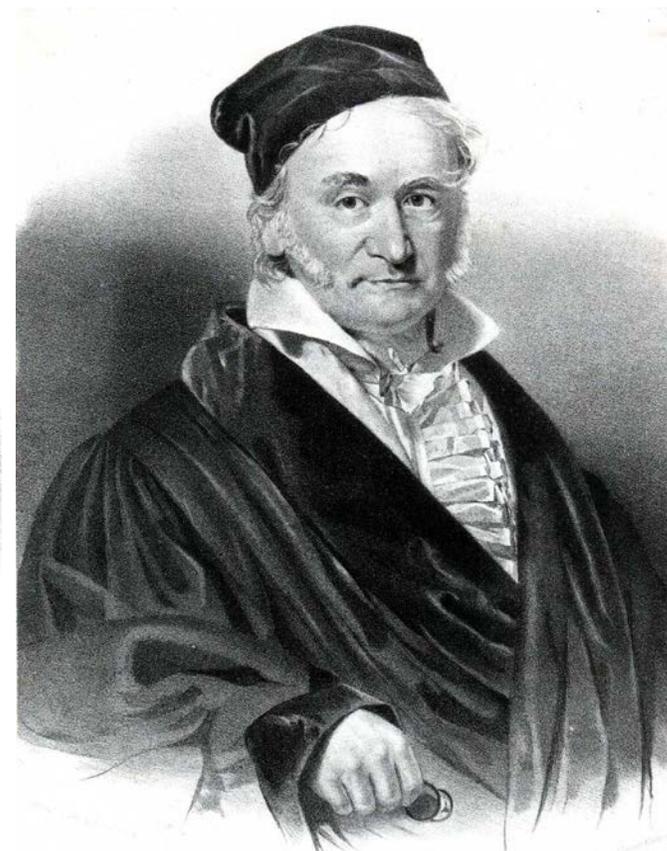


# Теорема Остроградского—Гаусса

$$\oiint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV$$



**Михаил Васильевич  
Остроградский  
(1801 – 1862)**



**Карл Фридрих Гаусс  
(1777 – 1855)**

# Дивергенция электрического поля

$$dq = \rho dV \quad \rho - \text{объёмная плотность заряда}$$

$$\oiint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_V \rho dV$$

Интегральная форма

$$\oiint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV$$

Теорема Остроградского – Гаусса

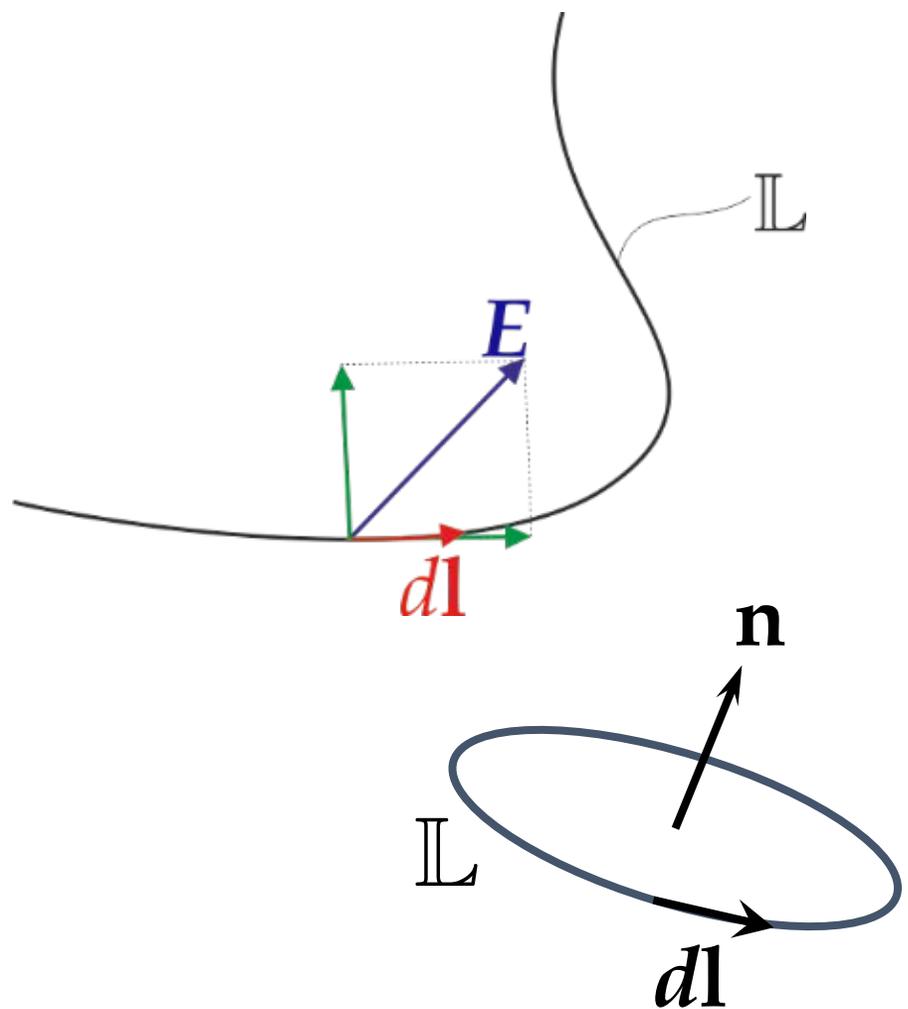
$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 4\pi \iiint_V \rho dV$$

Справедливо для объёма, ограниченного поверхностью любой формы

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

Дифференциальная форма

# Циркуляция

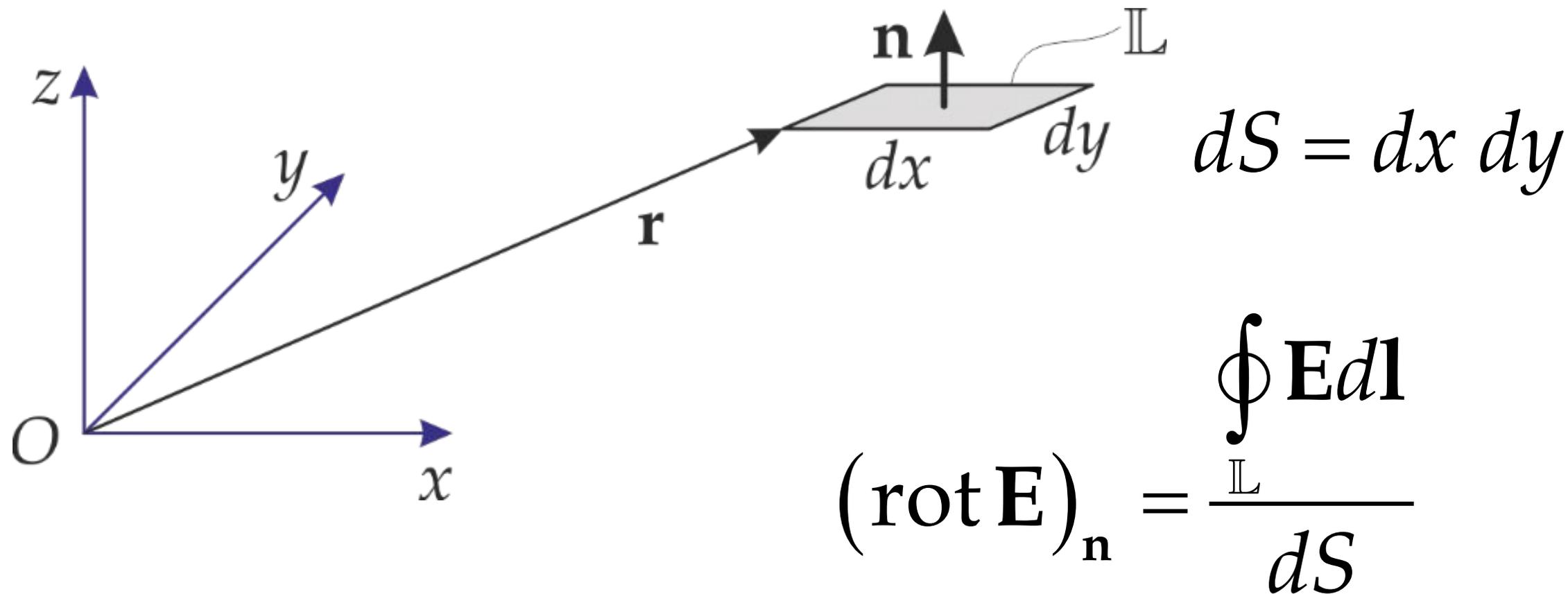


$$\int_L E dl$$

Для замкнутого контура:

$$\oint_L E dl$$

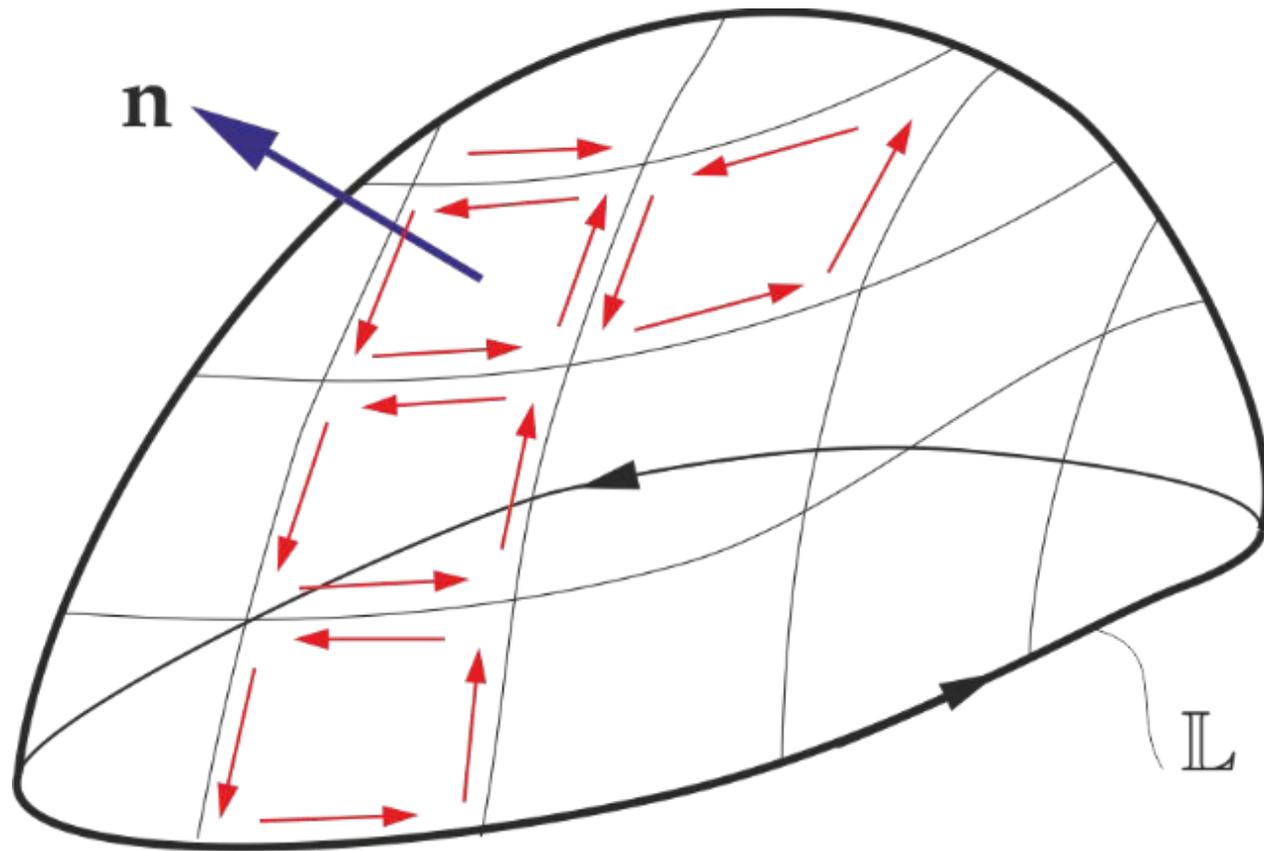
# Ротор векторного поля



# Ротор и набла

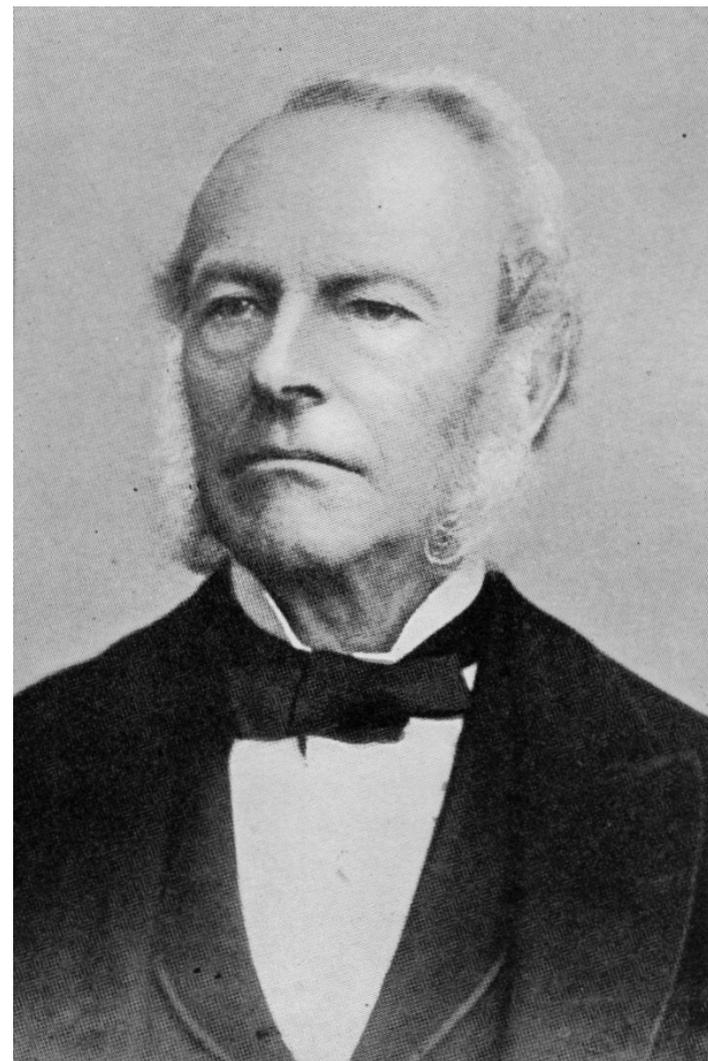
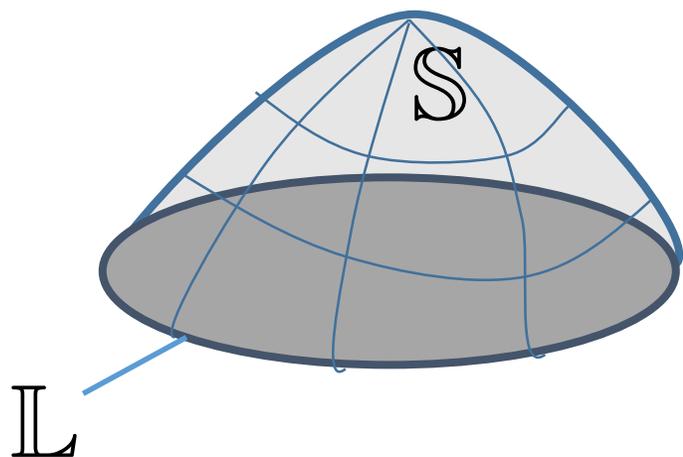
$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = [\nabla \times \mathbf{E}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

# Аддитивность циркуляции



# Теорема Стокса

$$\oint_{\mathbb{L}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \iint_{\mathbb{S}} (\text{rot } \mathbf{E}) d\mathbb{S}$$



Джордж Габриэль Стокс  
(1819 — 1903)

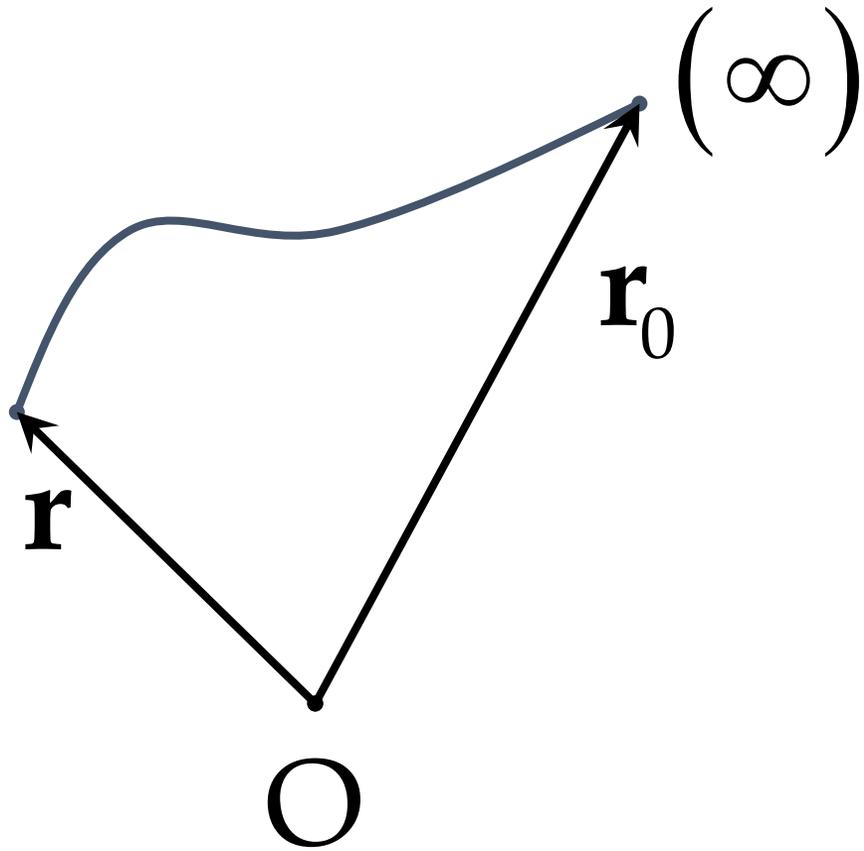
# Ротор электрического поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

(Доказать!)

Электрическое поле потенциально.

# Электростатический потенциал



$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot}(-\nabla \varphi) = -[\nabla \times (\nabla \varphi)] = 0$$

# Потенциал точечного заряда

$$\varphi = \frac{q}{r}$$

Действительно,  $-\nabla \frac{q}{r} = \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$

Достаточно запомнить это:

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\nabla \mathbf{r} = \mathbf{3}$$

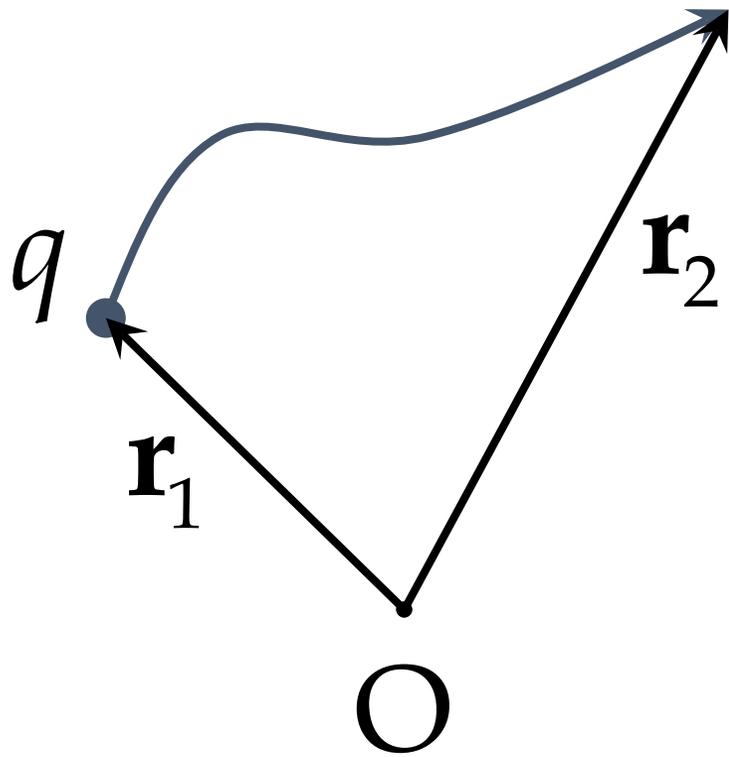
$$\nabla(\mathbf{a}\mathbf{r}) = \mathbf{a}$$

$$[\nabla \times \mathbf{r}] = 0$$

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a}[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]) = (\mathbf{c}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}])$$

# Работа поля над точечным зарядом

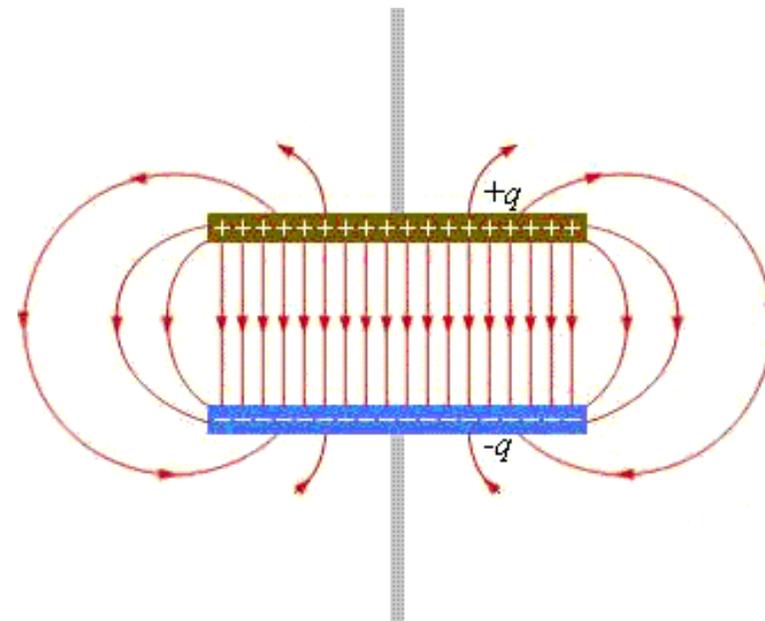
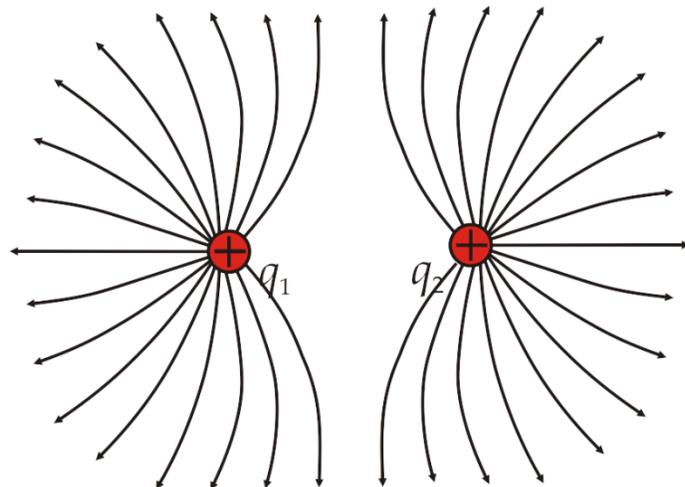
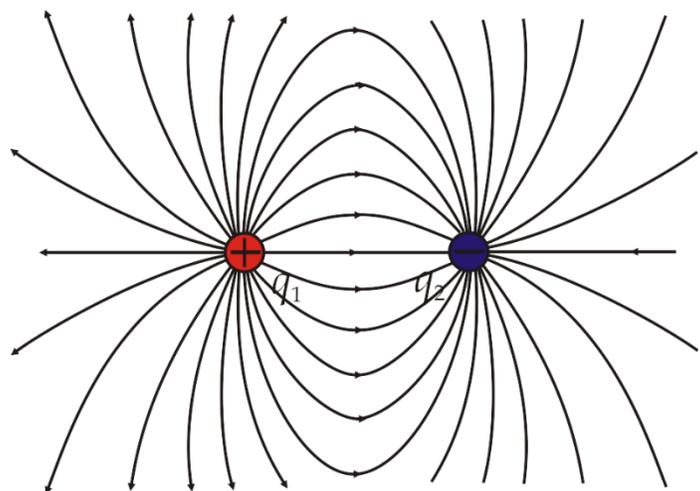


$$A = q(\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2))$$

не зависит от формы пути

(Доказать!)

# Силовые линии



$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r} \parallel \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

# Оператор Лапласа

$$\Delta = (\nabla \cdot \nabla) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



**Пьер-Симон Лаплас**  
(1749 – 1827)

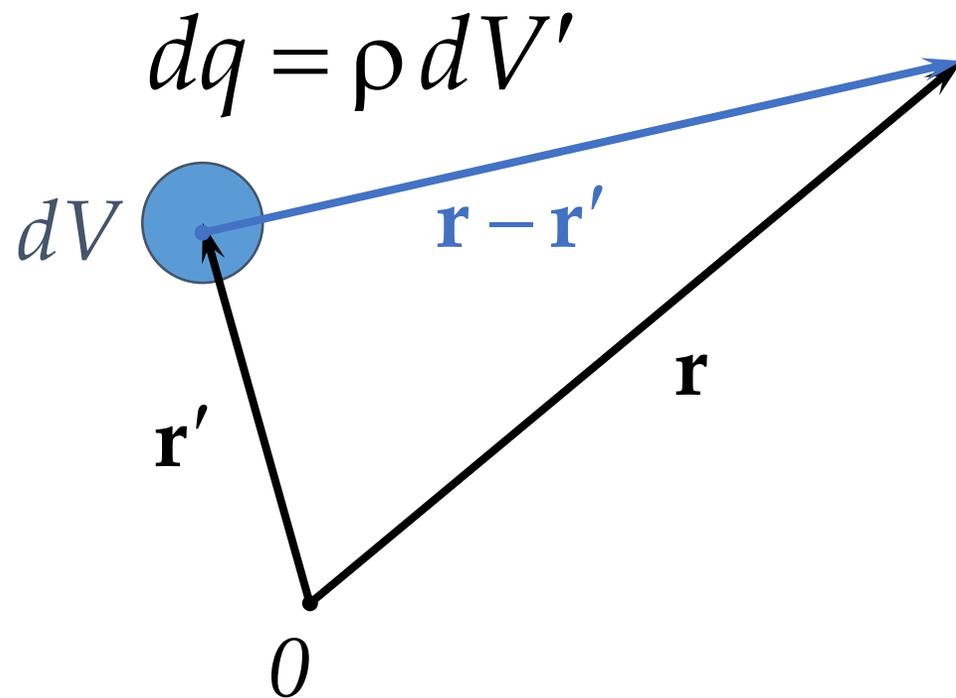
# Основное уравнение электростатики — уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$



Симеон Дени Пуассон  
(1781 – 1840)

# Общее решение уравнения Пуассона



$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

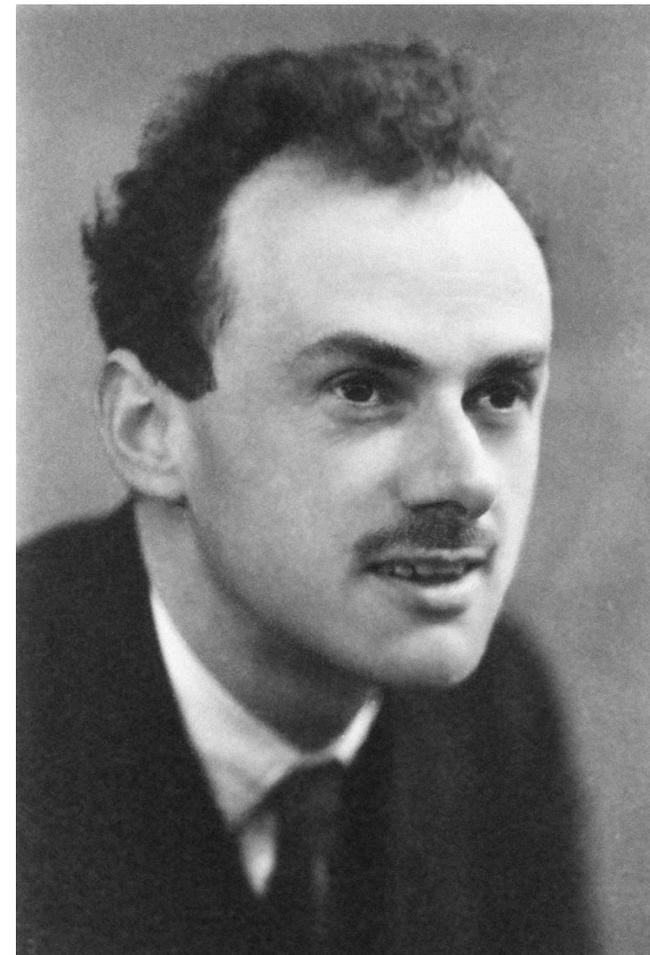
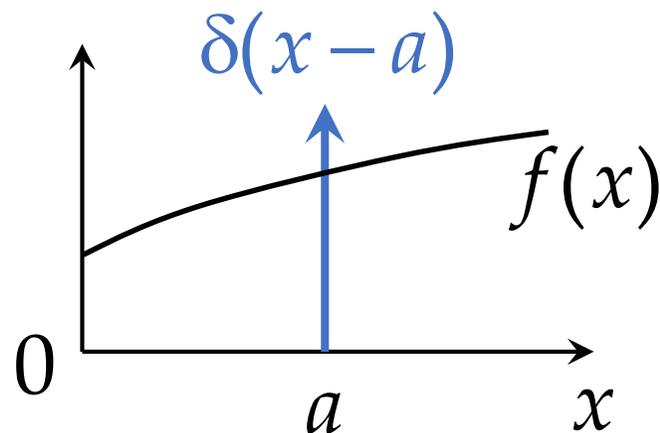
# Дельта-функция Дирака

## определение

$$\bullet \delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad \bullet \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

## СВОЙСТВО

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$



Поль Дирак  
(1902 – 1984)

# 3D функция Дирака

$$\bullet \delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} +\infty, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases} \quad \bullet \iiint \delta(\mathbf{r}) dV = 1$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

# Разделение переменных

$$\varphi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\Delta\varphi = 0$$

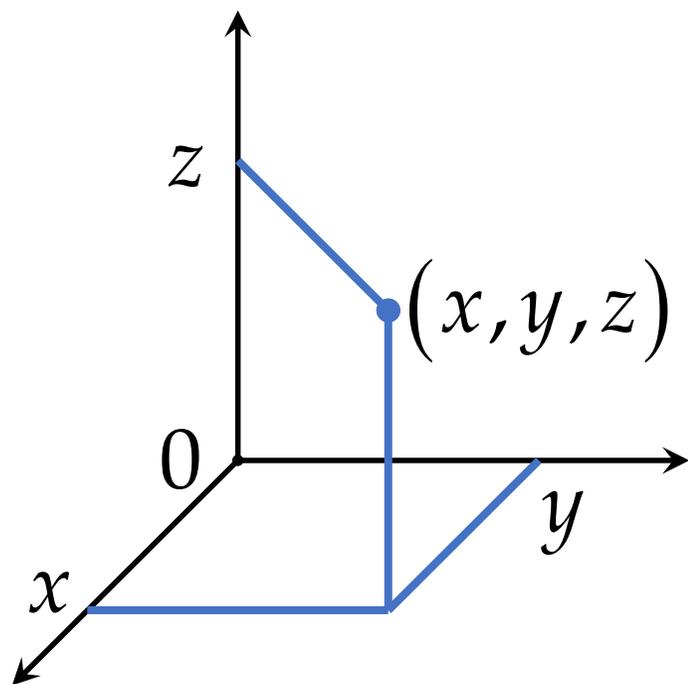
$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$$

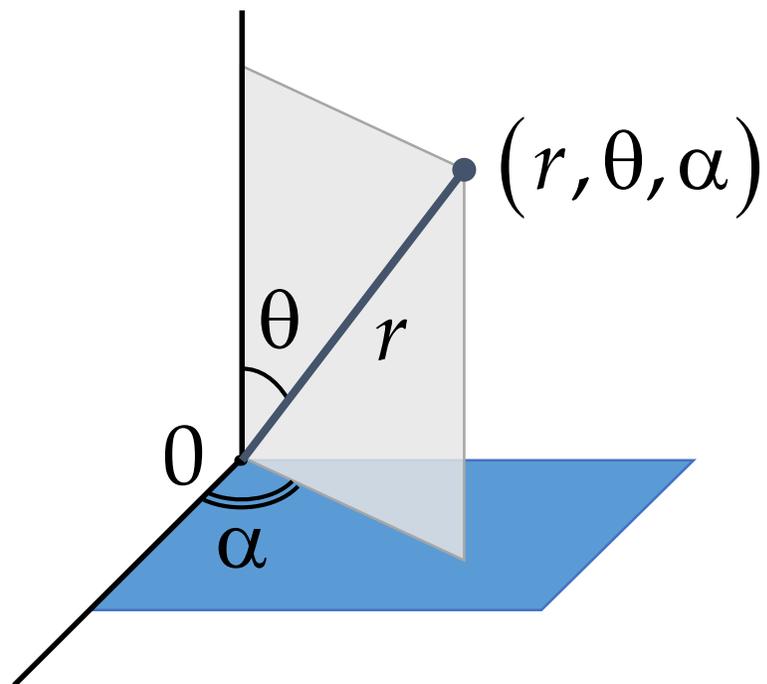
$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

# Системы координат

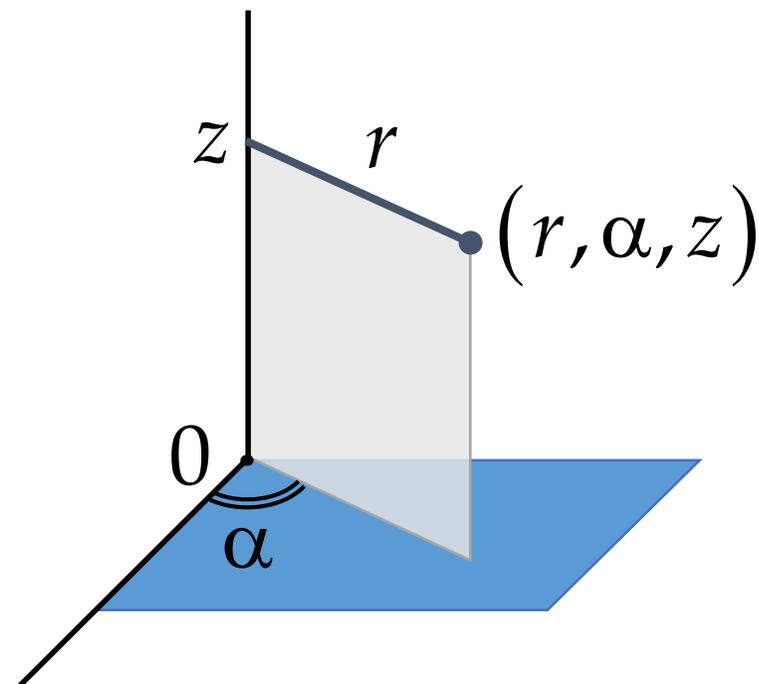
декартова



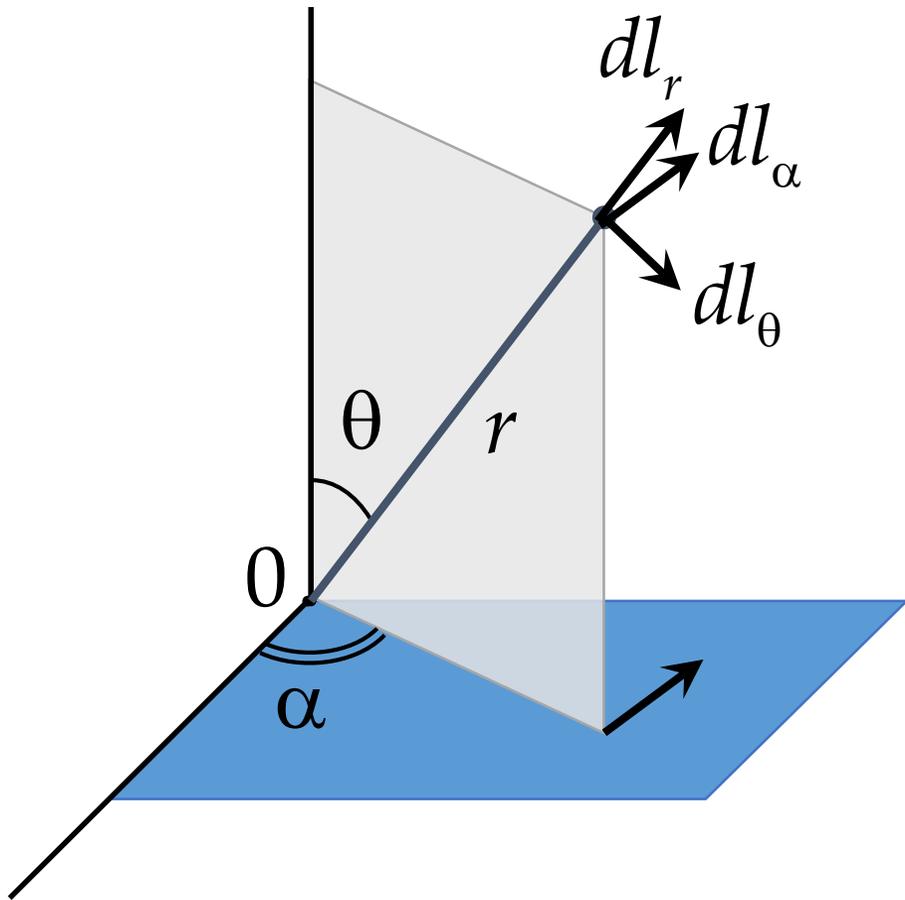
сферическая



цилиндрическая



# Коэффициенты Ламэ



$$dl_r = dr$$

$$dl_\theta = r d\theta$$

$$dl_\alpha = r \sin \theta d\alpha$$

$$q_1 = r$$

$$q_2 = \theta$$

$$q_3 = \alpha$$

$$dl_1 = h_1 dq_1$$

$$dl_2 = h_2 dq_2$$

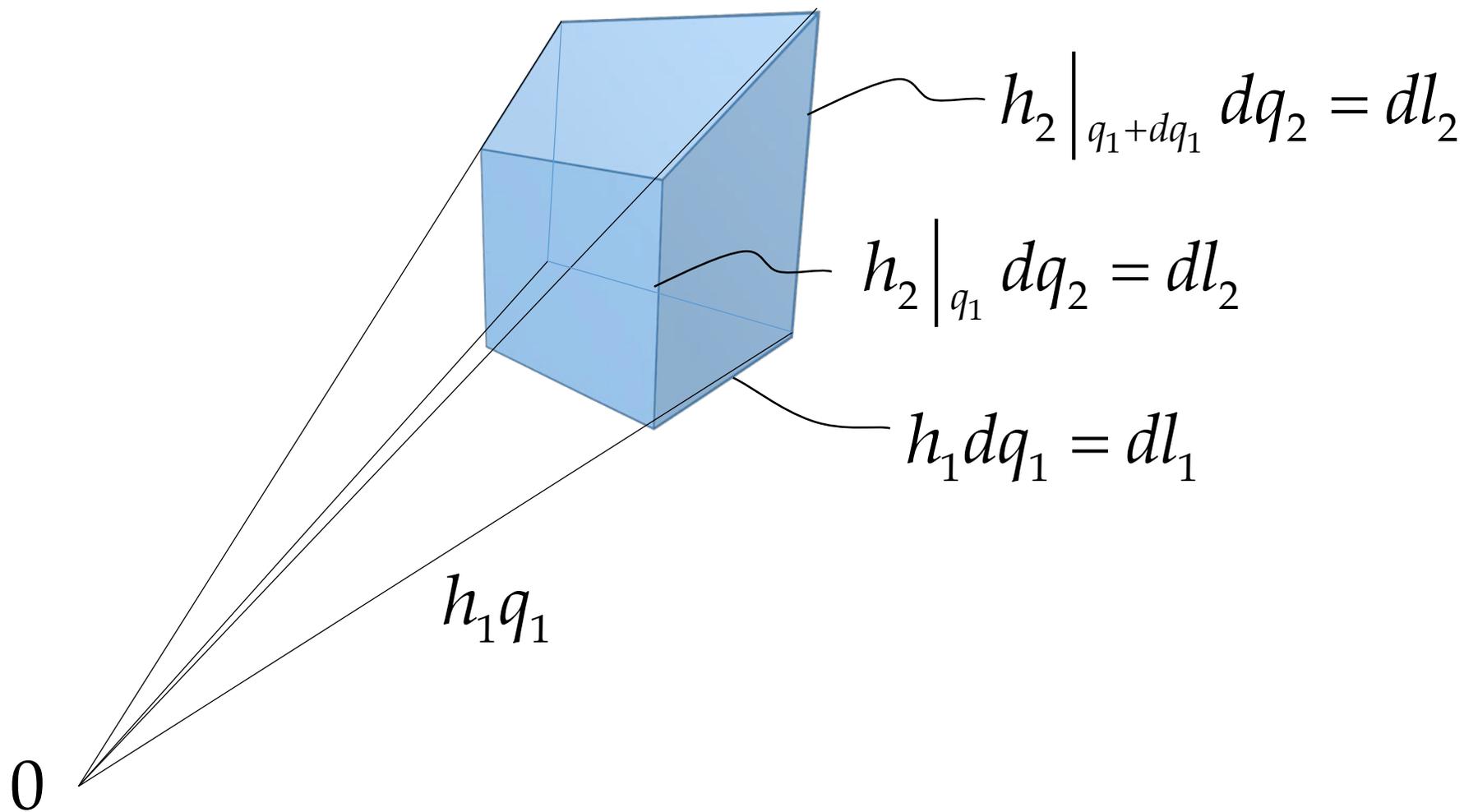
$$dl_3 = h_3 dq_3$$

$$h_1 = 1$$

$$h_2 = r$$

$$h_3 = r \sin \theta$$

# Дивергенция в криволинейных координатах



# Криволинейные координаты

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 E_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 E_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 E_3) \right)$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right)$$

# Разделение переменных в цилиндрических координатах

Пусть  $\varphi(z, r, \alpha) = \varphi(r, \alpha) = R(r) e^{\pm im\alpha}$

$$\Delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

Пусть  $R(r) \propto r^l$  тогда  $l = \pm m$

$$\varphi(r, \alpha) = \left( \frac{C_1}{r^m} + C_2 r^m \right) e^{\pm im\alpha}$$

# Разделение переменных в сферических координатах

Пусть  $\varphi(r, \theta, \alpha) = R(r) \cdot Y(\theta)$

$$\Delta\varphi(r, \theta, \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) = 0$$

При

$$R(r) \propto r^l$$

$$\parallel \\ l(l+1)$$

$$\parallel \\ -l(l+1)$$

или

$$R(r) \propto \frac{1}{r^{l+1}}$$

# Полиномы Лежандра

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dY_l(\theta)}{d\theta} \right) + l(l+1)Y_l(\theta) = 0$$

$$Y_l(\theta) = P_l(\cos \theta)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} \right] + l(l+1)P_l(x) = 0$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2 - 1)^l}{(dx)^l}$$



Адриен Мари Лежандр  
1752 — 1833

# Присоединённые полиномы Лежандра

$$\Delta\varphi(r, \theta, \alpha) = 0 \quad \varphi(r, \theta, \alpha) = \left( C_1 r^l + C_2 \frac{1}{r^{l+1}} \right) Y_l^m(\theta) e^{\pm im\alpha}$$

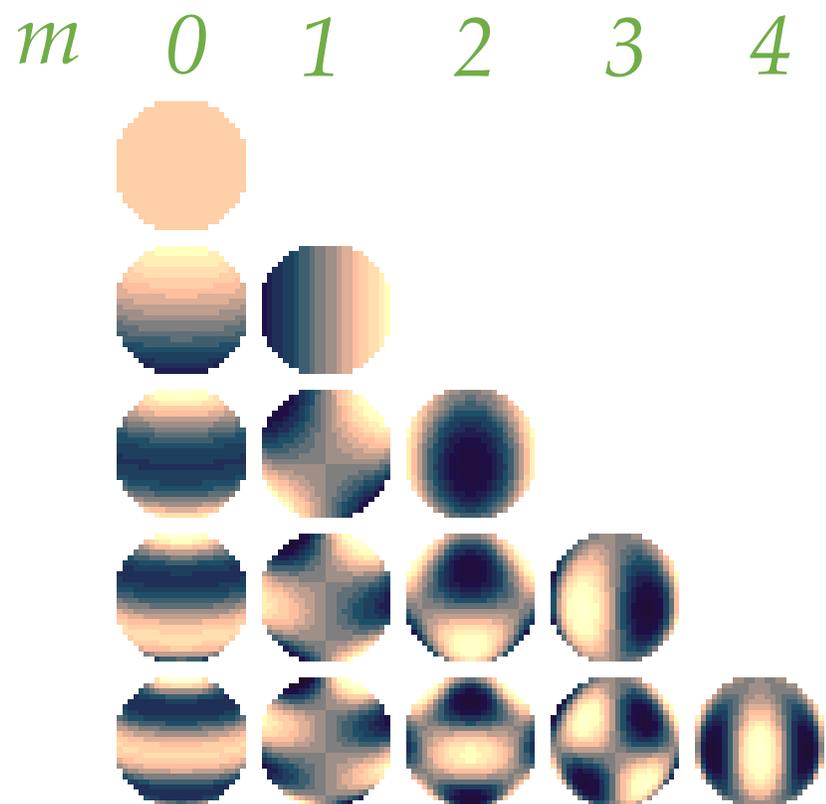
$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{Y_l^m(\theta)}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] Y_l^m(\theta) = 0$$

$$Y_l^m(\theta) = P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^m}$$

# Сферические (шаровые) функции

	$m$		0	1	2
$l$	$R(r)$		$\Phi(\theta, \alpha)$		
0	$\frac{1}{r}$		1		
1	$\frac{1}{r^2}$	$r$	$\cos \theta$	$\sin \theta \sin \alpha$	
2	$\frac{1}{r^3}$	$r^2$	$\frac{3\cos^2 \theta - 1}{2}$	$\sin 2\theta \sin \alpha$	$\sin^2 \theta \sin 2\alpha$

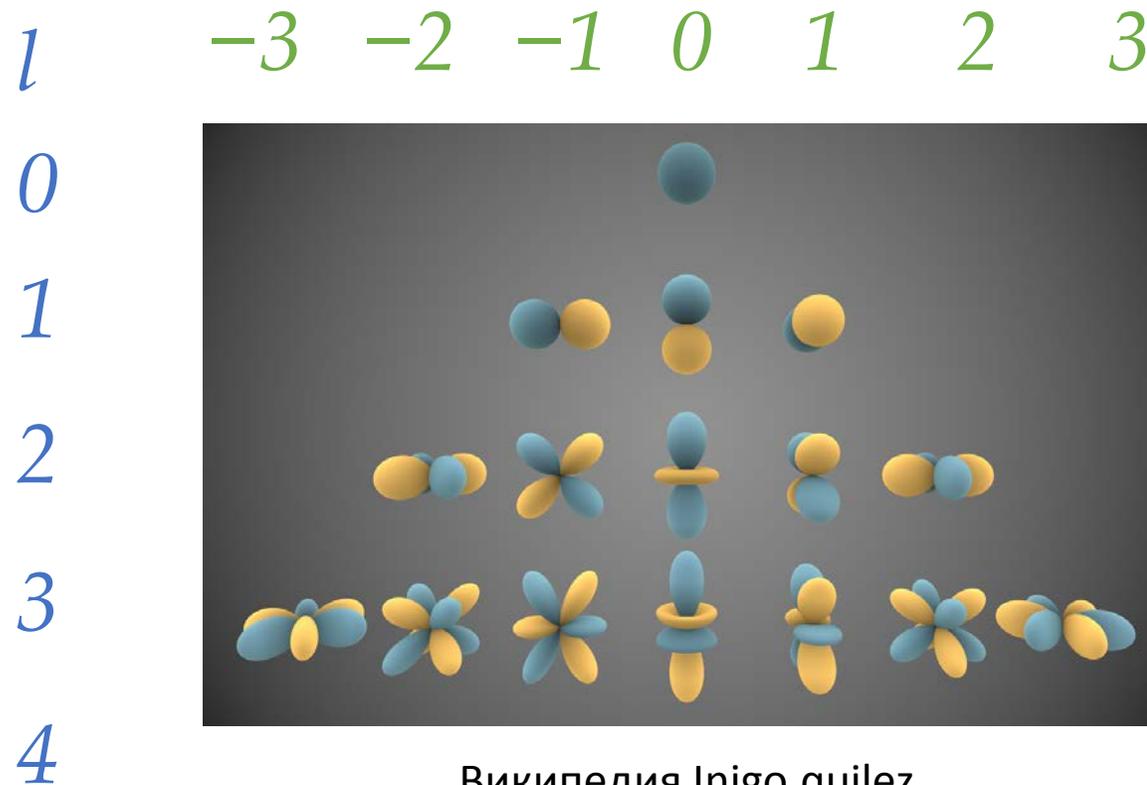
# Шаровые функции



Википедия Сур

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Сферические\\_функции](https://ru.wikipedia.org/wiki/Сферические_функции)

$$\Phi(\theta, \alpha) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\alpha}$$



Википедия Inigo.quilez

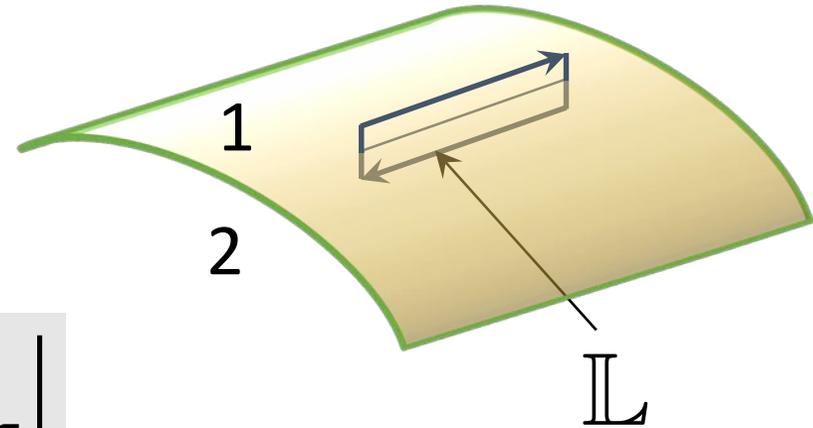
[https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_harmonics](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics)

# Граничные условия для электрического поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\oint_{\mathbb{L}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

$$E_{1\tau} \Big| = E_{2\tau} \Big|$$



Непрерывность тангенциальной компоненты вектора напряжённости электрического поля

Это эквивалентно непрерывности потенциала:

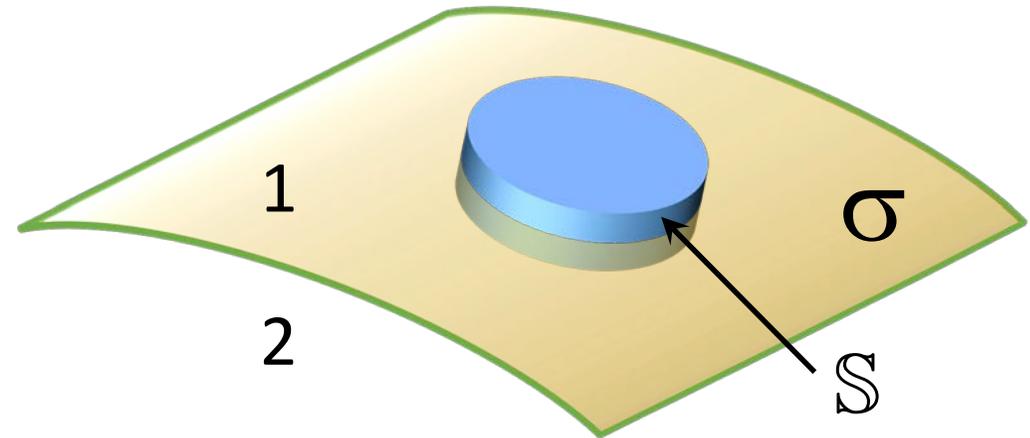
$$\varphi_1 \Big| = \varphi_2 \Big|$$

# Граничные условия для электрического поля

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\oiint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi Q$$

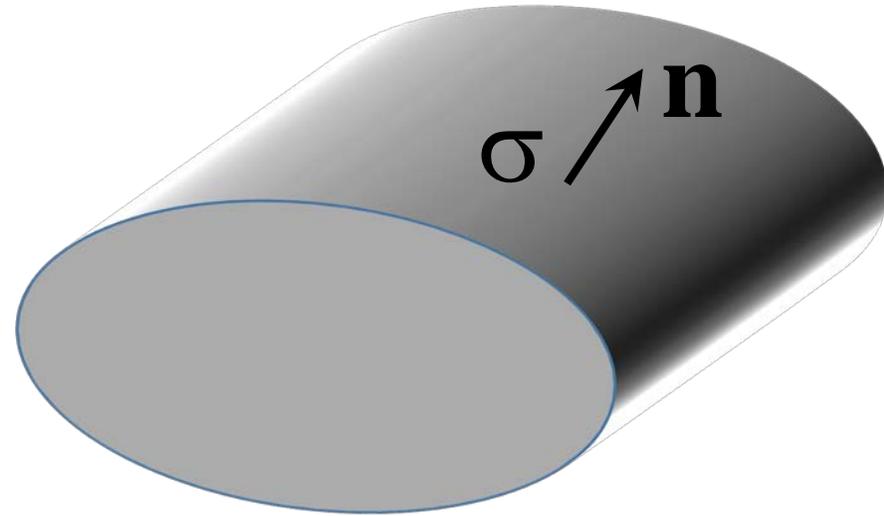
Нормальная компонента вектора напряжённости электрического поля терпит разрыв



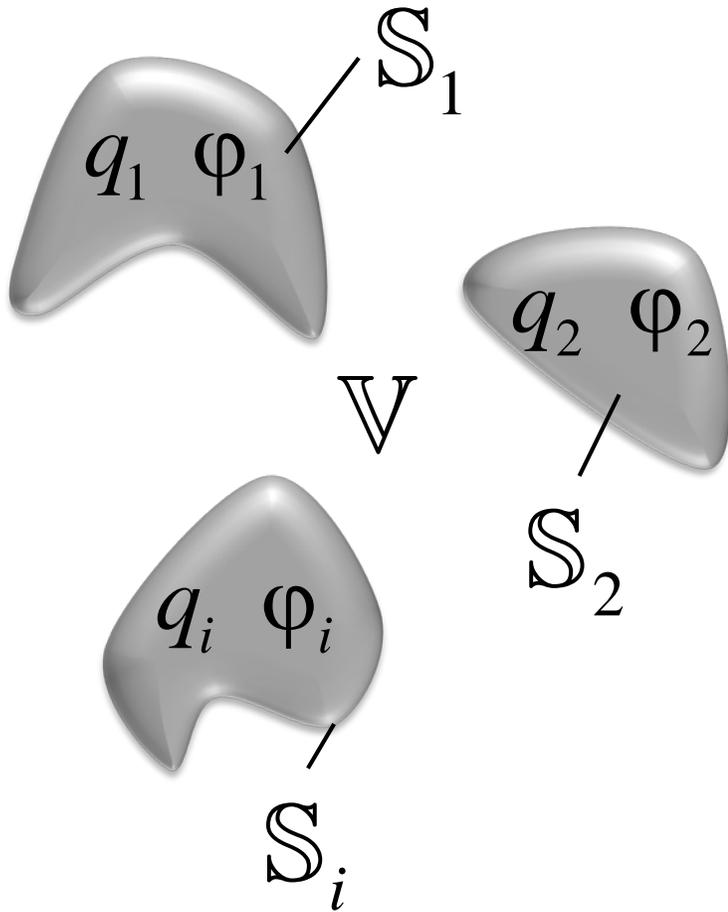
$$E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma$$

# Поле вблизи поверхности металла

$$\mathbf{E} = 4\pi\sigma \mathbf{n}$$



# Теорема единственности

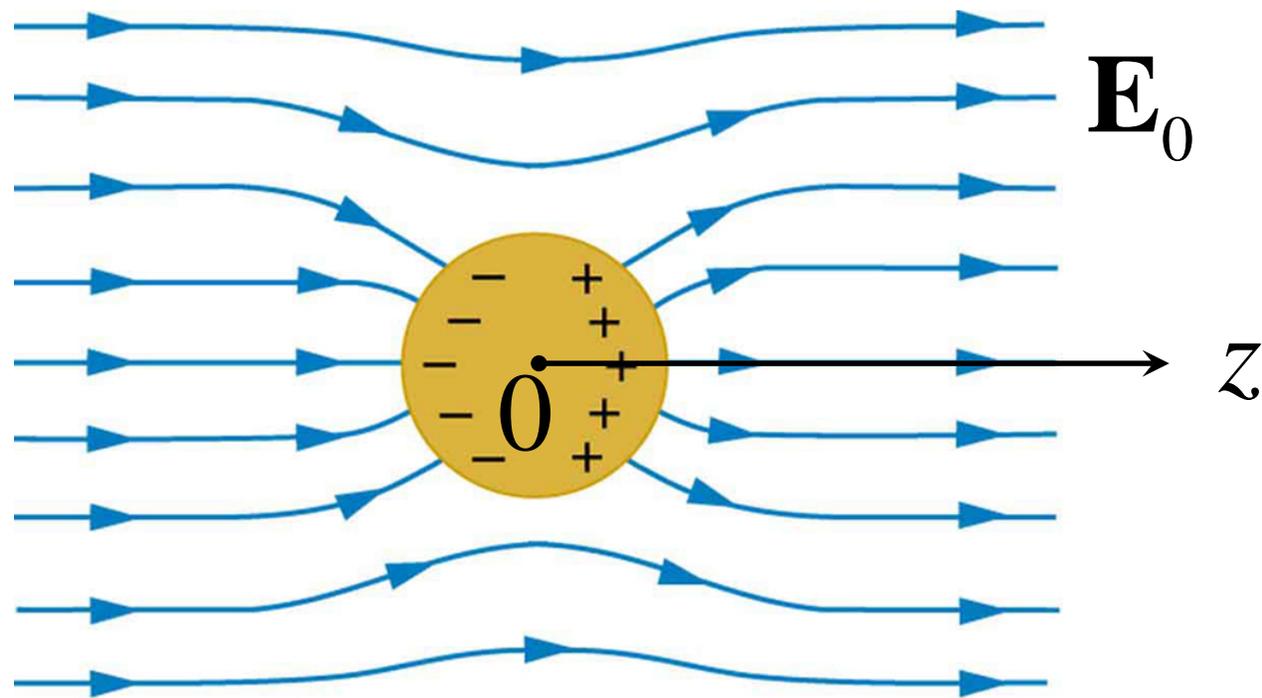


- На каждом проводнике ( $i$ ) задан либо  $q_i$ , либо  $\varphi_i$
- Вне проводников зарядов нет
- Во всём объёме  $V$   $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 0$

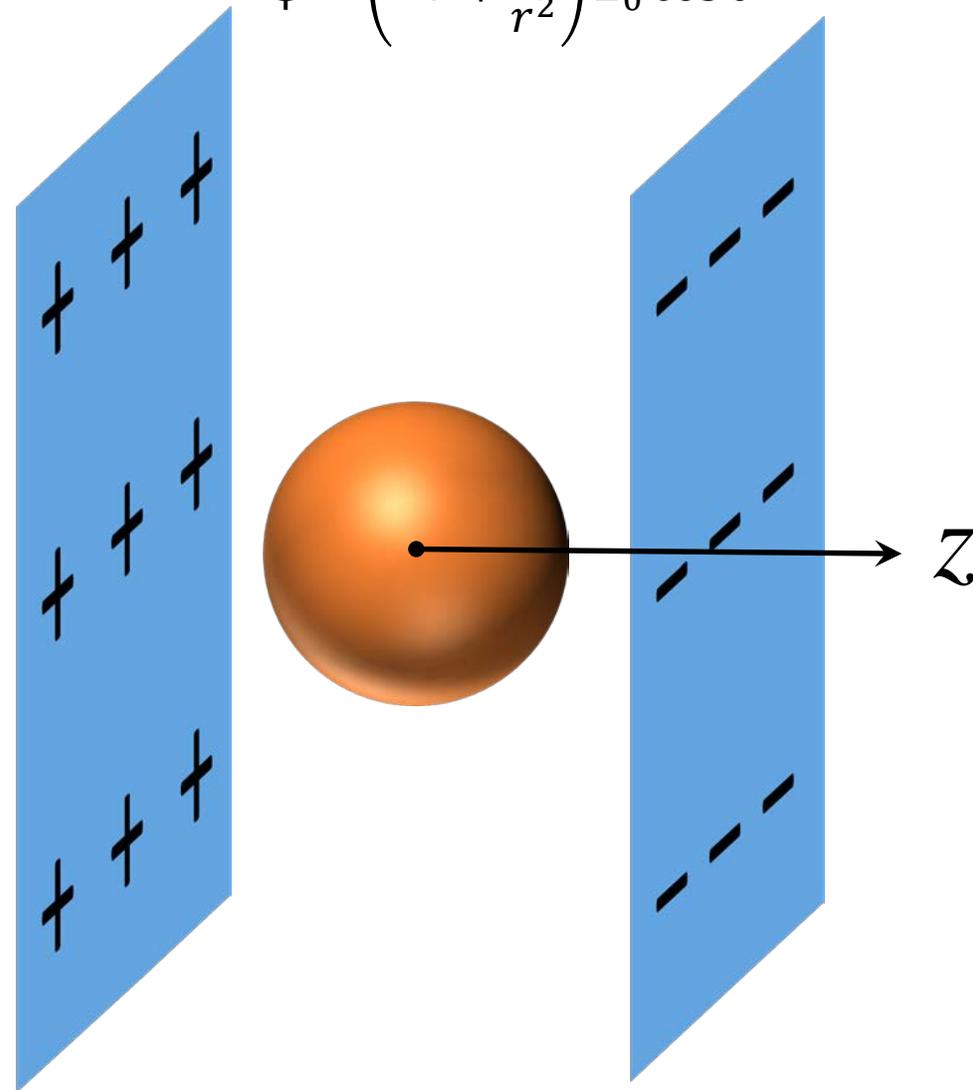
Тогда  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$   
имеет единственное решение

# Примеры решения задач

## 1. Шар в однородном поле

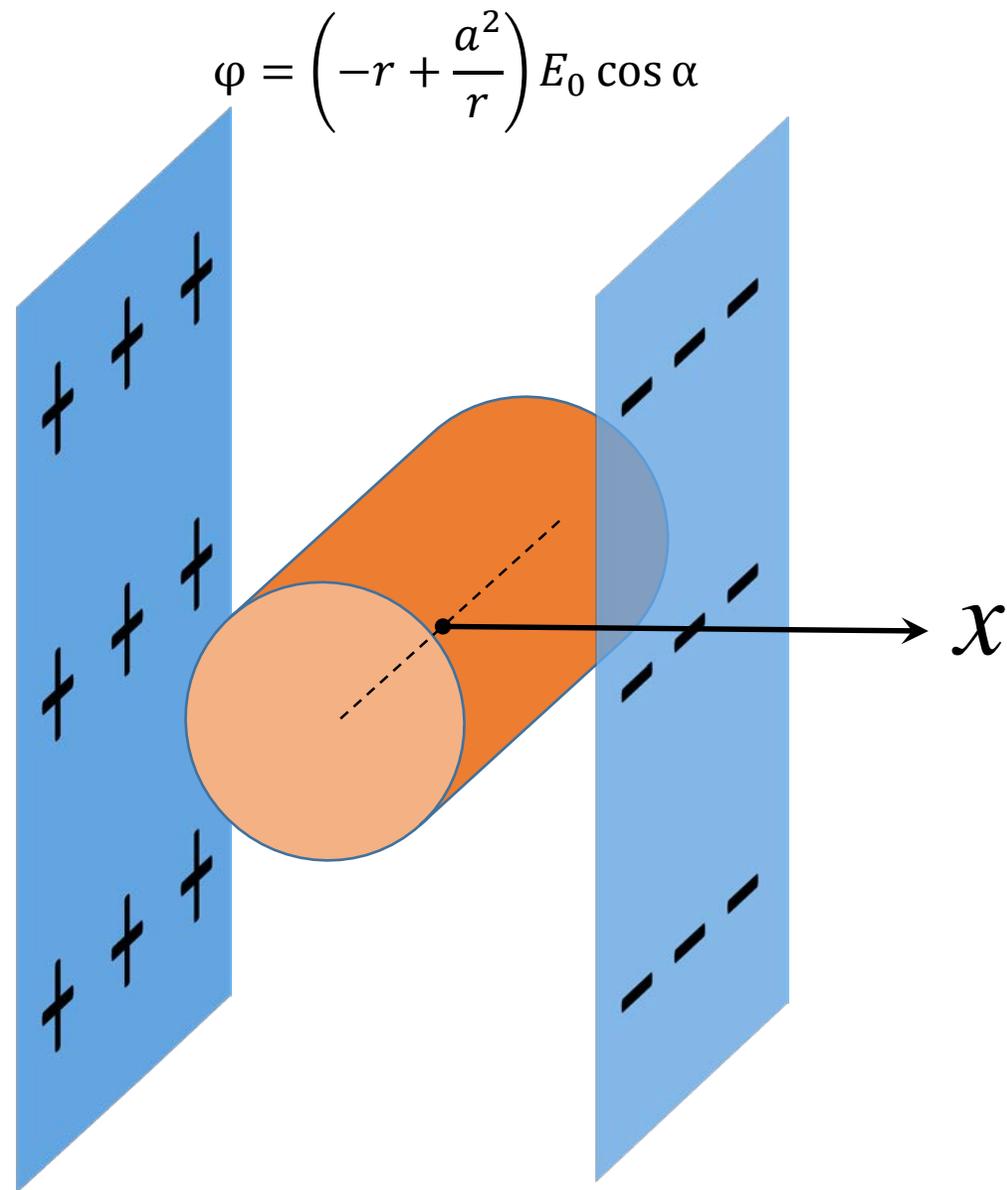
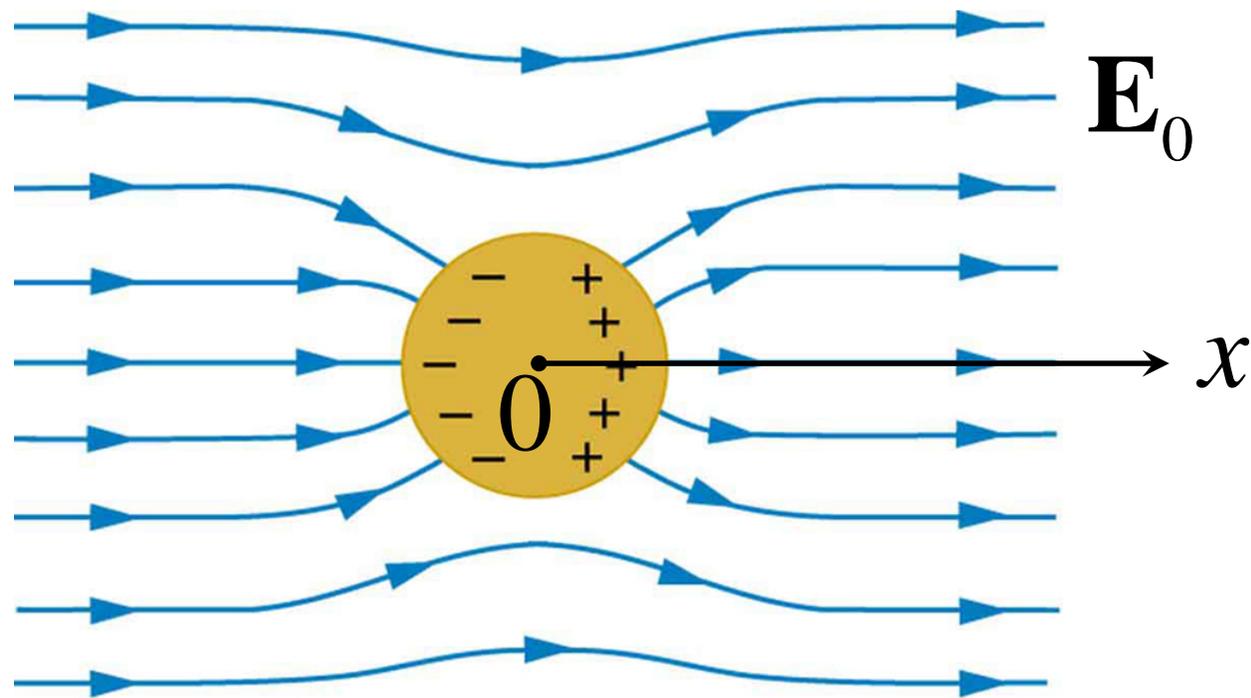


$$\varphi = \left( -r + \frac{a^3}{r^2} \right) E_0 \cos \theta$$

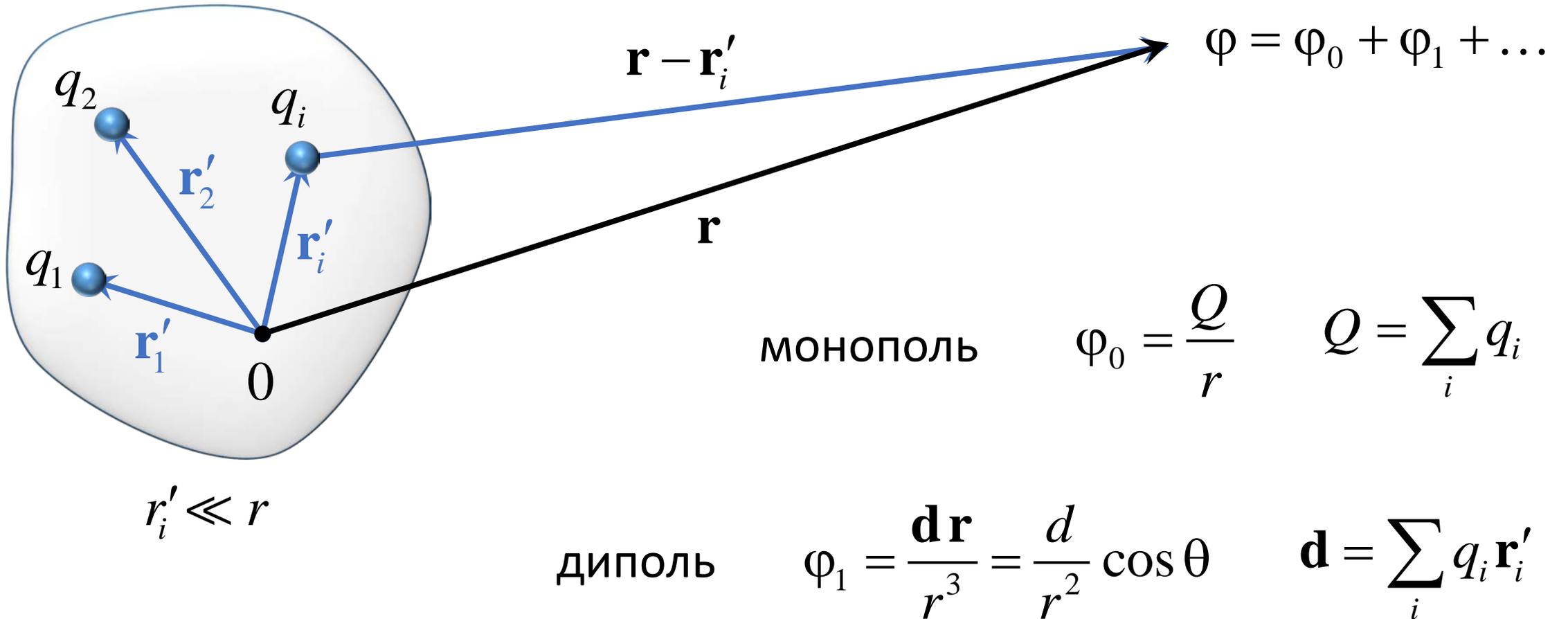


# Примеры решения задач

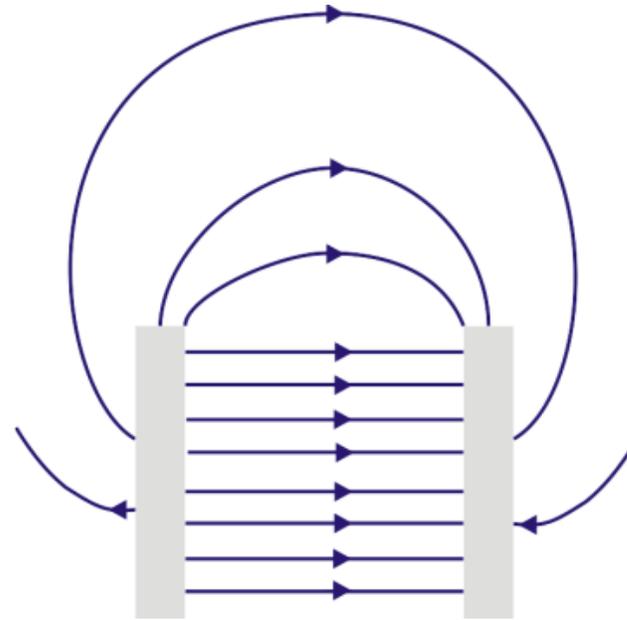
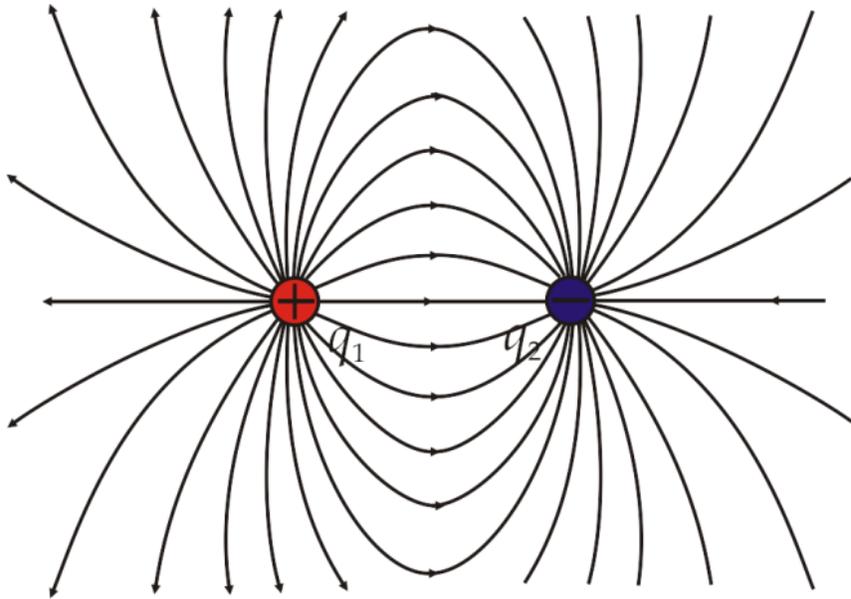
## 2. Цилиндр в однородном поле



# Дипольный момент

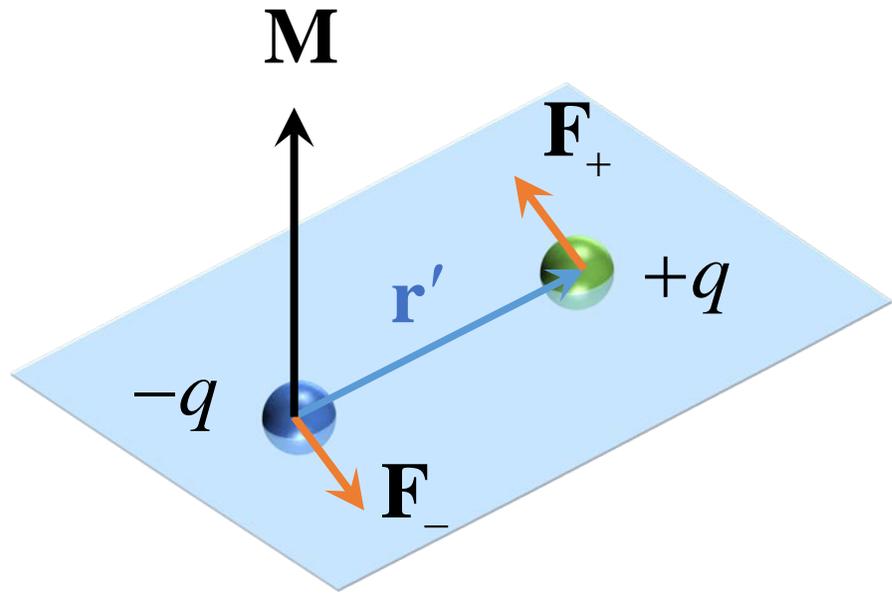


# Электрическое поле диполя



$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\mathbf{d}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{d}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}$$

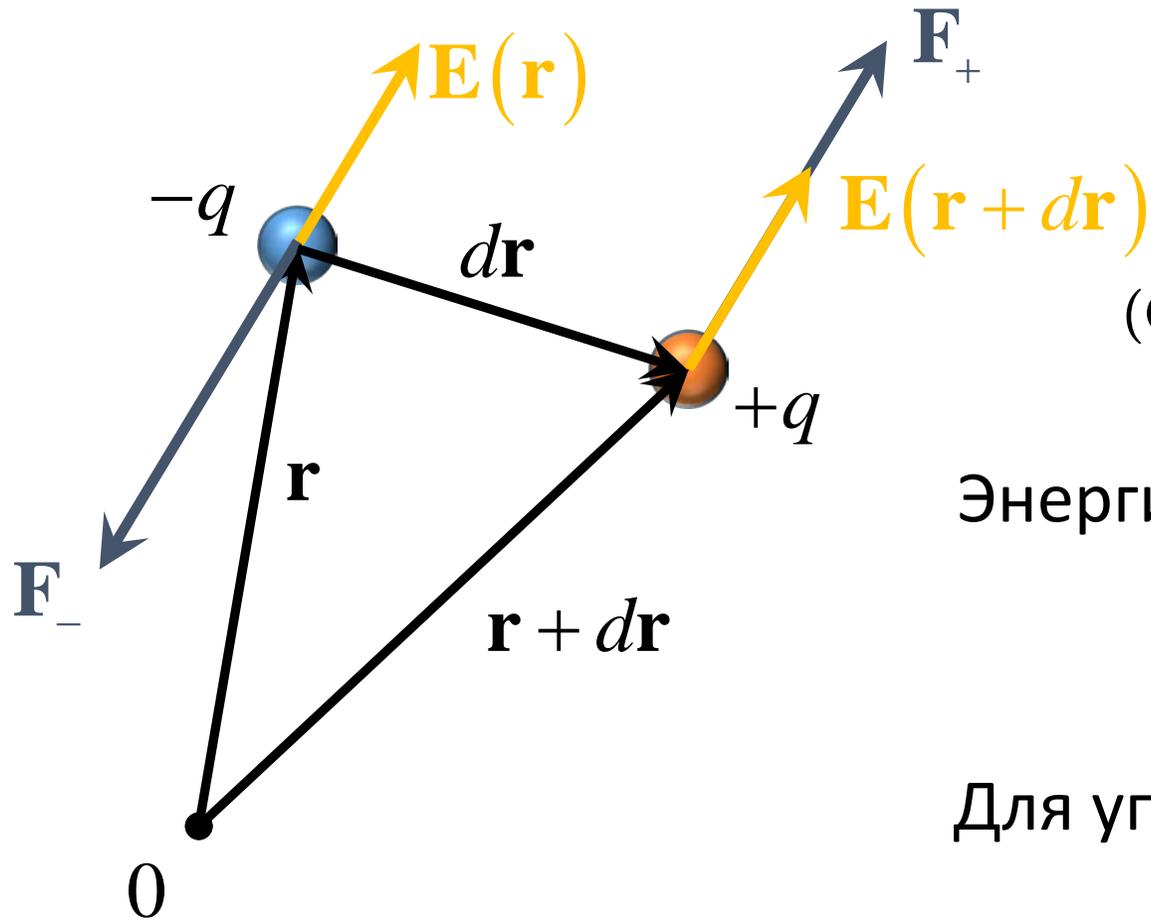
# Момент сил, действующих на диполь в однородном поле



$$\mathbf{M} = [\mathbf{d} \times \mathbf{E}]$$

(Обобщить на случай нескольких зарядов)

# Сила, действующая на диполь в слабонеоднородном поле



$$\mathbf{F} = \nabla(d\mathbf{E})$$

(Обобщить на случай нескольких зарядов)

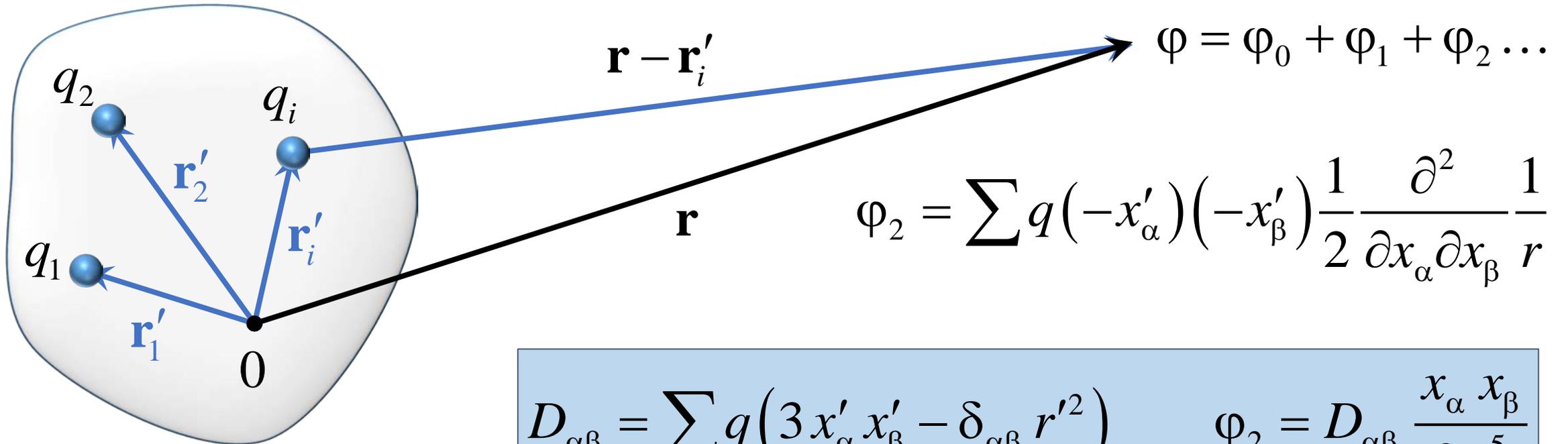
Энергия диполя в поле:

$$U = -\mathbf{d} \mathbf{E}$$

Для упругого диполя:

$$U = -\frac{1}{2} \mathbf{d} \mathbf{E}$$

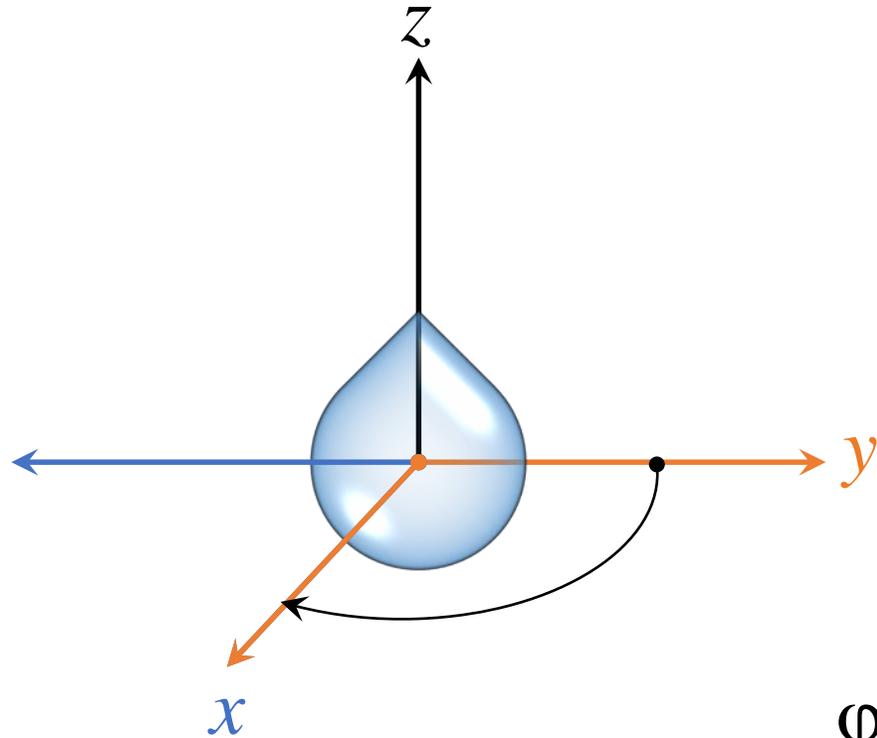
Квадрупольный момент  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$   $\mathbf{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$   
 $r'_i \ll r$   $\begin{matrix} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ x & y & z \end{matrix}$   $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$



$$\varphi_2 = \sum q (-x'_\alpha) (-x'_\beta) \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum q (3 x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2) \quad \varphi_2 = D_{\alpha\beta} \frac{x_\alpha x_\beta}{2 r^5}$$

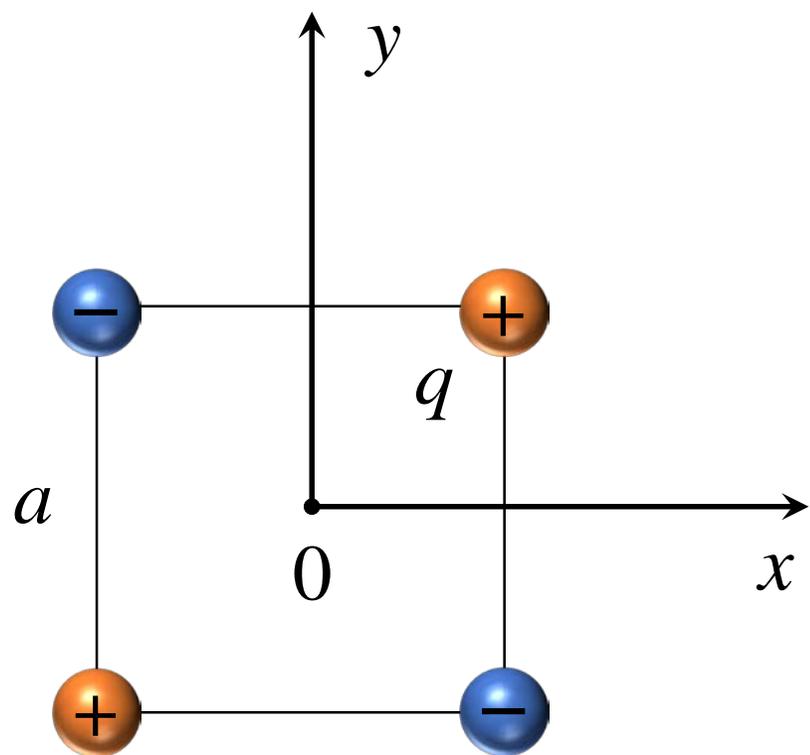
# Аксиально-симметричный квадруполь



$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{D}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{2} & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 = \frac{D}{2} \frac{1}{r^3} \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

# Примеры решения задач

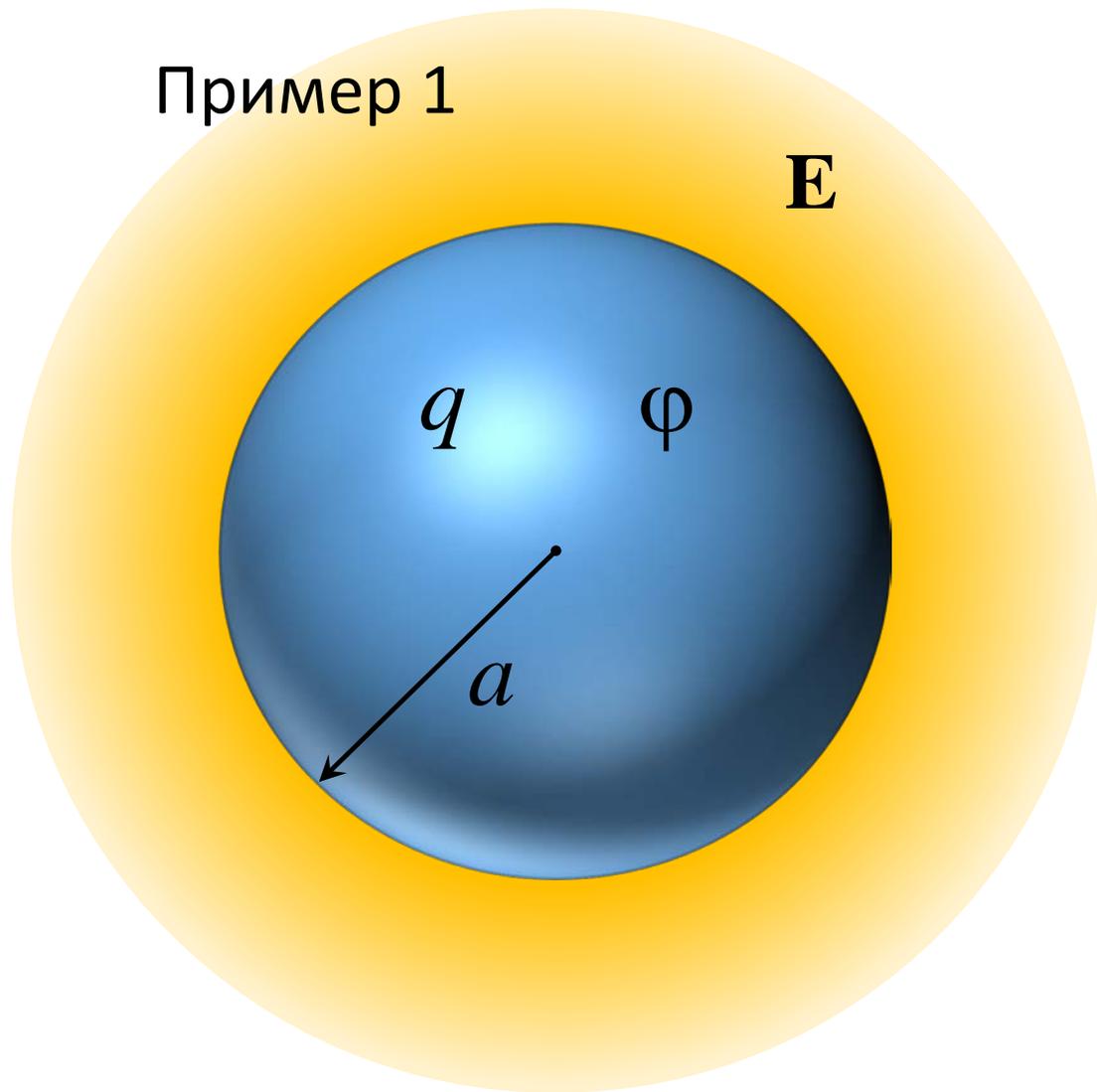


$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 3qa^2 & 0 \\ 3qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 = \frac{3}{2} qa^2 \frac{1}{r^3} \sin^2 \theta \sin 2\alpha$$

# Энергия электрического поля

Пример 1



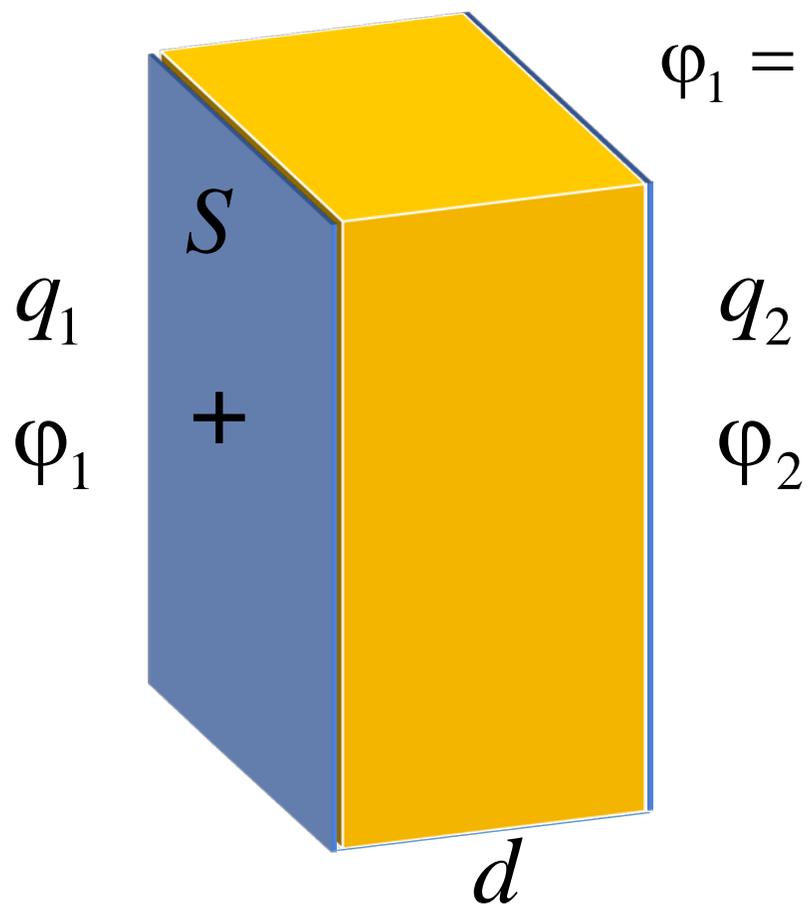
$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (C = a)$$

$$W = \frac{1}{2} q \varphi$$

$$W = \iiint \frac{E^2}{8\pi} dV$$

# Энергия электрического поля

Пример 2



$$q_1 = +q$$

$$q_2 = -q$$

$$\varphi_1 = +\frac{U}{2}$$

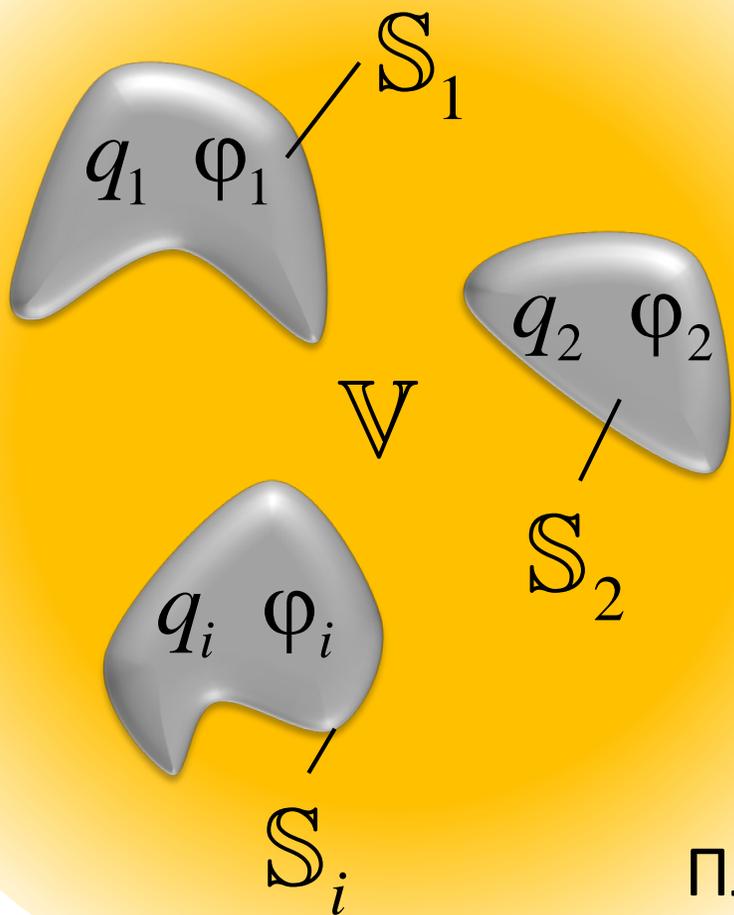
$$\varphi_2 = -\frac{U}{2}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad \left( C = \frac{S}{4\pi d} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2)$$

$$W = \iiint \frac{E^2}{8\pi} dV$$

# Энергия электрического поля



Линейность  
задачи:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \oiint_{S_i} (-\nabla\varphi) d\mathbf{S} = 4\pi q_i \end{cases}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

$$W = \iiint_V \frac{E^2}{8\pi} dV$$

Плотность энергии

$$w = \frac{E^2}{8\pi} \quad \left( W = \iiint_V w dV \right)$$

# Ёмкостные коэффициенты

Матрица потенциальных коэффициентов



$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & \hat{S} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \quad \varphi_i = S_{ij} q_j$$

Матрица  $\hat{S}$  симметрична:

$$S_{ij} = S_{ji}$$

(Доказать!)

# Ёмкостные коэффициенты

Матрица ёмкостных коэффициентов



$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & \hat{\mathbf{C}} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} \quad q_j = C_{ij} \varphi_i$$
$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{S}}^{-1}$$

Матрица  $\hat{\mathbf{C}}$  симметрична:

$$C_{ij} = C_{ji}$$