

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

А. П. Ульянов

ЛЕКЦИИ ПО КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ФИЗИКОВ

Учебное пособие
по курсу теории функций комплексной переменной

Версия от 18 января 2024 г.

Новосибирск
2021–2023

УДК: 510
У 517

Ульянов А. П. Лекции по комплексному анализу для студентов-физиков: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2021. 194 с.

Пособие содержит краткий конспект лекций, читаемых автором для студентов 2-го курса физического факультета НГУ в осеннем семестре с 2021 года.

В пособие включены следующие темы: предварительные сведения; комплексное дифференцирование и интегрирование; ряды и особые точки; вычеты и их приложения; введение в асимптотические методы.

Версия от 18 января 2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Предварительные сведения

1.1	Комплексные числа	4
1.2	Способы изображения комплексных функций	7
1.3	Дробно-линейные преобразования	11
1.4	Другие простейшие функции	17
1.5	Тригонометрические и гиперболические функции	24
1.6	Топологические понятия	26

Глава 2. Дифференцирование и интегрирование

2.1	Комплексное дифференцирование	34
2.2	Обратные функции и ветвление	39
2.3	Обратные тригонометрические функции	50
2.4	Интегральная теорема Коши	55
2.5	Вычеты в полюсах	64
2.6	Интегральная формула Коши	68
2.7	Первообразные аналитической функции	72
2.8	Гармонические функции	78
2.9	Комплексный потенциал в физике	82

Глава 3. Ряды

3.1	Равномерная сходимость	90
3.2	Степенные ряды	93
3.3	Некоторые следствия разложения Тейлора	98
3.4	Ряд Лорана	102
3.5	Изолированные особые точки	107
3.6	Целые и мероморфные функции	115
3.7	Аналитическое продолжение	123
3.8	Принцип аргумента и расположение нулей	131
3.9	Теорема Руше	136

Глава 4. Вычеты и интегралы

4.1	Однозначные функции	141
4.2	Однозначные функции и главные значения	149
4.3	Многозначные функции	153
4.4	Многозначные функции и главные значения	163
4.5	Преобразование Лапласа	169
4.6	Цилиндрические функции Бесселя	178

Глава 5. Асимптотика

5.1	Асимптотические разложения	183
5.2	Асимптотика некоторых интегралов	191

Глава 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

лекция 1
06.09.23

Самое начало в алгебре

Инверсия

Для всякого ненулевого комплексного числа z число $1/z$ определено и удовлетворяет соотношениям

$$|1/z| = 1/|z|, \quad \arg(1/z) = -\arg z.$$

Процесс получения $1/z$ из z можно разбить на два шага, соответствующих двум различным преобразованиям комплексной плоскости. Шаг, на котором сохраняется модуль и обращается аргумент, является просто комплексным сопряжением; геометрически это отражение относительно вещественной оси. Шаг, на котором обращается модуль и сохраняется аргумент, в элементарной геометрии называют **инверсией**, или отражением относительно единичной окружности. Итак, для инверсии имеем формулу $z \mapsto 1/\bar{z}$. Выделенные шаги перестановочны, поскольку $1/\bar{z} = \overline{1/z}$.

Сфера Римана

Часто бывает удобно вместо комплексной плоскости располагать комплексные числа на сфере. В других разделах математики, да и в смежных науках (а также в географии), пригождается обратный приём: происходящее на сфере стараются изобразить на плоскости.

Популярно несколько вариантов соответствия между точками сферы и точками плоскости, различающихся взаимным расположением фигур в трёхмерном пространстве. Выберем вариант с координатной плоскостью $z = 0$ и касающейся её сферой $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Центр сферы находится в точке $(0, 0, 1/2)$, а радиус равен $1/2$. Фигуры касаются в начале координат, которое сочтём южным полюсом сферы; тогда противоположная точка сферы $N = (0, 0, 1)$ будет северным полюсом. Прямая через N и произвольную точку $(u, v, 0)$ **пересекает сферу** в точке (x, y, z) .

Соответствие $(x, y, z) \mapsto (u, v)$ и называют **стереографической проекцией**. Выражающая его формула следует из подобия треугольников:

$$u + iv = \frac{x + iy}{1 - z}.$$

Привлекая уравнение сферы, отсюда можно получить обратную связь, для нашего курса более полезную:

$$x = \frac{u}{1 + u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{1 + u^2 + v^2}, \quad z = \frac{u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2}.$$

Упражнение. Заполните детали этого вычисления.

Сферу, изображающую комплексные числа путём стереографической проекции, называют **сферой Римана**. Одна точка сферы — её северный полюс N — выпадает из соответствия. Удобно заполнить этот прокол сферы, расширив комплексную плоскость дополнительным элементом ∞ . В самом деле, приближению к N на сфере соответствует удаление проекции в бесконечность. Тот факт, что такое удаление может происходить в различных направлениях, для комплексного анализа как правило оказывается несущественным.

Расширенную комплексную плоскость $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ обозначают через $\bar{\mathbb{C}}$. Полезно думать о ней именно как о сфере; преимущество сферы над плоскостью заключается в её компактности: всякая последовательность точек на сфере имеет точку сгущения и сходящуюся подпоследовательность.

Свойства стереографической проекции

Нам нужны два основных свойства стереографической проекции.

Теорема. *Стереографическая проекция переводит всякую окружность сферы в окружность плоскости и наоборот.*

Здесь и далее — во всём нашем курсе — прямая линия на плоскости считается окружностью бесконечного радиуса.

Доказательство. Общее уравнение окружности на плоскости это

$$A(u^2 + v^2) + Bu + Cv + D = 0,$$

где $A \neq 0$, а при $A = 0$ оно превращается в общее уравнение прямой. Тогда по формуле стереографической проекции

$$A \frac{z}{1-z} + B \frac{x}{1-z} + C \frac{y}{1-z} + D = 0,$$

что равносильно

$$Bx + Cy + (A - D)z + D = 0,$$

а это уравнение плоскости. Всякое пересечение сферы и плоскости, состоящее более чем из одной точки, является окружностью.

Наоборот, окружность на сфере однозначно задаёт секущую плоскость, а по коэффициентам её общего уравнения определяются коэффициенты общего уравнения окружности на плоскости стереографической проекции. $\square$

Теорема. *Стереографическая проекция сохраняет углы между линиями.*

Как вы помните из курса основ математического анализа, углом между гладкими линиями в их общей точке называют угол между касательными к ним в этой точке.

Доказательство. Сохранение углов проясняется с помощью несложного **дополнительного построения**. Нарисуем касательную плоскость к сфере в северном полюсе и из общей точки M двух линий на сфере продолжим касательные до пересечения с этой плоскостью в точках A и B . Северная и южная плоскости параллельны, поэтому параллельны прямые, вдоль которых их пересекает плоскость треугольника MAN ; аналогично для MBN . В южной плоскости они образуют искомый угол между проекциями, а в северной это угол ANB . По свойству касательных к сфере, длины отрезков AM и AN равны, и аналогично для BM и BN . Тогда в равных треугольниках AMB и ANB равны углы при вершинах M и N . Переносим последний параллельно себе вдоль луча NM из северной плоскости в южную, получим угол между проекциями двух исходных линий. $\square$

Упражнение. *Это рассуждение упускает случай, когда точки пересечения A или B нет. Однако он похож; разберите его.*

Учитывая сохранение углов стереографической проекцией, определим угол между двумя линиями, уходящими в бесконечность на комплексной плоскости, как угол между их проекциями в точке N . Естественно, это имеет смысл только при наличии касательных. Следующее упражнение позволяет заключить, что для определения искомого угла нужно совершить инверсию. Поскольку комплексное сопряжение сохраняет абсолютные величины углов, меняя лишь ориентацию, вместо инверсии достаточно сделать замену $z \mapsto 1/\bar{z}$ и определить угол между преобразованными линиями в нуле.

Упражнение. *Проверьте, что при стереографической проекции отображению сферы относительно экваториальной плоскости соответствует инверсия относительно единичной окружности.*

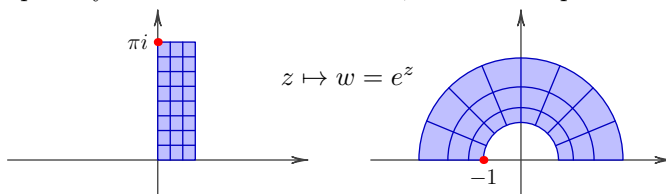
1.2. СПОСОБЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

Желание нарисовать график даже простейшей комплекснозначной функции одной комплексной переменной наталкивается на серьёзное препятствие: необходимость рисовать в четырёх измерениях. Два измерения нужны для независимой комплексной переменной z и ещё два для зависимой $w = f(z)$. Знакомясь в этом разделе с различными решениями этой проблемы, вы заодно увидите ряд несложных функций и начнёте копить интуицию о некоторых важнейших общих свойствах.

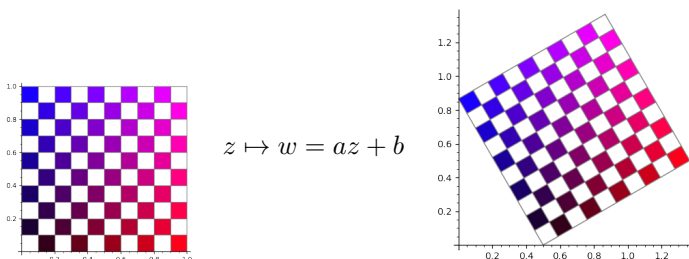
лекция 2+
13.09.23
после 1.3

Образ участка плоскости

Первый традиционный способ заключается в изображении какого-то участка плоскости переменной z и соответствующего участка плоскости w . Исходный участок подбирается так, чтобы повысить информативность рисунка. Соответствие обычно поясняют явными отметками нескольких точек или линий и их образов. Для примера повторим здесь картинку из конспекта моих лекций по геометрии и алгебре.

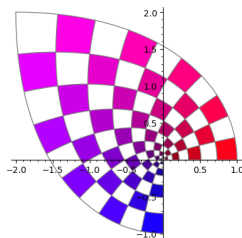
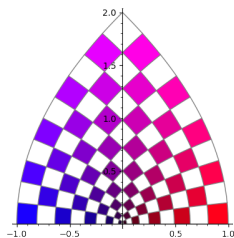


Также можно пояснять соответствие, окрашивая разные части прообраза в различные цвета и придавая затем те же самые цвета образам. Для следующей серии примеров выберем в качестве прообраза единичный квадрат; нарисуем его лишь однажды, приводя далее лишь образы и меняя масштаб при необходимости.

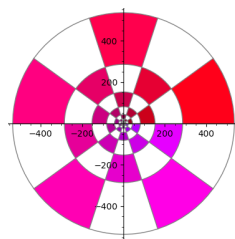
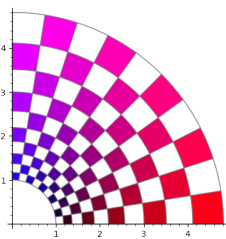


Пример. Линейная функция $w = az + b$ является композицией простейших преобразований, упоминавшихся в начале первого курса и отмеченных на первой лекции: умножение на вещественное число $|a|$, умножение на унитарное комплексное число $e^{i \arg a}$, прибавление комплексного числа b ; иными словами, это подобие с поворотом и переносом. Для рисунка взяты $a = e^{i\pi/6}$ и $b = 1/2$. Прямые перешли в прямые, причём с сохранением углов между ними. Поскольку здесь $|a| = 1$, то сохранились даже все расстояния между точками.

Примеры. Изобразим теперь функции $w = z^2$ и $w = z^3$. Прямые линии декартовой сетки перешли в кривые, но углы между ними сохранились — за малым исключением. На самом деле, обе эти функции искажают углы в единственной точке. Причину мы обсудим позже.



Примеры. Изобразим также две экспоненты $w = e^{\pi z/2}$ и $w = e^{2\pi z}$. На втором из этих рисунков вблизи нуля ничего не видно в силу масштаба, но там, как и на первом, остался не покрытым единичный круг; образ исходного квадрата сделал вокруг него полный оборот. Если увеличить константу в показателе, то образы разных частей квадрата будут накладываться друг на друга.



Примеры. Продолжите с возможностью нарисовать свою функцию.

График модуля функции

В другом достаточно традиционном способе вместо самой функции $f(z)$ изображают график её модуля. Получается поверхность в трёхмерном пространстве, иногда по старинке называемая **рельефом** функции. Информация об аргументе при этом либо совсем теряется, либо даётся отдельно, либо доносится посредством дополнительных линий на рельефе. Рассмотрим несколько картинок в порядке иллюстрации подхода, не вдаваясь сразу в детали устройства этих функций.

[битые ссылки](#)

Примеры. Потрясающий справочник начала XX века (Jahnke, Emde) содержит десятки выполненных руками детальных рельефов комплексных функций. Ограничимся парой ссылок на музейные фотографии картинок оттуда.

- Одна из самых простых: **рельеф синуса**. На различных срезах видны графики вещественных функций $\sin x$, $\operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} y$.
- Одна из самых знаменитых: **рельеф гамма-функции**.

Современная версия второго выбрана в Википедии (англоязычной) в качестве заглавной иллюстрации к содержанию всего цикла статей о комплексном анализе.

С появлением компьютеров многие иллюстрации стали цветными. Использование цвета оказалось весьма эффективным и для функций комплексной переменной.

Примеры. Интерактивные версии из современного справочника DLMF (Digital Library of Mathematical Functions):

- **экспонента**;
- **тангенс**;
- **синус**;
- **гамма-функция**.

Помимо постоянных функций, проще всего устроен рельеф экспоненты: $|e^{x+iy}| = e^x$, так что зависимости от y на самом рельефе вовсе нет. Нет у экспоненты и нулей.

У синуса наблюдаются конусообразные ямы с нулём на остром дне каждой. При удалении вдоль мнимой оси в любом из двух направлений модуль синуса возрастает экспоненциально.

Такие же ямы с нулями есть и у тангенса. При удалении вдоль мнимой оси его модуль стремится к постоянной. Бросаются в глаза круглые башни, показывающие стремление значения тангенса к бесконечности при приближении $x + iy$ к нулю косинуса. Такие точки в комплексном анализе называют **полюсами** функции.

Аналогичные башни присутствуют на рельефе гамма-функции.

Метод цветных областей

Третий способ появился только с развитием компьютерной графики и до сих пор не является стандартным, особенно для математиков старшего поколения, но в последнее десятилетие достиг заметной популярности в интернете и в преподавании.

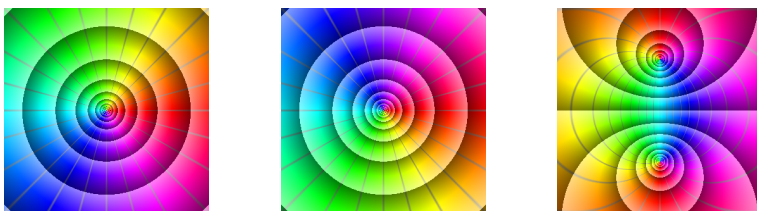
Можно ухватить его основную идею, глядя на рельефы, приведённые выше. Там для раскраски поверхности по умолчанию используются высота и палитра, знакомая всем по так называемым физическим картам из географии, то есть картам рельефа Земли. Если же нажать на кнопку «Phase», то раскраска покажет фазу, а именно $\arg f(z)$. Кружок слева внизу показывает перевод фазы в цвет, немного отличающийся балансом оттенков от давно применяемого мной.

Также выберем точку обзора вертикально вверх. Теперь рельеф весь проектируется на плоскость независимой переменной. Все её точки, где функция определена, оказываются окрашены насыщенным цветом, оттенок которого однозначно соответствует значению $\arg f(z)$. Так решаются как минимум две проблемы, присущие традиционному методу образов: несоизмеримость масштабов значений функции на различных участках её области определения; наложение образов различных участков. Появляется возможность работать с двумерными рисунками, не прибегая к трёхмерным, а это существенное упрощение. Информация о значении $|f(z)|$ пропадает, но её можно вернуть, пользуясь другими параметрами цвета: яркостью и насыщенностью.

Наиболее распространённый приём визуальной передачи значения модуля состоит в затемнении точек, находящихся в яме, то есть вблизи нуля, и осветлении точек, находящихся на башнях, то есть вблизи бесконечности. Нули получают чёрный цвет, а бесконечности — белый.

Примеры. Картинки **обратных гиперболических функций** в Википедии нарисованы с помощью этого приёма, хотя и слабо выраженного.

Поскольку передача значения модуля остаётся недостаточной, к рисунку добавляют линии постоянного модуля. Мне уже давно приглянулся стиль со скачками яркости вдоль линий, на которых $\ln|f(z)|$ является целым числом или целым кратным некоторого числа, отдельно подбираемого. Картинки в конце главы 2 конспекта лекций по геометрии и алгебре нарисованы (перерисованы летом 2021 года) именно так. Мой стиль позволяет достаточно быстро научиться видеть ямы и башни, то есть нули и полюсы функции, а также некоторые важные общие свойства, которые в этом курсе будут доказаны.



Примеры. Отрисованы отображения $w = z$, $w = \frac{1}{z}$, $w = \frac{z-i}{z+i}$. На первой картинке угадывается яма, на второй башня, а на третьей — и яма, и башня, точное расположение которых понятно из формулы.

Все линии уровня $|w|$ на этих трёх картинках являются окружностями. В третьем случае это **окружности Аполлония**. Как всегда, добавлены серые полосы при некоторых значениях $\arg w$, в данном случае кратных $\pi/12$. Все они ортогональны линиям уровня $|w|$ и здесь тоже являются окружностями. Подробнее об этих ортогональных окружностях сказано в следующем разделе.

1.3. ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Определение и разложение на простые

В комплексном анализе оказываются намного важнее, чем в вещественном, где их даже особо не выделяют, функции вида

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

называемые по-разному: дробно-линейные или мёбиусовы, отображения или преобразования. Хотя задание 8 в курсе линейной алгебры и геометрии включает задачу про них, мы не будем опираться на неё существенным образом. Напомним всё же, что там наложено условие $\Delta = ad - bc \neq 0$, при котором, в частности, существует обратное отображение того же типа:

$$z(w) = -\frac{dw - b}{cw - a}.$$

Для многих обратимость оправдывает термин *преобразование*. Здесь мы тоже всегда предполагаем, что $\Delta \neq 0$.

Примеры. С первой лекции мы уже кое-что знаем про два простых случая мёбиусовых преобразований:

- (1) когда $c = 0$, функция $w(z)$ становится линейной;
- (2) при $a = d = 0$ и $b = c$ получаем преобразование $z \mapsto 1/z$.

Когда $c \neq 0$, преобразуем дробь

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \dots = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}.$$

Теперь видно, что при $\Delta = 0$ отображение $z \mapsto w$ постоянно, так что этот случай нежелателен; алгебра же говорит, что тогда числитель и знаменатель дроби пропорциональны и просто сокращаются.

Лемма. *Всякое дробно-линейное преобразование представимо композицией трёх простых из примера выше.*

Доказательство. Введём три отображения:

$$N(z) = cz + d; \quad M(z) = 1/z; \quad L(z) = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c} z.$$

Все они простые в требуемом смысле, причём $w(z) = L(M(N(z)))$. $\square$

Круговое свойство и сохранение углов

лекция 2
13.09.23

Теорема. *Всякое дробно-линейное преобразование:*

- (1) *переводит окружности в окружности;*
- (2) *сохраняет углы между линиями.*

Доказательство. Достаточно установить эти свойства для отображений L , M , N из доказательства леммы. Однако два из них линейны, так что задача сводится к преобразованию $z \mapsto 1/z$. Для него эти свойства следуют из связи со стереографической проекцией, ибо оно соответствует повороту сферы Римана на половину оборота вокруг оси через точки $z = \pm 1$. $\square$

Упражнение. *Опишите преобразования $w(z) = \frac{z-1}{z+1}$ и $w(z) = \frac{z-i}{z+i}$ как вращения сферы Римана.*

Связь дробно-линейных отображений и вращений сферы Римана можно ещё укрепить, но для этого нужно внести **дозу свободы** в стереографическую проекцию (ролик опубликован в 2007 году, получил множество наград и был хитом Ютуба). При нашем определении не все линейные отображения $w(z) = az + b$ проецируются во вращения.

Пример. Равенство $w(-d/c) = \infty$ показывает, что окружности через точку $z = -d/c$ переходят в прямые.

Окружность всегда делит комплексную плоскость на две части. Если эта окружность не прямая, то одна из частей лежит внутри окружности (круг), а другая снаружи (дополнение круга).

Теорема. Для всякой окружности C на комплексной плоскости при всяком дробно-линейном преобразовании:

- (1) если две точки лежат по одну сторону от C , то их образы лежат по одну сторону от образа C ;
- (2) аналогично про точки по разные стороны от C ;
- (3) каждая из двух частей, на которые C делит комплексную плоскость, отображается на одну из сторон от образа C .

Упражнение. Докажите эти утверждения.

Ангармоническое отношение

Найдём формулу для такого дробно-линейного отображения L , что

$$L(z_1) = 0, \quad L(z_2) = \infty, \quad L(z_3) = 1.$$

Легко проверить, что подходит четырёхэтажная дробь

$$L(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \Big/ \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

В комплексном анализе обычно записывают это выражение через дробное отношение. Оно достаточно часто возникает и называется **ангармоническим отношением** четырёх точек z_1, z_2, z, z_3 (принят именно такой порядок). Вместо переменной z тоже может быть подставлена некоторая точка $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$, и тогда полученное число характеризует конфигурацию четырёх различных точек на сфере.

Если одна из взятых точек есть ∞ , то в ангармоническом отношении обе содержащие её разности заменяются единицами, и дробь упрощается, например:

$$\frac{z_0 - \infty}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - \infty}{z_3 - z_2} = \frac{1}{z_0 - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2}.$$

Теорема. Ангармоническое отношение сохраняется при всех дробно-линейных преобразованиях.

Утверждение означает, что

$$\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}$$

как только $w_k = w(z_k)$ для четырёх различных точек $z_k \in \overline{\mathbb{C}}$.

Первое доказательство. Достаточно взять дробь

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

подставить её восемь раз в правую часть, ибо $w_k = w(z_k)$, и упростить. Однако на этом пути много писанины. $\square$

Второе доказательство. Представим преобразование в виде композиции простых. Теперь достаточно проверить утверждение для линейных преобразований и для отображения $z \mapsto 1/z$. Как и в первом доказательстве, это делается подстановкой, но писанины здесь меньше. $\square$

Третье доказательство. Применим два отображения из доказательства следующей теоремы и сразу получим требуемое равенство. $\square$

Задание образами трёх точек

Лемма. *Всякое отличное от тождественного дробно-линейное преобразование имеет только две неподвижные точки в $\overline{\mathbb{C}}$; они могут сливаться в одну в частных случаях.*

Доказательство. При $c \neq 0$ условие неподвижности $w(z) = z$ равносильно квадратному уравнению и имеет лишь два решения. $\square$

Упражнение. *Опишите неподвижные точки в случае $w(z) = az + b$. Тут несколько вариантов при разных коэффициентах.*

Теорема. *Чтобы задать дробно-линейное преобразование, достаточно указать образы трёх различных точек сферы Римана.*

Доказательство. Чтобы отобразить три различные точки $z_k \mapsto w_k$, возьмём построенное выше явно отображение L и аналогичное отображение M , для которого

$$M(w_1) = 0, \quad M(w_2) = \infty, \quad M(w_3) = 1.$$

Тогда отображение $w(z) = M^{-1}(L(z))$ искомое, причём оно единственное по следующей причине.

Если при «другом» отображении w^* тоже все три $z_k \mapsto w_k$, то композиция $w^{-1} \circ w^*$ имеет три неподвижные точки z_k , так что обязана быть тождественным отображением по лемме. Значит, $w^* = w$. $\square$

Пример. Устроим отображение верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$.

Сперва выберем на границах две тройки точек, например, $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ и $w_1 = -1$, $w_2 = -i$, $w_3 = 1$. Приравняем ангармонические отношения:

$$\frac{z - (-1)}{z - 0} : \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = \frac{w - (-1)}{w - (-i)} : \frac{1 - (-1)}{1 - (-i)}.$$

Упрощая, получим

$$z = \frac{w + i}{iw + 1}, \quad w = -\frac{z - i}{iz - 1} = i \frac{z - i}{z + i}.$$

Видим также, что $w(i) = 0$ и $w(-i) = \infty$, поэтому мы отобразили как надо не только границы, но и внутренности. Вместо подобной проверки можно пользоваться правилом согласования ориентаций, знакомым вам из векторного анализа: при обходе границы всегда оставлять область слева. Здесь оно соблюдено при соответствующих обходах $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3 \rightarrow z_1$ и $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3 \rightarrow w_1$.

Симметрия относительно окружности

Обратимся снова к только что разобранному примеру. Полученное там отображение отличается лишь умножением на i от нарисованного в предыдущем разделе. Значит, картинка, представляющая его по методу цветных областей, отличается только поворотом гаммы. Точки $\pm i$ симметричны относительно прямой $\text{Im } z = 0$. Серые окружности, проходящие через обе точки, ортогональны этой прямой.



Обобщая, назовём точки z_1 и z_2 **симметричными** относительно окружности C , если всякая окружность, проходящая через них, ортогональна C . Прямая, относительно которой данная пара точек симметрична, единственна, а вот подходящих окружностей есть **целое семейство**.

Следствие. Симметрия относительно окружности сохраняется при дробно-линейных преобразованиях.

Доказательство. Достаточно привлечь круговое свойство и сохранение углов. $\square$

Пример. Точки α и $\bar{\alpha}$ симметричны относительно прямой $\operatorname{Im} z = 0$. Отображение $w(z) = \frac{z-i}{z+i}$ переводит эту прямую в единичную окружность. Проверив равенство $\overline{w(\alpha)}w(\bar{\alpha}) = 1$, убеждаемся, что симметрия относительно окружности реализуется инверсией относительно неё. Поэтому инверсию также называют отражением.

Пример. Устроим отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы $w(\alpha) = 0$.

Принцип симметрии даёт $w(\bar{\alpha}) = \infty$, и легко подобрать формулу:

$$w(z) = \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}.$$

Поворачивая образ умножением на $e^{i\phi}$, получим общее решение.

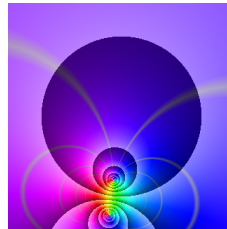
Другой способ: подходящим линейным преобразованием переместим α в i , затем применим отображение из предыдущего примера.

Пример. Устроим отображение единичного круга $|z| < 1$ на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы $w(\alpha) = 0$.

Симметричность точек α и $\beta = 1/\bar{\alpha}$ относительно единичной окружности влечёт $w(\beta) = \infty$. Значит,

$$w(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \beta} = \lambda \bar{\alpha} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}.$$

Накладывая условие $|w(1)| = 1$, заменяем $\lambda \bar{\alpha}$ на $e^{i\phi}$ и получаем общее решение. При $\phi = 0$ это отображение обратно само себе. Отрисованы два таких с разными значениями α .



1.4. ДРУГИЕ ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ

Степенная функция с целым показателем

Изучим функции $w(z) = z^n$, где число n целое. При $n = 0$ функция постоянна и большого интереса не представляет. Получающееся при $n = 1$ тождественное отображение хоть и тривиально, но оно полезно в качестве точки старта для понимания метода цветных областей; выше оно уже нарисовано вместе с отображением $w(z) = z^{-1} = 1/z$. Посмотрим теперь на картинки функций z^2 , z^3 и z^{-2} .



Возведение комплексного числа в целую степень вам уже знакомо. Оно очень просто записывается в показательной форме:

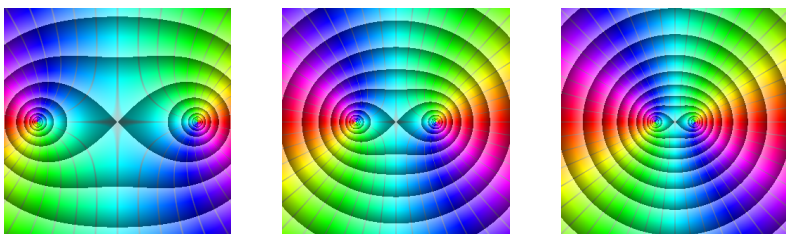
$$(\rho e^{i\phi})^n = \rho^n e^{in\phi};$$

поэтому при любом $n \neq 0$ все линии уровня $|w|$ являются окружностями, а линии постоянного $\arg w$ — лучами из начала координат.

Важно пронаблюдать, что происходит со значением $\arg w$ при обходе вокруг центра по окружности. Обходя один раз против часовой стрелки, мы даём приращение $\arg z$, равное 2π . Соответственно, $\arg z^n$ прирастает на $2\pi n$. На радужных картинках это видно как n оборотов гаммы, причём при $n < 0$ цвета встречаются в обратном порядке.

Полиномы и основная теорема алгебры

Пример. Для функции $w(z) = z^2 - 1$ нарисованы аж три картинки в разных масштабах. Этот полином имеет два корня $z = \pm 1$, поэтому видны две ямы, соединённые седловой точкой $z = 0$, в которой нарушается свойство сохранения углов и меняется структура **линий уровня** $|w|$. При удалении две ямы визуальнo сливаются, и на каком-то масштабе картинка не отличима от таковой для функции z^2 . Это иллюстрирует лемму Гаусса о доминировании старшего слагаемого полинома над остальными. При обходе по линии уровня, охватывающей оба нуля, $\arg w$ получает приращение 4π .



Сказанное в этом примере легко обобщается на произвольный полином. Друг от друга полиномы отличаются расположением своих нулей на комплексной плоскости, плавно меняющимся при изменении коэффициентов; однако, действуя на удалении от нулей, мы заключаем вслед за Гауссом, что их количество с учётом кратностей равно степени полинома. Позже мы сделаем это строго.

Рациональные функции

лекция 3
20.09.23

Отношение двух полиномов $p(z)/q(z)$ называют **рациональной функцией**. Будем считать всегда, что числитель и знаменатель дроби не имеют общих корней, то есть дробь несократимая. Тогда корни числителя предстанут на картинке днищами ям, а корни знаменателя — вершинами башен. При удалении в бесконечность функция будет выглядеть как степенная с показателем степени, равным $\deg p - \deg q$.

Пример. Нарисуем две чем-то схожие функции:

$$K(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}, \quad J(z) = \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

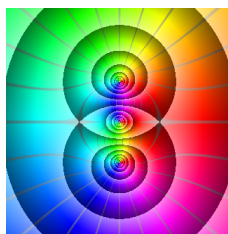
Нули обеих расположены в точках $z = \pm i$. Полюсы $K(z)$ расположены в точках $z = \pm 1$, а у $J(z)$ есть полюс в точке $z = 0$. Отметим также их поведение на бесконечности: $K(z) \rightarrow 1$ и $J(z) \sim z/2$.

Поскольку $J(z) = J(1/z)$, равенство $J(0) = J(\infty) = \infty$ внушает, что если делать радужный рисунок не на плоскости, а на сфере Римана, то над точкой $z = \infty$ будет такая же башня, как и над точкой $z = 0$. Выходит, полюсами нужно считать обе эти точки.

Секрет здесь в том, что функции $K(z)$ и $J(z)$ связаны поворотом сферы Римана, иными словами, дробно-линейным отображением:

$$K(z) = J\left(\frac{z-1}{z+1}\right).$$

При этом на плоскости $K(z)$ имеет больше симметрий, чем $J(z)$.



Посмотрим теперь на значения аргументов этих функций при обходе картинок по кромке цветного квадрата. У $J(z)$ видим прирост 2π , то есть один оборот гаммы, а у $K(z)$ видим нулевое изменение. В обоих случаях число оборотов A совпадает с разностью между числом нулей N и числом полюсов P внутри квадрата. Представляя происходящее на сфере Римана, можно также сказать, что обход совершается вокруг точки $z = \infty$, причём: в случае функции $K(z)$ эта точка обыкновенная, ибо $K(\infty) = 1$, вот обход и не даёт изменения аргумента; в случае функции $J(z)$ обходится полюс, но в направлении, противоположном обычному, поэтому прирост положителен.

Угаданная в примере формула $A = N - P$ верна не только для всех рациональных функций, но и для всех функций из широкого класса, который будет основным в нашем курсе. Соответствующую теорему называют **принципом аргумента**.

На первом курсе вы сталкивались с задачей представления рациональной функции в виде суммы целой части (полинома) и простейших дробей. Более того, ввиду опоры на основную теорему алгебры полиномов — существенно комплексную и выше по сути доказанную — решение её с привлечением комплексных чисел проще чисто вещественного.

Пример. Разложим рассмотренную выше функцию,

$$K(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = 1 + \frac{2}{z^2 - 1} = 1 + \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1},$$

и посмотрим снова на рисунок. Целая часть разложения показывает поведение функции на бесконечности, ибо при $z \rightarrow \infty$ все правильные дроби стремятся к нулю. Вблизи каждого полюса поведение определяется соответствующей простейшей дробью; часто по рисунку даже можно угадать аргумент коэффициента при ней. Расположения нулей функции по такому её представлению не видно.

Пример (Клейн). Нарисуем сперва функцию

$$f(z) = \frac{z^4 - i\beta z^2 + 1}{z^4 + i\beta z^2 + 1},$$

где β это положительное вещественное число; для картинки можно взять его между 3 и 4. Нули и полюсы её лежат в вершинах двух квадратов. При любом допустимом β эти вершины оказываются попарно симметричными относительно единичной окружности благодаря единицам в формуле. Значит, на сфере Римана эти восемь точек образуют квадратную призму. Значение β зависит от отношения её высоты к длине (и равной ей ширине) и его можно выбрать так, что призма будет кубом. На самом деле, так и было сделано на левом рисунке.

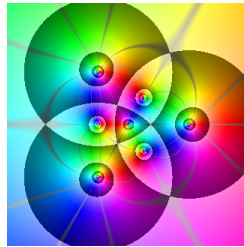
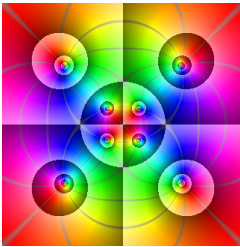
Тогда четыре нуля образуют один правильный тетраэдр, а четыре полюса — другой. Любой поворот $z \mapsto R(z)$ сферы Римана, переводящий каждый из этих тетраэдров в себя, весьма просто сказывается на значении функции: она приобретает множитель, равный одному из кубических корней из единицы,

$$f(R(z)) = \omega^{k(R)} f(z),$$

где $\omega = e^{2i\pi/3}$, а $k \in \{0, 1, 2\}$ зависит только от R . Значит, на сфере Римана функция $f(z)^3$ обладает симметриями правильного тетраэдра. Как вы можете помнить, они образуют группу из 12 элементов.

Каждый нуль функции $f(z)^3$ тройной, то есть при обходе z вокруг нуля, не охватывающем прочих нулей и полюсов, $\arg f(z)^3$ прирастает на 6π . Аналогично, каждый её полюс тоже тройной, то есть при обходе вокруг и вблизи него $\arg f(z)^3$ убывает на 6π .

Функция на правом рисунке связана с $f(z)$ поворотом сферы Римана, перемещающим один из полюсов в точку $z = \infty$.



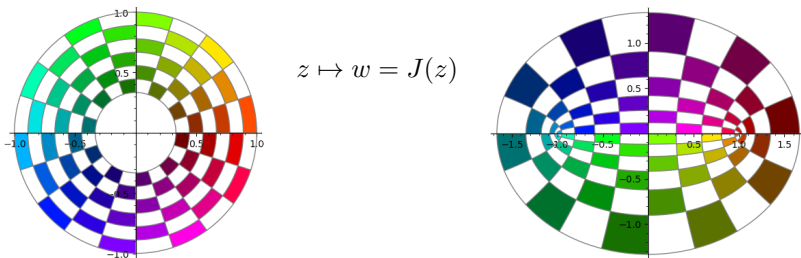
Упражнение. Найдите выбранное в примере значение β .

Функция Жуковского

Уже встреченную нами ранее в этом разделе функцию

$$J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

называют **функцией Жуковского**. Ввиду особой важности, остановимся на ней подробнее. Сначала рисунок по методу образов.



Почти год назад во втором задании по линейной алгебре и геометрии вам предлагалось узнать, во что эта функция отображает сетку полярных координат. Вот ответ: получаются в общем случае софокусные эллипсы и гиперболы, а также части вещественной оси между фокусами $w = \pm 1$ и снаружи от них.

Упражнение. Разберите детально, в какие участки линий переходят окружности и лучи полярной сетки. Выделите единичную окружность, вещественные и мнимые полуоси. Учитывайте направления обхода.

Равенство $J(z) = J(1/z)$ означает симметричность функции Жуковского при её изображении на сфере, что было подмечено выше с помощью функции $K(z)$. Если $J(z_1) = J(z_2) = w$, то $z_1 z_2 = 1$. Отсюда

$$|z_1| \leq 1 \Leftrightarrow |z_2| \geq 1; \quad \operatorname{Im} z_1 \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z_2 \leq 0.$$

Укажем несколько простых множеств, образы которых покрывают всю расширенную плоскость:

- единичный круг $|z| \leq 1$;
- дополнение открытого единичного круга $|z| \geq 1$;
- верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$;
- нижняя полуплоскость $\operatorname{Im} z \leq 0$.

Упражнение. Определите образы простых областей полярной сетки — различных круговых секторов и, в частности, образы внутренних четырёх только что отмеченных множеств, а также их пересечений.

Упражнение. В каких точках отображение $z \mapsto J(z)$ искажает углы между линиями?

Формулу, задающую функцию Жуковского $w = J(z)$, можно преобразовать в соотношение

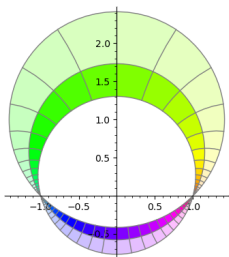
$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2.$$

Значит, $J(z)$ представима как композиция трёх очень простых отображений: дробно-линейное, возведение в квадрат, обратное дробно-линейное. Такое представление позволяет быстро понять, куда $J(z)$ переводит дуги окружностей, соединяющие точки $z = \pm 1$. Пошагово:

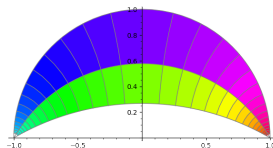
- (1) дуга окружности переходит в луч из начала координат;
- (2) луч переходит в луч с удвоением аргумента;
- (3) луч переходит в дугу окружности.

рисунок

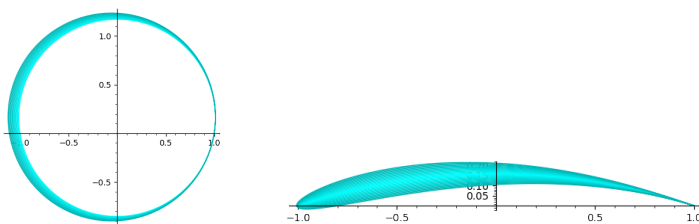
Учитывая удвоение аргумента на втором шаге, можно утверждать, что дуга окружности через точки $z = \pm 1$, образующая угол α с вещественной осью в точке $z = 1$, переходит в дугу такого же семейства на плоскости w , но с углом 2α . Две дуги, лежащие на одной окружности, образуют углы α и $\alpha + \pi$, а потому переходят в одну и ту же дугу.



$$z \mapsto w = J(z)$$



Это свойство сыграло большую роль в том, что Жуковский изучил функцию $J(z)$ и использовал её в своей работе, заложившей основы теории летательных аппаратов. Берутся две окружности, касающиеся в точке $z = 1$, причём одна из них проходит через точку $z = -1$. Ограниченную ими область эта функция переводит в область, которую Жуковский предложил в качестве профиля крыла самолёта.



Комплексная экспонента

Быстрейший, пожалуй, способ ввести комплексную экспоненту опирается на базовые знания вещественного анализа: элементарные функции e^x , $\cos x$, $\sin x$. Сперва для чисто мнимых чисел iy вводим обозначение $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, а затем для $z = x + iy$ полагаем $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Проверка теоремы сложения $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ сводится к формулам для косинуса и синуса суммы.

Сразу же получаем два важнейших свойства:

- (1) экспонента принимает все комплексные значения кроме нуля;
- (2) экспонента обладает периодом $2\pi i$, то есть $e^{z+2\pi i} = e^z$.

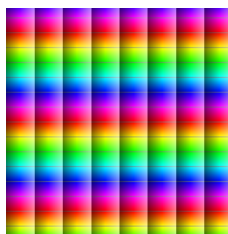
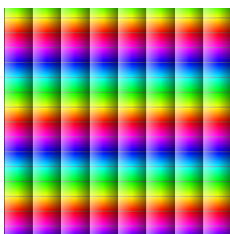
При этом $|e^{x+iy}| = e^x$ и $\text{Arg } e^{x+iy} = y + 2\pi k$, где k пробегает множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел.

Упражнение. Если $e^{z+w} = e^z$ для всех $z \in \mathbb{C}$, то число $w/2\pi i$ целое вещественное.

Картинки экспоненты в принципе уже давались в виде образа квадрата и в виде скучного, нерельефного рельефа. Ясно из определения и видно по тем картинкам, что экспонента отображает линии декартовой сетки в линии полярной сетки. По непрерывности, отсюда следуют полезные утверждения об отображении различных областей. Например, всякая горизонтальная полоса $\alpha < \text{Im } z < \alpha + \delta$ шириной $\delta < 2\pi$ переходит в сектор с углом раствора δ . При $\delta = 2\pi$ образом является вся плоскость без луча $\text{Arg } w = \alpha + 2\pi k$. Всякая вертикальная полоса $a < \text{Re } z < b$ посредством экспоненты наматывается на кольцо $e^a < |w| < e^b$ бесконечное число раз.

Упражнение. Опишите линию, в которую экспонента отображает прямую плоскости z , не параллельную координатной оси.

Теперь нарисуем по методу цветных областей: слева e^z , справа e^{-z} .



Периодичность оттенка показывает периодичность самой функции, а вот периодичность вдоль вещественной оси введена искусственно как способ визуального выявления поведения модуля функции. Таким образом, целесообразно научиться ассоциировать с подобными участками картинок по этому методу просто-напросто экспоненциальный рост. На левой картинке модуль растёт при движении вправо, а на правой — при движении влево.

Здесь можно возразить, что картинка никак не изменится, если умножить функцию на e . Это так, но серьёзным недостатком метода не является, даже скорее наоборот: метод цветных областей предназначен для визуализации общего характера функции и её особенностей, а умножение на константу всего этого как раз не меняет.

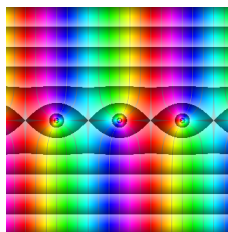
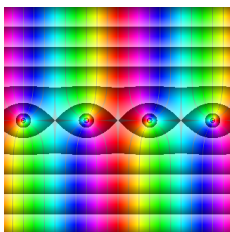
1.5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Косинус и синус

Из равенств $e^{\pm iy} = \cos y \pm i \sin y$ выразим $\cos y$ и $\sin y$, а затем заменим вещественную переменную y на комплексную переменную z . Получим определения комплексного косинуса и синуса:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Сохранится при этом и формула Эйлера: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Все основные тригонометрические формулы работают без изменений в комплексной ситуации, и мы не будем на них останавливаться.



Важным отличием комплексных косинуса и синуса от вещественных версий является неограниченность этих функций. При удалении от вещественной оси обе демонстрируют экспоненциальный рост:

$$|\cos z| \sim |\sin z| \sim \frac{1}{2}e^{|\operatorname{Im} z|}.$$

Разумеется, рост этот хорошо видно на радужных картинках. Для косинуса и синуса они практически одинаковы; а именно, они связаны простым сдвигом вследствие формул

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z.$$

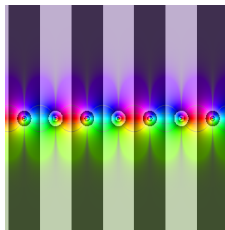
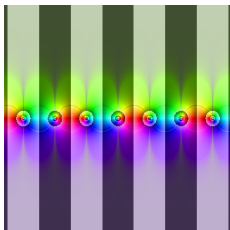
Тангенс и котангенс

Естественно, далее определим тангенс и котангенс, а для комплекта также становящиеся всё более редкими секанс и косеканс:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

Поведение тангенса и котангенса при удалении от вещественной оси идёт вразрез с интуицией, воспитанной только на ней: обе функции имеют пределы в каждой из полуплоскостей, причём они различны. Впрочем, их значения легко узнать прямо из определений через экспоненту.

Радужные картинки тангенса и котангенса на удалении от вещественной оси несколько портят колебания модуля вокруг предельного значения 1, приводящие к чёрно-белым зебрам. (Такие зебры можно победить модификацией стиля рисунка, на здесь этого не сделано.)



Упражнение. Узнайте эти предельные значения.

Упражнение. Свяжите функции $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ с экспонентой с помощью функции Жуковского $J(z)$ и функции $K(z)$, введённой *попутно*. Сделайте выводы об отображениях координатных сеток.

Гиперболические функции

Определения всех гиперболических функций через экспоненту совпадают с вещественным случаем, то есть заменяется лишь тип переменной. Добавить сюда можно связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями. Они тоже видны непосредственно из определений:

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z.$$

Умножение независимой переменной на i даёт поворот плоскости, поэтому радужные картинки всех гиперболических функций отличаются от аналогичных картинок их тригонометрических аналогов таким поворотом, а в некоторых (нечётных) случаях также поворотом гаммы. Если вещественная функция $\operatorname{th} x$ достаточно знакома, то связь $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{tg} z$ через поворот устраняет сюрприз в поведении последнего.

Далее следует целый ряд нехитрых формул, например,

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Можно выделить отсюда вещественные и мнимые части функций, а также выразить модули через функции от компонент x и y .

Упражнение. Куда косинус отображает линии $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = \pi$?

1.6. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Собранные в этом разделе понятия должны быть знакомы вам практически полностью из курса основ математического анализа. Там они являются подготовительными к теоретическому изучению **функций нескольких переменных**. Нашей целью будут функции одной комплексной переменной, время от времени представляемой как две вещественных. Пока что комплексности как независимой, так и зависимой пар переменных никакой роли играть не будут, то есть фактически во всём разделе речь идёт о множествах в $\mathbb{R}^2$ и отображениях $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Открытые множества

Расстояния между точками комплексной плоскости обычно записывают как модуль разности, и мы уже свободно пользовались этим. Так, условие $|z - p| = r$ задаёт окружность радиуса r с центром в точке p , а

условие $|z - p| < r$ задаёт открытый круг, границей которого является эта окружность. Обозначим этот круг через $B(p, r)$. Здесь $r > 0$.

Множество называют **открытым**, если вместе с любой своей точкой p оно включает некоторый круг с центром в p . Подходящий круг часто называют **окрестностью** своего центра. Обычно окрестность достаточно мала, но если она мала недостаточно, её уменьшают. Самые понятные открытые множества — заданные набором строгих неравенств простого вида. Строгие неравенства записываются со значками $<$, $>$ и $\neq$.

Примеры. Некоторые самые ходовые открытые множества:

- вся комплексная плоскость;
- круг $\{z: |z - p| < r\}$;
- полуплоскости $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, $\{z: \operatorname{Re} z < 0\}$ и т. д.;
- дополнение, или «внешность» круга $\{z: |z - p| > r\}$;
- кольцо $\{z: r < |z - p| < R\}$;
- **выколота** ε -окрестность точки $\{z: 0 < |z - p| < \varepsilon\}$;
- сектор $\{z: \alpha < \arg(z - p) < \beta\}$;
- полоса $\{z: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$;
- полуполоса $\{z: \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$;
- плоскость с разрезом по полуоси $\{z: |\arg z| < \pi\}$;
- плоскость с разрезом по отрезку $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$;
- плоскость без нескольких точек;
- полуплоскость без одной точки $\{z: \operatorname{Im} z > 0, z \neq i\}$;
- дополнение произвольного замкнутого множества.

Лемма. Открыто объединение любого семейства открытых множеств и пересечение конечного набора открытых. □

Замкнутые множества

Комплексное число a называют **пределом** последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел, если вне всякого круга с центром в точке a лежит лишь конечное число её элементов. Имеющую предел последовательность называют **сходящейся**, как с указанием её предела, так и без, или **стремящейся** к своему пределу. Пишут $z_n \rightarrow a$.

Множество называют **замкнутым**, если вместе с любой сходящейся последовательностью своих точек оно содержит её предел. Многие понятные замкнутые множества задают равенствами и нестрогими неравенствами. Нестрогие неравенства записываются со значками $\leq$ и $\geq$.

Примеры. Некоторые ходовые замкнутые множества:

- окружность $\{z: |z - p| = r\}$;
- прямые $\{z: \operatorname{Re} z = a\}$, $\{z: \operatorname{Im} z = b\}$;
- луч $\{z: \arg(z - p) = \alpha\}$;
- отрезок $[-1, 1]$;
- любой конечный набор точек;
- дуга окружности $\{z: |z - p| = r, \alpha \leq \arg(z - p) \leq \beta\}$;
- круг $\{z: |z - p| \leq r\}$;
- другие примеры из списка открытых с заменой строгого условия на нестрогое.

Лемма. *Замкнуто пересечение любого семейства замкнутых множеств и объединение конечного набора замкнутых.* $\square$

Внутренность, граница, замыкание

Точку p называют **внутренней** точкой множества A , если некоторый круг с центром в p лежит в A . Точку p называют **граничной** точкой множества A , если всякий круг с центром в p содержит как точки A , так и точки его дополнения $\complement A = \mathbb{C} \setminus A$. Третий возможный вариант, когда некоторый круг с центром в p лежит в $\complement A$, употребляют реже и называют **внешней** точкой A . Граничная точка A может как лежать, так и не лежать в A , а внешняя точка A никогда в нём не лежит.

Точку p называют **изолированной** точкой множества A , если пересечение с A некоторого круга с центром в p состоит лишь из самой точки p . Точку p называют **предельной** точкой множества A , если всякий круг с центром в p содержит бесконечно много точек множества A .

По заданному множеству A часто строят новые множества:

- множество A° внутренних точек A называют **внутренностью** A ;
- множество ∂A граничных точек A называют **границей** A ;
- множество $\bar{A}$ предельных точек A называют **замыканием** A .

Определения влекут $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$. Условие $A^\circ = A$ означает открытость, а условие $A = \bar{A}$ означает замкнутость. Все граничные точки открытого множества ему не принадлежат, а все граничные точки замкнутого множества ему принадлежат. Внутренность всегда открыта, а замыкание всегда замкнуто.

Упражнение. Проверьте, что

$$A^\circ = A \setminus \partial A, \quad \bar{A} = A \cup \partial A, \quad \partial A = \bar{A} \setminus A^\circ.$$

Ограниченные и компактные множества

Множество называют **ограниченным**, если оно лежит в некотором круге. Множество называют **компактным**, если оно замкнутое и ограниченное. Компактные множества обладают рядом свойств, облегчающих получение нужных и полезных утверждений. В частности, всякая последовательность в компактном множестве имеет точку сгущения, то есть из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Пример. Последовательность точек $z_n = n$ не ограничена. Скорее наоборот: она уходит на бесконечность. Проецируя на сферу Римана, получим из неё последовательность точек, стремящуюся к северному полюсу.

В отличие от комплексной плоскости, сфера Римана компактна как замкнутое и ограниченное подмножество пространства $\mathbb{R}^3$. В комплексном анализе бывает выгодно пользоваться этим, но чтобы не прыгать постоянно на сферу и обратно, можно говорить об окрестностях бесконечно удалённой точки. Достаточно считать таковыми множества $\{z: |z| > R\}$, либо дополнение любого замкнутого круга; для общности же можно брать дополнение компактного множества.

Непрерывность и предел функции

Непрерывность отображения $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ в точке введена на первом курсе двумя способами, оказавшимися равносильными; между ними всегда выбирают, смотря по ситуации и собственному вкусу. Перенос на функции комплексного переменного делается дословно. Функция $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна в точке $p \in D$:

- когда $f(z_n) \rightarrow f(p)$ для любой последовательности $\{z_n\}$ в D , сходящейся к p ;
- когда для любой окрестности V точки $f(p)$ найдётся такая окрестность U точки p , что $f(U \cap D) \subset V$.

Во втором варианте часто используют круговые окрестности.

Основные операции над функциями — арифметические и композиция — сохраняют непрерывность, за исключением деления на нуль. Поэтому для явных функций исследование непрерывности обычно сводится к внимательному рассмотрению формулы. Более сложные ситуации требуют понятия предела функции, которое формализуется аналогично непрерывности с небольшими модификациями. Функция $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ имеет предел A в точке $p \in D$:

- когда $f(z_n) \rightarrow A$ для любой последовательности $\{z_n\}$ в D , сходящейся к p ;
- когда для любой окрестности V точки A найдётся такая выколота окрестность U точки p , что $f(U \cap D) \subset V$.

Ориентированные кривые, дуги и контуры

Непрерывной кривой, или линией, на комплексной плоскости называют образ непостоянного непрерывного отображения $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ отрезка. **Простой** называют линию без кратных точек: $a \neq b$ влечёт $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ за возможным исключением $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$. Если последние две точки совпадают, то линию называют **замкнутой**; можно считать её непрерывным образом окружности. Учёт направления движения по линии при росте параметра придаёт ей одну из двух возможных **ориентаций**.

Вы уже могли видеть в вещественном анализе примеры непрерывных функций с неожиданным поведением. Для многих целей удобны более жёсткие условия. Если отображение γ гладкое, то есть непрерывно дифференцируемое, и $\gamma'(t) \neq 0$ всюду, то его образ соответственно называют гладкой линией. В каждой точке простой гладкой линии можно провести касательную, причём направление её непрерывно меняется при движении по линии.

Простую линию, состоящую из конечного числа гладких участков, называют кусочно-гладкой; для краткости назовём таковую **дугой**. Замкнутую дугу назовём **контуром**. Подавляющее большинство конкретных дуг и контуров в нашем курсе будут составлены из самых простых линий: отрезков прямых и дуг окружностей.

Связные множества и области

Множество называют **связным**, если его нельзя разбить на два непустых открытых подмножества. Если множество не открыто, то эту расхожую формулировку необходимо уточнять. Дело в том, что здесь имеется в виду относительная открытость подмножеств как в следующем примере.

Пример. Возьмём два замкнутых круга $D_{\pm} = \{z: |z \mp 2| \leq 1\}$. Оба открыты в их объединении D : при проверке, что вместе с каждой своей точкой $D_{\pm}$ включает некоторую её окрестность, нужно рассматривать лишь точки множества D , а не всей плоскости. Поэтому D несвязно, хотя его и нельзя разбить на два открытых подмножества плоскости.

Компонентой, или связной компонентой, множества называют его максимальное связное подмножество. В примере выше $D = D_+ \cup D_-$ состоит из двух связных компонент: D_+ и D_- .

Для открытых подмножеств комплексной плоскости (как и вообще пространства $\mathbb{R}^n$) связность равносильна понятию, определяемому в других терминах: линейной связности. Множество E называют **линейно связным**, если любую пару точек E можно соединить непрерывной кривой, лежащей в E . Иногда вместо непрерывной кривой говорят о непрерывной ломаной, то есть линии, состоящей из конечного числа прямолинейных отрезков. Для открытых $E \subseteq \mathbb{C}$ условие с ломаными также равносильно.

Понятие области в математике определяют по-разному вследствие его сложной истории и широты употребления. В комплексном анализе обычно называют **областью** любое связное открытое множество комплексной плоскости, однако мы можем ограничиваться менее общей ситуацией, описанной в следующем подразделе. Замкнутой областью при этом называют замыкание области, а не любое связное замкнутое множество; например, отрезок не подходит.

На плоскости всякая непрерывная замкнутая линия без кратных точек делит плоскость на две области (теорема Жордана). Эти две области называют **внутренней** и **внешней** по отношению к граничной линии. Внутренняя область ограничена, а внешняя — неограничена.

внутренняя п

Пример. Окружность делит плоскость на круг и внешность круга.

Усмирение границ

Делая что-либо в области, очень часто мы будем работать с её границей, поэтому целесообразно оградить себя от возможных сложностей её устройства. Граница всегда замкнута, но часто несвязна. Во-первых, потребуем, чтобы граница области состояла из конечного числа компонент $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, и назовём такую область **n -связной**. Существенно отличаются по своим свойствам области односвязные ($n = 1$) и многосвязные ($n > 1$). Во-вторых, на рисунках и в решаемых задачах компоненты границы весьма просты; предполагать их таковыми для теории необязательно, но это может облегчить усвоение.

на сфере

Если область ограничена, то потребуем, чтобы каждая компонента границы была кусочно-гладким контуром. Одна компонента является внешней границей, а остальные окружают дыры в области, при наличии оных. Это наиболее важный для нас тип.



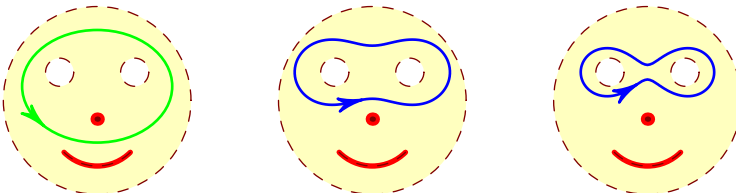
Пример. Смайлик является 5-связной областью, ибо имеет аж четыре дырки. Замыкание смайлика 3-связно, ибо исчезают две дырки с пустыми внутренностями — это прокол и разрез, о которых чуть ниже.

Если область неограничена, то лучше рассматривать её на сфере Римана. Когда $\bar{D} \neq \mathbb{C}$, поворотом сферы можно сместить проекцию D так, чтобы избежать северного полюса, то есть получить проекцию некоторой ограниченной области и потребовать кусочной гладкости компонент её границы. Однако возникает дилемма с бесконечностью: можно включать её в проекцию D , а можно не включать, причём для одних задач выгоднее первое, а для других второе.

Помимо исключения бесконечности, часто возникает необходимость исключать как отдельные точки комплексной плоскости, так и отдельные линии; **примеры** уже были даны. Значит, требования к границе области D придётся смягчить. Будем допускать конечное число точек (**проколов**) и конечное число кусочно-гладких линий (**разрезов**), лежащих во внутренности замыкания $\bar{D}$, но не в самой области D .

Гомотопия и стягиваемость

Понятие непрерывной деформации пути или контура в области тоже вводилось в векторном анализе. Формальное выражение этого следующее: две дуги $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow D$ называют **гомотопными** в области D , если существует такое непрерывное отображение $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$, что $h(t, 0) = \gamma_0(t)$ и $h(t, 1) = \gamma_1(t)$. Неформально думают о последовательности небольших шевелений дуг.



Пример. На рисунках синие контуры гомотопны друг другу, но не гомотопны зелёному: непрерывная деформация синего контура в зелёный не может миновать выколотую точку.

Особенно важен вырожденный случай, когда вместо двух дуг гомотопией в области D можно связать контур γ и постоянное отображение, образ которого состоит из единственной точки. Тогда γ называют **стягиваемым** в D .

Область односвязна тогда и только тогда, когда всякий контур в ней стягиваем. Только дыры в области мешают стягиваемости.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

2.1. КОМПЛЕКСНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

лекция 3+
20.09.23

Рабочая гипотеза

Мы хотим очертить класс функций, который будем изучать. С одной стороны, мы рассмотрели некоторые базовые функции комплексного переменного, выражающиеся простыми формулами, и отметили, в том числе с помощью картинок, а не формальных рассуждений, ряд их приятных общих свойств. Нужно найти объяснение этим свойствам и понять, какие функции ими обладают. С другой стороны, в понятие непрерывного отображения $(x, y) \mapsto (u, v)$ не заложено формирование комплексных чисел $z = x + iy$ и $w = u + iv$, без чего нельзя ожидать отмеченных приятных и полезных эффектов.

Пример. Свойством сохранения углов не могут обладать отображения

$$z = x + iy \mapsto 2x = z + \bar{z},$$

$$z = x + iy \mapsto x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z},$$

хотя бы потому, что их образы лежат на вещественной оси, а не являются двумерными областями.

Однако видели ли мы раньше $\bar{z}$ в примерах комплексных функций? Нет — и это наводит на мысль, что проблема может крыться именно в сопряжении. Появляется рабочая гипотеза: формула не должна содержать $\bar{z}$; иными словами, отображение пары (x, y) должно зависеть только от комбинации $z = x + iy$, но не от комбинации $\bar{z} = x - iy$.

Неформальная проверка по правилу цепочки

Как проверить независимость? Есть несколько путей, но все они связаны с дифференцированием. Если действовать наивно и нестрого, то формально превратим отображение пар $(x, y) \mapsto (u, v)$ в отображение $(z, \bar{z}) \mapsto w = u + iv$, выразив обратно

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

и потребуем независимости w от $\bar{z}$ в виде тождественного зануления частной производной $w_{\bar{z}}$. Все рассмотренные в первой главе примеры комплексных функций, заданных явными формулами, этот тест автоматически пройдут, ведь там нигде нет явного вхождения $\bar{z}$.

Дифференцировать по комплексной переменной здесь будем смело мы: соплёмся просто на правило цепочки для дифференцирования отображений. Оно даёт производные

$$w_{x \pm iy} = \frac{u_x + iv_x}{2} \pm \frac{u_y + iv_y}{2i} = \frac{u_x \pm v_y}{2} + i \frac{v_x \mp u_y}{2}.$$

Все четыре частных производные u_x , u_y , v_x , v_y тут вещественны, поэтому комплексное равенство $w_{x-iy} = 0$ легко распадается на два вещественных. Это даёт искомые условия

$$u_x - v_y = 0, \quad v_x + u_y = 0,$$

традиционно называемые **условиями Коши — Римана**. А по справедливости, это условия Даламбера и Эйлера, поскольку оба пришли к ним значительно раньше, причём в физических задачах.

Если эти условия выполнены, то формула для производной w_z упрощается, причём в четырёх вариантах, хотя наилучший — первый:

$$w_z = u_x + iv_x = u_x - iv_y = v_y - iv_y = v_y + iv_x.$$

На самом же деле, мы хотим и обычно будем находить производные просто по формулам, знакомым из вещественного анализа.

Пример. Для функции $w(z) = z^2$ ожидается производная $w'(z) = 2z$. Действительно, в компонентах видим $(x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, так что $u_x + iv_x = 2x + 2iy = 2z$.

Матричная форма

Другой не очень формальный способ использует матрицу Якоби отображения $(x, y) \mapsto (u, v)$, составленную из частных производных:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}.$$

Напомним сперва, что функцию $f(x)$ одной вещественной переменной называют дифференцируемой в точке $p \in \mathbb{R}$, когда при $x \rightarrow p$ выполнено соотношение

$$f(x) - f(p) = f'(p) \cdot (x - p) + o(x - p),$$

то есть главная часть приращения функции линейна, а коэффициент при ней называют производной функции в точке p . Аналогично выглядит определение дифференцируемого отображения, только в этой ситуации пары (x, y) и (u, v) записываются как векторы (столбцы), а место производной занимает матрица Якоби. Отбрасывая o -малое,

получаем дифференциал исходного отображения; это линейное отображение, задаваемое присутствующей матрицей Якоби.

Самое время вспомнить о том, что мы изучали эффект от умножения на комплексное число как линейное отображение комплексной плоскости и получили так матричную форму комплексных чисел:

$$a + ib \leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Уж коли пары (x, y) и (u, v) превращаются в комплексные величины $x + iy$ и $u + iv$, а такое же превращение случается с приращениями, естественно потребовать теперь, что и матрица Якоби, связывающая линейные части приращений, должна быть того самого вида, то есть она должна представлять комплексное число. Разумеется, это даёт те же условия $u_x - v_y = v_x + u_y = 0$.

Комплексная дифференцируемость

Комплексные функции мы обычно будем рассматривать на открытом и связном множестве $D \subset \mathbb{C}$. Сейчас достаточно открытости.

Определение. Функцию $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ называют **дифференцируемой** в точке $p \in \mathbb{C}$, если существует такое комплексное число λ , что при $z \rightarrow p$ выполнено соотношение

$$f(z) - f(p) = \lambda \cdot (z - p) + o(z - p).$$

В таком случае λ называют **производной** функции f в точке p и обозначают через $f'(p)$.

Теорема. Для функции $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексная дифференцируемость в точке $x_0 + iy_0$ равносильна выполнению в точке (x_0, y_0) двух условий на функции u и v вещественных переменных:

- (1) обе дифференцируемы;
- (2) их частные производные связаны условиями Коши — Римана.

Доказательство. Когда $f(z)$ дифференцируема в интересующей нас точке и её производная там равна $\lambda = \alpha + i\beta$, запишем приращение

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z)$$

и выделим его вещественные и мнимые части:

$$\Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = \beta\Delta x + \alpha\Delta y + o(\Delta z).$$

Эти равенства означают дифференцируемость обеих функций в вещественном смысле, причём $u_x = v_y = \alpha$ и $v_x = -u_y = \beta$ в точке (x_0, y_0) .

Обратное рассуждение: сначала запишем дифференцируемость компонент, затем наложим условия на их частные производные, затем скомбинируем два вещественных приращения в комплексное. $\square$

Практически дословное повторение доказательств из курса основ математического анализа даёт арифметические правила дифференцирования в комплексном контексте.

Упражнение. Перепишите условия Коши — Римана в полярных координатах, подставляя в них $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

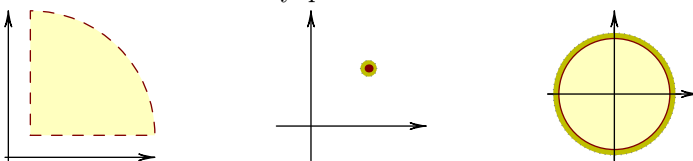
Аналитические функции

Определение. Функцию $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ называют **аналитической в области** D , если она дифференцируема в каждой точке области, и её производная является непрерывной функцией на D .

лекция 4
27.09.23

В дальнейшем выяснится, что условие на производную излишне, и это одно из чудес комплексного анализа.

Первое определение аналитичности дано на открытом множестве и не позволяет говорить об аналитичности в точке. Делать это будет можно, лишь переходя к открытому множеству, у которого интересующая нас точка является внутренней.



Определение. Функцию называют **аналитической**:

- **в точке**, если она аналитична в некоторой окрестности этой точки;
- **на множестве**, если она аналитична в каждой его точке.

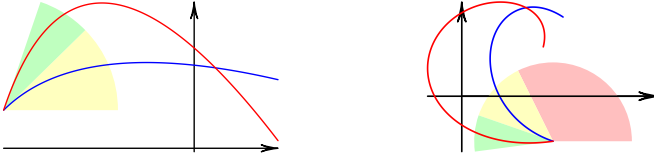
Пример. Заявив, что некая функция аналитична в замкнутом круге $|z| \leq 1$, мы на самом деле утверждаем, что она аналитична в открытом круге $|z| < 1 + \varepsilon$ для подходящего $\varepsilon > 0$.

Геометрический смысл производной

Возьмём функцию $f(z)$ аналитическую в точке p . Проведём через p гладкую линию $\gamma(t)$, причём $p = \gamma(0)$, а также её образ $f(\gamma(t))$ в плоскости зависимой переменной. Угол между касательным вектором к исходной линии в точке p и направлением положительной вещественной полуоси равен $\arg \gamma'(0)$. Аналогичный угол для образа равен

$$\arg ((f \circ \gamma)'(0)) = \arg (f'(p) \cdot \gamma'(0)) = \arg f'(p) + \arg \gamma'(0).$$

Разность между этим углом и исходным составляет $\arg f'(p)$ и не зависит от выбранной линии. Следовательно, геометрический смысл этой величины — локальный угол поворота при отображении f вблизи точки p . В частности, если мы проведём через p две линии с углом α между ними, то угол между их образами при отображении f также будет равен α , ибо они просто вместе повернутся на угол $\arg f'(p)$. Это то, что мы видели на картинках комплексных функций в первой главе, которые, как мы теперь знаем, являются аналитическими. Называют это свойство аналитических функций **консерватизмом углов**.



Также на тех картинках заметны отдельные точки, в которых углы искажаются. Где же прореха в проведённом сейчас рассуждении? Она в том, что аргумент определён только при $f'(p) \neq 0$. Инспектируя картинки, убеждаемся, что искажения происходят именно в таких точках — помимо тех, где $f'(p)$ вовсе не существует, то есть нарушена сама аналитичность.

На очереди модуль производной. В той же точке p находим

$$|f'(p)|^2 \stackrel{!}{=} u_x^2 + v_x^2 \stackrel{!}{=} u_x v_y - u_y v_x = \det \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}.$$

Выделенные переходы обеспечены условиями Коши — Римана. Как вы помните из курса основ математического анализа, определитель матрицы Якоби по модулю равен локальному коэффициенту искажения объёма, а в двумерной ситуации, конечно, площади. Здесь же мы видим, что в линейном приближении действие отображения $z \mapsto f(z)$ вблизи точки $z = p$ есть

$$z \mapsto f(p) + f'(p) \cdot (z - p).$$

Чем оно будет при условии $f'(p) \neq 0$? Это композиция растяжения либо сжатия с коэффициентом $|f'(p)|$, поворота на угол $\arg f'(p)$ и переноса. С поворотом мы уже разобрались выше другим способом, а вот первый шаг называют **постоянством растяжения**. Имеется в виду то, что коэффициент растяжения зависит только от точки p , но не от направления малого смещения из неё.

Теорема. *Отображение, осуществляемое аналитической функцией $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, обладает консерватизмом углов и постоянством растяжения во всех точках $p \in D$, где $f'(p) \neq 0$.*

Особенно важны отображения с такими свойствами во всех точках рассматриваемой области. Поскольку для каждой аналитической функции условие $f'(p) \neq 0$ исключает лишь отдельные точки, тут есть серьёзный повод для оптимизма, но необходимо хорошее знакомство с конкретными функциями. Когда накопится инструментарий и появится возможность, мы рассмотрим некоторые приложения.

Определение. Взаимно-однозначное отображение $f: D \rightarrow D^*$ областей, обладающее консерватизмом углов и постоянством растяжения во всех точках области D , называют **конформным**.

Пример. Производная знакомой нам дробно-линейной функции

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

отлична от нуля во всех конечных точках, поэтому w осуществляет конформное отображение области $D = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ на область $D^* = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. Эти точки выброшены, ибо $w(-d/c) = \infty$ и $w(\infty) = a/c$. Углы на самом деле сохраняются и в них, если должным образом определить угол между линиями на бесконечности.

Можно сказать, что дробно-линейные преобразования осуществляют конформные отображения сферы Римана на себя.

2.2. ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ И ВЕТВЛЕНИЕ

Локальная обратимость

В одномерном вещественном анализе теорема о локальной обратимости утверждает, что отличие от нуля производной гладкой функции в точке достаточно для существования гладкой обратной функции в некоторой окрестности образа этой точки. Место производной в мно-

гомерном аналоге занимает якобиан. В нашем комплексном аналоге, ведь он одномерен в комплексном смысле, должна быть комплексная производная, причём мы уже знаем связь её модуля с якобианом.

Теорема. Если функция f аналитична в точке p и $f'(p) \neq 0$, то:

- (1) она осуществляет конформное отображение $U \rightarrow f(U)$ некоторых окрестностей $U \ni p$ и $f(U) \ni f(p)$;
- (2) функция f^{-1} аналитична на $f(U)$ и даёт обратное конформное отображение $f(U) \rightarrow U$.

Доказательство. Сперва заметим, что наложенное условие на производную функции $f = u + iv$ равносильно невырожденности якобиана,

$$f'(x_0 + iy_0) \neq 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} (x_0, y_0) \neq 0,$$

которая позволяет нам применить двумерную вещественную версию теоремы. Она гарантирует наличие такой окрестности U^* точки p и соответствующей окрестности $V^* = f(U^*)$ точки $f(p)$, что отображение $f: U^* \rightarrow V^*$ является диффеоморфизмом — то есть оно взаимно-однозначное, а не только гладкое, и обратное ему отображение также гладкое. Значит, функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ гладкие, иными словами — непрерывно дифференцируемые. Теперь перейдём к утверждениям.

(1) В силу непрерывности функции $f'(z)$, она отлична от нуля не только в самой точке p , но и на некоторой её окрестности $U \subseteq U^*$, где [предыдущая теорема](#) даёт искомую конформность.

(2) Матрицы Якоби отображений $(x, y) \mapsto (u, v)$ и $(u, v) \mapsto (x, y)$ в соответствующих точках обратны друг другу. Первой из этих матриц условия Коши — Римана везде придают вид

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица к невырожденной матрице такого вида тоже будет такого вида, но с другими элементами. Поэтому условия Коши — Римана для гладких функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ выполнены на области $f(U)$, и по [первой теореме](#) этого раздела функция $x + iy$ комплексно дифференцируема во всех её точках, так что аналитична. $\square$

Следствие. Для производной обратной функции пригодна формула

$$(f^{-1})'(f(p)) = 1/f'(p)$$

из одномерного вещественного анализа.

Области однолиственности

В одномерном анализе локальная обратимость гладкой функции во всех точках промежутка влечёт её обратимость на всём промежутке. В многомерном анализе такого уже нет: случается «неудача глобализации», причём один из простейших примеров её получается как раз из комплексной функции.

Пример. Производная функции $f(z) = z^2$ нигде не равна нулю в области $z \neq 0$, притом $f(z) = f(-z)$, и глобальной обратимости нет.

На картинках простых аналитических функций, которые мы видели в первой главе, совсем немного точек зануления производной. Метод цветных областей делает их достаточно заметными: помимо кратных нулей, это седловины. Ещё заметнее области, окрашенные одинаково. Кроме дробно-линейных отображений, мы ещё не встречали иных, где бы повторов не было. Значит, неудача глобализации — вещь типичная.

Для большинства аналитических функций актуальна следующая задача: выделить из области определения функции f такую область D , для которой отображение $f: D \rightarrow f(D)$ взаимно-однозначно, то есть повторяющихся значений не принимает. Тогда D называют **областью однолиственности** для f . Ясно, что решение единственно только тогда, когда функция однолистна на всей области определения.

Пример. Функция $f(z) = z^2$ однолистна на любой открытой полуплоскости $\alpha < \operatorname{Arg} z < \alpha + \pi$.

Пример. Функция $f(z) = z^n$ с целым $n \neq 0$ однолистна на любом открытом секторе $\alpha < \operatorname{Arg} z < \alpha + 2\pi/n$.

Пример. Функция Жуковского однолистна на областях: круг $|z| < 1$; внешность круга $|z| > 1$; полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$.

Пример. Функция $f(z) = e^z$ однолистна на любой открытой полосе $b < \operatorname{Im} z < b + 2\pi$.

Пример. Функции $\cos z$, $\sin z$ однолистны на любой открытой полосе $b < \operatorname{Re} z < b + 2\pi$, $\operatorname{Im} z > 0$. Аналогичные полуплоскости берут в нижней полуплоскости. При этом параллельные полосы шириной π , бесконечные в обе мнимые стороны, пригодны не любые: такая полоса не должна включать никакую линию $\operatorname{Re} z = \pi k$ с целым k .

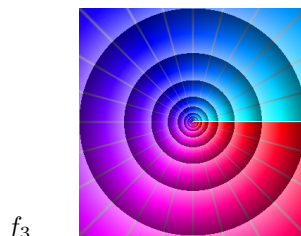
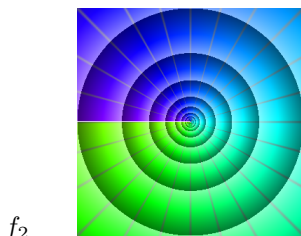
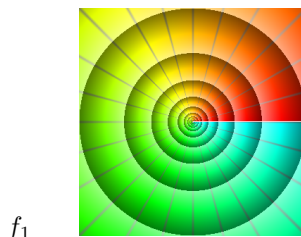
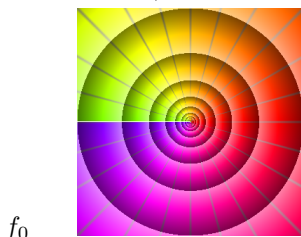
Ветви корня

Для функции $w(z) = z^2$ очень хочется иметь обратную функцию $z(w) = \sqrt{w}$, но указать её однозначно нельзя, поскольку квадратный корень почти всегда имеет два значения; исключения составляют точки $w \in \{0, \infty\}$. Корень является **многозначной** функцией. В вещественном анализе проблему решают выбором положительного либо отрицательного значения корня, но в комплексной ситуации сложнее, и она тесно связана с выбором области однолиственности.

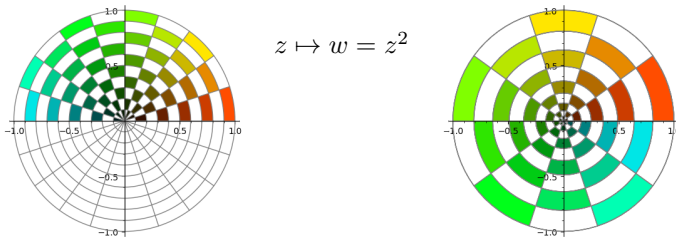
Рассмотрим для начала четыре области однолиственности:

$$D_k = \{z \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z - \frac{\pi k}{2} < \frac{\pi}{2}\}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

то есть правую, верхнюю, левую и нижнюю полуплоскости. Ни к одной из них нельзя добавить внутренних точек без потери однолиственности, ибо образом каждой является вся плоскость без луча $A_k = w(\partial D_k)$, причём $A_0 = A_2$ и $A_1 = A_3$. Определим четыре однозначные обратные функции $f_k: \mathbb{C} \setminus A_k \rightarrow D_k$.



Их называют **однозначными ветвями** функции $z = \sqrt{w}$. Для каждого луча есть выбор из двух ветвей, но прежде всего **есть выбор** самого луча для разреза — и не только из этих двух, но **любого** луча, соединяющего точки 0 и ∞ . На картинках по методу цветных областей разрезы (обычно) хорошо видны благодаря скачку оттенка. При острой необходимости разрез можно делать по другим линиям с теми же концами.



Теперь картинка по методу образов. Поскольку $\arg z^2 = 2 \arg z$, половина кольца плоскости z растягивается в целое кольцо плоскости w . Вторая половина того же кольца покрывает тот же образ второй раз. Можно воспользоваться третьей размерностью, чтобы не совмещать образы на плоскости w , разнося их на условно выбранные высоты. Полученная поверхность позволяет изобразить вместе все однозначные ветви обратной функции $\sqrt{w}$ и потому удобна для представления её устройства: её **риманова поверхность**. Построение по шагам:

- (1) два оборота винтовой поверхности;
- (2) отождествление точек над $w = 0$, а также над $w = \infty$;
- (3) склеивание оставшегося разреза от $w = 0$ до $w = \infty$.

Поскольку это лишь способ представить в трёхмерии поверхность, естественным образом лежащую в четырёхмерном пространстве, линии её самопересечения иллюзорные. Ветви могут свободно проходить друг сквозь друга при изменении относительных высот участков. Картинку по методу цветных областей тогда можно понимать как взгляд сверху, показывающий одну ветвь — в этот момент «верхнюю». Линия иллюзорного самопересечения римановой поверхности соответствует разрезу, который можно свободно перемещать, фиксируя лишь его концы в точках 0 и ∞ .

Эти две точки принадлежат замыканию каждой ветви и называются **точками ветвления** функции $\sqrt{w}$. Совершая на римановой поверхности однократный обход вокруг любой точки $w_0 \notin \{0, \infty\}$ в достаточно малой её окрестности, мы возвращаемся на исходную ветвь. Для точки ветвления это не так, что и берут в качестве определения.

Совершенно аналогичным образом устроена многозначная функция $z = \sqrt[n]{w}$, обратная к функции $w = z^n$ с целым $n > 1$. Для любого угла α лучи $\arg z = \alpha + 2\pi k/n$ разбивают плоскость на n областей однолиственности функции z^n , и можно выделить n различных однозначных ветвей функции $z = \sqrt[n]{w}$, определённых на дополнении луча $\arg w = n\alpha$. **Риманова поверхность** тут состоит из n листов, склеенных по кругу.

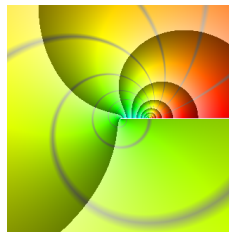
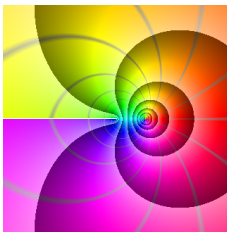
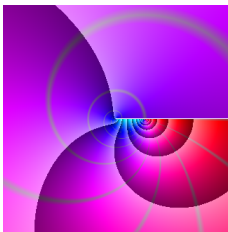
Ветви логарифма

Для функции $w(z) = e^z$ очень хочется иметь обратную функцию $z(w) = \operatorname{Ln} w$, но указать её однозначно нельзя, поскольку логарифм почти всегда имеет бесконечное множество значений; исключения составляют точки $w \in \{0, \infty\}$. Логарифм является бесконечнозначной функцией ввиду периодичности экспоненты: $e^z = e^{z+2\pi i k}$ для целых k . Поэтому для $w \notin \{0, \infty\}$ полагают

$$\operatorname{Ln} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w.$$

При обходе вокруг точки $w = 0$ набирается приращение аргумента 2π и тем самым совершается переход на другую ветвь, как бы ни были выбраны ветви. Чтобы получить риманову поверхность логарифма, нужно взять всю винтовую поверхность с бесконечным числом витков и отождествить точки над $w = 0$ и (отдельно) над $w = \infty$. Впрочем, часто встречаются изображения **без отождествления**.

Для выделения однозначных ветвей логарифма чаще всего проводят разрез по отрицательной вещественной полуоси. Главная ветвь $\ln w = \ln|w| + i \arg w$ соответствует главному значению аргумента: $|\arg w| < \pi$. На самом разрезе используются разные предельные значения: $\arg w = \pi$ на верхнем берегу, $\arg w = -\pi$ на нижнем берегу. Отрисована главная ветвь (по центру) и две соседние ветви со сдвигом области значений на $\pm\pi i$. При удалении от главной ветви картинка логарифма по методу цветных областей беднеет.



Пример (парадокс Бернулли). Для $z \neq 0$ запишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}((-z)^2) &= \operatorname{Ln}(z^2), \\ \operatorname{Ln}(-z) + \operatorname{Ln}(-z) &= \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z, \\ 2 \operatorname{Ln}(-z) &= 2 \operatorname{Ln} z, \\ \operatorname{Ln}(-z) &= \operatorname{Ln} z. \end{aligned}$$

Последнее равенство неверно, ибо $\operatorname{Arg}(-z) = \operatorname{Arg} z + \pi$.

Упражнение. На каком шаге совершена ошибка?

Полезно также представить себе римановы поверхности функций $\sqrt[n]{w}$ и $\operatorname{Ln} w$ не над комплексной плоскостью, а над сферой Римана. Равенство $e^{-z} = 1/e^z$ влечёт $\operatorname{Ln}(1/w) = -\operatorname{Ln} w$, а это симметрия на сфере. Листы логарифма бесконечно наматываются на сферу, кружась вокруг оси через точки ветвления, находящиеся в северном и южном полюсах сферы. Разрез, необходимый для выделения однозначных ветвей, логично проходит по меридиану.

Для корня степени n картина похожая, с той разницей, что после n оборотов значение корня оказывается на первоначальной ветви. Такие точки ветвления называют **алгебраическими** порядка $n - 1$ при дополнительном условии наличия предела функции. Точки ветвления как у логарифма внезапно называют **логарифмическими**.

Выделение однозначных ветвей

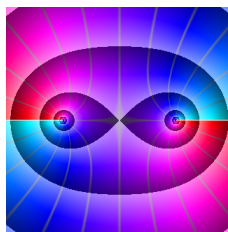
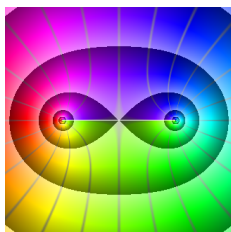
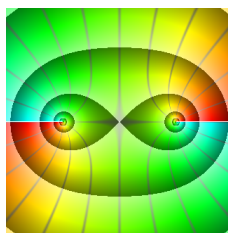
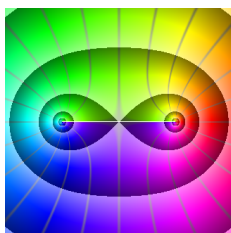
Многозначность комплексных функций приносит немало сюрпризов, поэтому о ней всегда необходимо помнить. С этим связаны задачи представления римановой поверхности и выделения однозначных ветвей. Первая сложнее, и в ней мы продвинемся меньше.

Определение. Функция f допускает выделение однозначной аналитической ветви:

- (1) в области D , если существует такая однозначная аналитическая в D функция g , что для каждой точки $z \in D$ значение $g(z)$ лежит во множестве значений $f(z)$ в той же точке;
- (2) вблизи точки p , если в качестве области D годится некоторая выколота окрестность точки p .

При выделении однозначных ветвей вблизи точки использование выколотой окрестности позволяет работать с функциями, в самой этой точке не определёнными.

Для выделения однозначных ветвей многозначной функции в некоторой области D необходимо запретить все обходы вокруг точек ветвления, приводящие к значениям функции, отличным от первоначального, то есть переводящие на другие листы римановой поверхности, которую мы при этом толком можем и не представлять. Этого достигают, разрезая D по линиям, соединяющим точки ветвления.

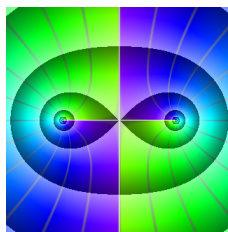
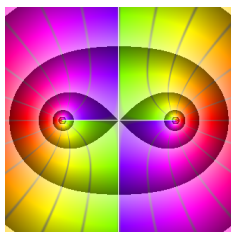


Пример. Изучим функцию $z(w) = \sqrt{w^2 - 1}$. Выражение под корнем зануляется в двух точках $w = \pm 1$. Выражение под корнем не играет роли, а другой делает функцию похожей на $\sqrt{w}$. При обходе вокруг одной из этих точек $\arg z$ прирастает на π . Значит, $w = \pm 1$ это точки ветвления.

Видится два наиболее естественных способа соединить эти точки разрезом, а именно — выбросить подмножества вещественной оси:

- (1) отрезок $[-1, 1]$;
- (2) интервалы $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$.

На сфере Римана это симметричные половины меридиана. В обоих способах разрез разделяет риманову поверхность на две однозначные ветви. Любопытно отметить, что при одном разрезе обе ветви — нечётные функции, а при другом они обе чётные. У нечётных замыкание образа покрывает всю плоскость переменной z , а у чётных половину.

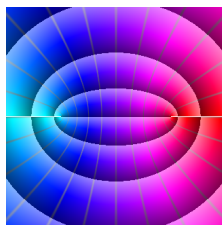
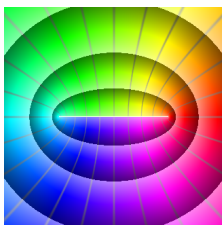
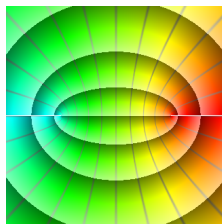
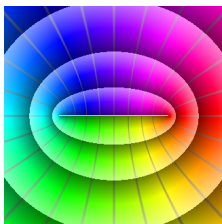


Поэтому рисунки нечётных ветвей (левые) несут все оттенки, а рисунки чётных — лишь половину гаммы. Нечётные ветви аналитичны вблизи бесконечности, где ведут себя подобно функциям $z = \pm w$, то есть однозначным ветвям функции $z = \sqrt{w^2}$.

Если же подойти к этой задаче, зная лишь о ветвях функции $\sqrt{w}$, скажем, соответствующих наиболее естественному разрезу по отрицательной вещественной полуоси, то результат для $\sqrt{w^2 - 1}$ будет хуже: разрез получится крестообразным, а каждая ветвь также чётна и покрывает половину плоскости z , опять же половину гаммы.

Пример. Двухзначная функция $z(w) = w + \sqrt{w^2 - 1}$ является обратной к функции Жуковского.

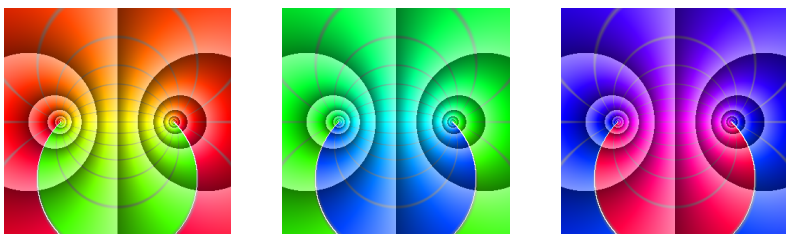
Упражнение. Проверьте это и определите образы двух отрисованных ниже пар ветвей при таких же разрезах, как в предыдущем примере. Объясните поведение $|z(w)|$ на мнимой оси.



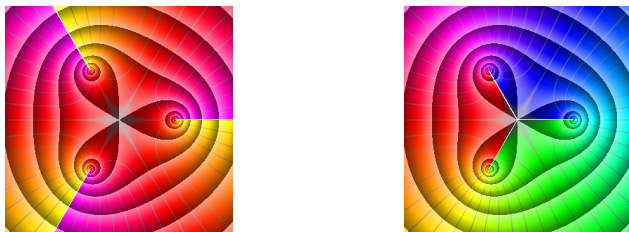
Пример. Кроме точек ветвления $w = \pm 1$, трёхзначная функция

$$z(w) = \sqrt[3]{\frac{w-1}{w+1}}$$

допускает выделение однозначных ветвей вблизи любой точки расширенной комплексной плоскости, включая точку $w = \infty$, где каждая из ветвей стремится к одному из кубических корней из единицы.



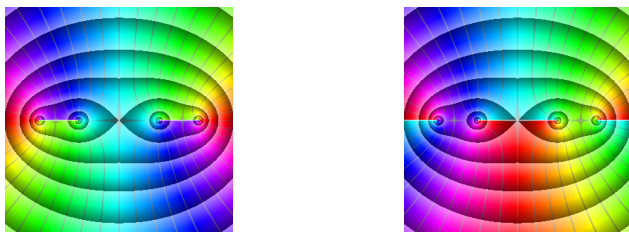
Пример. Трёхзначная функция $z(w) = \sqrt[3]{1-w^3}$ имеет три точки ветвления: кубические корни из единицы $1, \epsilon, \epsilon^2$. При обходе каждой из них $\arg z$ прирастает на $2\pi/3$. Для выделения однозначных ветвей необходим разрез, соединяющий все три точки. Отрисованы два подходящих варианта — наиболее симметричные. Один даёт аналитические ветви вблизи точки $w = 0$, а другой вблизи $w = \infty$. В каждом комплекте ветви получаются друг из друга умножением на ϵ , на картинках дающим такой же поворот гаммы, как в предыдущем примере, поэтому теперь приведено по одной ветви из комплекта.



Пример. Четыре точки ветвления имеет двузначная функция

$$z(w) = \sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)},$$

где $0 < k < 1$. Для выделения однозначных ветвей достаточно соединить их двумя разрезами. На картинках $k = 1/2$.



До сих пор, во всех примерах этого подраздела корень степени n извлекается из полиномиальной или рациональной функции, степень которой кратна n , поэтому точки ветвления исчерпываются нулями и полюсами подкоренной функции. В противном случае ветвление также происходит на бесконечности. Это видно по приращению аргумента при обходе по окружности достаточно большого радиуса.

Упражнение. Рассмотрите функцию $z(w) = \sqrt[3]{w^2 - 1}$.

Общая степенная функция

Степенную функцию $w(z) = z^\lambda$ с произвольным комплексным показателем λ определяют как

$$z^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Ln} z}.$$

Поскольку логарифм многозначен, в общем случае и степенная функция многозначна. Характер её зависит от λ интересным образом. Однозначна она лишь при целых λ .

При рациональных $\lambda = m/n$, где дробь несократима, то есть m и n взаимно просты, видим

$$w^n = e^{m \operatorname{Ln} z} = z^m \quad \Rightarrow \quad w(z) = \sqrt[n]{z^m}.$$

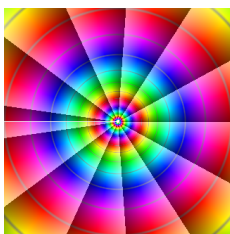
Для сократимых дробей запись через корень некорректна, ведь если $\operatorname{НОД}(m, n) = d > 1$, то $\sqrt[n]{z^m}$ состоит из d функций, в том числе $z^{m/n}$, а остальные отличаются от неё сдвигом фазы.

Пример. Функция $\sqrt[4]{z^2}$ состоит из двух двучленных: $\sqrt{z}$ и $i\sqrt{z}$.

После n обходов вокруг точки ветвления $z = 0$ значение функции $z^{m/n}$ возвращается к первоначальному; значит, при рациональных показателях логарифмическое ветвление схлопывается в алгебраическое.

При $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ бесконечное множество $\lambda \operatorname{Arg} z = \lambda \operatorname{Im} \operatorname{Ln} z$ не содержит пары чисел, разность между которыми кратна 2π , поэтому значения экспоненты от всех его элементов попарно различны. В итоге z^λ остаётся бесконечнозначной функцией с логарифмическими точками ветвления $z = 0$ и $z = \infty$.

При $\operatorname{Im} \lambda = 0$ картинка функции z^λ очень похожа на картинку в рациональном случае: те же окружности постоянного модуля и лучи постоянного аргумента. Отличие иррациональных от рациональных лишь в величине искажения угла в начале координат и приращении $\arg z^\lambda$ при переходе с ветви на ветвь.



Примеры. Отрисованы ветви двух степенных функций, полученные из главной ветви логарифма: слева z^{4i} , справа z^{2+2i} .

При $\operatorname{Re} \lambda = 0$ фактически меняются ролями вещественная и мнимая части логарифма. Соответственно, на картинке по методу цветных областей как бы меняются местами окружности и лучи.

При $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ и $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ картинка **любопытнее**: вместо окружностей и лучей видны логарифмические спирали.

Упражнение. Для функции $w = z^{a+ib}$ напишите через z уравнения линий $|w| = \text{const}$ и $\operatorname{Arg} w = \text{const}$.

2.3. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

лекция 5
04.10.23

Арктангенс

Тангенс это композиция экспоненты и дробно-линейной функции:

$$w(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

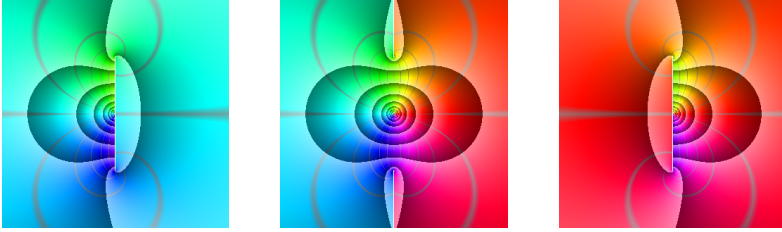
Поэтому обратная функция является композицией дробно-линейной функции и логарифма. Полагая $q = e^{2iz}$, видим

$$w = -i \cdot \frac{q - 1}{q + 1} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1 + iw}{1 - iw}.$$

Получаются выражения для арктангенса:

$$z(w) = \operatorname{Arctg} w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iw}{1 - iw} = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i + w}{i - w}.$$

Преобразование $w \mapsto q$ дробно-линейное, а на сфере Римана это просто поворот. Выходит, что с точностью до постоянной арктангенс это «повёрнутый» логарифм. Это позволяет сразу понять устройство его римановой поверхности, в частности точки ветвления и разрезы, удобные для выделения однозначных ветвей. Точкам ветвления ло-



гарифма $q = 0$ и $q = \infty$ соответствуют точки ветвления арктангенса $w = \pm i$, а разрезы удобно делать по мнимой оси либо через $w = 0$, либо через $w = \infty$. Во втором варианте есть главная ветвь, продолжающая главную ветвь вещественной функции $\arctg x$. Ветви отличаются друг от друга прибавлением или вычитанием периода тангенса, то есть π , целое число k раз. Как и у логарифма, при росте $|k|$ картинка по методу цветных областей беднеет. Главная ветвь в центре. Образами однозначных ветвей в двух указанных вариантах являются полосы

$$0 < \operatorname{Re} z - \pi k < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z - \pi k < \frac{\pi}{2}.$$

Упражнение. Проверьте последнее утверждение про образы.

Если представлять риманову поверхность логарифма винтовой поверхностью, то риманову поверхность арктангенса можно описать как пару параллельных винтов противоположного кручения.

Арккотангенс

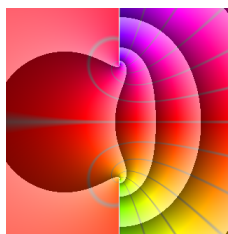
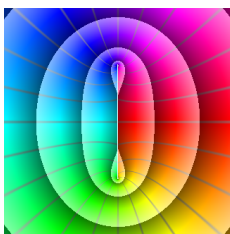
Обратная функция к котангенсу получается аналогично арктангенсу с минимальными модификациями:

$$z(w) = \operatorname{Arcctg} w = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{w - i}{w + i}.$$

Точки ветвления здесь тоже $w = \pm i$, таковы же и удобные разрезы — по мнимой оси. Самая симметричная ветвь аналитична на бесконечности (левый рисунок), но главной принято считать другую (правый рисунок), чтобы распространить равенство $\arctg x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2$ на комплексные функции без изменений. Тогда равенство

$$\operatorname{Arcctg} w + \operatorname{Arcctg} w = \frac{\pi}{2}$$

означает, что выбор ветви одной из функций диктует выбор другой.



Арккосинус

Косинус это композиция экспоненты и функции Жуковского:

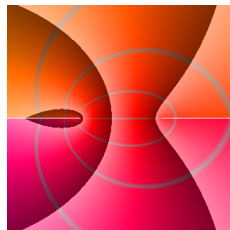
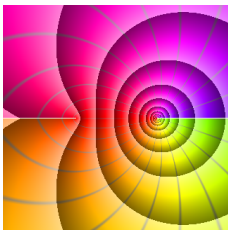
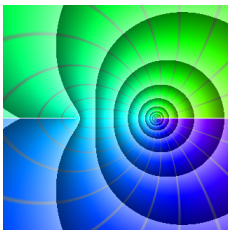
$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = J(e^{iz}).$$

Поэтому обратная функция является композицией **обратной к функции Жуковского** и логарифма:

$$z = \operatorname{Arccos} w = -i \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1}).$$

Два значения $w + \sqrt{w^2 - 1} = t$ здесь дают числа, произведение которых равно 1, а потому их логарифмы противоположны. Исключениями являются точки, в которых $t = \pm 1$, то есть $w = \pm 1$. Это две точки ветвления арккосинуса, причём алгебраические первого порядка — значит, типа квадратного корня. При обходе вокруг обеих по эллипсу с фокусами в них значение t обойдёт вокруг нуля, и тем самым значение z получит приращение 2π . Эллипс при этом можно выбирать сколь угодно большой. Это показывает, что $w = \infty$ также является точкой ветвления арккосинуса, причём логарифмического типа. Над ней лежат значения $t = 0$ и $t = \infty$, так что две логарифмических точки ветвления склеены. Других точек ветвления у арккосинуса нет.

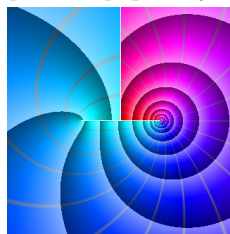
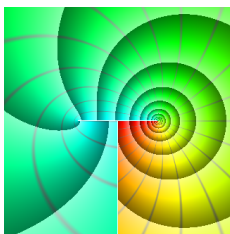
Наиболее естественный разрез для выделения однозначных ветвей арккосинуса представляется провести между точками $w = \pm 1$ через бесконечность. Косинус **отображает** линии $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = \pi$ именно



в лучи $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ вещественной оси, этот разрез составляющие. Образами соответствующих однозначных ветвей f_k арккосинуса являются полосы $0 < \operatorname{Re} z - \pi k < \pi$. Отрисованы ветви с $k \in \{-1, 0, 1\}$. Первые две дают противоположные значения, ожидаемые ввиду чётности косинуса.

Упражнение. Отслеживая предельные значения ветвей на берегах разреза, установите правило их склеивания в риманову поверхность.

Полуполосам однолиственности косинуса $0 < \operatorname{Re} z - \pi(k - 1/2) < 2\pi$, $\operatorname{Im} z > 0$ либо $\operatorname{Im} z < 0$ соответствуют разрезы в форме буквы T .



Арксинус

Синус это тоже композиция экспоненты и функции Жуковского,

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = J(-ie^{iz}),$$

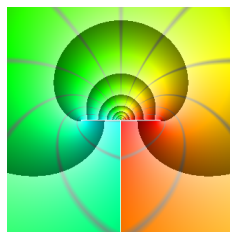
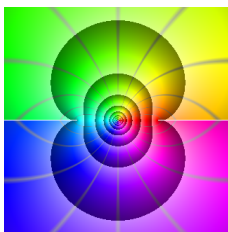
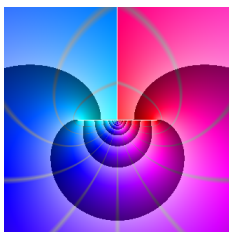
и выражение арксинуса очень похоже на выражение арккосинуса:

$$z = \operatorname{Arcsin} w = -i \operatorname{Ln} i(w + \sqrt{w^2 - 1}).$$

Аналогично арктангенсу и арккотангенсу, выбор ветвей здесь завязан на равенство

$$\operatorname{Arcsin} w + \operatorname{Arccos} w = \frac{\pi}{2},$$

но ввиду нечётности функции $\sin z$ среди ветвей арксинуса есть более симметричные, чем у арккосинуса.



Самая симметричная ветвь является **аналитическим продолжением** главной ветви вещественной функции $\arcsin x$. Укажем области значений трёх отрисованных ветвей:

- слева: полуполоса $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z < 0$;
- в центре: полоса $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$;
- справа: полуполоса $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0$.

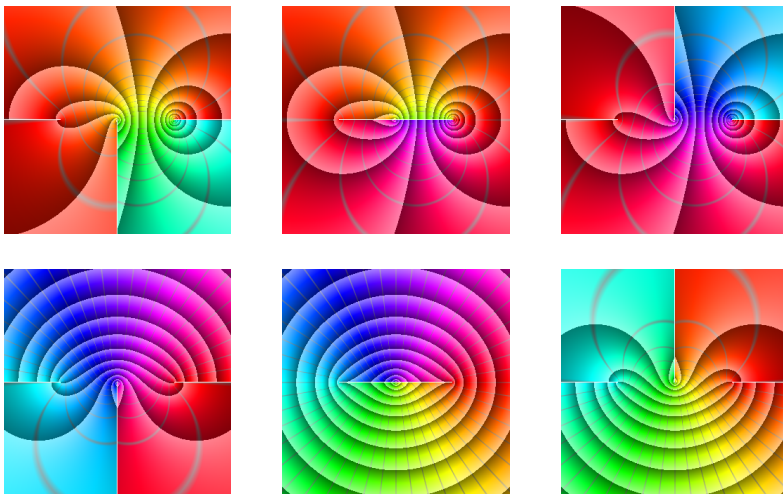
На левом и правом рисунках разрезы проходят через точку $w = 0$ в соответствии с тем, что точка $z = 0$ лежит на границах полуполос. Стремление $w \rightarrow 0$ на других берегах разрезов даёт предельные значения $z \rightarrow \pm\pi$.

Упражнение. *Отслеживая предельные значения ветвей на берегах разреза, установите правило их склеивания в риманову поверхность.*

Арксеканс и арккосеканс

Даже в вещественном анализе функции секанс и косеканс теперь редко называют своими именами, вместо того используя расшивровки $1/\cos x$ и $1/\sin x$. Обратные им функции получаются из $\operatorname{Arccos} x$ и $\operatorname{Arcsin} x$ подстановкой $1/x$ на место x .

В комплексном случае ограничимся картинками. По сравнению с $\operatorname{Arccos} w$ и $\operatorname{Arcsin} w$, здесь меняются местами окрестности нуля и бесконечности. Поэтому выбору полосы в качестве образа соответствует разрез по отрезку $[-1, 1]$, а выбору полуполосы — три разреза, идущих



щих в бесконечность по полуосям из точек $w \in \{-1, 0, 1\}$. Три разных предельных значения на берегах разреза в точке стыка, отмеченные выше для $\operatorname{Arcsin} w$, теперь видны по поведению в углах окна.

Обратные гиперболические функции

Связи гиперболических функций с экспонентой аналогичны такому для тригонометрических, но формулы полностью вещественные. Поэтому формулы для обратных гиперболических функций (ареасинус и т.д.) совпадают с вещественными и очень похожи на полученные выше для обратных тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arch} w &= \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1}), & \operatorname{Arth} w &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \\ \operatorname{Arsh} w &= \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 + 1}), & \operatorname{Arcth} w &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}. \end{aligned}$$

Картинки по методу цветных областей отличаются лишь поворотами в обеих плоскостях: для w это даёт общий поворот рисунка, а для z поворот оттенка.

2.4. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

Интеграл по дуге

Всякое интегрирование устроено как суммирование с предельным переходом, однако здесь нам нет нужды в это вдаваться. Определение комплексного интегрирования, то есть интеграла

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

от функции комплексной переменной по дуге (кусочно-гладкой ориентированной кривой) на комплексной плоскости, легко сводится к криволинейным интегралам, известным вам с первого курса.

Для этого распишем сперва вещественные и мнимые части и независимой, и зависимой переменных, затем соберём вещественные и мнимые части подынтегрального выражения:

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy).$$

Искомый интеграл превратится в сумму двух криволинейных. Суммы Римана и предельный переход там внутри. Нам достаточно знать, что интеграл по дуге от непрерывной на ней функции всегда существует.

Для вычислений совсем не обязательно поступать так. Криволинейные интегралы вычисляются не напрямую, а сводятся к обычным с помощью параметризации кривой. Таким же образом можно сводить комплексные интегралы к обычным, минуя криволинейные. Представив дугу γ как образ отрезка $[a, b]$ вещественной прямой при отображении $t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$, получим обычный интеграл

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Из теории криволинейных интегралов известно, что результат не зависит от параметризации. Важно только помнить об ориентации дуги: при прохождении её во встречном направлении интеграл меняет знак.

Пример. Вычислим интеграл от функции $1/z$ по окружности C радиуса r с центром в нуле. Параметризуем окружность аргументом:

$$z = re^{i\phi} \Rightarrow dz = r d(e^{i\phi}) = ire^{i\phi} d\phi \Rightarrow \frac{dz}{z} = i d\phi.$$

При обходе окружности аргумент прирастает на 2π , поэтому

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

независимо от радиуса окружности.

Пример. Вычислим интеграл от функции $(z - p)^n$ по окружности радиуса r с центром в точке p , где число n целое. Параметризуем:

$$z = p + re^{i\phi} \Rightarrow (z - p)^n dz = ir^{n+1} e^{i(n+1)\phi} d\phi.$$

При $n = -1$ получим тот же интеграл, что и в предыдущем примере. При $n \neq -1$ находим значение интеграла через первообразную:

$$\oint_{|z-p|=r} (z - p)^n dz = \left[\frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)\phi} \right]_0^{2\pi} = \dots = 0.$$

Общие свойства комплексного интеграла

Первые общие свойства легко, но занудно выводятся либо напрямую из определений, либо из связи с криволинейными интегралами.

(1) **Линейность:**

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k f_k(z) \right) dz = \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\lambda_k \int_{\gamma} f_k(z) dz \right)$$

для любых комплексных постоянных λ_k ;

(2) **аддитивность:** если дуга Γ состоит из дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{1 \leq k \leq n} \int_{\gamma_k} f(z) dz;$$

(3) **оценка:** если длина дуги γ равна L и $|f(z)| \leq M$ на ней, то

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq LM.$$

Оценка интеграла очень часто применяется в рассуждениях. По сути это версия интегрального неравенства, обобщающего неравенство треугольника. В моих лекциях по основам математического анализа такие шаги отмечены нестандартным для анализа значком $\leqslant$; он будет удобен и в этом конспекте.

Теорема Коши

Познакомимся теперь с центральной теоремой комплексного анализа. Пока это первая версия, а впереди ряд обобщений.

Теорема. Если однозначная функция f аналитична в замыкании $\overline{D}$ ограниченной односвязной области, то

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

контур

Слабое доказательство. Отдельно запишем вещественную, с минусом для красоты, и мнимую части интеграла и применим формулу Грина (Коши знал её раньше), известную вам из векторного анализа:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} v dy - u dx &= \iint_D (v_x + u_y) dx dy, \\ \oint_{\partial D} v dx + u dy &= \iint_D (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

Функции $v_x + u_y$ и $u_x - v_y$ тождественно равны нулю на D : это в точности условия Коши — Римана. $\square$

Слабость этого простого доказательства спрятана в **определении** аналитической функции. Именно ради него туда вошло требование непрерывности производной, ведь формула Грина нуждается в нём. Это не проблема для конкретных функций, что позволит нам легко перейти к многочисленным полезным приложениям. Однако вскоре на этом пути захочется установить, что производная аналитической

функции всегда аналитическая на той же области; непрерывность её станет следствием. Это тоже будет приложением теоремы Коши, но во избежание логического круга для неё потребуется «сильное» доказательство, не требующее непрерывности производной.

Следствие. Если однозначная функция f аналитична в односвязной области D , то равен нулю её интеграл по любому контуру в D .

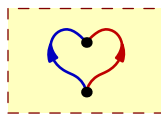
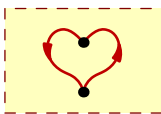
Доказательство. Всякий контур в D является границей некоторой односвязной области D^* . Односвязность области D влечёт $D^* \subset D$. Теорема Коши применима к D^* в роли D . $\square$

Следствие. Если однозначная функция f аналитична в области D , то равен нулю её интеграл по любому стягиваемому контуру в D .

Доказательство. Накладывавшееся ранее требование односвязности области D означает стягиваемость в ней всякого контура. Отказавшись от этого, но требуя стягиваемости конкретного контура $\gamma \subset D$, мы как раз говорим, что $\gamma = \partial D^*$ и $D^* \subset D$. Теорема Коши применима к D^* в роли D . $\square$

Непрерывная деформация дуги в области

Следствие. Если однозначная функция f аналитична в односвязной области D , то её интеграл по любой дуге в D зависит не от самой дуги, а только от её концов.



Доказательство. Приём дословно повторяет то, что вы видели в векторном анализе. Из двух дуг γ_1 и γ_2 с общими началами и концами (и без других общих точек) составим контур $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$, поменяв ориентацию второй дуги. В силу аддитивности интеграла, утверждение равносильно теореме Коши для Γ . $\square$

Пример. В двусвязной области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ возьмём две дуги: единичную окружность C и её отражение C' относительно точки $z = 1$. Считаем, что обе дуги начинаются и оканчиваются в этой точке. Функция $f(z) = 1/z$ аналитична в D , но её интегралы по C и C' различны.

В неодносвязных областях тоже хочется выбирать дуги поудобнее. Для сохранения зависимости интеграла не от дуги, а лишь от концов, нужно ограничить возможные преобразования дуг **непрерывной деформацией**, не покидающей области. Проблема в примере выше именно в том, что окружности C и C' не гомотопны в области.

Пример. Кольцо $D = \{z: a < |z| < b\}$ является двусвязной областью. Его граница состоит из двух окружностей C_a и C_b . Связывающую их гомотопию легко устроить, непрерывно меняя радиус.

Следствие. Если в области D гомотопны две дуги с совпадающими началами и концами, то интегралы по ним от всякой однозначной функции, аналитической в D , равны.

Следствие. Если два контура в области D , из которых один лежит внутри другого, вместе образуют границу подобласти $D^* \subset D$, то интегралы по ним от любой аналитической в D функции f равны при одинаковых направлениях прохождения.

Многосвязные области и составные контуры

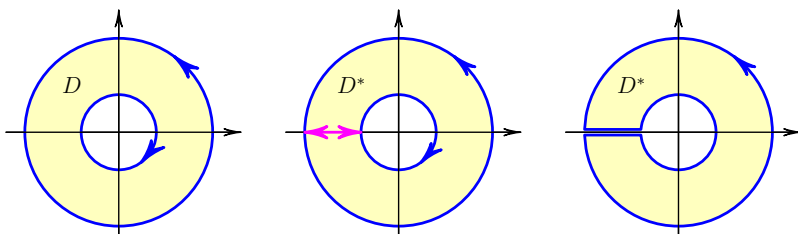
Пример. Теперь разрежем кольцо D из предыдущего примера вдоль отрезка γ отрицательной вещественной оси. Тогда $D^* = D \setminus \gamma$ является односвязной областью. Помимо двух окружностей, её граница Γ включает отрезок γ , фиолетовый на рисунке; при обходе Γ этот отрезок проходится дважды, причём в противоположных направлениях.

Когда мы не просто ходим, а при этом интегрируем однозначную аналитическую функцию на $\overline{D}$, вклады от двух проходов по γ сокращаются. Значит, по теореме Коши для области D^* получим

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{C_a} f(z) dz + \oint_{C_b} f(z) dz = 0.$$

Здесь мы считаем, что обе окружности проходятся так, что область D^* остаётся слева, поэтому C_a проходится по часовой стрелке, а C_b против часовой стрелки. Если же проходить окружности в одинаковых направлениях, то интегралы по ним окажутся равны.

Двукратное прохождение разреза в противоположных направлениях типично при интегрировании; на рисунках его показывают, чуть отступая от берегов разреза, как здесь на правом рисунке (можете уве-



личить изображение). Для многозначных функций такой фокус даст новые вычислительные средства, но о них позже.

Теперь возьмём многосвязную область, ограниченную внешним контуром γ_0 и внутренними контурами $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Все контуры ориентируем против часовой стрелки. Всегда можно провести разрезы так, что останется односвязная область. Рассуждая, как и выше, придём к теореме Коши для **составного контура**:

$$\oint_{\gamma_0} f(z) dz = \sum_{1 \leq k \leq n} \oint_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Эта формулировка ближе к практике. Для теории же лучше сказать, что граница области состоит из внешнего контура и конечного числа внутренних контуров, ориентированных согласованно, то есть при обходе каждого область остаётся слева. Получаем версию теоремы Коши для многосвязных областей, отличающуюся от первой версии лишь отсутствием требования односвязности.

Теорема. Если однозначная функция f аналитична в замыкании $\bar{D}$ ограниченной области, то

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Условие ограниченности области существенно. Например, функция $\exp(-z^2)$ аналитична всюду, а интеграл её по вещественной оси, являющейся границей верхней полуплоскости, равен $\sqrt{\pi} \neq 0$. Аналог теоремы Коши для неограниченных областей возможен при дополнительных требованиях к поведению функции.

Схема доказательства Гурса

Строгое доказательство интегральной теоремы Коши без опоры на непрерывность производной впервые нашёл Гурса только через 60 лет после слабого доказательства Коши. Рассуждение Гурса состоит из трёх этапов:

Лемма. Если функция f непрерывна в односвязной области D , то всякий простой кусочно-гладкий контур $\Gamma \subset D$ можно приблизить многоугольником $\Pi \subset D$ так, что интегралы от f по Γ и по Π отличаются сколь угодно мало.

Лемма. Всякий многоугольник можно составить из треугольников.

Лемма. Интеграл от аналитической функции в односвязной области D (без предположения непрерывности производной!) по произвольному треугольнику в D равен нулю.

Вторая лемма проста, но две других требуют усилий и времени, которого в нашем курсе недостаточно. Детали есть в стандартных учебниках ТФКП.

Примеры прикладных вычислений

Теорема Коши применяется для вычисления огромного количества разнообразных интегралов, часто вещественных. Одна из главных целей нашего курса состоит в том, чтобы вы научились таким вычислениям. Упомянем сперва ряд примеров, мотивировавших появление самой теоремы и дающих начальное представление о не самых простых составляющих этой сферы приложений, которые вам предстоит освоить не сразу, но в течение семестра уж точно. Следующий раздел послужит введением в другую технику, более простую и востребованную на физике очень скоро. В дальнейшем в реальных физических задачах пригодится умение уверенно комбинировать то и другое.

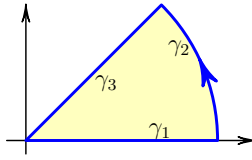
Euler 1781

Пример (интегралы Френеля). Несобственные интегралы

$$C = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx, \quad S = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$$

важны в физической оптике. Найдём их значение, вычислив

$$J = C + iS = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx.$$



Проинтегрируем функцию e^{iz^2} по границе кругового сектора

$$\{z: |z| < R, 0 < \arg z < \pi/4\},$$

состоящей из трёх гладких участков: отрезок γ_1 вещественной оси; дуга γ_2 окружности $|z| = R$; отрезок γ_3 луча $\arg z = \pi/4$. Положим

$$J_k(R) = \int_{\gamma_k} e^{iz^2} dz.$$

По теореме Коши $J_1(R) + J_2(R) + J_3(R) = 0$. Нас интересует предел $J_1(R)$ при $R \rightarrow +\infty$, и оказывается, что пределы J_2 и J_3 можно найти. На γ_3 имеем $iz^2 = -\rho^2$ и $dz = -e^{i\pi/4} d\rho$, поэтому

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} J_3(R) = -e^{i\pi/4} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

На γ_2 получится $J_2(R) \rightarrow 0$. Действительно, имеем $|dz| = R d\phi$ и

$$|\exp(iz^2)| = \exp(-R^2 \sin 2\phi) \leq \exp(-4R^2 \phi/\pi),$$

поскольку $\pi \sin t \geq 2t$ при $0 \leq t \leq \pi/2$. Тогда

$$|J_2(R)| \leq \dots \leq \int_0^{\pi/4} \exp(-4R^2 \phi/\pi) R d\phi = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) = O(1/R).$$

Следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} J_1(R) = J = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1+i) \quad \Rightarrow \quad C = S = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Следующие примеры изложим схематичнее, оставив более подробное рассмотрение (оценки и пределы) для практических занятий.

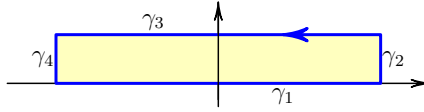
Poisson?

Пример (интеграл Лапласа). Для вычисления интеграла

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \cos \beta x dx, \quad \text{где } \lambda > 0 \text{ и } \beta > 0,$$

проинтегрируем функцию $e^{-\lambda z^2}$ по границе прямоугольника

$$\{z: |\operatorname{Re} z| < R, 0 < \operatorname{Im} z < b\}.$$



Обозначим через $J_k(R)$ интегралы по сторонам γ_k прямоугольника, начиная с нижней и всегда оставляя область слева. По теореме Коши их сумма равна нулю. При $R \rightarrow +\infty$ интегралы по вертикальным сторонам стремятся к нулю, а на нижней стороне увидим

$$J_1(R) = \int_{-R}^R e^{-\lambda x^2} dx \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Остаётся связать J_3 с искомым интегралом. Имеем $z^2 = x^2 + 2ibx - b^2$ и $dz = -dx$, поэтому

$$J_3(R) = -e^{\lambda b^2} \int_{-R}^R e^{-\lambda x^2} (\cos 2\lambda bx - i \sin 2\lambda bx) dx.$$

Мнимая часть равна нулю благодаря нечётности синуса, а из вещественной получится искомый интеграл Лапласа, если выбрать $b = \beta/2\lambda$ и учесть множитель, вынесенный из-под интеграла.

Euler 1781

Пример (интеграл Дирихле). Для вычисления интеграла

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

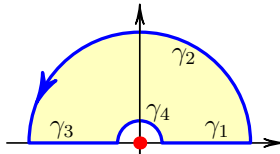
проинтегрируем функцию e^{iz}/z по границе полукольца

$$\{z: r < |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Обозначим через J_k интегралы по гладким участкам границы, начиная с отрезка $\gamma_1 = [r, R]$ положительной вещественной полуоси. Тогда

$$J_1 = + \int_r^R \frac{\cos x}{x} dx + i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx,$$

$$J_3 = - \int_r^R \frac{\cos x}{x} dx + i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx.$$



Далее нужно найти пределы $J_2 \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$ и $J_4 \rightarrow -\pi i$ при $r \rightarrow 0$. По теореме Коши $J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0$, откуда в итоге находим ответ $D = \pi/2$. Собственно ответ в этом случае вам уже знаком, ибо доступен также методам вещественного анализа.

2.5. ВЫЧЕТЫ В ПОЛЮСАХ

лекция 6
11.10.23

Определение вычета

Определение. **Правильной** точкой функции называют такую, где функция аналитична. Остальные точки называют **особыми**.

Определение. Особую точку однозначной функции называют **изолированной**, если функция аналитична в некоторой выколотой окрестности этой точки.

Для правильной точки p аналитической функции f мы уже знаем, что интеграл от $f(z) dz$ по окружности $|z - p| = r$ достаточно малого радиуса не зависит от радиуса, ибо он равен нулю по интегральной теореме Коши: нужно лишь выбрать радиус так, чтобы интересующая нас функция была аналитична в круге $|z - p| \leq r$.

Для изолированной особой точки p аналитической функции f мы тоже уже знаем, что интеграл от $f(z) dz$ по окружности $|z - p| = r$ достаточно малого радиуса не зависит от радиуса, и его значение, часто ненулевое, оказывается чрезвычайно важным. Малую окружность можно заменить любым контуром C , гомотопным ей в области аналитичности функции.

Определение. В указанной ситуации правую часть равенства

$$\operatorname{Res}_{z=p} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

называют **вычетом** функции f в точке p . В левой же части этого равенства стоит стандартное обозначение, возникшее от французского слова *résidu*, которое означает «остаток».

Пример. Простейшие вычеты мы уже считали:

$$\operatorname{Res}_{z=p} (z - p)^n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = -1; \\ 0, & \text{если } n \neq -1. \end{cases}$$

Основная теорема о вычетах

Теорема. Если функция f аналитична в замыкании ограниченной области D кроме изолированных особых точек $p_1, \dots, p_n$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} f(z) dz = \sum_{1 \leq k \leq n} \operatorname{Res}_{z=p_k} f(z).$$

Доказательство. Окружим каждую особую точку p_k замкнутым кругом $\bar{B}_k$, избегающим прочие особые точки. Применяя интегральную теорему Коши для составного контура к области $D \setminus (\bar{B}_1 \cup \dots \cup \bar{B}_n)$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Для однозначной функции, аналитической во всей комплексной плоскости кроме нескольких точек p_k , которые тогда все гарантированно изолированные, можно ввести вычет на бесконечности. Контур интегрирования должен охватить все точки p_k , но проходиться будет по часовой стрелке; его проекция на сферу Римана обходит северный полюс, оставляя все точки p_k к югу и тем самым ограничивая по необходимости малую полярную область.

Следствие. Если функция имеет лишь конечное число особых точек на сфере Римана, то сумма всех её вычетов равна нулю.

Подчеркнём, что бесконечно удалённая точка здесь считается особой всегда, независимо от поведения функции вблизи неё.

Упражнение. Вычислите вычет функции $1/z$ на бесконечности.

Вычет в простом полюсе

Интегральная теорема Коши и следующая из неё основная теорема о вычетах сводят сложную задачу вычисления интегралов к нахождению вычетов, а для них имеются простые методы. Отметим сперва, что линейность интеграла влечёт линейность вычетов, в частности,

$$\operatorname{Res}_{z=p} (f(z) + g(z)) = \operatorname{Res}_{z=p} f(z) + \operatorname{Res}_{z=p} g(z).$$

Пример. Найдём все вычеты функции $\frac{1}{z^2+1}$. Конечных особых точек у неё две. Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{-i/2}{z-i} + \frac{i/2}{z+i}.$$

У каждого слагаемого только одна конечная особая точка, причём вычеты равны коэффициентам в числителях:

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{-i/2}{z-i} = -\frac{i}{2}, \quad \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{i/2}{z+i} = \frac{i}{2}.$$

Так будет для всех рациональных функций с простыми корнями знаменателя. Самый быстрый метод разложения на простейшие дроби в этом случае совпадает с нахождением вычетов. В итоге получаем

$$\operatorname{Res}_{z=\pm i} \frac{1}{z^2+1} = \mp \frac{i}{2}, \quad \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z^2+1} = 0.$$

Теперь представим это вычисление немного иначе, сосредоточившись на точке $z = i$. Вблизи неё функция $h(z) = \frac{1}{z+i}$ аналитична, и в частности $h(z) = h(i) + O(z-i)$, поэтому

$$\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{h(z)}{z-i} = \frac{1}{z-i} (h(i) + O(z-i)) = \frac{h(i)}{z-i} + O(1).$$

При уменьшении контура вклад в интеграл от ограниченной величины $O(1)$ стремится к нулю, так что вычет равен $h(i) = -i/2$. Этот подход весьма общий, ибо рациональность функции $h(z)$ роли не играет.

Пример. Найдём вычет на бесконечности функции

$$f(z) = \frac{e^{-tz}}{z^2+1}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Числитель аналитичен на всей плоскости, поэтому конечных особых точек опять две. Значит,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) &= -\operatorname{Res}_{z=i} f(z) - \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) \\ &= -\left[\frac{e^{-tz}}{z+i} \right]_{z=i} - \left[\frac{e^{-tz}}{z-i} \right]_{z=-i} = -\frac{e^{-it}}{2i} - \frac{e^{it}}{-2i} = \sin t. \end{aligned}$$

Рассмотренные примеры приводят к формуле для вычета в простом полюсе, обычно записываемой как

$$\operatorname{Res}_{z=p} f(z) = \lim_{z \rightarrow p} ((z-p)f(z)).$$

Использование предела расширяет вычислительные возможности.

Упражнение. Может ли этот предел равняться 0 или ∞ ? Какой вывод следует сделать, если формула выдала такое значение?

Пример. Найдём вычет функции $\csc z = 1/\sin z$ в точке $z = 0$. У косеканса это простой полюс, поскольку у синуса — простой нуль. Поэтому

$$\operatorname{Res}_{z=0} \csc z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

К этому ответу также можно прийти, сразу заметив эквивалентность $\sin z \sim z$ при $z \rightarrow 0$, но это работает лишь в простых полюсах.

Бывает удобна другая формула для вычета в простом полюсе. Она годится для функций, представленных в виде отношения $f(z)/g(z)$ двух функций, аналитических в точке $z = p$, причём $f(p) \neq 0$, $g(p) = 0$ и $g'(p) \neq 0$; эти условия всего лишь обеспечивают простой полюс. Тогда

$$(z - p) \cdot \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - p) \cdot (f(p) + o(1))}{g(p) + g'(p)(z - p) + o(z - p)} = \frac{f(p) + o(1)}{g'(p) + o(1)} \rightarrow \frac{f(p)}{g'(p)}.$$

Следовательно, при этих условиях

$$\operatorname{Res}_{z=p} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(p)}{g'(p)}.$$

Поскольку найти функцию f/g' требуется лишь однажды, эта формула особенно эффективна при наличии нескольких простых полюсов — в отличие от других методов, значительная часть вычислений в которых специфична для каждой особой точки.

Упражнение. Найдите все вычеты функций $\operatorname{ctg} z$ и $\sec z = 1/\cos z$.

Вычет в кратном полюсе

Пример. Найдём вычеты функции $1/(z^2 + 1)^2$, имеющей два двойных полюса. Хотя функция рациональна, разлагать её на простейшие дроби не надо, ибо это потребует больше усилий, чем нахождение вычетов. Лучше аналогично [первому примеру](#) вблизи точки $z = i$ возьмём $h(z) = 1/(z + i)^2$ и перепишем

$$\frac{1}{(z - i)^2(z + i)^2} = \frac{h(z)}{(z - i)^2} = \frac{h(i) + h'(i)(z - i) + O((z - i)^2)}{(z - i)^2}.$$

При интегрировании по малому контуру вокруг точки $z = i$ [старшее](#) слагаемое даст нуль, а сыграет только [следующее](#). Итак,

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = h'(i) = \left[\frac{-2}{(z + i)^3} \right]_{z=i} = -\frac{i}{4}.$$

Аналогично находится вычет в точке $z = -i$; также можно догадаться, что всё вычисление отличается лишь комплексным сопряжением.

Как и выше, выражая сделанное в примере через исходную функцию, приходим к формуле вычета в двойном полюсе:

$$\operatorname{Res}_{z=p} f(z) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{d}{dz} ((z-p)^2 f(z)).$$

Мы здесь свободно пользуемся термином «полюс» и кратностью полюса, опираясь на интуицию, полученную с картинок, и аналогию с кратностью нуля, но не дав ещё строгих определений. Выгодно при этом представлять себе функцию вблизи своего полюса $z = p$ кратности $m > 0$ через эквивалентность $f(z) \sim C(z-p)^{-m}$ с некоторой постоянной $C \notin \{0, \infty\}$. Тогда несложно обобщить формулу для вычета на случай полюса произвольного порядка m :

$$\operatorname{Res}_{z=p} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow p} \left(\frac{d}{dz} \right)^{m-1} ((z-p)^m f(z)).$$

В подавляющем большинстве приложений порядка полюсов видны непосредственно. Даже если это не так, общую формулу можно применять несколько раз, увеличивая m до тех пор, пока предел не окажется конечным; этот процесс даст правильный ответ, даже если m сразу оказалось больше незамеченного настоящего порядка полюса. Бесконечный предел указывает на то, что взятое значение m меньше порядка полюса, а отсутствие предела — на то, что это **не полюс** вовсе, но такое случается намного реже. Итак, вычислительная работа возможна и без строгих определений, данных в следующей главе.

2.6. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Вывод формулы

Одним из чудесных свойств аналитической функции является возможность выразить её значения внутри области через интеграл по границе области. Это означает, что внутренние значения полностью определяются граничными.

Теорема. Если однозначная функция f аналитична в замыкании ограниченной области D , то

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z) dz}{z-p}$$

для всякой точки $p \in D$.

Доказательство. Для всякого круга $B = B(p, r)$, целиком лежащего в D , интегральная теорема Коши для составного контура даёт

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z) dz}{z - p} = \oint_{\partial B} \frac{f(z) dz}{z - p},$$

ибо подынтегральная функция аналитична в $D \setminus B$.

Покажем, что разность между частями искомого равенства делает-ся меньше произвольного $\varepsilon > 0$ выбором достаточно малого радиуса r . А именно, в силу непрерывности функции f в точке p можно уменьшить r так, что $|f(z) - f(p)| < \varepsilon$ всюду на замкнутом круге $\overline{B}$, и в частности на его границе C . Зная уже значение

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z - p} = 1,$$

пишем оценку

$$\begin{aligned} \left| f(p) \cdot 1 - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - p} \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(p) - f(z)}{z - p} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(z) - f(p)|}{|z - p|} |dz| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi r} \oint_C |dz| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Тем самым интегральная формула Коши доказана. $\square$

Теорема о среднем и принцип максимума

Следствие. Если функция f аналитична в круге $|z - p| \leq r$, то

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{i\phi}) d\phi.$$

Доказательство. Это всего лишь интегральная формула Коши на границе круга с параметризацией $z = p + re^{i\phi}$. $\square$

Следствие. Непостоянная аналитическая функция на замыкании области может достигать максимума своего модуля только на границе этой области.

Доказательство. Значение функции в центре любого круга равно среднему её значений на его границе, поэтому максимум модуля во внутренней точке области невозможен. $\square$

Поскольку замкнутая область на сфере Римана компактна, для аналитической функции на таковой можно утверждать, что максимум на границе обязательно достигается.

Упражнение. Как принцип максимума сказывается на картинках функций по методу цветных областей?

Упражнение. При каком условии можно утверждать, что минимум модуля функции достигается на границе области?

Дифференцирование формулы Коши

Лихо продифференцируем интегральную формулу Коши по p :

$$f'(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z) dz}{(z-p)^2}.$$

Что же мы видим? Оказывается, производная аналитической функции выражается интегралом! Немедленно перейдём к обоснованию совершённого. Здесь дважды потребуется формула

$$\frac{1}{(z-p)(z-q)} \stackrel{*}{=} \frac{1}{q-p} \cdot \left(\frac{1}{z-q} - \frac{1}{z-p} \right).$$

Теорема. Производная аналитической функции вычисляется указанным выше интегралом.

Доказательство. Удобна такая область D , что функция f аналитична в её замыкании. Возьмём в D точку p на расстоянии R от границы $\gamma = \partial D$ и точку q в круге $|z-p| < r < R/2$ и запишем

$$\frac{f(q) - f(p)}{q-p} = \frac{1}{q-p} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{z-q} - \frac{f(z)}{z-p} \right) dz \stackrel{*}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-p)(z-q)}.$$

Теперь устремим $r \rightarrow 0$, вследствие чего $q \rightarrow p$, и предел левой части равен $f'(p)$. В правой части нужно совершить предельный переход под интегралом, который даст искомую лихую формулу.

Для обоснования достаточно установить, что разность

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-p)(z-q)} - \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-p)^2} \stackrel{*}{=} (q-p) \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-p)^2(z-q)}$$

стремится к нулю при $q \rightarrow p$. Поскольку в этом интеграле точка z пробегает границу области, в знаменателе получим

$$|z-p| \geq R, \quad |z-q| \geq |z-p| - |q-p| \geq R-r > R/2,$$

и **последний интеграл** по модулю меньше, чем постоянная $2LM/R^3$, где L это длина контура γ , а M это максимум $|f(z)|$ при $z \in \gamma$. $\square$

Теорема. *Производная аналитической функции аналитична на той же области.*

Идея доказательства. Предыдущее рассуждение можно продолжить, опираясь вместо интегральной формулы для $f(p)$ на только что полученную интегральную формулу для $f'(p)$. Составим и преобразуем разностное отношение, затем в пределе при $q \rightarrow p$ получим

$$\frac{f'(q) - f'(p)}{q - p} \rightarrow f''(p) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - p)^3}.$$

Значит, функция f' дифференцируема в каждой точке области D , то есть аналитична в D . $\square$

Следствие. *Аналитическая функция на области бесконечно дифференцируема на той же области. В ограниченной области D для производных верны равенства*

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z) dz}{(z - p)^{n+1}}$$

для всякой точки $p \in D$.

Бесконечная дифференцируемость аналитической функции без дополнительных условий — удивительный феномен. В силу интегральной формулы Коши, аналитическая функция определяется интегрированием себя, но интегрирование обладает улучшающими свойствами (делает из непрерывной функции дифференцируемую), поэтому она обязана быть лучше, чем можно ожидать, и в итоге обязана быть «бесконечно хорошей».

Босс

Пример. Интегральные формулы для производных тоже можно применять при вычислении интегралов. Вычислим интеграл

$$J = \oint_{\gamma} \frac{\cos z dz}{(z - 1)^3}$$

по окружности $|z| = 4$. Точка $z = 1$ лежит внутри контура, а вне её подынтегральная функция аналитична. Поэтому

$$J = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)''|_{z=1} = -\pi i \cos 1.$$

Упражнение. *Сопоставьте вычисление по интегральной формуле для производных с вычислением вычета в кратном полюсе.*

2.7. ПЕРВООБРАЗНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Существование первообразной

лекция 7
18.10.23

Определение. Аналитическую функцию F в области D называют **первообразной** функции f , если равенство $F'(z) = f(z)$ выполнено на D .

Теорема. В односвязной области D всякая аналитическая функция f имеет первообразную.

Доказательство. Зафиксируем точку $z_0 \in D$. Благодаря независимости интеграла от пути, определена однозначная функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Чтобы установить равенство $F'(z) = f(z)$, покажем при $\delta \rightarrow 0$, что

$$E(z, \delta) = \frac{F(z + \delta) - F(z)}{\delta} - f(z) = \frac{1}{\delta} \int_z^{z+\delta} f(\zeta) d\zeta - f(z)$$

стремится к нулю. Достаточно малый круг содержится в области D , поэтому путь интегрирования на участке от z до $z + \delta$ можно взять прямолинейным: $\zeta = z + \delta t$, где $t \in [0, 1]$. Тогда $d\zeta = \delta dt$ и

$$\begin{aligned} |E(z, \delta)| &= \left| \frac{1}{\delta} \int_0^1 f(z + \delta t) \delta dt - f(z) \right| = \left| \int_0^1 (f(z + \delta t) - f(z)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(z + \delta t) - f(z)| dt. \end{aligned}$$

Поскольку аналитическая функция f непрерывна, для заданного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\rho > 0$, что $|\delta| < \rho$ и $t \in [0, 1]$ влекут $|f(z + \delta t) - f(z)| < \varepsilon$. Отсюда $|E(z, \delta)| < \varepsilon$. $\square$

Приведённое здесь доказательство аналогично построению потенциала векторного поля в односвязной области.

Следствие. Формула $\Phi(z) = F(z) + C$ описывает все первообразные.

Доказательство. Для разности $\Phi(z) - F(z) = H(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ получаем $H'(z) \equiv 0$, то есть $u_x = u_y = v_x = v_y \equiv 0$. Поэтому обе компоненты постоянны. $\square$

Упражнение. В условиях теоремы, запишите и установите комплексные аналоги формул вещественного анализа:

- (1) формулы Ньютона — Лейбница;
- (2) формулы интегрирования по частям.

Теорема Мореры

Следствие. Если функция f непрерывна в произвольной области D , и её интеграл зависит не от пути, а лишь от его концов, то в D она имеет первообразную.

Доказательство. Независимость интеграла от пути позволяет определить $F(z)$ как в доказательстве теоремы о существовании первообразной, а далее оно опирается только на непрерывность. $\square$

Теперь легко получить обращение интегральной теоремы Коши.

Теорема. Если функция f непрерывна в односвязной области D и

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

для всякого контура $\gamma \subset D$, то f аналитична в D .

Доказательство. В этих условиях существует первообразная $F(z)$. Значит, $f(z)$ является производной аналитической функции, так что аналитична по теореме из предыдущего раздела. $\square$

Логарифм, арктангенс, арксинус

Интегрирование в многосвязной области часто приводит к ветвлению первообразной. Рассмотрим это занятное явление на серии примеров. Начнём с уже знакомых функций, но с новой точкой зрения: интегрирование это мощное средство получения новых функций.

Пример. Функция $1/z$ аналитична в двусвязной области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Мы уже посчитали интеграл от неё по окружности с центром в нуле. Те же рассуждения показывают, что её интеграл по любой дуге γ в D с началом z_0 и концом z_1 равен приращению аргумента вдоль γ , умноженному на i .

В односвязной области $\{z: |\arg z| < \pi\}$ первообразной является главная ветвь логарифма; при этом

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

А вот в D дуга может оборачиваться вокруг нуля любое конечное число раз. Приращение аргумента при этом даст число оборотов. Так первообразная получается многозначной функцией $\text{Ln } z = \ln z + 2\pi i k$. Полюс функции $1/z$ становится точкой ветвления её первообразной. Вторая точка ветвления возникает на бесконечности; перемещая её в нуль заменой $u = 1/z$, можно увидеть симметрию.

Пример. Как известно из вещественного анализа, функция $\arctg x$ является первообразной для функции $\frac{1}{1+x^2}$. Рассмотрим её теперь на комплексной плоскости. Сперва разложим дробь на простейшие:

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{-i/2}{z - i} + \frac{i/2}{z + i}.$$

Интегрируя слагаемые, видим сумму двух логарифмов и поэтому две точки ветвления $z = \pm i$. При обходе каждой из них набираемое приращение аргумента умножается на вычет $\mp i/2$. Если же контур интегрирования охватывает обе точки, то добавки сокращаются благодаря этим коэффициентам. Нулевой вычет на бесконечности обеспечивает отсутствие там ветвления арктангенса.

Пример. Вспомнив производную арксинуса, можно написать

$$\text{Arcsin } z = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Здесь сама подынтегральная функция f имеет ветвление, из-за которого — согласно новой точке зрения — можно сказать, что арксинус и арккосинус устроены сложнее арктангенса. При этом f допускает выделение однозначных ветвей в окрестности бесконечности, а арксинус имеет на бесконечности логарифмическое ветвление. Действительно, при обходе обеих конечных точек ветвления $z = \pm 1$ по окружности $|z| = R$ достаточно большого радиуса $R \gg 1$ единиц под корнем можно спокойно пренебречь, поэтому поведение первообразной должно быть близким к поведению двух копий логарифма, отличающихся друг от друга на $\pm$ из-за ветвления квадратного корня.

Функции Ламберта и Гудермана

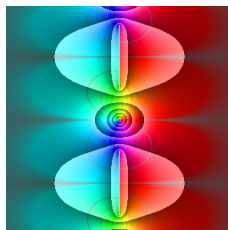
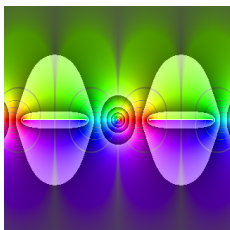
Заслуживают внимания первообразные

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos \zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch} \zeta}.$$

Наверняка вам встречалась вещественная версия хотя бы первой из них, и почти те же формулы нужно ожидать для комплексной функции — только убрав модули и указав многозначность логарифма:

$$F(z) = \operatorname{Ln}(\sec z + \operatorname{tg} z) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right).$$

Следуя логике предыдущих примеров, посмотрим на нули функции $\cos z$. Они простые, поэтому $F(z)$ имеет точки ветвления $z = \pi + 2\pi k$ для всех целых k , которые **оказываются** устроены так, что их можно соединить разрезами попарно и получить область однозначности. Эти две первообразные связаны простым преобразованием $G(iz) = iF(z)$, что и видно на рисунках главных ветвей — нечётных при наиболее экономичных разрезах.



Эти две функции имеют **собственные названия** — жаль, что не очень широко известные, ведь они (функции) обладают рядом неожиданных и любопытных свойств, вынесенных в упражнения. Интересна также их **роль** в истории математики.

Упражнение. Вычислите интеграл от функции $1/\cos z$ по границе квадрата со стороной 2π с центром в начале координат.

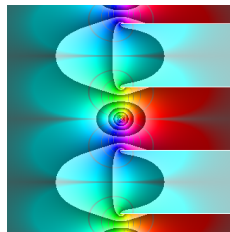
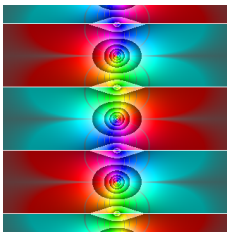
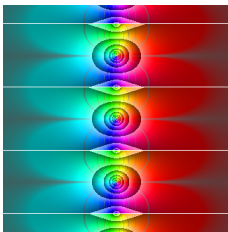
Упражнение. Проверьте, что многозначные функции $F(z)$ и $G(z)$ взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости.

Людам, ограниченным вещественными переменными, $F(x)$ и $G(x)$ обеспечивают переходы между тригонометрическими и гиперболическими функциями, совершенно не упоминаящие комплексных чисел.

Упражнение. Проверьте тождества, связывающие тригонометрические и гиперболические функции:

$$\operatorname{sh}(F(z)) = \operatorname{tg} z, \quad \operatorname{ch}(F(z)) = \sec z, \quad \operatorname{th}(F(z)) = \sin z.$$

Отметим ещё, что копирование различных вещественных формул для функции Гудермана в комплексной ситуации даёт разные ветви. Здесь изображены ветви многозначной функции $\operatorname{gd} z = G(z)$, получаемые посредством главных ветвей ряда обратных тригонометрических функций, соответственно $\arcsin(\operatorname{th} z)$, $\arctg(\operatorname{sh} z)$, $2 \arctg(e^z) - \pi/2$. Все разрезы тут уходят горизонтально в бесконечность.



Эллиптический интеграл первого рода

Следующий красивый и полезный пример первообразной изложен в порядке забегающего вперёд. Развитие предмета в рамках нашего курса от него не зависит, так что при первом чтении его можно пропустить без ущерба для понимания дальнейшего. Однако те, кто усвоит его, приобретут многое и пожалеть не должны.

рисунки!

Длина дуги эллипса эксцентриситета k пропорциональна интегралу

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

не выражающемуся в элементарных функциях. Это вызвало к жизни обширную теорию подобных функций с разными вхождениями квадратных корней и различными формами записи, преобразуемыми друг в друга простыми подстановками. Эллипс остался в названии этого класса функций, но связь с ним очень редко проявляется.

Отправив корень в знаменатель и заменив переменные, придём к интегралу, который далее хочется изучить в комплексной области:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad F(x; k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}.$$

Стоящая в знаменателе функция уже кратко **упоминалась** для иллюстрации процесса выделения ветвей. Выберем ветвь, определённую на верхней полуплоскости и положительную на интервале $(-1, 1)$.

Попробуем понять, куда отображение $x \mapsto F(x; k)$ переводит вещественную ось. Нули знаменателя $x = \pm 1, \pm 1/k$ разбивают её на пять интервалов. Интеграл тут несобственный, но сходящийся на всех интервалах. Вблизи каждой из указанных особых точек только один из квадратных сомножителей влияет на сходимость, так что функция эквивалентна арксинусу в смысле, применяемом в анализе для оценок несобственных интегралов. Сходимость на бесконечности видна после замены переменной $s = 1/kt$, приводящей интеграл к такому же виду, но по переменной $s \in (-1, 1)$.

Когда x пробегает отрезок $[0, 1]$, интеграл имеет вещественные значения и возрастает от 0 до

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Далее на отрезке $[1, 1/k]$ подынтегральная функция чисто мнима, причём при обходе особой точки $x = 1$ по малой полуокружности в верхней полуплоскости её аргумент увеличивается от 0 до $\pi/2$ за счёт уменьшения на π аргумента сомножителя $1-t$, возводимого затем в степень $-1/2$, при безучастности прочих сомножителей. Следовательно, когда x пробегает отрезок $[1, 1/k]$, значения интеграла $F(x; k)$ пробегают от прямолинейный отрезок от K до $K + iK'$, где

$$K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-\kappa^2\tau^2)}},$$

корни вещественные и положительные, а также произведены замены

$$k^2 = 1 - \kappa^2, \quad t = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2\tau^2}}.$$

Продолжая в том же духе, обнаружим прямолинейное движение значения $F(x; k)$ на оставшихся промежутках:

- при $x \in (1/k, +\infty)$ движение от $K + iK'$ до iK' ;
- при $x \in (-\infty, -1/k)$ движение от iK' до $-K + iK'$;
- при $x \in (-1/k, -1)$ движение от $-K + iK'$ до $-K$;
- при $x \in (-1, 0)$ движение от $-K$ до 0.

Видим в итоге, что искомым образом вещественной оси является прямоугольник длины $2K$ и высоты K' . Привлекая затем высшие соображения о конформных отображениях, здесь формально недоступные,

можно заключить, что при этом отображение $z \mapsto w = F(z; k)$ переводит верхнюю полуплоскость во внутренность этого прямоугольника. При изменении эксцентриситета k меняется отношение его сторон.

Отразив прямоугольник относительно его стороны, лежащей на вещественной оси и являющейся образом отрезка $[-1, 1]$, распространим обратную функцию $z = \operatorname{sn}(w; k)$, которую называют **эллиптическим синусом**, на прямоугольник длины $2K$ и высоты $2K'$. Образом тогда будет вся расширенная комплексная плоскость. Здесь можно представлять себе определяющий $F(z; k)$ путь интегрирования уходящим в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta < 0$ через отрезок $[-1, 1]$. Однако при другом выборе области однозначности подынтегральной функции уйти вниз можно будет через другой промежуток вещественной оси. Это будет соответствовать отражению исходного прямоугольника относительно другой его стороны. Бесконечно развлекаясь с отражениями, мы покроем всю плоскость w прямоугольниками, то есть листами многозначной функции $F(z; k)$. Соответственно, эллиптический синус оказывается функцией на всей плоскости, обладающей двумя периодами:

$$\operatorname{sn}(w) = \operatorname{sn}(w + 4mK + 2niK')$$

для всех целых m, n и всех $w \in \mathbb{C}$.

Впоследствии двоякопериодичность закладывается в определение класса функций, называемых эллиптическими.

2.8. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сопряжённые гармонические функции

Некоторые следствия из интегральной формулы Коши оказываются полезными и в переводе на вещественный язык. В частности, можно продифференцировать условия Коши — Римана. Для аналитической функции $w(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ на области D получим **из них**

$$\begin{aligned} u_{xx} &= v_{xy}, & v_{xx} &= -u_{xy}, \\ u_{yy} &= -v_{xy}, & v_{yy} &= u_{xy}. \end{aligned}$$

Складывая, видим, что вещественная и мнимая части аналитической функции являются решениями уравнения Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = \Delta v = 0,$$

то есть **гармоническими** функциями на D .

Пример. Аналитическая функция $w(z) = z^2$ даёт пару гармонических функций на всей комплексной плоскости: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Пример. Многозначная аналитическая функция $w(z) = \text{Ln } z$ даёт пару гармонических функций вне точки $z = 0$:

$$u = \ln|z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad v = \text{Arg } z.$$

При этом $v(x, y)$ является простейшим примером многозначной гармонической функции. Чтобы корректно записать её вещественными формулами, нужно учесть два момента: невозможность деления на нуль и равенство $\frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$. Получится что-то вроде

$$v = \arctg \frac{y}{x} + \pi H(-x) + 2\pi k \quad \text{при } x \neq 0,$$

$$v = \text{arccctg } \frac{x}{y} + \pi H(-y) + 2\pi k \quad \text{при } y \neq 0,$$

где H это функция Хевисайда,

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Чтобы пара гармонических функций могла образовать аналитическую, они обязаны удовлетворять условиям Коши — Римана. Такую пару называют **сопряжёнными** гармоническими функциями.

Теорема. Если на односвязной области D задана гармоническая функция $u(x, y)$, то существует такая однозначная аналитическая на D функция f , что $u(x, y) = \text{Re } f(x + iy)$.

Доказательство. По данной гармонической функции на D требуется построить сопряжённую. Введём функции $P = -u_y$ и $Q = u_x$ для ясности. Тогда $P_y = Q_x$ на D , а это знакомое условие независимости криволинейного интеграла от пути. Выбрав в области начальную точку (x_0, y_0) , положим

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy.$$

Условия Коши — Римана соблюдены, ибо получается $v_x = P$ и $v_y = Q$. Гармоничность v легко проверить: $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$. $\square$

В многосвязной области это построение тоже проходит, но может приводить к многозначности, как в случае $\text{Arg } z$. Аналогичным путём можно найти аналитическую функцию по её мнимой части. Как

и при построении первообразных, имеется произвол с прибавлением постоянной величины к сопряжённой гармонической функции; здесь постоянная должна быть вещественной.

Гармонические функции в круге

Когда функция аналитична в замкнутом круге, её значения внутри можно выразить через её значения на границе по интегральной формуле Коши. Следовательно, аналогичное утверждение справедливо для гармонических функций. Возьмём аналитическую функцию $f = u + iv$ на замыкании круга $B = B(0, R)$. Тогда

$$I(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(z) dz}{z - p} = \begin{cases} f(p) & \text{при } p \in B, \\ 0 & \text{при } p \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}. \end{cases}$$

Для центра круга выделим под интегралом вещественную часть:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) d\phi.$$

Это простое следствие [теоремы о среднем](#) для аналитических функций и её аналог для гармонических. Сделать подобное для другой точки $p = re^{i\theta}$ в круге мешает комплексность множителя

$$\frac{dz}{z - p} = \frac{iRe^{i\phi} d\phi}{Re^{i\phi} - re^{i\theta}}.$$

Победить её позволяет хитрость, использующая [зачуление](#) интеграла Коши для точек вне круга. А именно, инверсия относительно граничной окружности переводит точку $p = re^{i\theta}$ в точку $p^* = R^2/\bar{p} = R^2e^{i\theta}/r$ вне круга. В разности интегралов $I(p) - I(p^*)$ преобразуем

$$\frac{dz}{z - p} - \frac{dz}{z - p^*} = \frac{iRe^{i\phi} d\phi}{Re^{i\phi} - re^{i\theta}} - \frac{ire^{i\phi} d\phi}{re^{i\phi} - Re^{i\theta}} = i \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi.$$

Фокус в том, что это выражение чисто мнимое, и после сокращения с [наружным](#) i оно становится вещественным. Значит, его можно вынести множителем при выделении вещественной части произведения. Поскольку $I(p^*) = 0$, получаем интегральную формулу Пуассона:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi.$$

Упражнение. Для $p = re^{i\theta}$ проверьте равенство

$$\frac{R^2 - |p|^2}{|Re^{i\phi} - p|^2} = \operatorname{Re} \frac{Re^{i\phi} + p}{Re^{i\phi} - p}$$

и преобразуйте это выражение к дроби из формулы Пуассона.

Задача Дирихле

Одной из важнейших проблем ещё при становлении математической физики была задача Дирихле, первоначально изучавшаяся Грином для уравнения Лапласа: найти гармоническую функцию в области, совпадающую с заданной непрерывной функцией на её границе. Непреходящее значение этой задачи объясняется тем, что уравнение Лапласа возникает в огромном числе прикладных исследований в разных областях. Комплексный анализ помогает в двумерном случае.

Для круга решение даётся интегралом Пуассона. Ещё нужно доказать, что задаваемая им функция имеет требуемые предельные значения при приближении к границе изнутри, однако здесь мы не будем этим заниматься.

Когда требуется найти гармоническую функцию на односвязной области $D \neq \mathbb{C}$, нужно привлечь какое-нибудь конформное отображение её на круг и воспользоваться уже известным решением для круга.

Теорема. Конформное отображение переводит гармонические функции в гармонические.

Доказательство. Возьмём гармоническую функцию u на D_1 и конформное отображение $g: D \rightarrow D_1$ областей. Существуют сопряжённая гармоническая функция v и соответствующая аналитическая функция $f = u + iv$. Композиция $f \circ g$ аналитична на области D , так что $\operatorname{Re}(f \circ g)$ есть искомая гармоническая функция на D . $\square$

Необходимое здесь конформное отображение односвязной области $D \neq \mathbb{C}$ на круг всегда существует благодаря теореме Римана, именно это утверждающей. Её доказательство выходит далеко за рамки нашего курса. Также бывает полезно для упрощения геометрии задачи конформно отобразить исходную односвязную область на иную очень простую область. Ряд таких примеров рассматривались в начале курса при знакомстве с элементарными функциями, и ещё несколько рассмотрено в следующем разделе.

2.9. КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ В ФИЗИКЕ

Плоские векторные поля

Рассмотрим на плоскости векторное поле с компонентами $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, гладкое за исключением изолированных особых точек, которых всегда будем избегать. Для всякого избегающего контура C циркуляция Γ по нему и поток Δ через него даются интегралами:

$$\Gamma = \oint_C P dx + Q dy, \quad \Delta = \oint_C P dy - Q dx.$$

В приложениях интересны векторные поля двух классов: потенциальные и соленоидальные.

Поле в односвязной области называют потенциальным или безвихревым, если циркуляция по всякому контуру равна нулю. Тогда $P dx + Q dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Для этого необходимо и достаточно условие на производные: $P_y = Q_x$. Если простой контур C обходит единственную точку a , где это условие нарушается, то циркуляция Γ может отличаться от нуля. В таком случае a называют **вихревой** точкой, а число Γ — **интенсивностью** вихря в этой точке. Когда простой контур обходит несколько вихревых точек, циркуляция по нему равна сумме их интенсивностей.

Аналогично, поле в односвязной области называют соленоидальным, если поток через всякий контур равен нулю. Тогда $P dy - Q dx$ является полным дифференциалом некоторой функции $v(x, y)$. Для этого необходимо и достаточно условие на производные: $P_x = -Q_y$. Если простой контур C обходит единственную точку a , где это условие нарушается или теряет смысл из-за обращения в бесконечность, то поток Δ может отличаться от нуля. В таком случае a называют **источником** при $\Delta > 0$ и **стоком** при $\Delta < 0$, а число Δ — **обильностью** источника или стока в этой точке. Когда простой контур обходит несколько источников или стоков, поток через него равен сумме их обильностей.

Комплексный потенциал

Особенно важны поля одновременно потенциальные и соленоидальные. В этом случае полученные выше потенциалы $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются сопряжёнными гармоническими функциями.

Упражнение. Проверьте последнее утверждение.

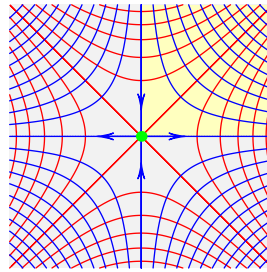
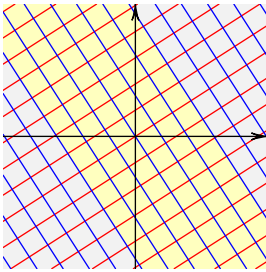
Тогда функция $w(z) = w(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, которую называют **комплексным потенциалом**, аналитична в той области, где определены обе её части. В многосвязных областях физики рассматривают многозначные потенциалы.

Вспоминая выражения для производной через компоненты, видим

$$w'(z) = u_x + iv_x = P - iQ.$$

В задачах о плоском течении несжимаемой жидкости исходное векторное поле (P, Q) , или $\mathbf{V} = P + iQ = \overline{w'(z)}$ в комплексной форме, есть скорость течения. При этом $u(x, y)$ называют **потенциалом скоростей**, а $v(x, y)$ — **функцией тока**. Линии $u = \text{const}$ это эквипотенциали, а линии $v = \text{const}$ это линии тока. Благодаря конформности отображения $z \mapsto w$, они образуют два ортогональных семейства линий; конформность может нарушаться в точках, где скорость $w'(z)$ равна нулю (**критические**), либо бесконечна (**особые**).

Пример. Функция $w = az$ служит комплексным потенциалом поступательного движения жидкости со скоростью $\bar{a}$ на всей плоскости, либо можно ограничиться полосой между двумя линиями тока.



Пример. Функция $w = z^2$ тоже служит комплексным потенциалом движения жидкости на всей плоскости. Здесь потенциал скоростей и функция тока равны

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy,$$

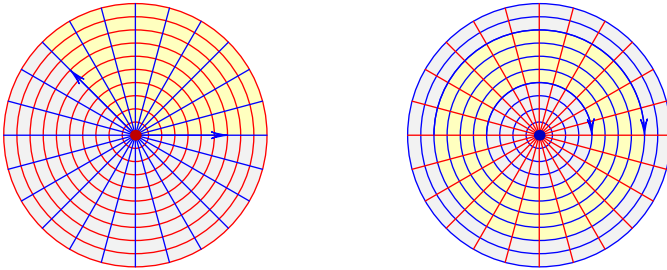
поэтому и эквипотенциали, и линии тока — равнобокие гиперболы, а также по кресту из прямых в каждом семействе. Поскольку полуоси координат являются линиями тока, это течение можно ограничить одним квадрантом, ради чего его обычно и упоминают. Точка $z = 0$ критическая — **седло** из дифференциальных уравнений.

По сравнению с механикой несжимаемых жидкостей, в электростатике применяются иные обозначения и терминология, хотя математическая основа одинакова. Исторически, жидкости начали изучать раньше (потому в электричестве говорят о токе), но у вас электричество раньше, и его больше, так что обсуждаемые тут связи с физикой скорее переключаются с этим её разделом.

Электростатическое поле $\mathbf{E}$ всегда потенциально; вихрей нет, а циркуляция повсюду равна нулю. Заряды играют роль источников и стоков, вне которых поле соленоидально. При этом $\mathbf{E} = -\nabla v(x, y)$, так что потенциалом здесь называют гармоническую функцию $v(x, y)$. Сопрежжённую ей гармоническую функцию $u(x, y)$ называют **силовой**, да и линии уровня $u = \text{const}$ — силовыми.

Важнейшие примеры особых точек течений

Пример. Функция $w = \text{Ln } z$ служит комплексным потенциалом течения на всей плоскости с особой точкой $z = 0$. Здесь $\mathbf{V} = 1/\bar{z}$, поэтому скорость в каждой точке направлена по радиус-вектору. Эквипотенциали это окружности $|z| = \text{const}$, а линии тока — лучи $\arg z = \text{const}$. Начало координат является истоком обильности 2π .



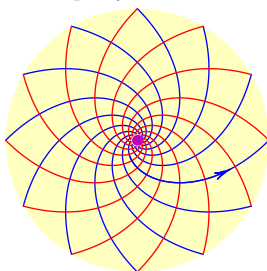
Пример. Для комплексного потенциала $w = i \text{Ln } z$ картина похожа на предыдущий пример, только меняются ролями эквипотенциали и линии тока, а в начале координат находится вихрь интенсивности -2π .

Объединим интегралы для циркуляции и потока:

$$\Gamma + i\Delta = \oint_C (P - iQ)(dx + i dy) = \oint_C w'(z) dz.$$

Если внутри контура функция w' имеет лишь конечное число особых точек, то этот интеграл сводится к сумме вычетов. В особой точке с $\Gamma \neq 0$ и $\Delta \neq 0$ находятся одновременно вихрь и источник либо сток.

Такую точку называют **вихреисточником** или **вихресток**ом, а в дифференциальных уравнениях — фокусом.



Пример. Комплексный потенциал $w = (a + ib) \operatorname{Ln} z$ обобщает два предыдущих примера. Это вихреисточник или вихресток обильности $2\pi a$ и интенсивности $-2\pi b$. В общем случае и эквипотенциали, и линии тока являются логарифмическими спиралями.

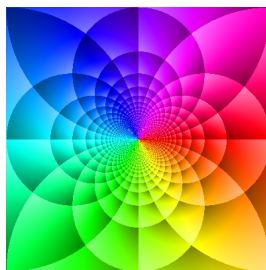
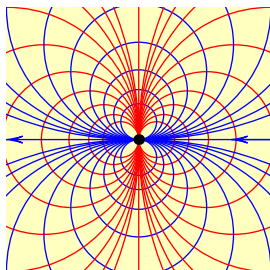
Пример. Функция $w = 1/z$ служит комплексным потенциалом течения на всей плоскости с особой точкой $z = 0$. Как эквипотенциали, так и линии тока являются окружностями, проходящими через начало координат: это инверсия декартовой сетки (с отражением).

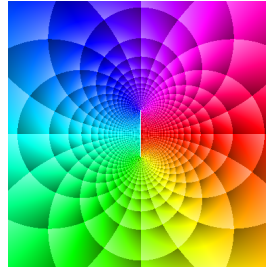
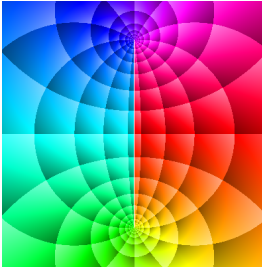
Отметим, что данное течение можно считать предельным случаем течений с источником и стоком противоположных обильностей, сходящихся в точке $z = 0$ при пропорциональном стремлении обильностей к бесконечности:

$$w = \frac{1}{z} = (\operatorname{Ln} z)' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Ln}(z + \delta) - \operatorname{Ln} z}{\delta}.$$

Такую точку называют **диполем**, а их вы встречали в электростатике.

Упражнение. Диполь даёт нулевую циркуляцию и нулевой поток.



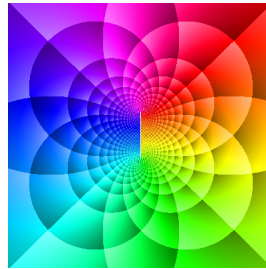
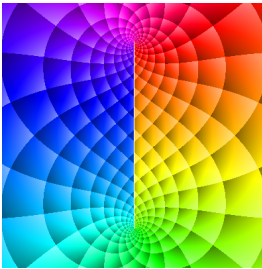


Примеры. Продолжим пример с диполем двумя парами картинок течений с двумя особыми точками. Вверху комплексный потенциал

$$w_1(z) = \text{Arcctg } z = \frac{i}{2} \text{Ln } \frac{z-i}{z+i},$$

а внизу $w_2(z) = (1+i)w_1(z)$. Картинки теперь нарисованы по методу цветных областей, но вместо выделения линий постоянного модуля или аргумента здесь скачками яркости выделены линии постоянной вещественной или мнимой части; значит, это эквипотенциали и линии тока. Особые точки стоят в $z = \pm i$. Там у w_1 вихри, хотя могли быть источник и сток, и отличить их от вихрей визуально было бы трудно. У w_2 — вихреисточник и вихресток. В каждой паре картинки отличаются масштабом, чтобы намекнуть на столкновение особых точек, порождающее диполь, а также частотой выделенных линий. Предельный диполь первой пары нарисован в том же стиле чуть выше, а для второй пары он отличается поворотом, то есть направлением дипольного момента (величиной тоже, но это не так бросается в глаза).

У первой пары эквипотенциали и линии тока являются окружностями, вернее, их дугами. Эти два ортогональных семейства окружностей нам встретились уже несколько раз, причём ближе всего две картинки первой пары к задаче 5 первого задания (про тангенс).



Обтекание цилиндров

В задачах на обтекание требуется определить комплексный потенциал поля скоростей, обтекающего заданные линии. Это соответствует пространственной задаче с цилиндрическими твёрдыми телами в жидкости, движущимися перпендикулярно образующей цилиндра. Таким образом, третье измерение пропадает из рассуждений. Цилиндром называют тело любого сечения; например, можно рассматривать профиль крыла, но здесь нам пока хватит задачи с кругом. Удобно считать тело покоящимся, а жидкость движущейся.

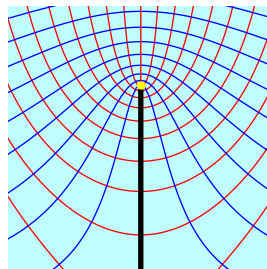
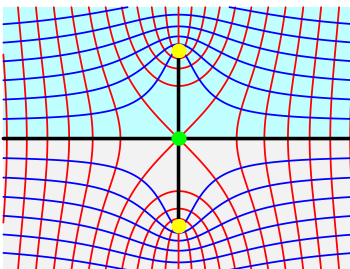
Пример. Для течения жидкости без препятствий берут верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$, где имеется простое течение с потенциалом $w(z) = az$ для подходящей постоянной a . Её берут вещественной и положительной: тогда вещественная ось является линией тока, причём жидкость движется направо, ибо a это в точности скорость течения.

Пример. Поставим течению препятствие, удалив из верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ отрезок $[0, i]$ мнимой оси. Чтобы найти комплексный потенциал, достаточно конформно отобразить область течения D на верхнюю полуплоскость $\text{Im } t > 0$. Для этого примера подходит функция $t = \sqrt{z^2 + 1}$, должно быть, знакомая по практическим занятиям:

- (1) возведение в квадрат разворачивает углы в точке $z = 0$;
- (2) добавка единицы сдвигает начало разреза в начало координат;
- (3) извлечение корня завершает отображение на полуплоскость.

Подставляя это отображение в первое течение $w(t) = at$, получаем $w(z) = a\sqrt{z^2 + 1}$. Постоянная a равна скорости течения вдали от препятствия, то есть на бесконечности, поэтому далее пишем v_∞ .

В этом примере на картинке хорошо видны: критическая точка $z = 0$ (седло) и особая точка $z = i$; линии тока, плавно огибающие



препятствие, сгущаясь вблизи особой точки (быстрое течение) и разреживаясь вблизи критической (медленное течение); взмывающие вверх эквипотенциали. Эквипотенциали удачно попадают в седловую точку. Из условия $\operatorname{Im} w = \operatorname{const}$ можно найти уравнение семейства линий тока. Ответ: линии четвёртого порядка $x^2 y^2 = c^2(x^2 - y^2 + 1 + c^2)$.

Пример. С целью изучить обтекание круглого цилиндра, начнём с его верхней половины. Тогда жидкость занимает бирюзовую область

$$D = \{z: |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Функция Жуковского $z \mapsto J(z) = t$ конформно отображает D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$. Комплексный потенциал в D равен

$$w(z) = aJ(z) = \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

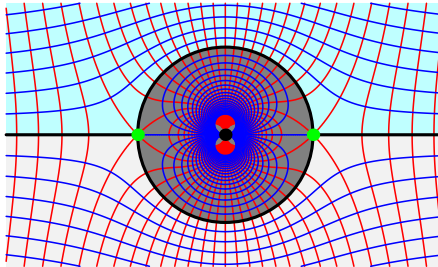
Постоянная за скобками равна скорости на бесконечности:

$$w'(z) = v_\infty\left(1 - \frac{1}{z^2}\right).$$

Точки $z = \pm 1$ критические, а именно — седловые. Отделяя мнимую часть $w(z)$, получим уравнения линий тока $v(x, y) = \operatorname{const}$:

$$y - \frac{y}{x^2 + y^2} = c, \quad (x^2 + y^2 - 1)y = c(x^2 + y^2).$$

При $c = 0$ обнаруживаются прямая и окружность, из частей которых состоит граница области D , как и положено для течений. В точке $z = 0$ сидит диполь, но он фиктивный, ибо эта точка не в зоне течения, а в центре обтекаемого твёрдого тела.



Пример. Перейдём теперь к целому круговому цилиндру. Во-первых, отражая найденное выше течение в нижнюю полуплоскость, увидим решение без циркуляции. Новых формул нет: все они в примере выше.

Во-вторых, возьмём противоположную крайность — чисто циркулярное течение, имеющее $v_\infty = 0$. Его потенциал запишем в виде

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z,$$

тогда интенсивность вихря в начале координат равна Γ , и такова же циркуляция вокруг сечения цилиндра.

В-третьих, складывая эти два решения, получим более общее:

$$w(z) = v_\infty \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z.$$

Картина линий тока здесь меняется в зависимости от соотношения величин v_∞ и Γ . При небольших $\Gamma > 0$ критические (седловые) точки течения смещаются вверх вдоль границы зоны течения. С увеличением Γ они сперва сближаются, затем при $\Gamma = 4\pi v_\infty$ совпадают в точке $z = i$, где случается «обезьянье седло». Далее последнее распадается на два обыкновенных седла; одна получившаяся критическая точка отрывается от сечения цилиндра и уходит вверх по мнимой оси, а другая прячется внутрь цилиндра.

Упражнение. В последнем примере проверьте, что в обезьяньем седле $w''(z) = 0$.

Глава 3. РЯДЫ

3.1. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

лекция 8
25.10.23

Напоминания основных свойств

В этой главе мы добавим к арсеналу доступных технических средств возможности функциональных рядов. Начнём с общих свойств, а потом сфокусируемся на степенных рядах.

Как и для числовых рядов, при изучении функционального ряда $\sum f_k(z)$ обычно говорят о частичных суммах и остатке (хвосте):

$$S_n(z) = \sum_{0 \leq k \leq n} f_k(z), \quad R_n(z) = \sum_{k > n} f_k(z).$$

Суммой ряда называют предельную функцию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z).$$

Из курса основ математического анализа вам известно, что сходимость функционального ряда просто в точках мало что даёт, ибо сумма не всегда наследует даже непрерывность. Полезной сходимостью является равномерная. Напомним сперва её основные свойства, для которых комплексность переменных и функций не играет никакой роли.

Ряд $\sum f_k(z)$ равномерно сходится к функции $f(z)$ на множестве $Z \subseteq \mathbb{C}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon)$, что $n > N$ влечёт $|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in Z$.

Критерий Коши позволяет устанавливать равномерную сходимость ряда на $Z \subseteq \mathbb{C}$ без знания его суммы, утверждая равносильность очень похожего высказывания: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon)$, что $m, n > N$ влечёт $|S_m(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in Z$.

Удобное достаточное условие равномерной сходимости даёт признак Вейерштрасса: если $|f_k(z)| \leq a_k$ для всех $z \in Z$ и числовой ряд $\sum a_k$ сходится, то функциональный ряд $\sum f_k(z)$ равномерно сходится на Z .

Если на множестве Z функции $f_k(z)$ непрерывны и ряд $\sum f_k(z)$ сходится равномерно, то его сумма непрерывна на Z .

Упражнение. Докажите, что если функции $f_k(z)$ аналитичны на замыкании $\overline{D}$ ограниченной области D и ряд $\sum f_k(z)$ сходится равномерно на границе D , то он также сходится равномерно на $\overline{D}$.

Почленное интегрирование

Теорема. Если на дуге γ функции $f_k(z)$ непрерывны и ряд $\sum f_k(z)$ сходится равномерно к функции $f(z)$, то его можно интегрировать почленно:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k \geq 0} \int_{\gamma} f_k(z) dz.$$

Доказательство. Для обычных интегралов по отрезку утверждение доказывалось в курсе основ математического анализа. Рассуждение для интегралов по дугам идентично по сути.

Функция $f(z)$ непрерывна и потому интегрируема по γ . Далее

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{0 \leq k \leq n} \int_{\gamma} f_k(z) dz = \int_{\gamma} (f(z) - S_n(z)) dz = \int_{\gamma} R_n(z) dz$$

можно оценить как $L\varepsilon$, где L это длина дуги γ , а ввиду равномерной сходимости условие $|R_n(z)| < \varepsilon$ на γ выполнимо для любого $\varepsilon > 0$. $\square$

«Первая» теорема Вейерштрасса

Равномерная сходимость лучше всего сочетается с ограниченными и замкнутыми (то есть компактными) множествами, но в нашем предмете повсюду области, а они открытые. Будем говорить для краткости, что некий ряд равномерно сходится **внутри** области D , если он равномерно сходится на каждом замкнутом круге $\bar{B} \subset D$. По теореме Гейне — Бореля о покрытиях, это равносильно равномерной сходимости на каждом компактном подмножестве $K \subset D$.

Теорема. Если однозначные функции $f_k(z)$ аналитичны на области D и ряд $\sum f_k(z)$ сходится равномерно внутри D , то:

- (1) его сумма $f(z)$ аналитична на D ;
- (2) его можно дифференцировать почленно,

$$f'(z) = \sum_{k \geq 0} f'_k(z);$$

- (3) ряд из производных сходится равномерно внутри D .

В вещественном анализе нет такой простой теоремы о дифференцировании суммы ряда. Равномерную сходимость ряда из производных там приходится предполагать дополнительно, а здесь она следует благодаря тому, что дифференцирование сведено к интегрированию.

Доказательство. (1) Сумма ряда непрерывна на всяком замкнутом круге $\bar{B}$ в D . Интегрируя ряд почленно по любому контуру γ в $\bar{B}$, получим нуль, и **теорема Мореры** обеспечивает аналитичность суммы на открытом круге B . Это влечёт её аналитичность на D , которая пригодится для упрощения доказательства второго утверждения.

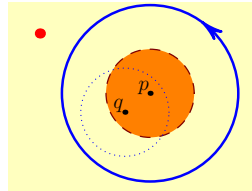
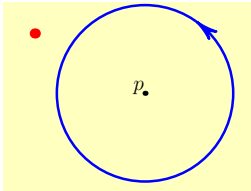
(2) Возьмём круг $B = B(p, r)$ внутри D , так что $C = \partial B \subset D$. Поскольку $|z - p| = r$ для любой точки $z \in C$, на этой окружности ряд

$$\frac{f(z)}{(z-p)^2} = \sum_{k \geq 0} \frac{f_k(z)}{(z-p)^2}$$

равномерно сходится. Проинтегрируем его почленно, затем применим интегральную формулу Коши для производных:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-p)^2} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f_k(z) dz}{(z-p)^2} \right) = \sum_{k \geq 0} f'_k(p).$$

По той же формуле левая часть равна $f'(p)$.



(3) Для точки q в круге $A = B(p, r/2)$ и точки z на прежней окружности $C = \partial B(p, r)$ всегда имеем $|z - q| > r/2$. Зная это, через хвост

$$\left| \sum_{k > n} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

исходного ряда на C оценим хвост ряда производных на круге A :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k > n} f'_k(q) \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \left| \sum_{k > n} \frac{f_k(z) dz}{(z-q)^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{r^2} \cdot \oint_C \left| \sum_{k > n} f_k(z) \right| |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{r^2} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi r = \frac{4\varepsilon}{r}. \end{aligned}$$

Сходимость ряда производных ожидаемо хуже, ведь r может быть малым. Однако это не затруднит нас ничуть, ибо исходный **хвост** сколь угодно мал при достаточно большом n . Значит, ряд из производных равномерно сходится на A , а потому и внутри области D . $\square$

Следствие. Второе и третье утверждения теоремы верны также для производных любого порядка.

Первое доказательство. Это работает вполне аналогично доказательству теоремы, но для производных порядка m надо в самом начале делить ряд на $(z - p)^{m+1}$. $\square$

Второе доказательство. По индукции. Почти весь смысл третьего утверждения теоремы в том, чтобы обеспечить индукцию. $\square$

3.2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Круг сходимости

Степенными называют ряды вида

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n, \quad \sum_{n \geq 0} c_n (z - p)^n$$

с постоянными коэффициентами c_n . Конечно, более общая вторая форма легко получается из более компактной первой простым сдвигом независимой переменной.

Основные свойства комплексных степенных рядов практически ничем не отличаются от вещественного случая, с которым вас знакомили на первом курсе, причём не только на уровне формулировок утверждений, но и на уровне доказательств. Даже ключевой термин **радиус сходимости** выдаёт исходную комплексную природу этой тематики. Кроме того, некоторые простые вопросы о радиусе сходимости не получают ответа в рамках вещественного анализа, однако легко решаются в комплексном. Таков, например, вопрос о радиусе сходимости ряда Тейлора в нуле для функции $\arctg x$: вычислить его несложно, но настоящая причина получаемого ответа лежит на комплексной плоскости вне вещественной оси.

«Первая» теорема Абеля утверждает, что если ряд $\sum c_n z^n$ сходится в точке $z = q \neq 0$, то он абсолютно сходится в круге $|z| < |q|$ и равномерно сходится внутри него. Максимальный такой круг называют **кругом сходимости** степенного ряда, а его радиус — радиусом сходимости. Если же ряд расходится в точке $z = q$, то он расходится при $|z| > |q|$. Сходимость в точках границы круга сходимости является более тонким вопросом.

Универсальная формула Коши — Адамара позволяет вычислить радиус сходимости R по коэффициентам ряда:

$$1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Бесконечный радиус сходимости означает сходимость на всей комплексной плоскости, а нулевой — расходимость на всей плоскости вне одной точки. Во многих практически важных случаях работает более простая формула, приписываемая Даламберу:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

Примеры. Для всякого вещественного числа s радиус сходимости ряда

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^s}$$

равен 1. При $s > 1$ ряд абсолютно сходится во всех точках границы, а при $s \leq 0$ он расходится во всех точках границы. При $0 < s \leq 1$ ряд сходится на границе кроме точки $z = 1$, но увидеть это сложнее.

Следствие. В круге сходимости степенного ряда:

- (1) его сумма является аналитической функцией;
- (2) его можно дифференцировать почленно;
- (3) его можно интегрировать почленно.

Доказательство. Теорема Абеля даёт равномерную сходимость ряда. Третье утверждение затем следует сразу, а остальные — из «первой» теоремы Вейерштрасса. $\square$

Упражнение. Проверьте, что формулы почленного интегрирования и дифференцирования не меняют радиус сходимости ряда.

Пример. Запишем сумму бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Радиус сходимости равен 1. В точке $z = 1$ полюс, так что нарушается аналитичность суммы. Почленное интегрирование даёт ряд для первообразной:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n \geq 0} \int_0^z \zeta^n d\zeta = \int_0^z \frac{d\zeta}{1-\zeta} = -\ln(1-z).$$

Теперь $z = 1$ — точка ветвления, и выбрана главная ветвь логарифма.

Пример. Аналогично можно найти ряд для арктангенса:

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \operatorname{arctg} z.$$

Видно, что строго придерживаться записи $\sum c_n z^n$ не всегда удобно.

Важно в этом примере то, что особенности в точках $z = \pm i$ объясняют, почему радиус сходимости равен 1, тогда как на вещественной оси для функции $\operatorname{arctg} x$ при этом значении не случается ничего особенного, и поведение ряда остаётся загадкой.

Ряд Тейлора

Возьмём аналитическую функцию, данную как сумма степенного ряда, и запишем её производную:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-p)^n \Rightarrow f'(z) = \sum_{n \geq 1} n c_n (z-p)^{n-1}.$$

Продифференцировав несколько раз, получим

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n \geq m} n(n-1) \cdots (n-m+1) c_n (z-p)^{n-m}.$$

Подставляя $z = p$, занулим слагаемые с $n > m$ и увидим равенство

$$c_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}.$$

Поэтому степенной ряд можно переписать в виде

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} (z-p)^n,$$

известном вам из вещественного анализа как ряд Тейлора для функции $f(z)$. Здесь $f^{(0)} = f$. Мы получили следующую теорему.

Теорема. *Всякий степенной ряд с положительным радиусом сходимости является рядом Тейлора для своей суммы.*

Следствие. *Если два степенных ряда $\sum a_n (z-p)^n$ и $\sum b_n (z-p)^n$ имеют одну и ту же сумму $f(z)$ в окрестности $|z-p| < \varepsilon$ точки p , то совпадают сами ряды: $a_n = b_n$ для всех целых $n \geq 0$.*

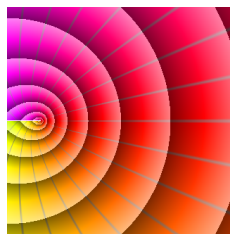
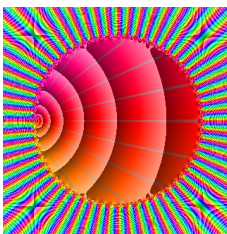
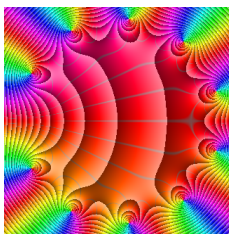
Упражнение. Докажите, что в ряде Тейлора в точке $z = 0$ (не)-чётной функции могут быть ненулевыми только коэффициенты при (не)чётных степенях.

Пример. Из ряда Тейлора для $\sin z$ моментально получается ряд

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} \pm \dots,$$

тоже сходящийся на всей комплексной плоскости, причём его сумма равна 1 при $z = 0$. Строго говоря, функция в левой части равенства в этой точке не определена, но имеет конечный предел, равный 1. Это пример **устранимой особой точки** аналитической функции. Обычно удобно расширять функцию такими конечными предельными значениями.

Пример. Другой «замечательный» предел из основ анализа связан с устранимой особенностью функции $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z}$, где взята главная ветвь логарифма. На картинках по методу цветных областей устранимые особенности не видны вообще, если не помечать их специально. Отрисованы полиномы Тейлора степеней 10 и 60, то есть частичные суммы ряда, этой функции в точке $z = 0$, а также сама функция.



Пример (биномиальный ряд). Возьмём однозначную ветвь многозначной аналитической функции,

$$f(z) = z^\lambda = \exp(\lambda \ln z), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

соответствующую главной ветви логарифма. Дифференцируя напрямую, найдём производные

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lambda \exp((\lambda - 1) \ln 1), \quad \dots, \\ f^{(n)}(1) &= \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) \exp((\lambda - n) \ln 1). \end{aligned}$$

Сдвинув переменную $z \mapsto z + 1$, получаем биномиальную формулу

$$(1 + z)^\lambda = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1)}{n!} z^n = \sum_{n \geq 0} \binom{\lambda}{n} z^n$$

в круге сходимости $|z| < 1$.

Сумма ряда, как и интеграл, являются главными способами введения новых функций, причём удачно дополняющими друг друга. Полезных и важных примеров с ними намного больше, чем возможно рассмотреть в рамках нашего курса.

Разложение аналитической функции

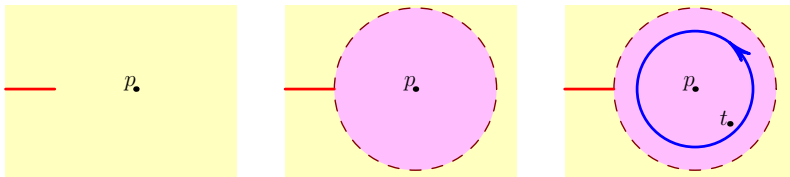
Интегральная формула Коши даёт возможность получить обращение теоремы о ряде Тейлора, цементируя связь аналитических функций со степенными рядами.

Теорема. Если однозначная функция аналитична в области D , то она разлагается в степенной ряд в каждом круге $B \subset D$.

Доказательство. Открытый круг $B = B(p, R)$ с центром в точке p полностью лежит в D , если его радиус R не превосходит расстояния от p до границы области D . Достаточно сразу считать, что R равно этому расстоянию. Нужно построить степенной ряд

$$\sum_{n \geq 0} c_n (z - p)^n,$$

сходящийся к заданной аналитической функции $f(z)$ в круге B .



Возьмём точку $t \in B$ и содержащий её круг $A = B(p, r)$ радиуса $r < R$. Тогда $\overline{A} \subset D$, так что в этом меньшем круге можно представить аналитическую функцию по интегральной формуле Коши:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial A} \frac{f(z) dz}{z - t}.$$

Разложим сомножитель $\frac{1}{z-t}$ в ряд по степеням $t-p$, а фактически геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{t-p}{z-p}$, причём $|q| < 1$:

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{(z-p) - (t-p)} = \frac{1}{z-p} \cdot \frac{1}{1-q} = \sum_{n \geq 0} \frac{q^n}{z-p}.$$

Под интегралом появляется ряд, который необходимо проинтегрировать почленно:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial A} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{f(z)q^n}{z-p} \right) dz = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial A} \frac{f(z) dz}{(z-p)^{n+1}} (t-p)^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} c_n (t-p)^n. \end{aligned}$$

Это законно, ибо при фиксированном t ряд сходится равномерно по $z \in \partial A$, потому что его слагаемые мажорируются членами сходящейся геометрической прогрессии:

$$\left| \frac{f(z)}{z-p} \cdot q^n \right| \leq \frac{M}{r} |q|^n, \quad \text{где } M = \max_{z \in \partial A} |f(z)|.$$

Получающиеся коэффициенты искомого ряда,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial A} \frac{f(z) dz}{(z-p)^{n+1}}, \quad n \geq 0,$$

не зависят от радиуса $r < R$ в силу теоремы Коши для составного контура. Тем самым найдено разложение функции $f(z)$ в круге B , исходно взятом в области D произвольно. $\square$

3.3. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ТЕЙЛОРА

Теорема Лиувилля

Следствие (неравенства Коши). *Если $|f(z)| \leq M$ в круге сходимости $|z-p| < R$ ряда Тейлора функции f , то все коэффициенты ряда удовлетворяют неравенствам $|c_n| \leq MR^{-n}$.*

Доказательство. Коэффициенты ряда, полученные в доказательстве теоремы, оценим на **окружности** $|z-p| = r$ меньшего радиуса:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-p)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}.$$

При этом можно брать r сколько угодно близким к R . $\square$

Определение. Аналитическую функцию на всей комплексной плоскости называют **целой**.

Следствие (теорема Лиувилля). *Ограниченная целая функция обязательно постоянна.*

Доказательство. В неравенства Коши входит $R = \infty$, поэтому все коэффициенты ряда кроме c_0 обязательно равны нулю. $\square$

Следствие. *Всякий непостоянный полином имеет нули в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Если полином $P(z)$ отличен от постоянной и нулей на комплексной плоскости не имеет, то функция $f(z) = 1/P(z)$ целая и стремится к нулю на бесконечности. В частности, она ограничена на внешности круга $|z| < R$ большого радиуса, а по **принципу максимума** также и в круге. Значит, она ограничена везде, и теорема Лиувилля вынуждает $f(z) = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$, что противоречит определению этой функции. $\square$

Равномерное приближение полиномами

Теорема. *Равносильны следующие условия на функцию $f(z)$:*

- (1) *она аналитична в круге $|z - p| < R$;*
- (2) *в каждом замкнутом круге $|z - p| \leq r < R$ её можно приблизить полиномом с произвольной точностью.*

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$ На каждом круге $|z - p| \leq r < R$ ряд Тейлора сходится равномерно, так что хвост его можно сделать меньше любого заданного ε , и тогда соответствующая частичная сумма является искомым полиномом.

$(2 \Rightarrow 1)$ Возьмём возрастающую последовательность вещественных чисел $r_n \rightarrow R$ и последовательность полиномов $s_n(z)$, удовлетворяющих условию $|f(z) - s_n(z)| < 1/n$ при $|z - p| < r_n$. Тогда $f(z)$ является суммой ряда полиномов,

$$f(z) = s_1(z) + \sum_{n \geq 1} (s_{n+1}(z) - s_n(z)),$$

имеющего частичными суммами как раз $s_n(z)$ и потому равномерно сходящегося внутри круга $|z - p| < R$, так что на нём $f(z)$ аналитична по «первой» теореме Вейерштрасса. $\square$

Задача Дирихле в круге

Разложение в ряд Тейлора функции $f(z)$, аналитической в замкнутом круге $|z - p| \leq R$, даёт другое выражение для решения задачи об определении гармонической в круге функции по её значениям на границе. Подставим $z = Re^{i\phi}$ в формулу для коэффициентов ряда:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - p)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(p + Re^{i\phi})}{(Re^{i\phi})^{n+1}} iRe^{i\phi} d\phi \\ &= R^{-n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + Re^{i\phi}) e^{-in\phi} d\phi. \end{aligned}$$

Последний интеграл очень напоминает формулу для коэффициентов Эйлера — Фурье периодической функции $\phi \mapsto f(p + Re^{i\phi})$, поэтому обозначим его вместе с множителем $1/2\pi$ через $a_n + ib_n$, заранее отделяя вещественную и мнимую части.

Подставим любую точку $z = p + re^{i\theta}$ круга $|z - p| \leq R$ в ряд:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - p)^n = \sum_{n \geq 0} R^{-n} (a_n + ib_n) \cdot r^n e^{in\theta}.$$

Таким образом, в полярных координатах с центром в точке p можно записать вещественную и мнимую части функции $f = u + iv$ в виде тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta), \\ v(r, \theta) &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r}{R}\right)^n (b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta). \end{aligned}$$

При желании можно придать этим равенствам векторную форму:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (r, \theta) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r}{R}\right)^n \begin{bmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{bmatrix}.$$

Обратите внимание на вид 2×2 матриц в каждом слагаемом.

Упражнение. Преобразуйте тригонометрический ряд для $u(r, \theta)$ в интеграл Пуассона.

Это больше упражнение по функциональному анализу, чем по комплексному, но связь предметов весьма полезна, ибо наука едина.

Изолированность нулей

лекция 9
01.11.23

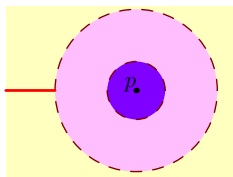
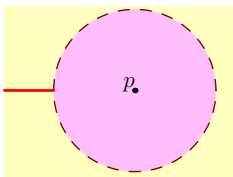
Теорема. Если однозначная функция f аналитична в области D и $f(p) = 0$ в точке $p \in D$, то ровно одно из двух утверждений можно выполнить принадлежащем выборе круга B с центром p :

- (1) либо $f(z) = 0$ во всех точках $z \in B$;
- (2) либо $f(z) \neq 0$ во всех точках $z \in B$ кроме $z = p$.

Доказательство. Разложение функции в точке $z = p$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} c_n (z - p)^n$$

и применимо в круге $B^* = B(p, \delta) \subseteq D$, где δ это расстояние от точки p до границы области D . Если сумма равна нулю тождественно, то первое утверждение верно для B^* в роли B .



В противном случае найдётся такой номер $m \geq 1$, что $c_n = 0$ при всех $n < m$ и $c_m \neq 0$. Тогда

$$f(z) = (z - p)^m \sum_{n \geq m} c_n (z - p)^{n-m} = (z - p)^m g(z).$$

Как сумма степенного ряда, функция $g(z)$ аналитична на том же круге B^* , притом $g(p) = c_m \neq 0$. Благодаря её непрерывности, $g(z) \neq 0$ всюду на достаточно малом круге $B = B(p, r)$, то есть верно второе утверждение. $\square$

Использованное представление $f(z) = (z - p)^m g(z)$ пригодится не только здесь. Число m называют **порядком** или **кратностью** нуля функции f в точке p . Его также можно определить условием на производные: $f^{(n)}(p) = 0$ при $0 \leq n < m$ и $f^{(m)}(p) \neq 0$.

Если функция имеет лишь конечное число нулей, то все они изолированные; это свойство любого конечного множества. Если множество нулей бесконечно, то на сфере Римана, которая компактна, у него обязательно есть предельная точка.

Пример. Простейшая нетривиальная функция с бесконечным множеством нулей это $\sin z$. Предельной точкой для них является $z = \infty$, а она всегда особая. С помощью дробно-линейного преобразования легко устроить функцию, множество нулей которой имеет конечную предельную точку: например, $\sin \frac{1}{z}$. У этой функции точка $z = 0$ особая, причём **такого типа**, который мы ещё не обсуждали, однако из вещественного анализа вы знаете, что в ней не существует предела функции. Как раз это отличает такую точку от полюсов, где предел существует и бесконечен.

3.4. Ряд Лорана

Первые примеры

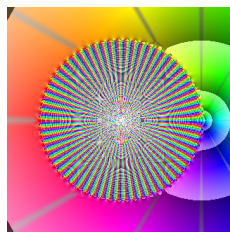
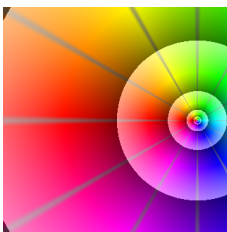
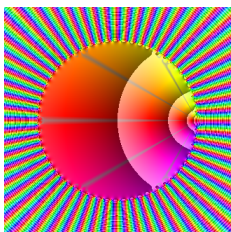
Пример. Посмотрим снова на аналитическую функцию, являющуюся суммой простейшей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots = \sum_{n \geq 0} z^n$$

в круге её сходимости $|z| < 1$, но теперь разложим её по-другому:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{z^{-1}}{z^{-1}-1} = -z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} \dots) \\ &= -z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} - z^{-4} - \dots = -\sum_{n < 0} z^n. \end{aligned}$$

Налицо геометрическая прогрессия со знаменателем z^{-1} , поэтому она сходится к той же функции в области $|z^{-1}| < 1$, то есть $|z| > 1$. Нарисованы: сама функция в центре и частичные суммы 60 слагаемых; слева разложение внутри единичного круга, а справа снаружи.



Как и первое, второе разложение имеет вид $\sum c_n z^n$, так что его можно считать разложением по степеням z , если позволять целые отрицательные показатели.

Пример. Аналогично разложим другую простую дробь. В круге $|z| < 2$ распишем геометрическую прогрессию со знаменателем $z/2$,

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1/2}{1-z/2} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n \geq 0} 2^{-n-1} z^n,$$

а в его внешности $|z| > 2$ соответственно со знаменателем $2/z$:

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1/z}{1-2/z} = -\frac{1}{z} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{2}{z}\right)^k = -\sum_{k \geq 0} 2^k z^{-k-1} = -\sum_{n < 0} 2^{-n-1} z^n.$$

Пример. Разложим в ряды по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

опять позволяя отрицательные показатели степени. Учитывая два предыдущих примера, сейчас нам остаётся написать разность рядов, выбрав правильные варианты в зависимости от значения $|z|$. Можно получить ровно три таких разложения, применимых в трёх областях:

$$|z| < 1, \quad 1 < |z| < 2, \quad |z| > 2.$$

В каждой из них наша функция аналитична, но на границах имеет особые точки $z = 1$ и $z = 2$.

В круге $|z| < 1$ увидим обычный ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} (1 - 2^{-n-1}) z^n.$$

Во внешней области $|z| > 2$ для обеих дробей нужно выбрать внешние разложения, поэтому там будет ряд только отрицательных степеней:

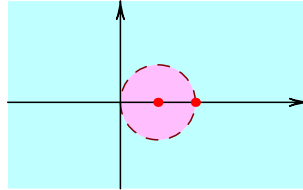
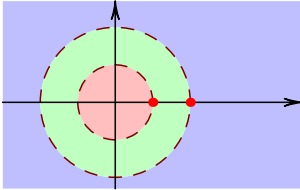
$$f(z) = \sum_{n < 0} (2^{-n-1} - 1) z^n.$$

Самый интересный вариант получается в кольце $1 < |z| < 2$, где для одной дроби нужно брать обычное (внутреннее) разложение, а для другой — внешнее:

$$f(z) = -\sum_{n \geq 0} 2^{-n-1} z^n - \sum_{n < 0} z^n.$$

В итоге разложение функции в кольце содержит слагаемые z^n для всех целых n , то есть это ряд, бесконечный в обе стороны:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n, \quad c_n = \begin{cases} -1 & \text{при } n < 0, \\ -2^{-n-1} & \text{при } n \geq 0. \end{cases}$$



Пример. Чтобы разложить ту же функцию по степеням $z-1$, запишем

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-(z-1)}$$

и раскроем второй множитель в геометрическую прогрессию как в первом примере. При $0 < |z-1| < 1$ получим

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} \sum_{n \geq 0} (z-1)^n = - \sum_{n \geq -1} (z-1)^n,$$

а при $|z-1| > 1$ получим

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \sum_{n < 0} (z-1)^n = \sum_{n < -1} (z-1)^n.$$

Правильная и главная части

Определение. **Рядом Лорана** называют ряд вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-p)^n.$$

Его **правильная часть** состоит из слагаемых с $n \geq 0$, а его **главная часть** — из слагаемых с $n < 0$.

Пример. В последнем примере разложение в области $0 < |z-1| < 1$ имеет главную часть из одного слагаемого $-(z-1)^{-1}$, а разложение в области $|z-1| > 1$ имеет правильную часть, равную нулю.

Правильная часть ряда Лорана является степенным рядом, поэтому му сходится в некотором круге $|z-p| < R$. Главную часть ряда Лорана

можно превратить в степенной ряд, взяв $(z - p)^{-1}$ за новую переменную. Значит, главная часть сходится во внешности некоторого круга, то есть при $|z - p| > r$. Если $r < R$, то весь ряд Лорана, равный сумме своих правильной и главной частей, сходится на пересечении их областей сходимости, а значит, в кольце $r < |z - p| < R$. Из рассмотренных выше примеров сюда подходят варианты $1 < |z| < 2$ и $0 < |z - 1| < 1$. Второй — это круг с выколотым центром, но его можно считать частным случаем кольца с нулевым внутренним радиусом.

Следствие. Если ряд Лорана $\sum c_n(z-p)^n$ сходится в круговом кольце $r < |z - p| < R$, то его сумма является однозначной аналитической функцией на этом кольце.

Теорема Лорана

Теорема. Всякая однозначная аналитическая функция на кольце A является суммой ряда Лорана, равномерно сходящегося внутри A .

Доказательство. Однозначную функцию f , аналитическую на

$$A = \{z: r < |z - p| < R\},$$

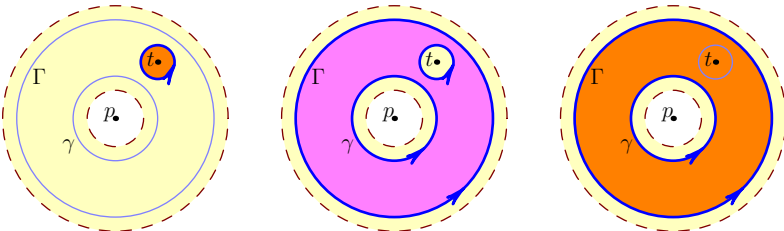
нужно представить в виде суммы ряда Лорана:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(z - p)^n.$$

Поступим аналогично построению разложения в ряд Тейлора в круге.

Возьмём точку $t \in A$ и содержащее её кольцо, граница которого состоит из двух окружностей с тем же центром p , лежащих в A . Обозначим их через γ и Γ , ориентируя обе против часовой стрелки. Также возьмём небольшую окружность K вокруг точки t . Применим интегральную формулу Коши, а затем деформируем контур:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z) dz}{z - t} = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\Gamma} - \oint_{\gamma} \right) \frac{f(z) dz}{z - t}.$$



Теперь поработаем отдельно сперва на внешней окружности Γ , а потом на внутренней окружности γ .

На Γ разложим множитель $\frac{1}{z-t}$ в ряд по степеням $t-p$, дословно повторяя **этот шаг** построения разложения в ряд Тейлора. Поскольку точка t лежит внутри Γ , получается геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{t-p}{z-p}$, а её почленное интегрирование даёт

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z-t} = \sum_{n \geq 0} c_n (t-p)^n.$$

Это будет правильной частью искомого ряда Лорана.

На γ тоже разложим множитель $\frac{1}{z-t}$ в ряд по степеням $t-p$. Однако теперь точка t лежит вне γ , так что по аналогии с рассмотренными в начале раздела примерами возьмём внешнее разложение, а именно, геометрическую прогрессию со знаменателем q^{-1} и первым членом $-q^{-1}$. Минус этот удачно компенсирует минус перед интегралом по γ . Повторяя ещё раз **выкладку** с почленным интегрированием, получим главную часть искомого ряда Лорана:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-t} = \sum_{n < 0} c_n (t-p)^n.$$

Складывая оба ряда и заменяя переменную t на z , получаем искомое разложение. $\square$

Интегральные формулы для коэффициентов c_n ряда Лорана называются единообразными для всех значений n , то есть такими же, как для коэффициентов ряда Тейлора:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-p)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь C может быть любой окружностью, гомотопной внешней границе кольца, поскольку подынтегральная функция аналитична в кольце. Правда, практическое значение этого выражения невелико.

Следствие. *Разложение аналитической функции в ряд Лорана в заданном круговом кольце единственно.*

Доказательство. Покажем, что если внутри выбранного кольца

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-p)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n (z-p)^n,$$

подразумевая равномерную сходимость внутри кольца, то $a_n = b_n$ для всех индексов n . Поделим равенство на $(z - p)^{n+1}$ и проинтегрируем почленно. Получим $2\pi i a_n = 2\pi i b_n$. $\square$

Следствие. *Вычет в любой конечной изолированной особой точке $z = p$ однозначной аналитической функции f равен коэффициенту c_{-1} её ряда Лорана в кольце $0 < |z - p| < R$, не содержащем прочих особых точек.*

Пример. Вычет функции $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ в изолированной особой точке $z = 0$ равен 1. Ряд Лорана легко получить, подставляя $1/z$ вместо z в ряд Тейлора функции $\sin z$ в нуле.

3.5. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Классификация

Оставив в стороне ветвление, различают три типа изолированных особых точек, причём два простейших мы уже не стеснялись обсуждать, а наиболее сложный — стеснялись.

Определение. Тип изолированной особой точки $z = p$ однозначной аналитической функции определяется пределом этой функции при $z \rightarrow p$:

- предел существует и конечен — **устраняемая точка**;
- предел существует и бесконечен — **полюс**;
- предел не существует — **существенно особая точка**.

Примеры. Точка $z = 0$ является существенно особой для функций $\exp \frac{1}{z}$, $\cos \frac{1}{z}$, $\sin \frac{1}{z}$. У функций типа $\operatorname{tg} \frac{1}{z}$ и $\sec \frac{1}{z}$ эта точка ещё хуже: она является предельной для полюсов, то есть неизоллированной.

В одном из примеров выше мы строили ряд Лорана в кольце, внутренний радиус которого равен нулю. Это значит, что функция аналитична в круге, за исключением его центра; иными словами, центр является изолированной особой точкой. Тогда говорят о разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Сосредоточимся на главной части такого ряда. Просматривается три варианта её строения принципиально различной сложности:

- она равна нулю (нет слагаемых);
- она состоит из конечного числа слагаемых;
- она состоит из бесконечного числа слагаемых.

Оказывается, три случая в точности соответствуют трём типам точек, и наша ближайшая цель теперь — установить это соответствие.

Теорема. *Главная часть ряда Лорана в окрестности конечной изолированной особой точки аналитической функции состоит из указанного числа слагаемых в соответствии с типом точки:*

- нет их в устранимой точке;
- конечное их число в полюсе;
- бесконечное их число (ряд) в существенно особой точке.

Доказательство. Устранимые точки и полюсы будут обработаны в упражнениях и леммах. Случай существенно особых точек следует, поскольку он является альтернативой первым двум при рассмотрении как предела, так и главной части ряда Лорана. $\square$

Устранимая особая точка

Для краткости будем обозначать через $N_p(f)$ главную часть ряда Лорана функции f в окрестности точки p .

Упражнение. Если $N_p(f) = 0$, то:

- (1) функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки p ;
- (2) предел $f(z)$ при $z \rightarrow p$ конечен.

Лемма. Если предел $f(z)$ при $z \rightarrow p$ конечен, то $N_p(f) = 0$.

Доказательство. Имея конечный предел в точке, функция обязательно ограничена в её окрестности, и в частности на некотором кольце:

$$0 < |z - p| < R \quad \Rightarrow \quad |f(z)| < M < \infty.$$

Тогда можно оценить коэффициенты ряда Лорана: $|c_n| \leq Mr^{-n}$ при всех $r < R$. Оценка делается аналогично **неравенствам Коши** для коэффициентов ряда Тейлора, являющегося частным случаем ряда Лорана. Устремив $r \rightarrow 0$, видим $c_n = 0$ при всех $n < 0$. $\square$

Упражнение и лемма вместе дают искомое соответствие в случае устранимой точки. Попутно показано, что вместо конечности предела функции можно смотреть на её ограниченность вблизи точки.

Примеры. Уже упоминались **два примера** функций с устранимыми особенностями: $\frac{\sin z}{z}$ и $\frac{\ln(1+z)}{z}$. Также часто встречается функция $\frac{z}{e^z - 1}$.

Полюс и его порядок

Если в кольце $0 < |z-p| < R$ однозначная функция $g(z)$ аналитична, причём $g(p) \neq 0$, то для каждого целого $m > 0$ функция

$$f(z) = g(z)/(z-p)^m$$

имеет полюс в точке $z = p$. Разложив тут $g(z)$ в ряд Тейлора, получим для $f(z)$ представление в виде ряда по степеням $z-p$. Ввиду единственности разложения в ряд Лорана, это он и есть, причём главная часть состоит из конечного числа слагаемых, а степень «главнейшего» равна $-m$. В таком случае говорят о полюсе **порядка** или **кратности** m . Полюс первого порядка называют **простым**.

Чтобы завершить описание полюсов, нужно обратить отмеченное свойство, то есть организовать представление такой дробью.

Упражнение. *Равносильны следующие условия в точке $z = p$:*

- (1) *функция $f(z)$ имеет полюс порядка m ;*
- (2) *функция $1/f(z)$ имеет нуль порядка m .*

Лемма. *Если предел $f(z)$ при $z \rightarrow p$ бесконечен, то найдутся такое целое число $m > 0$ и такая функция $g(z)$, аналитическая в некотором кольце $0 < |z-p| < r$, причём $g(p) \neq 0$, что $f(z) = g(z)/(z-p)^m$.*

Доказательство. Требуемое кольцо обозначим через A , а его внешний радиус r выберем таким, чтобы $f(z)$ была аналитична в A и $|f(z)| > 1$ для всех точек $z \in A$. Тогда функция $h(z) = 1/f(z)$ аналитична в A и имеет устранимую точку $z = p$ с пределом $h(z) \rightarrow 0$. Заклеив особенность этим значением, получим аналитическую функцию в круге $|z-p| < r$, имеющую в его центре нуль какого-то порядка m . Тогда в этом круге $h(z) = (z-p)^m/g(z)$ для подходящей аналитической функции $g(z)$, причём $g(p) \neq 0$. $\square$

Полюсы конструкций

Описание главной части ряда Лорана в окрестности полюса позволяет разобраться в нескольких ситуациях, когда появляются полюсы.

Следствие. *Если однозначные функции f и $g \neq 0$ аналитичны в области D , то функция $h = f/g$ может иметь в D особые точки, а именно полюсы, только в нулях функции g .*

Следствие. Если однозначные функции f и g не имеют в области D особых точек, кроме полюсов, то это же верно про функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и f/g , где частное определено при условии $g \neq 0$.

Упражнение. Докажите эти два следствия и напишите точные условия возникновения полюса кратности m .

Следствие. Если однозначная функция не имеет в области D особых точек, кроме полюсов, то это же верно про её производную. А именно, функция f' имеет полюс в каждом полюсе функции f , причём на единицу большей кратности.

Следствие. Если непостоянная однозначная функция не имеет в области D особых точек, кроме полюсов, то это же верно про её логарифмическую производную. А именно, функция $(\operatorname{Ln} f)' = f'/f$ имеет простой полюс в каждом полюсе и каждом нуле функции f .

Упражнение. Докажите эти два следствия.

Примеры. Функции $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ и $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ имеют простые полюсы в нулях знаменателей. Позже упомянуты **неэлементарные примеры**.

Бесконечно удалённая точка

Точка $z = \infty$ всегда считается особой. Появляется она только при рассмотрении аналитической функции на расширенной комплексной плоскости, или на сфере Римана, что равносильно. На сфере легко дать условие изолированности этой особой точки, а на плоскости оно превращается в предположение аналитичности функции во внешности достаточно большого круга — при $|z| > R \gg 1$, которое сейчас делаем.

Замена переменной $z = 1/t$ сводит изучение функции $f(z)$ на бесконечности к изучению функции $g(t) = f(1/t)$ вблизи нуля, который будет особой точкой. Согласно её типу, точку $z = \infty$ называют устранимой, полюсом порядка m , или существенно особой для функции f . Пределы $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$ и $g(t)$ при $t \rightarrow 0$ ведут себя одинаково: существуют или нет одновременно и в первом случае равны. Написав же ряд Лорана для $g(t)$ в точке $t = 0$, можно вернуться к переменной z :

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k, \quad f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^{-k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{-n} z^n.$$

Это считается разложением $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности. Главной его частью называют ту, которая соответствует главной части ряда для $g(t)$ в окрестности нуля, так что туда входят z^n при $n > 0$.

Пример. У рациональной функции $P_m(z)/Q_n(z)$, где степени числителя и знаменателя указаны индексами, ряд Лорана в окрестности бесконечности включает только слагаемые z^k с показателями $k \leq m - n$, причём z^{m-n} точно появляется. Если $m \leq n$, то точка $z = \infty$ является устранимой, иначе — полюсом порядка $m - n$.

Пример. У многозначной функции $\operatorname{Arctg} z$ возможно выделение однозначных ветвей в окрестности бесконечности. При этом каждая ветвь имеет конечный предел при $z \rightarrow \infty$, так что устранимую особенность.

Упражнение. Выпишите ряд Лорана для таких ветвей.

Устранимые особенности далее молча заклеиваем предельным значением, в том числе и находящиеся на бесконечности.

Упражнение. Докажите, что если $f(z) \rightarrow c_0$ при $z \rightarrow \infty$, то есть точка $z = \infty$ для функции $f(z)$ является устранимой, то

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = - \lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - c_0)z.$$

Подъёмная сила крыла

В конце предыдущей главы мы немного изучали **течения жидкост**и вокруг препятствия, ограниченного контуром C , охватывающим точку $z = 0$. Со знанием рядов Лорана у нас появляется возможность развить этот прикладной сюжет до знаменитого результата, лежащего в основах аэродинамики. Исходим из формулы Бернулли — Эйлера

$$p = A - \frac{1}{2}\rho v^2,$$

связывающей давление p со скоростью потока v ; сюда вовлечена постоянная плотность ρ и другая постоянная A , которая вскоре исчезнет.

Вычислим силу P давления на контур. На элементе dz она направлена по внутренней нормали, а потому по правилу согласования ориентаций равна $pi\,dz$: при обходе границы конечная твёрдая область остаётся слева, и умножение на i как раз поворачивает вектор влево.

При полном обходе контура слагаемое A даёт нулевой вклад, и

$$P = \oint_C p i dz = -\frac{i}{2}\rho \oint_C v^2 dz.$$

Контур C состоит из линий тока, так что на нём запишем скорость как $\mathbf{V} = \overline{w'(z)} = v e^{i\phi}$, где $\phi = \arg dz$. Заметим, что тогда $\overline{dz} = e^{-2i\phi} dz$, и поэтому $v^2 \overline{dz} = w'(z)^2 dz$. Получаем общую формулу Чаплыгина,

$$\overline{P} = \frac{i}{2}\rho \oint_C w'(z)^2 dz.$$

В задаче предполагается, что комплексная скорость $w'(z)$ на бесконечности имеет конечный предел $c_0 = \overline{\mathbf{V}_\infty}$. Разложение Лорана в окрестности бесконечности имеет нулевую главную часть, так что

$$w'(z) = c_0 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z^{-1} + c_{-2} z^{-2} + \dots$$

Здесь уже учтено отсутствие источников и наличие вихрей. Подставим это разложение в формулу Чаплыгина и сведём интеграл к вычету:

$$\overline{P} = -\frac{i}{2}\rho \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=\infty} (w'(z)^2) = -\pi\rho \cdot 2 \cdot \frac{\Gamma}{2\pi i} c_0 = i\rho\Gamma c_0.$$

Приходим к общей формуле Жуковского,

$$P = -i\rho\Gamma\mathbf{V}_\infty.$$

Подъёмная сила равна произведению плотности, циркуляции и скорости в бесконечности и направлена к последней под прямым углом. На практике $\Gamma < 0$, так что вектор P направлен вверх.

Величина циркуляции должна быть задана из физических соображений, причём тесна связь с геометрией задачи. В рассмотренном ранее случае обтекания кругового цилиндра контур C является единичной окружностью, и расположение на ней критических точек зависит от соотношения между $v_\infty = |\mathbf{V}_\infty|$ и Γ . В первой критической точке поток встречает препятствие и делится на две части; они соединяются во второй критической точке, называемой точкой схода потока.

На задней кромке крыла **профиль Жуковского** обладает точкой заострения. Чаплыгин предложил считать, что под влиянием вязкости и образования вихрей точка схода потока смещается в точку заострения. Из этого следует ограниченность скорости у острой кромки. Условие Чаплыгина позволяет выразить циркуляцию, а потому и подъёмную силу, через геометрические параметры профиля Жуковского.

Существенно особая точка

лекция 10
03.11.21

Пример. Изучим подробнее поведение функции $w = e^z$ на бесконечности. Областью значений является вся комплексная плоскость без нуля. Всякая горизонтальная полоса

$$\{z: \lambda < \operatorname{Im} z < \lambda + \alpha\}$$

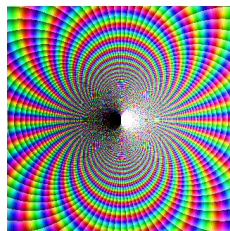
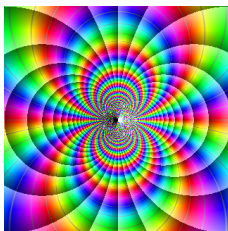
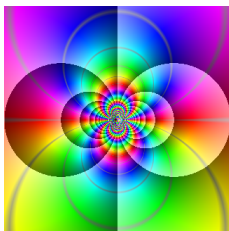
ширины α плоскости переменной z переходит в сектор

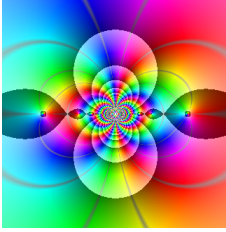
$$\{w: \lambda < \operatorname{Arg} w < \lambda + \alpha\}$$

раствора α плоскости w . При $\alpha = 2\pi$ образ полосы покрывает всю область значений, если включить хотя бы одну из граничных прямых. Возьмём теперь окрестность U точки $z = \infty$, то есть область $|z| > R$. При любом R найдётся такая полоса, лежащая целиком в U . Значит, в любой окрестности бесконечности есть точки, отображаемые экспонентой в заданную точку плоскости w , кроме нуля. Ноль не в образе, но это предельная точка образа: легко явно указать такие последовательности $z_n \rightarrow \infty$, что $\exp z_n \rightarrow 0$.

Описанное в первом примере поведение функции вблизи её существенно особой точки универсально, о чём ниже есть теорема.

Пример. По методу цветных областей отрисована функция $f(z) = \exp \frac{1}{z}$ вблизи точки $z = 0$ в трёх масштабах: длина стороны квадрата равна соответственно 1, $1/4$, $1/16$. К центру слева примыкает чёрное пятно, в котором $f(z) \rightarrow 0$, а справа — белое пятно, в котором $f(z) \rightarrow \infty$. На мнимой оси $|f(z)| = 1$ при $z \neq 0$, но бешено крутится аргумент. Линии постоянного модуля и линии постоянного аргумента тут являются окружностями, проходящими через точку $z = 0$, так что картина в целом, без учёта смысла линий, напоминает диполь.





Пример. Аналогично отрисована функция $f(z) = \sin \frac{1}{z}$. Чёрного пятна тут нет, ибо сложение двух экспонент создаёт доминирующие белые пятна с обеих сторон от вещественной оси, но на самой оси $|f(z)| \leq 1$ и две едва заметные цепочки ям с нулями.

Теорема (Сохотский). Когда $z = p$ это существенно особая точка аналитической функции $f(z)$, для любого $a \in \mathbb{C}$ существует такая последовательность точек $z_n \rightarrow p$, что $f(z_n) \rightarrow a$.

Разбирать доказательство этой теоремы лучше после усвоения сказанного ниже про **главные части и целые функции**.

Доказательство. Сперва рассмотрим случай $p = \infty$ и $a = \infty$.

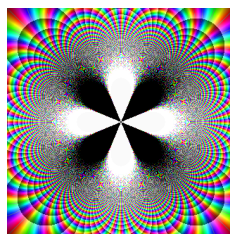
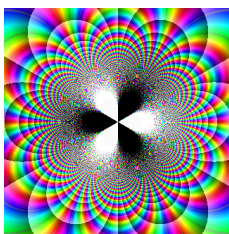
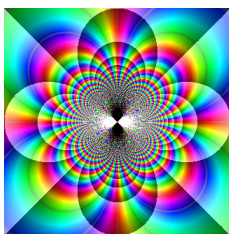
Правильная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ имеет предел, равный коэффициенту c_0 , а главная часть представляет целую функцию $g(z)$, которая не имеет предела и потому не постоянна. По **теореме Лиувилля**, $g(z)$ не может быть ограниченной. Для каждого номера $n \geq 1$ возьмём такую точку z_n , что $|z_n| > n$ и $|g(z_n)| > n$. Тогда $z_n \rightarrow \infty$ и $g(z_n) \rightarrow \infty$, а вместе с тем $f(z_n) \rightarrow \infty$.

При $p \neq \infty$ и $a = \infty$ сделаем замену переменной $t = \frac{1}{z-p}$ и попадём в уже доказанный случай.

Для конечного a может случиться, что в любой окрестности точки p есть такие точки z , что $f(z) = a$, и тогда теорема верна. Если же в некоторой окрестности U нет таких точек, то перейдём к функции

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - a},$$

аналитичной в U , кроме существенно особой точки $z = p$. Как доказано выше, существует такая последовательность $z_n \rightarrow p$, что $h(z_n) \rightarrow \infty$, откуда следует $f(z_n) \rightarrow a$. $\square$



Примеры. Отрисованы функции $\exp(z^{-n})$ при $n = 2, 3$ и 4 . Сторона квадрата равна 1. Половина площади белых пятен залита машинной бесконечностью ($\sim 10^{300}$), а чёрных — машинным нулём.

Также анимации масштаба для $\exp(z^{-n})$ при $n = 1$ и $n = 8$.

3.6. ЦЕЛЫЕ И МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Целые функции и главные части

Целая функция **по определению** не имеет конечных особых точек, так что она является суммой степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n,$$

сходящегося на всей комплексной плоскости и одновременно являющегося её рядом Лорана в окрестности точки $z = \infty$. Особая точка на бесконечности у целой функции устранима, только если функция постоянна, ибо конечный предел влечёт ограниченность. Если же там полюс, то главная часть конечна, а потому $f(z)$ это полином.

Пример. Функция e^z является целой, то есть не имеет конечных особых точек. При этом её ряд Тейлора в нуле,

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!},$$

одновременно является её рядом Лорана в окрестности точки $z = \infty$. В таком смысле его правильная часть равна 1, а главная часть бесконечна, поэтому там существенно особая точка.

Это же можно сказать о функциях $\cos z$, $\sin z$, а также о многих с ними связанных. Их называют **трансцендентными** целыми функциями.

Упражнение. Целую функцию $f(z)$, не имеющую нулей, можно представить в виде $f(z) = \exp g(z)$, где функция $g(z)$ также целая.

Упражнение. Главная часть ряда Лорана любой аналитической функции f в окрестности изолированной особой точки $p \in \mathbb{C}$:

- (1) в случае $p = \infty$ представляет целую функцию;
- (2) в случае $p \neq \infty$ представляет функцию $g(\frac{1}{z-p})$ для некоторой целой функции g .

Во втором случае, ради которого упражнение и вставлено сюда, главная часть имеет на бесконечности устранимую точку с нулевым предельным значением, ибо она включает только отрицательные степени $z - p$.

Следствие. Главная часть ряда Лорана любой аналитической функции f в окрестности изолированной особой точки $p \in \mathbb{C}$:

- (1) является аналитической функцией на $\mathbb{C}$ вне p ;
- (2) в точке p имеет такую же особенность, как функция f .

Разложение на простейшие дроби

лекция 10
08.11.23

Определение. Функцию называют **мероморфной**, если она представима частным двух целых функций.

Термин происходит от греческих корней, означающих *дробь* и *форма*. Для аналитических функций тоже в ходу синонимичный термин с греческими корнями: голоморфные, то есть *цельная форма*.

Упражнение. Всякая функция, аналитическая на всей комплексной плоскости, кроме конечного числа полюсов, мероморфна.

Пример. Разложим рациональную функцию на простейшие дроби:

$$f(z) = \frac{z^3 + z^2 + z - 1}{z^2 - 1} = \dots = z + 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}.$$

Эта функция имеет полюсы в точках $z = \pm 1$ и ∞ , причём главные части в них равны трём выделенным слагаемым.

Обобщим теперь этот пример. Мы уже знаем, что конечные особые точки мероморфной функции обязательно полюсы. Возьмём мероморфную функцию $f(z)$ с конечным числом полюсов в различных конечных точках $z = p_k$. Пригодятся обозначения для главных частей

её рядов Лорана: $g_k(z)$ в окрестности полюса p_k и $g(z)$ в окрестности бесконечности; при этом $g(z)$ является целой функцией.

Упражнение о связи главных частей и целых функций влечёт представление нашей функции в виде суммы целой и рациональной:

$$f(z) = c_0 + g(z) + \sum g_k(z),$$

где c_0 это постоянное слагаемое ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности бесконечности. Если $f(z)$ на бесконечности имеет полюс, то $g(z)$ является полиномом, поэтому $f(z)$ оказывается рациональной, и мы доказали возможность её разложения на простейшие дроби. Однако рассуждение проходит и в случае трансцендентной функции $g(z)$, то есть существенной особенности функции $f(z)$ на бесконечности.

Теорема. *Всякая функция, аналитическая на расширенной комплексной плоскости, кроме конечного числа полюсов, рациональна и обладает указанным выше разложением в сумму главных частей.*

Схема доказательства. Такая функция мероморфна по упражнению, а дальнейшее рассуждение обрисовано перед формулировкой. $\square$

Когда указана аналитичность именно на расширенной плоскости, излишне предполагать, что число полюсов конечно, ибо это сразу же следует: если их бесконечно много, то ввиду компактности сферы (Римана) у множества полюсов будет предельная точка, и в ней тогда неизолированная особенность. Если функция мероморфна, то такая особенность может быть только в бесконечно удалённой точке.

Теорема о разложении мероморфной функции в сумму её главных частей в окрестностях особых точек показывает, что основная информация об аналитической функции заключена именно в её особых точках, вместе с главными частями. Это утверждение допускает физическую интерпретацию: если трактовать аналитическую функцию $w(z)$ как **комплексный потенциал** векторного поля, то особые точки будут элементами, определяющими поле. Слагаемые $(z - p)^n$ главной части функции $w'(z)$ в конечной особой точке $z = p$ дают при $n = -1$ вихреисточник, при $n = -2$ диполь, при $n = -3$ квадруполь, и так далее.

Бесконечное число полюсов

Функции с бесконечным числом полюсов встречаются достаточно часто, а простейшими из них являются тангенс и котангенс. Можно ли обобщить разложение на простейшие дроби на такой случай?

Упражнение. Все полюсы мероморфной функции можно перенумеровать, расположив их в порядке неубывающих модулей.

Пример. Полюсы функции $\operatorname{ctg} z$ перенумеруем так, что положительные получают чётные номера, а отрицательные — нечётные:

$$\{p_0, p_1, p_2, \dots\} = \{0, -\pi, \pi, -2\pi, 2\pi, -3\pi, 3\pi, \dots\}.$$

Пытаясь ответить на вопрос про обобщение разложения, перенумеруем полюсы и далее столкнёмся с проблемой сходимости ряда $\sum g_k(z)$ из главных частей. Она решается специальным приёмом: подбором таких поправочных полиномов $h_k(z)$, что ряд $\sum (g_k(z) - h_k(z))$ сходится равномерно внутри каждого круга $|z| < R$ в том смысле, что его хвост равномерно стремится к нулю (эта оговорка нужна из-за наличия полюсов у частичных сумм), а $\sum h_k(z)$ учитывается отдельно. Детали громоздки, и мы не будем их изучать, кроме пары примеров.

рисунок

Пример. Полюсы функции $\operatorname{ctg} z$ перенумерованы выше. Все они первого порядка, вычеты равны 1, так что главная часть в полюсе $z = \pi n$ равна $\frac{1}{z - \pi n}$. Сходящимся вскоре оказывается разложение

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z + \pi n} + \frac{1}{z - \pi n} \right).$$

В первой сумме видны те самые специальные добавки, которые здесь просто константы, а во второй попарно собраны соседние слагаемые, и при этом добавки сократились. Вторую сумму вы уже могли видеть в вещественном анализе.

Пример. Полюсы функции $\operatorname{csc}^2 z = 1/\sin^2 z$ находятся в тех же точках $z = \pi n$ с прежней хитрой нумерацией. Хвост ряда из главных частей

$$g_k(z) = \frac{1}{(z - p_k)^2}$$

равномерно стремится к нулю на любом круге $|z| < R$, потому что мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum g_k(R)$, тогда как в предыдущем примере аналогичный числовой ряд расходится. Кроме того, сумма ряда из главных частей стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$ в полосе $|\operatorname{Re} z| \leq \pi$, и это же верно про исходную функцию. Значит, их разность ограничена в этой полосе, а ввиду периодичности и на всей плоскости.

По **теореме Лиувилля** разность постоянна, то есть равна нулю, так что

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - \pi n)^2}.$$

Интегрируя почленно разложение функции $\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2}$, получим написанное в предыдущем примере разложение котангенса.

Разложение в бесконечное произведение

Простейшие целые функции — это, конечно, полиномы. Для них, как следствие основной теоремы алгебры полиномов, мы знаем разложение на множители:

$$P_m(z) = a(z - z_1) \times \dots \times (z - z_m) = a \prod_{1 \leq k \leq m} (z - z_k).$$

Можно записать его иначе. Выделим корень $z = 0$ кратности $\lambda \geq 0$:

$$P_m(z) = \pm a z^\lambda \prod_{z_k \neq 0} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right).$$

Пример. Эйлер догадался до аналогичной формулы для целой функции $\sin z$. Перенумеруем нули синуса так же, как полюсы котангенса чуть выше, это ведь опять они и есть. Можно доказать, что

$$\sin z = z \prod_{z_k \neq 0} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{\pi n}\right) \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Указанное выше разложение функции $\operatorname{ctg} z = (\ln \sin z)'$ на простейшие дроби тесно связано с этим бесконечным произведением.

В общем случае возникает проблема сходимости бесконечного произведения, аналогичная проблеме сходимости ряда главных частей и тесно с ней связанная. Та проблема преодолевается введением добавочных полиномов $h_k(z)$, поэтому здесь появляются новые сомножители вида $\exp h_k(z)$. Дальше будет такой пример.

Теорема. Для любой последовательности $z_n \rightarrow \infty$ комплексных чисел, расположенных в порядке неубывающих модулей, можно построить целую функцию, нули которой совпадают с $\{z_n\}$ с учётом кратностей.

Неэлементарные первообразные

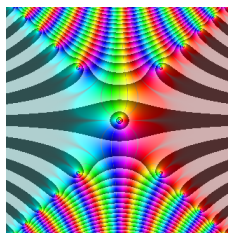
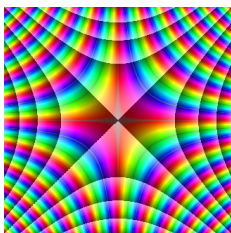
Поскольку почленное интегрирование степенного ряда не меняет круг сходимости, первообразная целой функции всегда является целой. Очень немногие из них выражаются в элементарных функциях. Среди неэлементарных первообразных немало функций, применяемых в различных разделах физики. Приведём несколько примеров, известных главным образом как функции вещественной переменной.

Пример. Целая функция $f(z) = \exp(-z^2)$ на вещественной оси является плотностью нормального распределения и поэтому подстерегает везде, где замешаны вероятностные подходы; например, можно упомянуть процессы передачи тепла. Её первообразную

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$$

с нормировочным коэффициентом называют **функцией ошибок**.

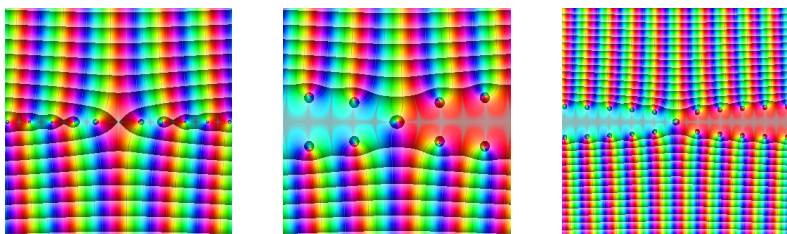
На левом рисунке представлена $f(z)$ в квадрате со стороной 8 и пониженной частотой линий; нулей у $f(z)$ конечно же нет. Диагонали делят плоскость на четыре сектора. При $z \rightarrow \infty$ в правом и левом секторах $f(z) \rightarrow 0$, а в верхнем и нижнем $f(z) \rightarrow \infty$. На правом рисунке $\operatorname{erf} z$. Цепочки нулей тянутся приблизительно (и асимптотически) вдоль диагоналей и делят плоскость на четыре сектора. В правом секторе $\operatorname{erf} z \rightarrow 1$, в левом секторе $\operatorname{erf} z \rightarrow -1$, а в верхнем и нижнем $\operatorname{erf} z \rightarrow \infty$. В обширных тёмных зонах $|\operatorname{erf} z| < 1$.



Пример. Функцию $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ считают целой после заклеивания устранимой особой точки $z = 0$. Её первообразную

$$\operatorname{Si} z = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$$

называют **интегральным синусом**. Чаще всего **она** возникает в оптике, в теории обработки **сигналов** и других приложениях рядов Фурье.

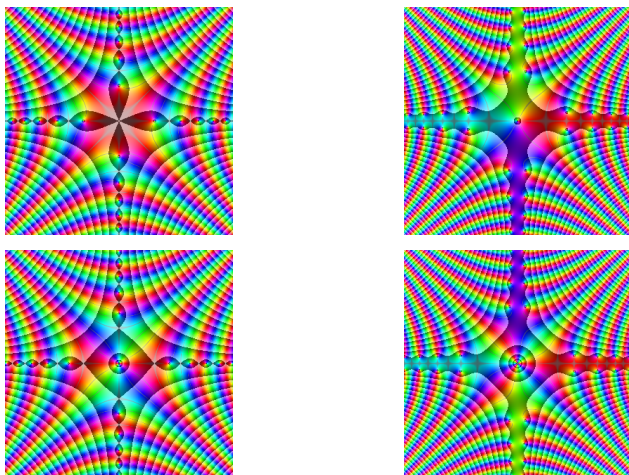


На левом рисунке показана $f(z)$ в квадрате со стороной 32; в центре $\text{Si } z$ там же; на правом рисунке $\text{Si } z$ в квадрате со стороной 64. Цепочки нулей идут асимптотически параллельно вещественной оси. На самой оси — колебания вокруг предельных значений $\pm\pi/2$.

Пример. Функции $\cos(z^2)$ и $\sin(z^2)$ целые. Соответствующие первообразные вы встретите в оптике: **интегралы Френеля**

$$C(z) = \int_0^z \cos(t^2) dt, \quad S(z) = \int_0^z \sin(t^2) dt,$$

уже фактически **упоминались**, но только в качестве несобственных интегралов. Их разложения Тейлора состоят из слагаемых с шагом 4 в показателях степени. Этим объясняется наблюдаемая симметричность картинок, а именно линий уровня модуля. Функции отрисованы парами аналогично первому примеру.



Решения дифференциальных уравнений

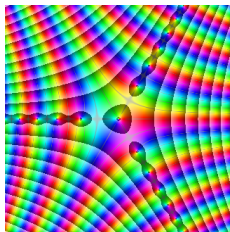
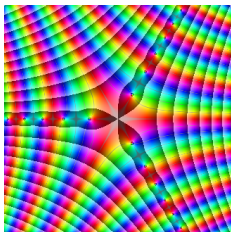
21.12.21

Более обильный и общий источник специальных функций — дифференциальные уравнения. Очень немногие практически важные дифференциальные уравнения удаётся решить в элементарных функциях. Если нет, иногда легко получить решение в виде степенного ряда.

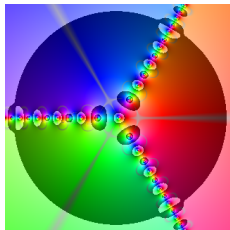
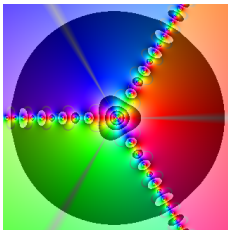
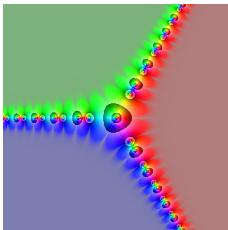
Упражнение. Подставляя ряд в уравнение, найдите коэффициенты степенных рядов $w(z)$, удовлетворяющих каждому из уравнений

$$w'(z) + w(z) = 0, \quad w'(z) + zw(z) = 0, \quad w''(z) + w(z) = 0.$$

Пример. Аналогичным образом можно записать решения **уравнения Эйри** $w''(z) - zw(z) = 0$. Все они оказываются целыми функциями. Среди них дополнительными условиями выделяют **функции Эйри**, полезные в оптике и квантовой механике. Здесь на рисунках, однако, не они, а решения $A_0(z)$ и $A_1(z)$, обладающие наибольшей симметрией: их разложения Тейлора включают слагаемые с шагом 3 в показателях степени, а младшие слагаемые равны соответственно z^0 и z^1 .



Пример. Из целых функций предыдущих примеров легко строятся примеры неэлементарных мероморфных функций. На рисунках слева направо $A_1(z)/A_0(z)$, $A'_0(z)/A_0(z)$, $A'_1(z)/A_1(z)$. Нули и полюсы можно найти только численно.



3.7. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Внутренняя теорема единственности

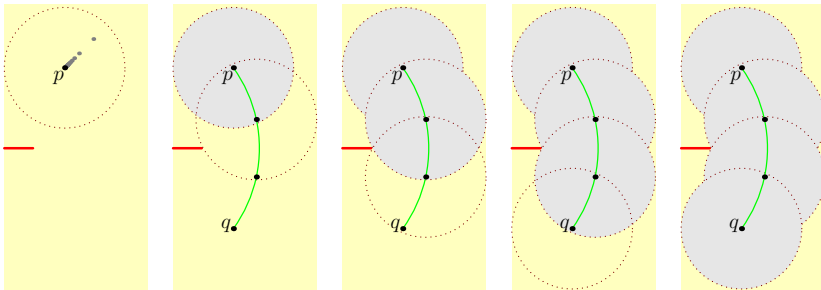
Из полученного ранее ограничения на расположение нулей аналитической функции можно выжать гораздо больше — ещё одно чудесное свойство аналитических функций.

Теорема. Если однозначная аналитическая функция f на области D равна нулю всюду на множестве $E \subset D$, обладающем хотя бы одной конечной предельной точкой $p \in D$, то она равна нулю всюду на D .

Доказательство. Во множестве E существует последовательность точек $p_n \neq p$, сходящаяся к p . Непрерывность f влечёт $f(p_n) \rightarrow f(p) = 0$, причём этот нуль не изолированный и лежит в области D . Значит, по теореме об изолированности нулей f равна нулю всюду на круге $B = B(p, \delta)$, причём δ равно расстоянию от точки p до границы области D . Тем самым, теорема установлена для частного случая, когда D является кругом, а точка p — его центром, ибо в этом случае $B = D$.

Если $B \neq D$, то возьмём точку $q \in D \setminus B$ и любую дугу $\gamma \subset D$, соединяющую точки p и q . Обозначим через δ расстояние от γ до границы области D . Разобьём γ точками $p = z_0, z_1, \dots, z_n = q$ так, что расстояние между соседними меньше δ . Рассмотрим круги $B_k = B(z_k, \delta)$, составляющие цепочку так, что центр каждого лежит в соседних.

Поскольку $B \supset B_0$, мы уже знаем, что $f \equiv 0$ на B_0 . Однако $z_1 \in B_0$, поэтому уже доказанный частный случай теоремы можно применить к кругу B_1 в роли D и луночке $B_0 \cap B_1$ в роли E . Получим $f \equiv 0$ на B_1 . Продолжая по цепочке, мы доберёмся до последней точки $z_n = q$. Она была выбрана произвольно, так что функция f тождественно равна нулю на всей области D . $\square$



Следствие. *Может существовать самое большее одна однозначная аналитическая функция на области D , принимающая заданные значения на множестве точек $E \subset D$, обладающем хотя бы одной конечной предельной точкой $p \in D$.*

Противоречия с примерами вроде $\sin \frac{1}{z}$ нет, ибо здесь предельная точка находится в области аналитичности, а в подобных примерах она лежит на границе и является особой.

Продолжение вещественных функций

Задача аналитического продолжения функции $f(z)$, определённой на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$, заключается в распространении её на более широкую область $D \supset E$ так, что $f(z)$ аналитична на D .

Примеры. Начало нашего курса было заполнено примерами аналитического продолжения элементарных функций вещественной переменной на комплексные области — или на всю плоскость, или на плоскость с разрезом при необходимости. Все функции при этом приобрели новые, непривычные свойства, однако теорема единственности гарантирует, что никакого произвола в тех построениях нет (кроме разрезов).

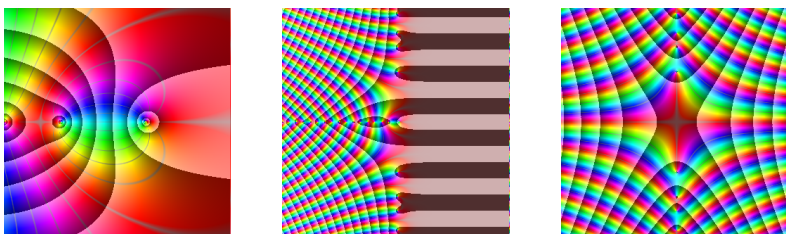
Пример. Изучая множество $\mathbb{P}$ всех простых чисел, то есть целых чисел $p > 1$, не имеющих целых делителей между 1 и p , Эйлер ввёл функцию

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{k \geq 0} p^{-ks} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

сначала для целых $s > 1$. Простейшие признаки сходимости рядов на основе сравнения с геометрической прогрессией тут бессильны, но интегральный признак работает отлично; поэтому вы наверняка видели этот ряд на первом курсе. Он сходится при вещественных $s > 1$ и тем самым определяет непрерывную функцию на промежутке $(1, +\infty)$.

Чебышёв тоже изучал простые числа и продолжил дзета-функцию той же формулой на комплексную область $\operatorname{Re} s > 1$, где ряд также абсолютно сходится, ведь $|n^{-s}| = n^{-\operatorname{Re} s}$. По теореме Вейерштрасса получается аналитическая функция. Напомним, что $n^{-s} = e^{-s \ln n}$.

Затем Риман продолжил дзета-функцию на всю комплексную плоскость как мероморфную функцию с единственным полюсом в точке $s = 1$ и выдвинул ставшую столь знаменитой гипотезу, что все её



невещественные нули лежат на линии $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Мы пока не готовы обсуждать это продолжение.

На левом рисунке представлена $\zeta(s)$ в квадрате со стороной 8. Виден полюс в точке $s = 1$ и нули в точках $s \in \{-2, -4\}$. Все чётные отрицательные числа — тоже нули. Также здесь находится **весёлое значение** $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Ближайшие не вещественные нули имеют $|\operatorname{Im} s|$ немного больше 14. На втором рисунке в квадрате со стороной 64 различимы 8 не вещественных нулей. С помощью гамма-функции, подробнее изучаемой далее в этом разделе, от $\zeta(s)$ можно перейти к более симметричной целой функции, отрисованной справа. Гипотеза Римана равносильна тому, что все нули последней лежат на одной прямой.

рисунок

Продолжение суммой ряда

Пример. Лишь в круге $|z| < 1$ определена и аналитична сумма ряда

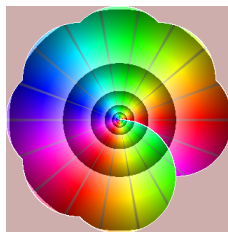
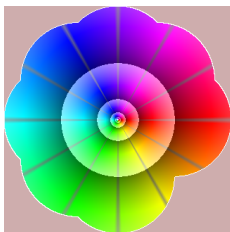
$$f(z) = \sum_{n \geq 0} z^n.$$

Однако, просуммировав прогрессию, мы найдём аналитическую функцию $\frac{1}{1-z}$, совпадающую с $f(z)$ в этом круге, а потому являющуюся её аналитическим продолжением на всю комплексную плоскость с полюсом в точке $z = 1$.

Возьмём функцию $f(z)$, аналитическую в области D_1 , и разложим её в степенной ряд в точке $p_1 \in D_1$. Как мы знаем, радиус сходимости не может превышать расстояния от p_1 до ближайшей особой точки исходной функции. Однако первоначальная область может оказаться слишком мала: ряд может сходиться и там, где породившая его функция исходно не была определена. Тогда сумма ряда позволяет увеличить область определения: $D_2 \supset D_1$. Процесс можно продол-

жать: взять разложение в новой точке $p_2 \in D_2$, добавить к области определения круг его сходимости и **так далее**.

Когда в этом процессе попадает особая точка, следующие круги могут обойти вокруг неё и вернуться к точкам, ранее включённым в область определения. Если при этом значения функции **не совпадают** с прежними, то возникает многозначная функция. Процесс такого аналитического продолжения останавливается только тогда, когда возможности добавления новых значений исчерпаны.



Примеры. Сумма ряда Тейлора функции $1/z$ с центром в точке $z = 1$ определена в круге $|z - 1| < 1$. В нём лежит точка $p_1 = e^{i\pi/4}$; сумма нового ряда с центром в ней сходится в круге $|z - p_1| < 1$ и аналитически продолжает первую сумму. Для дальнейшего продолжения, просто в порядке иллюстрации, последовательно берём точки $p_k = e^{ki\pi/4}$. На пятом шаге новый круг пересекается с начальным (границы кругов не показаны, но это можно заметить в анимации). Левый рисунок — после добавления круга с центром $p_6 = -i$.

На правом рисунке та же ситуация, но для функции $z^{3/2}$. Обход вокруг особой точки приводит на другую ветвь двузначной функции.

Гамма-функция на правой полуплоскости

Наш беспощадный курс уже добрался до стадии, когда практически исчерпаны элементарные примеры. Соответственно, рассматривать предстоит неэлементарные. Здесь мы начнём один из них.

В курсе основ математического анализа гамма-функция определялась при вещественных $x > 0$ несобственным интегралом Эйлера. Формально заменив в нём переменную на комплексную,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

где $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$, мы можем надеяться получить аналитическое продолжение гамма-функции хотя бы на часть комплексной плоскости.

Поскольку $|t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re} z - 1}$, исследование абсолютной сходимости этого интеграла не отличается от вещественного случая и показывает, что она есть при $\operatorname{Re} z > 0$.

Дальше нужно проверить, что получается аналитическая функция. Вначале обосновывается возможность дифференцирования под интегралом. Такая задача в нашем курсе возникла впервые; решение её требует заметных усилий, и потому детали опущены. В случае интегралов по отрезку достаточно сослаться на непрерывность подынтегральной функции и её производной по z , но на бесконечном промежутке привлекаются или хитрости, или **мощные теоремы**. Затем аналитичность интеграла следует из аналитичности подынтегральной функции.

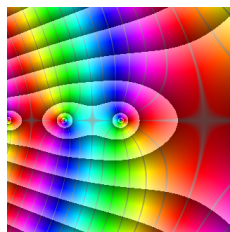
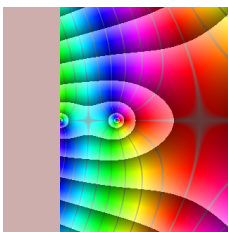
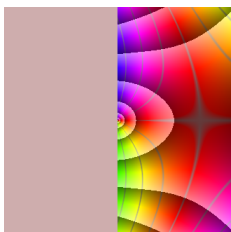
Полная гамма-функция 1

Перейдём к задаче аналитического продолжения гамма-функции. Изучим (пока что) два способа её решения, отличающихся от продолжения суммой ряда Тейлора.

Для первого вспомним свойство $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Оно выводится из определения с помощью интегрирования по частям и непосредственно переносится на комплексную переменную. Однако в равенстве

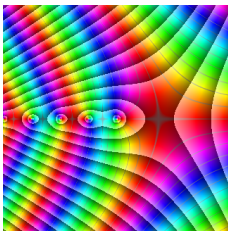
$$\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$$

левая часть пока что определена только при $\operatorname{Re} z > 0$, а правая — при $\operatorname{Re} z > -1$. Значит, оно годится для аналитического продолжения гамма-функции в полосу $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$, причём в точке $z = 0$ появляется полюс первого порядка. Теперь в том же равенстве правая часть определена уже при $\operatorname{Re} z > -2$, так что можно прихватить полосу $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$ и **продолжить продолжать**. В итоге гамма-функция распространяется на всю комплексную плоскость как мероморфная функция со множеством полюсов $P = \{0, -1, -2, \dots\}$ и, как мы покажем позже, не имеет нулей. Функция $1/\Gamma(z)$ получается целой и иногда кажется даже важнее.



Упражнение. Вычислите вычет функции $\Gamma(z)$ в полюсе $z = -n$.

По методу цветных областей нарисована гамма-функция в квадрате с длиной стороны 8 и центром в точке $z = 0$. Видно четыре полюса и пятый на краю. Быстрый (сверхэкспоненциальный) рост при увеличении $\operatorname{Re} z$ в этом окне не заметен, ибо ещё не разогнался: $\Gamma(4) = 3! = 6$; но слева в углах видно быстрое убывание: $|\Gamma(-4 \pm 4i)| < 10^{-5}$.



Полная гамма-функция 2

Второй способ начинается с разбиения промежутка интегрирования на отрезок $[0, 1]$ и промежутков $[1, +\infty)$. Интеграл по второму даёт *целую функцию*, так что достаточно аналитически продолжить интеграл по первому. На отрезке работать проще: тут здорово помогает равномерная сходимость рядов. Разложим e^{-t} в ряд Тейлора, домножим на t^{z-1} и проинтегрируем почленно:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt &= \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} t^n dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z-1+n} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}. \end{aligned}$$

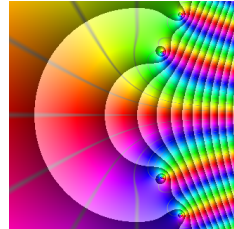
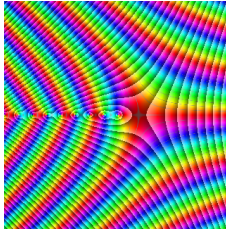
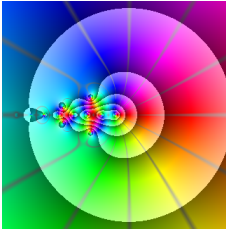
Установив, что этот ряд равномерно сходится внутри области $\mathbb{C} \setminus P$, мы получим аналитичность его суммы по «первой» теореме Вейерштрасса. Для этого возьмём множество D_ε точек, удалённых от ближайшего полюса как минимум на ε , то есть $|z+n| \geq \varepsilon$ для всех $z \in D_\varepsilon$ и всех целых $n \geq 0$. На D_ε наш ряд мажорируется сходящимся рядом

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!},$$

а потому сходится равномерно на D_ε , а значит и внутри $\mathbb{C} \setminus P$. Приходим к формуле аналитического продолжения

$$\Gamma(z) = \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

Ряд здесь сходится достаточно быстро. На левой картинке его **частичная сумма** для $n \leq 10$, но вклад слагаемых с $n > 8$ не заметен глазом, даже когда картинки во весь экран. Помимо полюсов, там есть нули; похоже, лишь четыре из них находятся вне вещественной оси, а остальные — на оси, по одному рядом с каждым полюсом. Тесные пары из простого нуля и простого полюса легко не заметить, если не знать, что они там действительно есть.



На правой картинке **интегральное слагаемое**. Это целая функция, содержащая быстрый рост $\Gamma(z)$ при росте $\operatorname{Re} z$ и убывающая как $1/z$ при $\operatorname{Re} z < 0$. Отметим, что слева в углах $\Gamma(z)$ убывает гораздо быстрее, чем $1/z$. Здесь в углах $|\Gamma(-8 \pm 8i)| < 10^{-13}$. Поэтому вычисления по последней формуле таят опасность больших ошибок.

Формула Вейерштрасса для гамма-функции

Заслуживает упоминания разложение функции $1/\Gamma(z)$ в бесконечное произведение. В качестве первой попытки напрашивается собирающее все её нули произведение

$$z \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{n}\right),$$

но оно расходится при всех $z \neq 0$, поскольку расходится гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$. Для сходимости произведения множителям необходимы поправки $\exp(-\frac{z}{n})$. Тогда снаружи произведения собирается компенсирующий множитель $\exp \sum \frac{1}{n}$, который опять-таки расходится. Его

тоже удаётся спасти, ибо известно, что существует предел

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\ln n + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \right) \approx 0,5772156649 \dots,$$

называемый постоянной Эйлера — Маскерони. Между прочим, до сих пор не доказано, что число γ иррационально, но здесь это не мешает. В результате получается разложение

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{n} \right) \exp \left(-\frac{z}{n} \right).$$

Сходимость здесь очень медленная, что неудивительно после таких спасательных операций.

Упражнение. Придите к формуле отражения (или дополнения)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

сравнивая *разложение синуса* и только что полученное.

Упражнение. Докажите, что гамма-функция не имеет нулей.

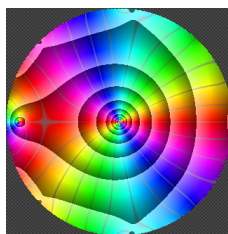
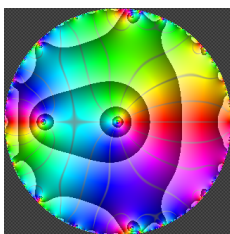
Естественные границы

Пример. Лишь в круге $|z| < 1$ определена и аналитична сумма ряда

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}.$$

В точках $z = \pm 1$ ряд расходится. Однако $f(z) = z + f(z^2)$, поэтому он расходится и при $z = \pm i$. По этой же логике он расходится при всех таких значениях z , что $z^{2^k} = 1$ при подходящем целом $k \geq 0$. Множество таких точек всюду плотно на окружности $|z| = 1$. Следовательно, все точки окружности являются особыми для функции $f(z)$. Значит, её невозможно аналитически продолжить. Окружность $|z| = 1$ для этой функции является **естественной границей**.

Ряд, полученный из $f(z)$ почленным интегрированием, равномерно сходится на замкнутом круге $|z| \leq 1$, поскольку мажорируется сходящимся рядом $\sum 2^{-n} = 2$. Его сумма непрерывна на граничной окружности, которая тем не менее является естественной границей, потому что если бы какая-то точка границы была правильной, то она оказалась бы правильной и для производной, то есть исходной $f(z)$.



На левом рисунке функция Вейерштрасса $f(z)$, на правом её первообразная. Если подставить в первообразную $z = e^{i\phi}$ и взять вещественную часть, то проявится функция, отличающаяся лишь малозначительными деталями от функции $\sum a^n \cos b^n x$. Последнюю вы видели в вещественном анализе: когда-то этим примером непрерывной нигде не дифференцируемой функции Вейерштрасс потряс коллег. Её поведение фрактально: имеется самоподобие на любых масштабах. На правой цветной картинке этого не видно, но на левой любители фракталов могут заметить вблизи границы мелкие намёки на это.

Теорема Адамара утверждает, что так себя ведут все ряды вида

$$\sum a_n z^{\lambda_n},$$

у которых показатели степени λ_n растут быстрее линейных. Среди их сумм есть функции, важные для вычисления эллиптических функций и незаменимые в теории чисел. Интерес физиков к ним появился в теории струн.

3.8. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА И РАСПОЛОЖЕНИЕ НУЛЕЙ

Логарифмический вычет

Если аналитическая функция $f(z)$ в точке $z = p$ имеет полюс порядка m , то её можно представить в виде

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-p)^m},$$

где функция $g(z)$ в той же точке аналитична и $g(p) \neq 0$. Тогда

$$(\operatorname{Ln} f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)} = \dots = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{m}{z-p},$$

причём функция $g'(z)/g(z)$ аналитична в той же точке. Значит, у функции $f'(z)/f(z)$ там простой полюс с вычетом

$$\operatorname{Res}_{z=p} \frac{f'(z)}{f(z)} = -m.$$

Если аналитическая функция $f(z)$ в точке $z = q$ имеет нуль кратности m , то эта точка является полюсом той же кратности функции $h(z) = 1/f(z)$. Однако $(\operatorname{Ln} f(z))' = (-\operatorname{Ln} h(z))'$, поэтому у функции $f'(z)/f(z)$ опять простой полюс, причём с вычетом

$$\operatorname{Res}_{z=q} \frac{f'(z)}{f(z)} = m.$$

Такие величины называют **логарифмическими вычетами**.

Подсчёт числа нулей и полюсов

Теорема. Если на замыкании ограниченной односвязной области D функция f аналитична, кроме конечного числа полюсов в D , притом без нулей и полюсов на границе, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

где N это количество нулей, а P — количество полюсов функции $f(z)$ в D с учётом их кратности.

Доказательство. Подынтегральная функция имеет полюсы в точности в нулях и полюсах функции $f(z)$, а её вычеты хранят информацию об их порядках, как отмечено выше. Число нулей в D конечно по **теореме единственности**. Утверждение следует по интегральной теореме Коши для составного контура. $\square$

Упражнение. Выведите отсюда основную теорему алгебры полиномов в версии со всеми корнями, а не только одним, как прежде.

Упражнение. В условиях теоремы, возьмите вторую аналитическую функцию h на D и выразите значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} h(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

через её значения в нулях и полюсах функции f .

Когда точка z пробегает дугу γ от точки z_0 до точки z_1 , соответствующая точка $w = f(z)$ пробегает дугу $\Gamma = f(\gamma)$. Значит,

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \operatorname{Ln} f(z_1) - \operatorname{Ln} f(z_0),$$

причём берётся любая ветвь логарифма, однозначная вдоль Γ . Для контура $z_0 = z_1$, и выбор такой ветви возможен, только если контур Γ , который может не быть простым и может пробегаться несколько раз, не охватывает точку $w = 0$. Иначе при обходе контура γ логарифм получает, в согласии с количеством охватов нуля образом этого контура, приращение мнимой части; обозначим его через $\Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} f(z)$. Итак,

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

С предыдущим, это рассуждение доказывает **принцип аргумента**.

Теорема. В прежних условиях и обозначениях верно равенство

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \operatorname{Arg} f(z).$$

Двоякопериодические функции

Мероморфную функцию с двумя независимыми периодами a_1 и a_2 называют **эллиптической** (по историческим причинам). Из равенств

$$f(z) = f(z + a_1) = f(z + a_2)$$

для всех $z \in \mathbb{C}$ следует обобщение

$$f(z) = f(z + n_1 a_1 + n_2 a_2)$$

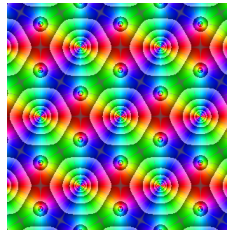
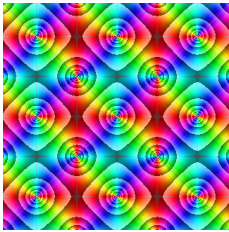
для всех целых n_1, n_2 . При этом исключают постоянные функции и неинтересный случай периодов, параллельных как векторы. С учётом симметрии, ограничение на периоды таково: их отношение $\tau = a_2/a_1$ лежит в верхней полуплоскости, то есть $\operatorname{Im} \tau > 0$.

Эллиптические функции образуют достаточно обширный класс с непростыми внутренними связями. Они неэлементарны, и в XIX веке, благодаря ряду трудных задач, представляли очень важную область математических исследований, основную в том числе для Вейерштрасса, и тем самым сильно повлияли на развитие всего анализа.

Упражнение. Производная эллиптической функции есть также эллиптическая функция с теми же периодами.

Параллелограмм на векторах a_1 и a_2 , называемый **параллелограммом периодов**, является естественным множеством для изучения эллиптической функции, поскольку вся функция получается его параллельными переносами. Множество периодов — решётка на комплексной плоскости, то есть дискретная подгруппа группы комплексных чисел по сложению. Параллелограмм, выбранный основным, должен быть минимальным; выбор такой далеко не однозначен, но это уводит в сторонние геометрические вопросы, времени на которые у нас нет.

Примеры. Отрисована эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z)$ для двух решёток: квадратной и правильной шестиугольной.



Упражнение. *Непостоянная эллиптическая функция имеет хотя бы один полюс в параллелограмме периодов.*

Это утверждение является исходной теоремой Лиувилля и легко выводится из теоремы о целых функциях, которую стали называть его именем (вместо Коши). Дальше — два простых следствия.

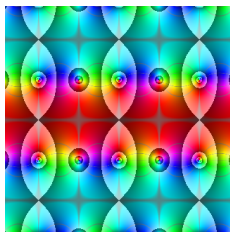
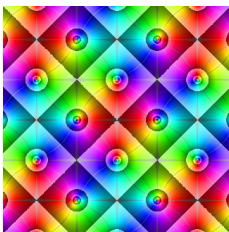
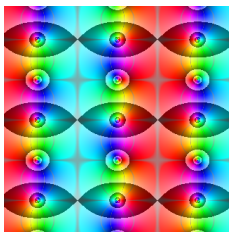
Упражнение. *Если две эллиптические функции с одинаковыми периодами имеют одинаковые полюсы с одинаковыми главными частями, то они отличаются лишь постоянным слагаемым.*

Упражнение. *Если две эллиптические функции с одинаковыми периодами имеют одинаковые полюсы и нули, с учётом кратностей, то они отличаются лишь постоянным множителем.*

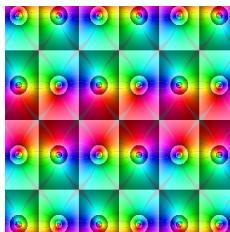
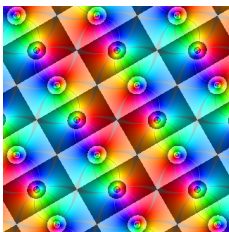
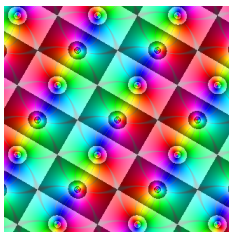
Теорема. *Сумма вычетов эллиптической функции во всех полюсах в параллелограмме периодов равна нулю.*

Доказательство. Проинтегрируем такую функцию по границе параллелограмма периодов. Если полюс попал на границу, то немного сдвинем весь контур параллельно. Значения функции на параллельных

частях контура одинаковые, а направления прохождения противоположны. Поэтому интеграл зануляется, а с ним и сумма вычетов. $\square$



Примеры. Отрисованы эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ для двух решёток: квадратной и правильной шестиугольной.



Теорема. Эллиптическая функция принимает в параллелограмме периодов всякое значение, конечное или бесконечное, одинаковое число раз с учётом кратности.

Доказательство. Логарифмическая производная f'/f эллиптической функции f является эллиптической с теми же периодами. Применим к ней предыдущую теорему, опять сдвигая параллелограмм периодов во избежание попадания полюсов на границу, и получим $N - P = 0$, то есть число нулей равно числу полюсов с учётом кратностей.

Чтобы показать, что $f(z)$ такое же число раз принимает конечное значение a , аналогично поступим с функцией $f(z) - a$, имеющей такие же полюсы. $\square$

Возникающее тут число называют **порядком** эллиптической функции. Предыдущие теоремы делают эллиптические функции порядка 1 невозможными. Функции Якоби порядка 2 и Вейерштрасса порядка 3 лежат в основе разных описаний всего класса эллиптических функций. Функции Якоби появились как обращение эллиптических интегралов, ранее уже упомянутого в качестве продвинутого примера в богатом

идеями контексте, сочетающем первообразные, ветвление и свойства конформных отображений.

примеры
из физики?

3.9. ТЕОРЕМА РУШЕ

Обычная форма теоремы Руше

Теорема. Если на замыкании ограниченной односвязной области D функции f и g аналитичны и $|f(z)| > |g(z)|$ на границе, то функции f и $f+g$ имеют в D одинаковое количество нулей с учётом кратности.

Доказательство. На $\gamma = \partial D$ видим $f(z) \neq 0$ и переписываем

$$f(z) + g(z) = f(z)w(z), \quad w(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}.$$

При обходе контура γ точкой z значение $w(z)$ остаётся внутри круга $|w - 1| < 1$, поэтому $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} w(z) = 0$. Следовательно,

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f(z) + g(z)) = \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) + \Delta_\gamma \operatorname{Arg} w(z) = \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z).$$

Полюсов нет, и утверждение следует из принципа аргумента. $\square$

Пример. Найдём число корней уравнения $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ в единичном круге. Чтобы применить теорему Руше, возьмём $f(z) = -4z^5$ и $g(z) = z^8 + z^2 - 1$. Тогда на единичной окружности

$$|g(z)| \leq 3 < 4 = |f(z)|,$$

при этом $f(z)$ имеет один нуль кратности 5. Значит, $g(z)$ также имеет пять нулей в единичном круге с учётом кратностей.

В этой главе есть уже два доказательства основной теоремы алгебры полиномов: первое выведено из теоремы Лиувилля, а на второе указано чуть выше в упражнениях. Теорема Руше даёт третье.

Пример. Для произвольного полинома $P_n(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ возьмём $f(z) = a_n z^n$ и $g(z) = P_n(z) - f(z)$. Неравенство $|f(z)| > |g(z)|$ выполнено на окружности $|z| = R \gg 1$.

Симметричная форма теоремы Руше

Теорема. Если на замыкании ограниченной односвязной области D функции f и g аналитичны и

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

на границе, то функции f и g имеют в D одинаковое количество нулей с учётом кратности.

Нестрогое неравенство выполнено всегда, ведь это просто неравенство треугольника. Равенство же возможно только при занулении одной из функций и в случае $\arg f(z) = \arg g(z)$. Именно эти варианты исключаются строгим неравенством. Интуитивно выходит, что если значения функций на $\gamma = \partial D$ ненулевые и их аргументы никогда не совпадают, то они совершают одинаковое число оборотов.

Доказательство. Заменяя g на $-g$, приходим к условию

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|,$$

которое здесь удобнее. Нужно доказать равенство

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) = \Delta_\gamma \operatorname{Arg} g(z).$$

Это означает утверждение

$$\oint_{f(\gamma)} \frac{dw}{w} = \oint_{g(\gamma)} \frac{dw}{w},$$

а для него достаточно, чтобы контуры $f(\gamma)$ и $g(\gamma)$, возможно не простые, были гомотопны в области $w \neq 0$. Функция

$$h(t, z) = (1 - t)f(z) + tg(z)$$

задаёт подходящую гомотопию: $h(0, z) = f(z)$ и $h(1, z) = g(z)$, а при $0 < t < 1$ равенство $h(t, z) = 0$ исключено условием. $\square$

Принцип сохранения области

Теорема. Если непостоянная функция f аналитична в области D , то образ $f(D)$ является областью.

Доказательство. Непрерывный образ связного множества связан, так что остаётся доказать открытость. Для произвольной точки $q \in f(D)$ нужно найти радиус круга с центром q , лежащего внутри $f(D)$. Поскольку функция отлична от постоянной, каждая точка прообраза

$Z = f^{-1}(q)$ изолированная в нём. Выберем одну точку $p \in Z$ и круг $A = A(p, r)$ внутри D , не содержащий других точек Z . Тогда

$$R = \min_{z \in \partial A} |f(z) - f(p)| > 0.$$

Покажем, что это число есть искомый радиус.

Для любой точки $w \in B = B(q, R)$ запишем

$$f(z) - w = f(z) - f(p) + q - w.$$

Теорема Руше применима к выделенной паре функций, ибо при $z \in \partial A$

$$|f(z) - q| = |f(z) - f(p)| \geq R > |q - w|.$$

Значит, в круге A функция $f(z) - w$ имеет столько же нулей, сколько функция $f(z) - q$, то есть один. Поэтому $w \in f(D)$, откуда $B \subseteq D$. $\square$

Обозначения из этого доказательства сохраним до конца раздела.

Ряд Бурмана — Лагранжа

При условии $f'(p) \neq 0$ проведённое только что рассуждение устанавливает также, что в круге A функция f принимает всякое значение из круга B ровно один раз. Иными словами, она локально однолистка. Тем самым, локально определена обратная функция $z = g(w)$; при этом $g'(w) = 1/f'(z)$, так что g аналитична. Нам это уже известно давно, ибо было получено другим путём, из условий Коши — Римана.

Укажем формулы для коэффициентов ряда

$$z = g(w) = \sum_{n \geq 0} d_n (w - q)^n.$$

Зафиксируем $w \in B$ и рассмотрим на круге A мероморфную функцию

$$t \mapsto h(t) = \frac{tf'(t)}{f(t) - w}.$$

Вычет в простом полюсе $t = z$, окружённом контуром $\gamma = \partial A$, равен

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{tf'(t)}{f(t) - w} dt = \lim_{t \rightarrow z} ((t - z)h(t)) = \lim_{t \rightarrow z} (tf'(t) \frac{t - z}{f(t) - f(z)}) = z.$$

Далее действуем аналогично выводу формулы для коэффициентов ряда Тейлора; фокус также повторялся в доказательстве теоремы Лорана, хотя записан там покороче. Буквы здесь иные.

А именно, разложим дробь $\frac{1}{f(t)-w}$ по степеням отношения $\frac{w-q}{f(t)-q}$. Проинтегрируем ряд почленно, а затем при $n > 0$ ещё преобразуем, интегрируя по частям:

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t f'(t) dt}{(f(t)-q)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{n} \int_{\gamma} \frac{dt}{(f(t)-q)^n}.$$

Посчитав последний интеграл через вычет в полюсе порядка n , придём к окончательному ответу:

$$d_0 = p, \quad d_{n>0} = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow p} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} \left(\frac{z-p}{f(z)-q} \right)^n.$$

Пример. Найдём разложение в ряд в окрестности точки $w = 0$ функции $z = z(w)$, обратной к функции $w(z) = ze^{-z}$. Тут $p = 0$, $q = 0$,

$$d_0 = 0, \quad d_{n>0} = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} \left(\frac{z}{f(z)} \right)^n = \dots = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

Следовательно, искомый ряд Бурмана — Лагранжа есть

$$z(w) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n.$$

Эта функция неэлементарна, но очень просто выражается через **W-функцию Ламберта**. Последняя появилась ещё у Эйлера, но за 200 лет ей находились лишь разрозненные применения. Ситуация изменилась резко около 40 лет назад (детали по ссылке).

Ряды Ньютона — Пуизё

Аналогично можно рассмотреть случай $f^{(k)}(p) = 0$ при $0 \leq k < m$ и $f^{(m)}(p) \neq 0$, то есть нуля кратности $m > 0$. Потребуем ещё, чтобы в круге A не было других нулей функции f' . Тогда в кольце $A \setminus \{p\}$ функция принимает всякое значение из кольца $B \setminus \{q\}$ ровно в m различных точках, то есть является m -листной в круге A . Поэтому

$$w = f(z) = q + (z-p)^m h(z),$$

где $h(z)$ аналитична и отлична от нуля. Тогда

$$(z-p)h(z)^{1/m} = (w-q)^{1/m}$$

при некотором выборе ветви корня в левой части равенства. Обозначим левую часть через $s(z)$, а правую через t , так что $s(z) = t$. Тут $s'(p) \neq 0$, и по разобранному выше случаю отсюда можно выразить z

в виде ряда $z = \sum d_n t^n$. Возвращаясь к переменной w , получаем обобщённый степенной ряд с дробными показателями:

$$z = g(w) = \sum_{n \geq 0} d_n (w - q)^{n/m}.$$

В этом случае $g(w)$ в круге B является m -значной аналитической функцией, имеющей в точке $w = q$ ветвление типа корня степени m .

Глава 4. ВЫЧЕТЫ И ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Однозначные функции

Рационально-тригонометрические функции 1

Символом $\stackrel{!}{=}$ далее указываем сведение интеграла к вычетам, чтобы отличать применение интегральной теоремы Коши от сопутствующих преобразований.

лекция 12
22.11.23

Пример. Вычислим интеграл

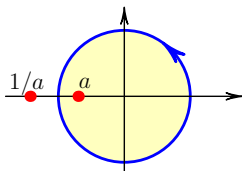
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - 2a \cos \phi + a^2}, \quad 0 < |a| < 1.$$

Подставляя $z = e^{i\phi}$, видим интеграл по единичной окружности C :

$$I = \oint_C \frac{dz/iz}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2} = \oint_C \frac{i dz}{az^2 - (a^2 + 1)z + a}.$$

Знаменатель $q(z)$ зануляется в точках $z = a$ и $z = a^{-1}$, причём только первая лежит в круге $|z| < 1$. Поэтому интеграл **сводится** к вычету в простом полюсе, а его проще всего найти, дифференцируя:

$$I \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} \frac{i}{q(z)} = \frac{-2\pi}{q'(a)} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$



Таким способом можно вычислить многие интегралы вида

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \phi, \sin \phi) d\phi,$$

где $R(x, y)$ это рациональная функция двух переменных. При этом

$$d\phi = -i \frac{dz}{z}, \quad \cos \phi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \phi = -\frac{i}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

так что подстановка даёт другую рациональную функцию:

$$R(\cos \phi, \sin \phi) d\phi = -iR\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), -\frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z} = R_*(z) dz.$$

Её полюсы надо суметь найти. Если на единичной окружности их нет, то интеграл **сводится** к сумме вычетов в полюсах p_k , лежащих внутри единичного круга:

$$I = \oint_C R_*(z) dz \stackrel{!}{=} 2\pi i \sum_{|p_k| < 1} \operatorname{Res}_{z=p_k} R_*(z).$$

Дроби, ограниченные на вещественной оси

Пример. Вычислим несобственный интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Его значение доступно методам вещественного анализа и вам хорошо известно: функция $\operatorname{arctg} x$ является первообразной, поэтому

$$I = [\operatorname{arctg} x]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} = \pi.$$

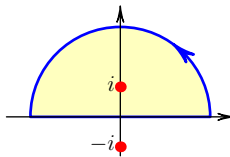
А мы начнём с него изучение более мощного подхода.

Возьмём большой полукруг $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$ и проинтегрируем по его границе функцию $\frac{1}{1+z^2}$, затем устремим радиус R к бесконечности. Контурный интеграл сводим к вычету в полюсе $z = i$. Интеграл по отрезку $[-R, R]$ вещественной оси стремится к искомому несобственному. При $R > 2$ на полуокружности имеем

$$\left| \frac{1}{1+z^2} \right| = \frac{1}{|z|^2} \cdot \frac{1}{|1+z^{-2}|} \leq \frac{1}{2R^2} \rightarrow 0,$$

а её длина равна πR , поэтому интеграл по ней стремится к нулю. Находим искомый интеграл:

$$I \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi.$$



Пример. Значение несобственного интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

тоже можно найти через первообразную, но это существенно дольше, чем в первом примере (требуется интегрирование по частям). Однако показанный выше метод работает — с минимальными изменениями, ибо вычет теперь в полюсе второго порядка:

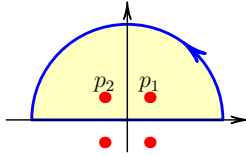
$$I \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2} \right) = \dots = \frac{\pi}{2}.$$

Пример. Считать несобственный интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

через первообразную ещё труднее, но для вычетов никакой проблемы нет. Здесь в верхней полуплоскости лежат два из четырёх простых полюсов $p_1 = e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$ и $p_2 = e^{3i\pi/4} = (-1+i)/\sqrt{2}$. Поэтому

$$I \stackrel{!}{=} 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=p_1} + \operatorname{Res}_{z=p_2} \right) \frac{1}{z^4+1} = 2\pi i \sum_{z \in \{p_1, p_2\}} \frac{1}{4z^3} = \dots = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

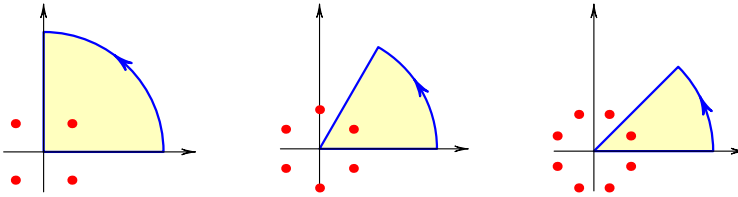


Теорема. Если рациональная функция $f(z)$ степени не выше -2 не имеет полюсов на вещественной оси, то несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

равен произведению числа $2\pi i$ на сумму её вычетов в полюсах, лежащих в верхней полуплоскости.

Доказательство. Рассуждение повторяет сделанное в первом примере. Круг $|z| < R$ достаточно большого радиуса содержит все полюсы функции. Интегрируя по границе его верхней половины, получим указанную сумму вычетов. Условие на степень дроби влечёт оценку $|f(z)| = o(1/R)$ при $|z| = R \gg 1$ и с ней стремление к нулю интеграла по огромной полуокружности. $\square$



Пример. Для функций вида $F(x^n)$ вместо полукруга удобен сектор. Похожий приём мы впервые разобрали давно на примере **интегралов Френеля**, хотя там нет вычетов, ибо нет особых точек.

Вычислим теперь при целых $n \geq 1$ интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}.$$

Круговой сектор $|z| < R$, $0 < \arg z < 2\alpha$, где $\alpha = \pi/2n$, содержит единственный полюс $p = e^{i\alpha}$. Граница сектора состоит из трёх гладких участков: отрезок γ_0 положительной вещественной полуоси; дуга γ_1 окружности; ещё один отрезок γ_2 . Обозначим через $I_k(R)$ интеграл по γ_k . На последнем участке $f(re^{2i\alpha}) = f(r)$ и $dz = e^{2i\alpha} dr$ с движением к центру, поэтому $I_2 = -e^{2i\alpha} I_0$. Далее мы будем часто использовать подобные связи между интегралами по прямолинейным участкам.

Учитывая, что $I_0(R) \rightarrow I$ и $I_1(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (I_0(R) + I_2(R)) = (1 - e^{2i\alpha})I \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=p} \frac{1}{z^{2n} + 1} = \dots = -2i\alpha e^{i\alpha},$$

откуда в итоге появляется симпатичный вещественный ответ:

$$I = \frac{\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\pi}{2n} \csc \frac{\pi}{2n}.$$

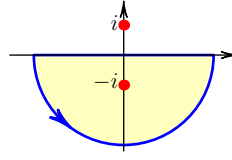
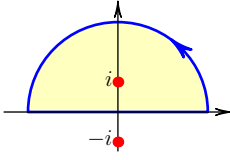
Преобразование Фурье рациональной функции

Пример. Вычислим интеграл, известный в теории вероятностей как характеристическая функция распределения Коши:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $|e^{itx}| = 1$, интеграл мажорируется сходящимся интегралом $\varphi(0)$ и потому абсолютно сходится. Различают случаи $t > 0$ и $t < 0$.

Сперва при $t > 0$ полностью повторим выкладку **первого примера**, где как раз и вычислено значение $\varphi(0)$. Тогда в верхней полуплоскости



$|e^{itz}| = e^{-ty} < 1$, поэтому на лежащей в ней полуокружности $|z| = R$ для подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{z^2 + 1}$$

по-прежнему верна оценка $|f(z)| = o(1/R)$. Находим

$$\varphi(t) \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{itz}}{z^2 + 1} = \dots = \pi e^{-t}.$$

При $t < 0$ уходить в верхнюю полуплоскость бесполезно, ведь там $|e^{itz}| = e^{-ty}$ быстро возрастает. Есть два варианта действий. В одном варианте можно взять половину полуокружности $|z| = R$ в нижней полуплоскости: на ней верна прежняя оценка, и с учётом направления

$$\varphi(t) \stackrel{!}{=} -2\pi i \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{e^{itz}}{z^2 + 1} = \dots = \pi e^t.$$

В другом варианте можно просто заметить, что замена переменной $x = -u$ в исходном интеграле сводит задачу к первому случаю. Более того, конкретно здесь это даёт

$$\varphi(t) = \varphi(-t) = \pi e^{-|t|}.$$

В этом рассуждении использованы ограниченность множителя e^{itz} и убывание рациональной функции на верхней полуокружности

$$\Gamma(R) = \{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Подойдя к экспоненте внимательнее, можно выжать стремление к нулю интеграла по $\Gamma(R)$, меньше предполагая о другом множителе.

Лемма (Жордан). *Предположим, что*

- (1) *функция $f(z)$ непрерывна при $|z| \geq r > 0$ и $\operatorname{Im} z \geq 0$;*
- (2) *при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю величина $M(R) = \max_{z \in \Gamma(R)} |f(z)|$.*

Тогда для любого $t > 0$ при $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\Gamma(R)} f(z) e^{itz} dz \rightarrow 0.$$

Смысл леммы в том, что стремление $M(R)$ к нулю может быть медленным, так что без экспоненты интеграл не обязан сходиться.

Доказательство. По сути, это рассуждение мы давно уже проводили при вычислении **интегралов Френеля**. Обозначим через $\gamma(R)$ половину дуги $\Gamma(R)$, лежащую в правой полуплоскости; тогда точки $z \in \gamma(R)$ имеют вид $z = Re^{i\phi}$, где $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Для таких углов $\sin \phi \geq 2\phi/\pi$, поэтому на $\gamma(R)$ справедлива оценка

$$|e^{itz}| = e^{-tR \sin \phi} \leq e^{-2tR\phi/\pi}.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{\gamma(R)} f(z) e^{itz} dz \right| \leq M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2tR\phi/\pi} R d\phi = M(R) \frac{\pi}{2t} (1 - e^{-tR}),$$

что стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Аналогично оценивается интеграл на левой половине дуги. □

Теорема. Если рациональная функция $f(z)$ степени не выше -1 не имеет полюсов на вещественной оси, то несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx$$

при $t > 0$ равен произведению числа $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)e^{itz}$ в полюсах, лежащих в верхней полуплоскости.

Доказательство. Опять интегрируем по границе большого полукруга, причём вклад полуокружности исчезнет по лемме Жордана. □

Пример. При $t > 0$ вычислим интеграл:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin tx}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin tx}{1+x^2} dx.$$

Переход ко всей вещественной оси возможен ввиду чётности.

Чтобы применить теорему, надобно заменить синус экспонентой. Раз формула $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ даёт два интеграла с убыванием экспонент в разных полуплоскостях, удобнее брать $\sin z = \operatorname{Im} e^{iz}$; далее взятие мнимой части выносим из-под интеграла благодаря вещественности остальной (рациональной) функции. Получаем

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{itx}}{1+x^2} dx \stackrel{!}{=} \operatorname{Im} \left(\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{z e^{itz}}{z^2+1} \right) = \frac{\pi}{2} e^{-t}.$$

Рационально-тригонометрические функции 2

Другой способ вычисления рационально-тригонометрических интегралов опирается на 2π -периодичность синуса и косинуса.

Пример. Вычислим снова тот же интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - 2a \cos \phi + a^2}, \quad 0 < a < 1,$$

что и в первом примере этой главы, теперь не прибегая к заменам, но считая переменную интегрирования комплексной: $z = \phi$.

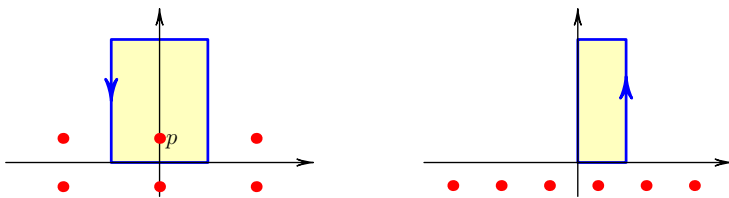
Знаменатель зануляется в точках $z = \pm i \operatorname{Ln} a$. Выберем в качестве контура границу достаточно высокого прямоугольника

$$D_h = \{z: -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, \ 0 < \operatorname{Im} z < h\}.$$

Он содержит ровно один полюс $p = -i \ln a$, лежащий на мнимой оси. Брать $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$ тут менее удобно, потому что полюсы попадут на контур, но благодаря периодичности вклад нижней стороны D_h и так равен I . По этой же причине вклады боковых сторон сокращаются. Вклад верхней стороны D_h исчезает при $h \rightarrow +\infty$, поскольку на ней $|2 \cos z| \sim e^h$. Следовательно,

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=p} \frac{1}{1 - 2a \cos z + a^2} = \frac{2\pi i}{2a \sin p} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Чтобы не ошибиться в знаке, синус здесь нужно выразить через экспоненту и учесть соотношение $e^{ip} = a$.



Пример. Вычислим этим же методом интеграл

$$I = \int_0^\pi \operatorname{tg}(x + a) dx,$$

отдельно рассмотрев случаи $\operatorname{Im} a > 0$, $\operatorname{Im} a = 0$, $\operatorname{Im} a < 0$.

В первом случае все полюсы лежат в нижней полуплоскости, как на правом рисунке, а на верхней стороне прямоугольника

$$D_h = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \ 0 < \operatorname{Im} z < h\}$$

при $h \rightarrow +\infty$ получаем $\operatorname{tg} z \rightarrow i$. Тогда $I = \pi i$. В третьем случае возьмём прямоугольник в нижней полуплоскости и аналогично найдём $I = -\pi i$. Во втором случае интеграл расходится, но его главное значение равно нулю ввиду симметрии тангенса. О главных значениях больше сказано в следующих разделах.

Итого, $I = \pi i \operatorname{sgn} \operatorname{Im} a$.

Формула отражения для гамма-функции

Пример. Чтобы вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, \quad 0 < a < 1,$$

воспользуемся периодичностью комплексной экспоненты. Функцию

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

проинтегрируем по границе прямоугольника $|\operatorname{Re} z| < R$, $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$. Интегралы $I_{1,3}$ по вертикальным сторонам при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю благодаря условиям на числовой параметр a : на левой нужно $a > 0$, а на правой нужно $a < 1$. Интеграл I_2 по верхней стороне выражается через интеграл I_0 по нижней стороне:

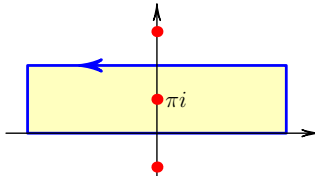
$$I_2(R) = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -e^{2\pi ai} I_0(R).$$

В прямоугольнике лежит один полюс, так что при $R \rightarrow \infty$

$$I_0(R) + I_2(R) \rightarrow 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\pi i} \frac{e^{az}}{1+e^z} = -2\pi i e^{\pi ai}.$$

Отсюда

$$I = \frac{-2\pi i e^{\pi ai}}{1 - e^{2\pi ai}} = \frac{\pi}{\sin \pi a} = \pi \csc \pi a.$$



Деля в примере замену $t = e^x$, получаем формулу отражения:

$$\mathcal{B}(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

При этом $B(a, 1 - a) = \Gamma(a)\Gamma(1 - a)$. Тут полезно напомнить как один из уже, вероятно, встречавшихся на первом курсе интегралов, определяющих бета-функцию, так и её связь с гамма-функцией:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}(1+t)^{-x-y} dt.$$

Далее по **теореме единственности** аналитических функций формула отражения распространяется на все $a \in \mathbb{C}$. Также можно сперва воспользоваться **интегралом**, задающим $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z > 0$; тогда формула отражения имеет смысл в полосе $0 < \operatorname{Re} z < 1$, верна в ней опять же по теореме единственности и позволяет аналитически продолжить гамма-функцию сразу на всю комплексную плоскость формулой

$$\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\Gamma(z) \sin \pi z}.$$

Упражнение. Вводя переменную $t = x^\beta$, убедитесь, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta} dx = \frac{\pi}{\beta} \csc \frac{\pi\alpha}{\beta},$$

и найдите условия сходимости интеграла.

Упражнение. Сравните результат предыдущего упражнения с примером интегрирования по **границе сектора**. Во что проводимые замены переводят прямоугольник, приведший к формуле отражения?

4.2. Однозначные функции и главные значения

Полувывчет в простом полюсе

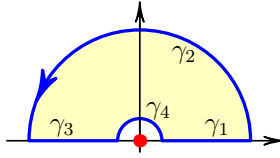
Упражнение (полувывчет). Убедитесь, что для любой полуокружности γ с центром в точке p , проходимой против часовой стрелки,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-p} = \pi i.$$

Пример. Вычислим **заново** интеграл Дирихле

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx.$$

Сперва при $t > 0$ проинтегрируем функцию e^{itz}/z по границе полукольца $r \leq |z| \leq R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Особых точек в этом полукольце нет.



По лемме Жордана, интеграл по большой полуокружности исчезает при $R \rightarrow \infty$. Вблизи нуля представим функцию в виде

$$\frac{e^{itz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$$

с ограниченной при каждом t функцией $g(z)$. Тогда на малой полуокружности интеграл от $g(z)$ исчезает при $r \rightarrow 0$, а интеграл от $1/z$ найден в упражнении, но для противоположного направления. Значит, сумма интегралов по двум участкам контура, лежащим на вещественной оси, стремится к πi . При этом она же стремится к $2iI(t)$ ввиду выражения синуса через экспоненту, так что $I(t > 0) = \pi/2$.

При $t < 0$ просто вынесем минус из-под синуса, а затем и из-под интеграла. В итоге

$$I(t) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t.$$

Примеры главных значений

Разберём теперь ряд примеров, ведущих к обобщению двух предыдущих теорем на случай рациональных функций с простыми полюсами на вещественной оси и интегралам в смысле главного значения.

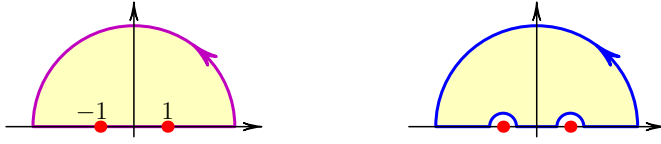
Пример. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

Подынтегральная функция имеет два простых полюса на вещественной оси. В таких особых точках несобственный интеграл расходится, но существует конечный интеграл в смысле главного значения по Коши; сейчас мы его и обнаружим. Попробуем, как и выше, интегрировать по границе полукруга D большого радиуса R . На полуокружности всё отлично, поскольку у нас рациональная функция степени -2 . Проблемы в полюсах, лежащих прямо на контуре.

Выбросим из D окрестности полюсов:

$$D_\varepsilon = \{z \in D: |z - 1| \geq \varepsilon, |z + 1| \geq \varepsilon\}.$$



Интегралом по ∂D в смысле главного значения (по-французски *valeur principale*) по Коши называют предел интегралов:

$$\mathcal{P} \oint_{\partial D} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial D_\varepsilon} f(z) dz.$$

Поскольку особых точек внутри области D_ε нет, интеграл по её границе равен нулю. Он является суммой интеграла I_0 по большой полуокружности, интегралов $I_{2,4}$ по двум малым полуокружностям и интегралов $I_{1,3,5}$ по трём отрезкам вещественной оси. Предел суммы $I_1 + I_3 + I_5$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ и есть главное значение исходного интеграла. Поскольку $I_0 \rightarrow 0$, искомый предел равен пределу $-(I_2 + I_4)$. По упражнению, эти два интеграла сводятся к полувычетам:

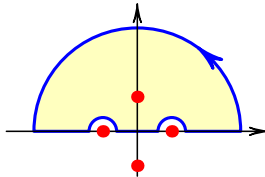
$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = -(I_2 + I_4) \stackrel{!}{=} \pi i \left(\text{Res}_{z=1} + \text{Res}_{z=-1} \right) \frac{1}{z^2 - 1} = 0.$$

Пример. Аналогично вычислим главное значение интеграла

$$I = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}, \quad f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 1}.$$

Полюс $z = i$ находится внутри верхней полуплоскости, а (простые) полюсы $z = \pm 1$ лежат на вещественной оси. Поэтому

$$I \stackrel{!}{=} 2\pi i \text{Res}_{z=i} f(z) + \pi i \left(\text{Res}_{z=1} + \text{Res}_{z=-1} \right) f(z) = \dots = \frac{\pi}{2}.$$



Пример. Аналогично найдём главное значение интеграла

$$I(t) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{itx}}{x^2 - 1} dx.$$

Полюсов в верхней полуплоскости нет, а на вещественной оси есть два простых полюса. Интеграл по большой полуокружности исчезает в пределе благодаря лемме Жордана. Поэтому при $t > 0$

$$I(t) \stackrel{!}{=} \pi i \left(\operatorname{Res}_{z=1} + \operatorname{Res}_{z=-1} \right) \frac{ze^{itz}}{z^2 - 1} = \pi i \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \pi i \cos t.$$

Значение $I(0) = 0$ видно ввиду нечётности подынтегральной функции, а при $t < 0$ делаем замену $x = -u$. В итоге

$$I(t) = \pi i \operatorname{sgn} t \cos t.$$

Теоремы о главных значениях

Теорема. Для рациональной функции $f(z)$ степени не выше -2 с простыми полюсами на вещественной оси

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{p \in P_+} \operatorname{Res}_{z=p} f(z) + \pi i \sum_{p \in P_0} \operatorname{Res}_{z=p} f(z).$$

Теорема. Для рациональной функции $f(z)$ степени не выше -1 с простыми полюсами на вещественной оси и $t > 0$

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{itz} dz = 2\pi i \sum_{p \in P_+} \operatorname{Res}_{z=p} (f(z) e^{itz}) + \pi i \sum_{p \in P_0} \operatorname{Res}_{z=p} (f(z) e^{itz}).$$

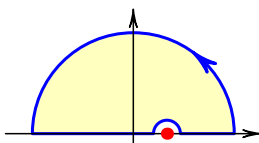
В обеих теоремах P_+ и P_0 это множества полюсов функции $f(z)$ соответственно в верхней полуплоскости и на вещественной оси.

Соотношения Крамерса — Кронига

Теорема. Если при $\operatorname{Im} z \geq 0$ функция $f(z)$ аналитична и убывает на бесконечности быстрее роста $|z|$, то для всех $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - t}.$$

Доказательство. Аналогично предыдущему, но без предположения рациональности. Убывание $f(z)$ на бесконечности обеспечивает стремление к нулю интеграла по большой полуокружности. Особых точек внутри контура нет, а на границе одна с вычетом $f(t)$. $\square$



Соотношения Крамерса — Кронига важны в физике, как вы увидите на третьем курсе в физике сплошных сред, то есть продолжении классической электродинамики. Там речь идёт об аналитичности диэлектрической проницаемости; её вещественная и мнимая части определяют оптические параметры — показатели преломления и поглощения. Ввиду наличия в соотношениях явного множителя i , они связывают эти показатели. В вещественной форме записи соотношений два.

Кроме того, в теории обработки сигналов аналитичность функции отклика $f(z)$ в верхней полуплоскости равносильна принципу причинности: будущее не влияет на прошлое. Там применяют выражение

$$H[f](t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x - t},$$

отличающееся от соотношений Крамерса — Кронига отсутствием множителя i и называемое преобразованием Гильберта функции $f(x)$. Оно играет важную роль в теории обработки сигналов и поэтому имеет большое значение для инженерных приложений, а также **тесно связано** с преобразованием Фурье.

4.3. Многозначные функции

Квадратный корень

Чтобы свести к вычетам вычисление интеграла от многозначной функции, сперва при переходе к комплексной переменной необходимо выбрать однозначную ветвь; а именно, сейчас речь о ветви квадратного корня. Кроме того, контур интегрирования должен включать участки, дающие в пределе искомый участок вещественной оси. В этом разделе последним будет полуось $[0, +\infty)$, логично поэтому провести разрез как раз по ней. Значит, во всех вычислениях здесь нужно брать $0 \leq \arg z \leq 2\pi$. В верхней полуплоскости это совпадает со стандартным выбором, но в нижней отличается, что в случае забывчивости приносит досадные сюрпризы.

Пример. Чтобы вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}, \quad f(z) = \frac{z^{-1/2}}{z+1},$$

проинтегрируем функцию $f(z)$ по границе подковы, полученной разрезанием кольца $r \leq |z| \leq R$ по положительной вещественной полуоси. Подкова содержит единственный простой полюс $z = -1$.

Вклады малой и большой окружностей стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ в силу простых оценок, поскольку соответственно

$$|f(re^{i\phi})| \sim r^{-1/2}, \quad |f(Re^{i\phi})| \sim R^{-3/2}.$$

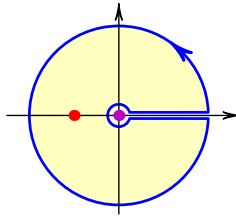
Те же самые оценки для вещественной переменной изначально влекут сходимость искомого интеграла.

Оба прямолинейных участка контура идут по берегам разреза. Вклад участка на верхнем берегу стремится к I , а на нижнем берегу нужно брать $\arg z = 2\pi$, что скажется только при подстановке в корень и выскочит из него в виде **дополнительной фазы** $(e^{2\pi i})^{-1/2} = -1$. Учитывая направление прохождения, получаем равенство

$$I - e^{\pi i} I = 2I \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i (e^{\pi i})^{-1/2} = 2\pi,$$

откуда затем находим $I = \pi$.

?



Пример. Снова интегрируя по подкове, вычислим интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x)^2}, \quad f(z) = \frac{z^{1/2}}{(z+1)^2}.$$

Теперь в той же точке полюс второго порядка, и отличие от первого примера лишь в формуле для вычета:

$$2I \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i (z^{1/2})' \big|_{z=-1} = \pi i (e^{\pi i})^{-1/2} = \pi,$$

откуда $I = \pi/2$.

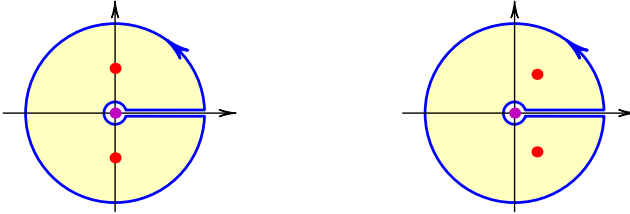
Пример. Аналогично вычислим интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}, \quad f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2+1}.$$

Теперь в подкове два простых полюса $z = \pm i$, а остальное построение неизменно и приводит к равенству

$$\begin{aligned} 2I &\stackrel{!}{=} 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} + \operatorname{Res}_{z=-i} \right) f(z) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \left((e^{\pi i/2})^{-1/2} + (e^{3\pi i/2})^{-1/2} \right) = \dots = \pi\sqrt{2}, \end{aligned}$$

откуда $I = \pi/\sqrt{2}$. Если же вместо $-i = e^{3\pi i/2}$ подставить $-i = e^{-\pi i/2}$, то ответ будет мнимым, что сразу сигнализирует об ошибке.



Упражнение. Вычислите интегралы первых трёх примеров через бета-функцию.

Пример. Аналогично вычислим интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1-x+x^2}, \quad f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2-z+1}.$$

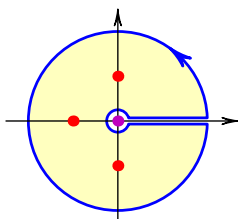
Этот уже не сводится к бета-функции — во всяком случае, проще таким путём не становится. Вычеты же работают как и прежде. Здесь два простых полюса $p_1 = e^{\pi i/3}$ и $p_2 = e^{5\pi i/3}$, поэтому

$$2I \stackrel{!}{=} 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=p_1} + \operatorname{Res}_{z=p_2} \right) f(z) = \dots = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (e^{\pi i/6} - e^{5\pi i/6}) = 2\pi,$$

откуда $I = \pi$.

Пример. Аналогично вычислим интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x)(1+x^2)}, \quad f(z) = \frac{z^{1/2}}{(z+1)(z^2+1)}.$$



Теперь в подкове три простых полюса. Аккуратно собирая вычеты, в итоге приходим к ответу

$$I = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}.$$

Степенной вес

Когда вместо квадратного корня подынтегральная функция содержит множитель x^λ , где $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ и число 2λ не целое, применяется та же схема, но вычисления усложняются как минимум в двух аспектах: коэффициент на нижнем берегу разреза равен $e^{2\lambda\pi i}$; хуже выглядят вычеты. Хуже в итоге и ответы.

Пример. Интегрируя по той же подкове, вычислим интеграл

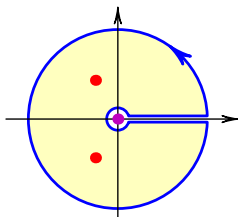
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3} dx}{1+x+x^2}, \quad f(z) = \frac{z^{1/3}}{z^2+z+1}.$$

Опираясь на дар предвидения, положим $\varepsilon = e^{2\pi i/9}$. Полюсы расположены в точках ε^3 и ε^6 . Находим

$$I - \varepsilon^3 I \stackrel{!}{=} 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=\varepsilon^3} + \operatorname{Res}_{z=\varepsilon^6} \right) f(z) = \dots = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (\varepsilon - \varepsilon^2),$$

откуда

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + 2 \cos \frac{2\pi}{9}}.$$



Теорема про степенной вес

Сформулируем общее утверждение для вычисления сходящихся интегралов со степенным весом. Это интегралы вида

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) dx, \quad f(z) = z^{\alpha-1} g(z),$$

где функция $g(z)$ рациональна и выполнены следующие условия:

- $g(0) \notin \{0, \infty\}$;
- нет полюсов $g(z)$ на положительной полуоси;
- $0 < \alpha < -\deg g(z)$.

Первое условие всегда можно удовлетворить, перенося мешающую степень z из рациональной функции в весовой множитель. Второе и третье условия обеспечивают сходимость интеграла. Это явно отмечено в [первом примере](#) раздела, но далее замалчивалось. Как и выше, ветвь функции $z^{\alpha-1}$ выберем с разрезом по положительной вещественной полуоси и положительным значением на верхнем берегу.

Теорема. При перечисленных условиях значение интеграла находится из равенства

$$(1 - e^{2\alpha\pi i})I = 2\pi i \sum_{p \in P} \operatorname{Res}_{z=p} f(z),$$

где P есть множество всех полюсов рациональной функции $g(z)$.

Логарифмический вес и полукольцо

В силу определения общей степенной функции как $z^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Ln} z}$, изменяемый выше выбор её ветви равносителен выбору ветви логарифма с таким же разрезом и положительными значениями на верхнем берегу. Сохраним здесь это соглашение теперь уже для непосредственно входящих логарифмов.

Пример. Разомнёмся парой интегралов с известными значениями:

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{1+x^2} = 0.$$

Первый знаком давно, а второй можно найти, делая замену $x = 1/t$.

Попробуем однако вычислить I_1 , интегрируя функцию

$$f_1(z) = \frac{\ln z}{z^2 + 1}$$

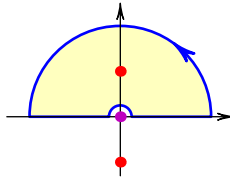
почти по тому же контуру, который **позволяет** вычислить I_0 : по границе полукруга в верхней полуплоскости. Способ уклонения от точки ветвления $z = 0$ мы уже отработали на примерах с квадратным корнем. Итак, интегрируем по границе полукольца $r \leq |z| \leq R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. На отрицательной вещественной полуоси имеем $z = xe^{\pi i}$, поэтому её вклад равен

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\ln z \, dz}{1+z^2} = e^{\pi i} \int_R^r \frac{(\ln x + \pi i) \, dx}{1+x^2} = -e^{\pi i} (I_1(r, R) + \pi i I_0(r, R)).$$

Переходя к пределам при $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow +\infty$, получим равенство

$$I_1 - e^{\pi i} (I_1 + \pi i I_0) = 2I_1 + \pi i I_0 \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f_1(z) = \dots = \frac{\pi^2}{2} i.$$

Поскольку как I_0 , так и I_1 вещественны, можно заключить отсюда, что $I_0 = \pi/2$ и $I_1 = 0$. Искали только I_1 , а нашли оба.



Пример. Аналогично вычислим сразу два интеграла

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \, dx}{1+x^2}, \quad I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{1+x^2} \, dx.$$

Первый мы уже **нашли**, проходя по границе подковы, охватывающей оба полюса $z = \pm i$, но сейчас проинтегрируем функцию

$$f_1(z) = \frac{z^{1/2} \ln z}{z^2 + 1}$$

по границе полукольца, содержащего только полюс $z = i$. По сравнению с предыдущим примером, за счёт нового весового множителя $\sqrt{z}$ меняется на $\pi/2$ дополнительная фаза, **выскакивающая** из интеграла по отрицательной полуоси. Поэтому на контуре в пределе

$$I_1 - e^{\pi i/2} e^{\pi i} (I_1 + \pi i I_0) = (1+i)I_1 - \pi I_0.$$

Считаем вычет:

$$2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f_1(z) = 2\pi i \cdot e^{\pi i/4} \frac{\pi i/2}{2i} = \frac{\pi^2}{\sqrt{8}} (-1+i).$$

Приравнивая мнимые части этих равенств, находим $I_1 = \pi^2/\sqrt{8}$; затем для проверки можно также найти $I_0 = \pi/\sqrt{2}$.

Логарифмический вес и подкова

Применение полукольца в рассмотренных выше примерах возможно, поскольку рациональный сомножитель подынтегральной функции чётен. Полукольцо привлекательно тем, что содержит вдвое меньше полюсов, но подкова универсальнее.

Упражнение. Для целого $n \geq 0$ положим

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^n dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Делая замену $x = 1/t$, убедитесь, что $I_n = 0$ для всех нечётных n .

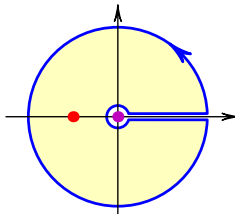
Пример. Чтобы рассмотреть интегралы I_n из упражнения для небольших чётных n , положим

$$f_n(z) = \frac{z^{-1/2}(\ln z)^n}{z+1}.$$

Значение $I_0 = \pi$ **найден** в самом начале раздела. Кроме того, оно выпадает в качестве побочного продукта при попытке вычислить I_1 интегрированием функции $f_1(z)$ по границе нашей родной подковы. Фаза, выскакивающая из интеграла на нижнем берегу разреза, появляется только за счёт присутствующего $\sqrt{z}$ и равна $e^{-\pi i}$. Поэтому

$$I_1 - e^{-\pi i}(I_1 + 2\pi i I_0) = 2I_1 + 2\pi i I_0 \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f_1(z) = \dots = 2\pi^2 i.$$

Приравнивая вещественную и мнимую части, находим $I_0 = \pi$ и $I_1 = 0$.



Перейдём к интегралу I_2 . На нижнем берегу разреза в числителе стоит $(\ln x + 2\pi i)^2$. Следовательно, интегрирование функции $f_2(z)$ даёт

$$I_2 + (I_2 + 2 \cdot 2\pi i \cdot I_1 + (2\pi i)^2 \cdot I_0) = 2I_2 - 4\pi^2 \cdot \pi$$

$$\stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f_2(z) = \dots = -2\pi^3,$$

откуда $I_2 = \pi^3$. Уже известное [значение](#) интеграла I_0 пригонжается.

Упражнение. Продолжая, найдите таким путём

$$I_3 = 0, \quad I_4 = 5\pi^5, \quad I_5 = 0, \quad I_6 = 61\pi^7, \quad \text{дальше.}$$

Помимо многочисленных появлений в комбинаторике, коэффициенты здесь неожиданно связаны с [функциями Ламберта и Гудермана](#), упомянутыми во второй главе и заданиях.

Пример. Попробуем аналогичным образом вычислить несколько первых интегралов серии

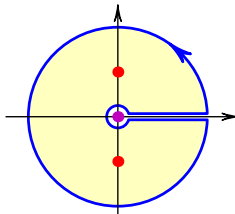
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^n dx}{1+x^2}, \quad f_n(z) = \frac{(\ln z)^n}{z^2+1}.$$

Важное отличие от предыдущего примера — отсутствие корня. Это означает, что при интегрировании по границе подковы на нижнем берегу разреза никакой фазы из-под интеграла не выскакивает. Для функции $f_1(z)$ получается

$$I_1 - (I_1 + 2\pi i I_0) = -2\pi i I_0$$

$$\stackrel{!}{=} 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} + \operatorname{Res}_{z=-i} \right) f_1(z) = 2\pi i \left(\frac{\pi i/2}{2i} + \frac{3\pi i/2}{-2i} \right) = -\pi^2 i,$$

то есть I_1 сокращается, и найти, в очередной раз, удаётся только значение $I_0 = \pi/2$. При этом необходимо брать $\ln(-i) = 3\pi i/2$; если же взять $-\pi i/2$, то ответ покажется отрицательным.



Это рассуждение подсказывает, что для вычисления интеграла I_1 придётся интегрировать функцию $f_2(z)$. Действительно,

$$\begin{aligned} I_2 - (I_2 + 2 \cdot 2\pi i I_1 + (2\pi i)^2 I_0) &= -4\pi i I_1 + 4\pi^2 I_0 \\ &\stackrel{!}{=} 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} + \operatorname{Res}_{z=-i} \right) f_2(z) = \dots = 2\pi^3, \end{aligned}$$

откуда $I_1 = 0$ и попутно опять бесплатно выпало $I_0 = \pi/2$.

Вычислим ещё I_2 , интегрируя функцию $f_3(z)$:

$$I_3 - (I_3 + 3 \cdot 2\pi i I_2 + 3 \cdot (2\pi i)^2 I_1 + (2\pi i)^3 I_0) = -6\pi i I_2 + 8\pi^3 I_0.$$

Далее поделим на $2\pi i$, подставим значение I_0 и перейдём к вычетам:

$$-3I_2 + 4\pi^2 I_0 = -3I_2 + 2\pi^3 \stackrel{!}{=} \left(\operatorname{Res}_{z=i} + \operatorname{Res}_{z=-i} \right) f_3(z) = \dots = \frac{13}{8}\pi^3,$$

откуда находим $I_2 = \pi^3/8$.

Теорема про логарифмический вес

Сформулируем общее утверждение для вычисления интегралов с логарифмическим весом. Это интегралы вида

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx, \quad f_n(z) = z^{\alpha-1} (\operatorname{Ln} z)^n g(z)$$

с целым $n \geq 0$, где функция $g(z)$ рациональна и выполнены [те же условия](#), что и выше для интегралов со степенным весом. Присутствие логарифма не влияет на условия сходимости. Для представления вклада нижнего берега разреза введём вспомогательные интегралы

$$J_n = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} (\ln x + 2\pi i)^n g(x) dx.$$

Теорема. При перечисленных условиях значение интеграла I_n находится из равенств

$$I_k - e^{2\alpha\pi i} J_k = 2\pi i \sum_{p \in P} \operatorname{Res}_{z=p} f_k(z),$$

где P есть множество всех полюсов рациональной функции $g(z)$. Равенства используются одно за другим от $k = 0$ до n при нецелом α и от $k = 1$ до $n + 1$ при целом α .

Зависимость от параметра 1

В этой главе примеры отобраны с целью максимально охватить разнообразие доступных явлений, не погрязая в вычислениях. Следует отметить при этом, что возникающие в физике интегралы часто содержат параметры; более того, именно зависимость интеграла от параметра бывает интересна на практике. Иногда её удаётся увидеть, преобразуя интеграл, но в других случаях параметры приходится протягивать через всё вычисление, опирающееся на вычеты.

Пример. С помощью замены переменной $x = at$ интеграл

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{a^2 + x^2},$$

где $a > 0$, сводится к интегралам I_0 и I_1 из предыдущего примера:

$$I(a) = \dots = \frac{1}{a}(I_1 + I_0 \ln a) = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

Пример. Такая же замена $x = at$ сводит интеграл

$$I(p, a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^p \, dx}{x + a}, \quad a > 0,$$

к его частному случаю, посчитанному в **конце** первого раздела:

$$I(p, a) = a^p I(p, 1), \quad I(p, 1) = \pi \csc \pi(p + 1) = -\pi \csc \pi p.$$

Этот интеграл сходится при $-1 < p < 0$.

С другой стороны, наличие параметров вместо их числовых значений приносит дополнительные возможности. Здесь оказывается полезной теорема вещественного анализа о дифференцировании интеграла по параметру.

Пример. Не заморачиваясь проверкой выполнения условий упомянутой теоремы, быстро найдём пару интегралов на основе предыдущего:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^p \, dx}{(x + a)^2} &= -\frac{\partial}{\partial a} I(p, a) = a^{p-1} \pi p \csc \pi p, \\ \int_0^{+\infty} \frac{x^p \ln x \, dx}{x + 1} &= \frac{d}{dp} I(p, 1) = \pi p \csc \pi p \operatorname{ctg} \pi p. \end{aligned}$$

В первом из них повысилась кратность полюса, а во втором возник логарифмический вес.

Упражнение. Искусственно введите степенной вес x^p и вычислите этим методом посчитанные выше интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx.$$

Дифференцирование по параметру помогает упростить вычисления и для некоторых интегралов от однозначных функций.

Упражнение. Для $n \in \{1, 2\}$ вычислите интегралы

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^n}, \quad a > b > 0.$$

4.4. МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ГЛАВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

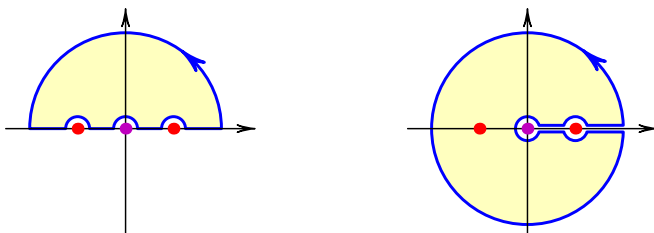
Примеры главных значений

Пример. Чтобы вычислить главное значение интеграла

$$I = \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x^2 - 1}, \quad f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2 - 1},$$

проинтегрируем функцию $f(z)$ двумя способами. Хочется пройти в одном случае по границе полукольца $r \leq |z| \leq R$, $\text{Im } z \geq 0$, а в другом по границе подковы, как было в некоторых примерах выше. Однако тут полюсы попадают на контур, и их надо обойти по малым дугам окружностей, как мы уже делали для однозначных функций.

Первый способ работает благодаря чётности функции $\frac{1}{x^2-1}$. При употреблении полукольца фаза, выскакивающая из-под интеграла по отрицательной полуоси, равна $\pi\alpha$, а тут $\alpha = 3/2$. Оба полюса лежат на вещественной оси и просты, поэтому интеграл в смысле главного



значения сходятся и сводится к двум полувычетам:

$$(1 - e^{3\pi i/2})I = (1 + i)I \stackrel{!}{=} \pi i \left(\operatorname{Res}_{z=1} + \operatorname{Res}_{z=-1} \right) f(z) = \pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right).$$

Отсюда $I = \pi/2$.

Второй способ универсален. Выскакивающая фаза на нижнем берегу разреза равна $2\pi\alpha = 3\pi$. Полюс $z = -1$ лежит внутри подковы и вносит вычет. Новое явление наблюдается в полюсе $z = 1$, ибо на двух берегах разреза берутся разные значения аргумента. Фактически это разные точки римановой поверхности: $z = 1_+$ с аргументом 0 на верхнем берегу и $z = 1_-$ с аргументом 2π на нижнем берегу, что нужно учесть при подстановке в полувычет. Итого,

$$(1 - e^{3\pi i})I = 2I \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) + \pi i \left(\operatorname{Res}_{z=1_+} + \operatorname{Res}_{z=1_-} \right) f(z),$$

что, конечно, также даёт $I = \pi/2$.

Пример. Также двумя способами с теми же контурами вычислим главные значения первых интегралов в серии

$$I_n = \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^n dx}{x^2 - 1}, \quad f_n = \frac{(\ln z)^n}{z^2 - 1}.$$

При чётных n они равны нулю, как показывает замена $x = 1/t$, но мы притворимся, что не знаем этого.

Интегрируя функцию $f_1(z)$ по границе полукольца с обходом двух полюсов, учитываем фазу π на отрицательной полуоси. Поэтому

$$I_1 - e^{\pi i}(I_1 + \pi i I_0) = 2I_1 + \pi i I_0 \stackrel{!}{=} \pi i \left(\operatorname{Res}_{z=1} + \operatorname{Res}_{z=-1} \right) f_1(z) = 0 + \frac{\pi^2}{2}.$$

Отсюда получаем как $I_0 = 0$, так и $I_1 = \pi^2/4$.

Интегрируя функцию $f_2(z)$ по границе подковы с избеганием полюса $z = 1$ на разрезе, учитываем фазу 2π на нижнем берегу. Поэтому

$$I_2 - e^{2\pi i}(I_2 + 2 \cdot 2\pi i I_1 + (2\pi i)^2 I_0) = -4\pi i I_1 + 4\pi^2 I_0,$$

так что после деления на πi имеем

$$-4I_1 - 4\pi i I_0 \stackrel{!}{=} \left(2 \operatorname{Res}_{z=-1} + \operatorname{Res}_{z=1_+} + \operatorname{Res}_{z=1_-} \right) f_2(z) = 2 \frac{(\pi i)^2}{2} + 0 + \frac{(2\pi i)^2}{-2} = -\pi^2.$$

Опять получаем как $I_0 = 0$, так и $I_1 = \pi^2/4$.

Упражнение. Вычислите обоими способами значения I_2 и I_3 .

Упражнение. При $a > 0$ вычислите главное значение интеграла

$$\mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 dx}{x^2 - a^2}.$$

Теоремы о главных значениях

Чтобы сформулировать общее утверждение о главных значениях интегралов со степенным и логарифмическим весом, нужно позволить простые полюсы на положительной вещественной полуоси и соответственно модифицировать правые части равенств, собирающие вычеты.

Теорема. При указанных предположениях главная часть интеграла со степенным весом находится из равенства

$$(1 - e^{2\alpha\pi i})I = 2\pi i \sum_{p \in P_*} \operatorname{Res}_{z=p} f(z) + \pi i \sum_{p \in P_0} \left(\operatorname{Res}_{z=p+} + \operatorname{Res}_{z=p-} \right) f(z).$$

Теорема. При указанных предположениях главная часть интеграла I_n с логарифмическим весом находится из равенств

$$I_k - e^{2\alpha\pi i} J_k = 2\pi i \sum_{p \in P_*} \operatorname{Res}_{z=p} f(z) + \pi i \sum_{p \in P_0} \left(\operatorname{Res}_{z=p+} + \operatorname{Res}_{z=p-} \right) f(z).$$

Порядок из применения *тот же*, что и для сходящихся интегралов с логарифмическим весом.

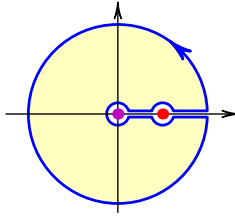
В обеих теоремах P_* и P_0 есть множества всех полюсов рациональной функции $g(z)$ соответственно вне положительной полуоси и на ней, причем точки p_+ лежат на верхнем берегу проходящего по этой полуоси разреза, а точки p_- — на нижнем, и везде $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.

Пример. Вычислим ещё главное значение интеграла

$$I_1 = \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(x-1)}, \quad f_1(z) = \frac{z^{-1/2} \ln z}{x-1}.$$

В отсутствие симметрии, метод полукольца не работает, и остаётся универсальная подкова:

$$I_1 - e^{\pi i}(I_1 + 2\pi i I_0) = 2I_1 + 2\pi i I_0 \stackrel{!}{=} \pi i \left(\operatorname{Res}_{z=1+} + \operatorname{Res}_{z=1-} \right) f(z) = \cdots = 2\pi^2,$$



откуда $I_1 = \pi^2$ и попутно вычислено главное значение интеграла

$$I_0 = \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)},$$

хотя его зануление, как уже не раз тут происходило, показывает замена $x = 1/t$.

Внезапные главные значения

Добавим немного любопытных примеров интегралов со степенным весом, показатель которого не является полуцелым.

Пример. При $0 < \alpha < 1$ существует главное значение интеграла

$$I = \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{1-x}, \quad f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1-z}.$$

Вычислим его, интегрируя $f(z)$ по границе подковы:

$$(1 - e^{2\alpha\pi i})I \stackrel{!}{=} \pi i \left(\operatorname{Res}_{z=1+} + \operatorname{Res}_{z=1-} \right) f(z) = -\pi i (1 + e^{2\alpha\pi i}),$$

откуда $I = \pi \operatorname{ctg} \alpha\pi$.

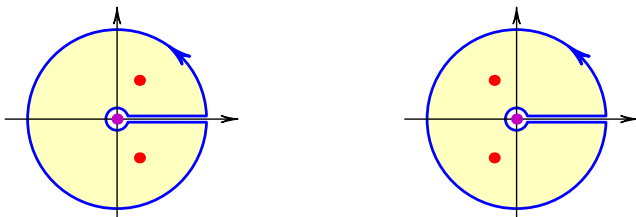
Пример. Для вычисления интеграла

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3} dx}{1-x+x^2}$$

применим новый приём, который позволит быстро свести его к уже известным. А именно, домножим числитель и знаменатель на $1+x$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}(1+x) dx}{1+x^3} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3} dx}{1+x^3} + \int_0^{+\infty} \frac{x^{4/3} dx}{1+x^3} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(\csc \frac{4\pi}{9} + \csc \frac{2\pi}{9} \right). \end{aligned}$$

Переход к числам совершён согласно [упражнению](#) в конце первого раздела этой главы.



Пример. Применим аналогичный приём к очень похожему интегралу

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3} dx}{1+x+x^2}.$$

Соответственно, домножим числитель и знаменатель на $1-x$, но далее при разделении на слагаемые придётся совершить переход к главным частям. Это допустимо, поскольку $I = \mathcal{P}I$, как и для всякого сходящегося интеграла. Итак,

$$\mathcal{P}I = \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}(1-x) dx}{1-x^3} = \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3} dx}{1-x^3} - \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{x^{4/3} dx}{1-x^3}.$$

Оба интеграла в правой части расходятся, но существуют их главные значения. Делая замену $t = x^3$, сведём их к главному значению интеграла, посчитанному в начале этого подраздела:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}I &= \dots = \frac{1}{3} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{x^{-5/9} dx}{1-x} - \frac{1}{3} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{x^{-2/9} dx}{1-x} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(\operatorname{ctg} \frac{4\pi}{9} + \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{9} \right). \end{aligned}$$

Забавно сходство с ответом в предыдущем примере. Кроме того, нынешний интеграл мы уже посчитали [непосредственно](#); ответы визуаль-но различны, но равны в силу тригонометрических тождеств.

Упражнение. Проверьте последнее утверждение.

Внезапное продолжение: Зависимость от параметра 2

Пример. Вычислим двумя способами интеграл с тремя параметрами:

$$J(p, a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{(x+a)(x+b)}, \quad b > a > 0.$$

Случай $a = b$ упомянут в предыдущем разделе как получающийся дифференцированием интеграла

$$I(p, a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{x+a} = -a^p \pi \csc \pi p.$$

Прежде всего отметим, что интеграл J сходится при $-1 < p < 1$, тогда как интеграл I — лишь при $-1 < p < 0$.

Разложив дробь на простейшие, запишем равенство

$$\begin{aligned} J(p, a, b) &= \frac{1}{b-a} \int_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{x+a} - \frac{1}{b-a} \int_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{x+b} \\ &= \frac{I(p, b) - I(p, a)}{b-a} = \frac{b^p - a^p}{b-a} \pi \csc \pi p. \end{aligned}$$

Этот же ответ получается аккуратным интегрированием по границе подковы по теореме про степенной вес, причём при $-1 < p < 1$.

Выходит, опять при $0 \leq p < 1$ разность двух расходящихся интегралов даёт правильный ответ! В отличие от предыдущего примера, здесь это не объяснить главными значениями, ибо их нет.

Чтобы понять увиденное в этом примере, нужно позволить комплексные значения переменной p . Параметры a и b можно считать постоянными. Если доказать, что J и I являются аналитическими функциями от p , то теорема единственности распространит связывающее их равенство, полученное на промежутке $-1 < p < 0$ вещественной оси, на комплексную область. При этом **функция**, аналитически продолжающая $I(p, a)$, имеет полюсы во всех целых вещественных точках p ; **соответственно** и для $J(p, a, b)$, однако у последней в точке $p = 0$ вместо полюса наблюдается устранимая особая точка.

Упражнение. Найдите пределы $J(p, a, b)$ при $p \rightarrow 0$ и при $b \rightarrow a$.

Искомая аналитичность этих интегралов устанавливается по теореме об аналитической зависимости интеграла от параметра. Основной шаг проверки её условий — построение интегрируемой мажоранты, но там нет ничего нового по сравнению с вещественными p , поскольку

$|x^p| = x^{\operatorname{Re} p}$. Поэтому интеграл J сходится в полосе $-1 < \operatorname{Re} p < 1$, а интеграл I , соответственно, в полосе $-1 < \operatorname{Re} p < 0$.

Вместе с интегралом, определяющим гамма-функцию, где мы тоже столкнулись с аналитическим продолжением, рассмотренные здесь интегралы относятся к **преобразованиям Меллина** простых функций,

$$\{\mathcal{M}f\}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x) dx.$$

Они тесно связаны с преобразованиями Фурье и Лапласа, но оказались удобнее в различных приложениях.

Упражнение (разностные частные). *Вычислите интеграл*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{(x+a)(x+b)(x+c)},$$

где все параметры в знаменателе положительные вещественные, притом различные. Запишите ответ так, чтобы они входили в него симметрично. Найдите пределы при $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 1$.

Указание: **эти наброски**, особенно последний раздел.

4.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Зависимость от параметра 3

Начнём с довольно общей теоремы об аналитической зависимости интеграла от параметра. Она применяется в нашем курсе несколько раз, причём не только в этом разделе. Речь здесь пойдёт о функции $f: D \times \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ двух переменных: одна лежит в области $D \in \mathbb{C}$, а другая на промежутке Δ вещественной прямой, который может быть конечным или бесконечным. Наложим на неё три условия:

- (1) для всякого $t \in \Delta$ функция $z \mapsto f(z, t)$ аналитична на D ;
- (2) исходная функция непрерывна на $D \times \Delta$;
- (3) существует **интегрируемая мажоранта** $\varphi(t)$.

Напомним смысл выделенных терминов:

$$|f(z, t)| \leq \varphi(t) \text{ для всех } z \in D \text{ и } t \in \Delta, \quad \int_{\Delta} \varphi(t) dt < +\infty.$$

Теорема. При указанных условиях получаем на D аналитическую функцию и её производную:

$$F(z) = \int_{\Delta} f(z, t) dt, \quad F'(z) = \int_{\Delta} \partial_z f(z, t) dt.$$

В этой формулировке два утверждения — сама аналитичность интеграла и возможность дифференцирования под интегралом:

$$\frac{d}{dz} \int_{\Delta} f(z, t) dt = \int_{\Delta} \frac{\partial}{\partial z} f(z, t) dt.$$

Доказательство. Рассуждение использует три теоремы комплексного анализа и три теоремы вещественного анализа. Последние у вас были в конце предмета, притом относились к тяжеловесам: теорема Лебега о предельном переходе под интегралом, теоремы Фубини и Тонелли. Условия (2) и (3) как раз и обеспечивают их применимость.

Теорема Лебега влечёт непрерывность функции $F(z)$ на D . Далее возьмём круг $B \subset D$ радиуса r с центром в точке p и произвольный контур $\gamma \subset B$. Условие (1) и интегральная теорема Коши дают

$$\oint_{\gamma} f(z, t) dz = 0 \text{ для всех } t \in \Delta.$$

Отсюда хочется получить

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = \oint_{\gamma} \int_{\Delta} f(z, t) dt dz \stackrel{?}{=} \int_{\Delta} \oint_{\gamma} f(z, t) dz dt = 0,$$

потому что тогда **теорема Мореры** делает из непрерывной функции $F(z)$ аналитическую. Отмеченная знаком вопроса смена порядка интегрирований обосновывается тем, что по теореме Тонелли существует конечный интеграл по $\gamma \times \Delta$, а затем по теореме Фубини существуют и равны повторные интегралы.

Чтобы внести дифференцирование под знак интеграла, по интегральной **формуле Коши для производной** представим производную как интеграл по окружности $C = \partial B$, сменим порядок интегрирований и по той же формуле вернёмся к производной $\partial_z f(z, t)$ **при $z = p$** :

$$\begin{aligned} F'(p) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(z)}{(z-p)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \int_{\Delta} \frac{f(z, t)}{(z-p)^2} dt dz \\ &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \oint_C \frac{f(z, t)}{(z-p)^2} dz dt = \int_{\Delta} \frac{\partial f}{\partial z}(p, t) dt. \end{aligned}$$

За смену порядка интегрирований снова благодарим итальянцев. $\square$

Оригиналы и изображения

Преобразование Лапласа изучается в нескольких учебных дисциплинах второго курса физического факультета. Основная теоретическая часть отнесена в основы функционального анализа, а приложения идут к решению дифференциальных уравнений и их систем, повсюду возникающих в физике. Ряд теоретических вопросов ближе к комплексному анализу, поэтому они немного освещены здесь.

Напомним определения. **Оригиналом** называют кусочно-непрерывную функцию $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, если сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt$$

для некоторого вещественного числа a . Точную нижнюю грань таких a называют **показателем роста** функции f и обозначают через $a(f)$.

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим через D_α полуплоскость $\operatorname{Re} p > \alpha$ комплексной переменной p . **Изображением** оригинала $f(t)$ называют функцию

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

определённую в полуплоскости $D_{a(f)}$. Преобразованием Лапласа называют соответствие, сопоставляющее оригиналу аналитическое продолжение изображения. Записывают это по-разному; выберем $f(t) \doteq F(p)$.

Примеры. Вам уже известны преобразования Лапласа

$$\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}, \quad e^t \doteq \frac{1}{p - 1}.$$

На рисунках залиты жёлтым полуплоскости, где определены изображения. Полюсы лежат точно на критической вертикальной линии.



Аналитичность изображения

Теорема. Изображение $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $D_{a(f)}$, причём $F(p) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Для чисел $a > a(f)$ и $p \in D_a$ верна оценка

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-\operatorname{Re} pt} \leq |f(t)|e^{-at},$$

правая часть которой является интегрируемой мажорантой для подынтегральной функции $f(t)e^{-pt}$, и работает теорема об аналитической зависимости интеграла от параметра из начала раздела.

Чтобы получить утверждаемое убывание изображения, разобьём промежуток $t > 0$ на два и оценим интегралы по ним отдельно. Поскольку интеграл

$$M = \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-at} dt$$

конечен, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\int_0^\delta |f(t)|e^{-at} dt < \varepsilon.$$

На оставшейся части $t > \delta$ имеем

$$e^{-\operatorname{Re} pt} = e^{-at} e^{(a-\operatorname{Re} p)t} \leq e^{-at} e^{(a-\operatorname{Re} p)\delta},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_\delta^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| &\leq \int_\delta^{+\infty} |f(t)|e^{-\operatorname{Re} pt} dt \\ &\leq e^{(a-\operatorname{Re} p)\delta} \int_\delta^{+\infty} |f(t)|e^{-at} dt \leq e^{(a-\operatorname{Re} p)\delta} \cdot M, \end{aligned}$$

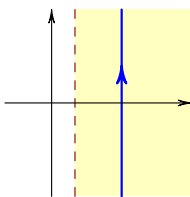
что стремится к нулю при $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$. □

Формула обращения

Теорема. Если оригинал $f(t)$ кусочно-гладкий, то в любой точке t , где он непрерывен, верно равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{a-is}^{a+is} F(p)e^{pt} dp;$$

интегрирование в смысле главного значения выполняется по прямой $\operatorname{Re} p = a > a(f)$ комплексной плоскости переменной p .



Формула обращения, или формула Меллина, представляющая оригинал в виде интеграла Бромвича, доказывается в лекциях по основам функционального анализа путём сведения к формуле обращения для преобразования Фурье.

Свёртка изображений и умножение оригиналов

На формулу обращения опирается следующая теорема, которую мы также не будем доказывать.

Теорема. Если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$ в полуплоскости D_a , то

$$f(t)g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z)G(p-z) dz;$$

интегрирование в смысле главного значения выполняется по прямой $\operatorname{Re} z = b > a$ и комплексная переменная p лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p > a + b$.

Правую часть равенства в этой теореме называют свёрткой изображений. Функции $F(z)$ и $G(z)$ аналитичны при $\operatorname{Re} z > a$. Значит, если $\operatorname{Re} p > a + b$, то функция $G(p - z)$ аналитична при $\operatorname{Re} z < b$. Отсюда следует, что при достаточно большом $\operatorname{Re} p$ линия интегрирования разделяет особые точки функций $F(z)$ и $G(p - z)$: первые лежат левее её, а вторые — правее.



Пример. Преобразование Лапласа

$$e^t \sin t \doteq \frac{1}{(p-1)^2 + 1}$$

можно получить просто из теоремы смещения, но посмотрим, как в этом случае работает свёртка изображений для $f(t) = \sin t$ и $g(t) = e^t$. Соответственно, будем интегрировать по z функцию

$$F(z)G(p-z) = \frac{1}{z^2+1} \cdot \frac{1}{p-z-1}.$$

Возьмём окружность $|z| = R$ большого радиуса. Интеграл по любой её дуге стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$. Возьмём ещё отрезок прямой $\operatorname{Re} z = b$, делящий круг на две части. Полюсы $z = \pm i$ лежат в левой части, а полюс $z = p-1$ лежит в правой. Интеграл по границе правой части сводится к вычету и даёт искомую свёртку. Интеграл по границе левой части сводится к сумме двух вычетов и также даёт искомую свёртку, хотя при этом дробь разложена в сумму простейших.

Существование оригинала

Теорема. Если функция $F(p)$ является аналитической в полуплоскости D_α и стремится к нулю при $p \rightarrow +\infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a > \alpha$ равномерно относительно $\arg p$, а интеграл

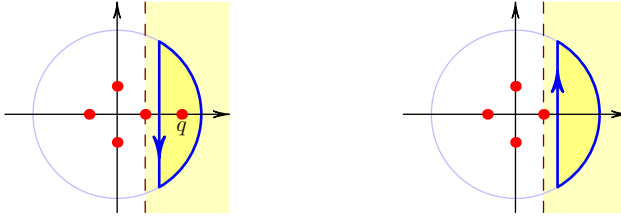
$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp = \int_{-\infty}^{+\infty} F(a+is) ds$$

абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, данной формулой обращения.

Доказательство. Сначала рассмотрим $t > 0$. Зафиксируем $q \in D_\alpha$. Домножим формулу обращения на e^{-qt} и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-qt} f(t) dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-qt} \left(\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) \left(\int_0^{+\infty} e^{(p-q)t} dt \right) dp \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p-q} dp. \end{aligned}$$

Смена порядка интегрирования возможна благодаря наличию интегрируемой мажоранты. Последний интеграл посчитаем, переходя к интегралу по контуру $\Gamma = \gamma(R) \cup K$, где $\gamma(R)$ это дуга $\operatorname{Re} p \geq a$ окружности $|p| = R$, а отрезок K соединяет концы дуги.



При $R \rightarrow +\infty$ вклад дуги стремится к нулю, ибо

$$\left| \int_{\gamma(R)} \frac{F(p) dp}{p - q} \right| \leq \frac{2\pi R}{R - |q|} \cdot \max_{p \in \gamma(R)} |F(p)| \rightarrow 0,$$

а вклад отрезка — к искомому интегралу. В итоге интеграл сводится к вычету и равен $F(q)$.

Для $t < 0$ при $R \rightarrow +\infty$ получим

$$\int_{\gamma(R)} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0$$

по модифицированной лемме Жордана, и прямую интегрирования в формуле обращения можно заменить тем же контуром с противоположным обходом. Тогда $f(t) = 0$ ввиду аналитичности $F(p)$ в полуплоскости D_α . $\square$

На шаге доказательства, использующем версию леммы Жордана, можно ослабить предположения: вместо устремления радиуса к бесконечности достаточно взять последовательность радиусов с тем же свойством. Это расширяет круг приложений теоремы.

Вторая теорема разложения

Следствие. В условиях предыдущей теоремы оригинал для $F(p)$ можно найти по формуле

$$f(t) = H(t) \sum_{p_k \in P} \operatorname{Res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}),$$

где вычеты суммируются по всем особым точкам p_k функции $F(p)$ в порядке неубывающих модулей.

Функцию Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

вставляют в формулу исключительно для того, чтобы настаивать на равенстве $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Доказательство. Для $t > 0$ и $t < 0$ интегрируем по границам соответственно левой и правой частей круга $|p| = R$, рассечённого прямой $\operatorname{Re} p = a$, затем устремляем $R \rightarrow +\infty$ и пользуемся подходящей версией леммы Жордана. $\square$

Оговорка о порядке суммирования тут нужна только в случае бесконечного числа особых точек. При этом наиболее важен на практике безоговорочный случай рациональной функции

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

причём степень полинома A меньше степени полинома B , поскольку требуется стремление $F(p)$ к нулю на бесконечности. Можно тогда подставить в разложение формулу для вычета в полюсе. Ограничимся самым часто возникающим случаем, когда все полюсы p_k простые:

$$\frac{A(p)}{B(p)} \doteq f(t) = \sum_{p_k} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Изобилие таких примеров вы видите в курсе радиоэлектроники.

Первая теорема разложения

Пример. Преобразование Лапласа $1 \doteq \frac{1}{p}$ легко находится по определению и вам известно. Дифференцируя интеграл по параметру, из этого можно получить преобразование Лапласа

$$t^n \doteq \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt = \dots = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \doteq p^{-n}.$$

Также его можно получить через гамма-функцию и даже заменить целый показатель степени нецелым.

Оригиналы здесь записаны кратко, подразумевая равенство нулю при $t < 0$. Чтобы указать весь оригинал явным образом, достаточно домножить его на функцию Хевисайда $H(t)$.

Теорема. Если функция $F(p)$ аналитична в бесконечно удалённой точке и её разложение в ряд Лорана имеет вид

$$F(p) = \sum_{n \geq 1} c_n p^{-n},$$

то функция

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} c_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k \geq 0} c_{k+1} \frac{t^k}{k!}$$

целая и $F(p)$ служит изображением оригинала $H(t)f(t)$.

Формально, здесь оригинал является суммой оригиналов слагаемых ряда Лорана.

Доказательство. Вне подходящего круга $|p| = R$ функция $F(p)$ аналитична. Применяя **неравенства Коши** $|c_n| \leq MR^n$ для коэффициентов ряда Лорана, оценим намеченный оригинал:

$$|f(t)| \leq \sum_{n \geq 1} |c_n| \frac{|t|^{n-1}}{(n-1)!} \leq MR \sum_{n \geq 1} \frac{|(Rt)^{n-1}|}{(n-1)!} = MR e^{|Rt|},$$

причём ряд сходится при всех $t \in \mathbb{C}$, и его сумма — целая функция. Раз интеграл

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt$$

сходится при $a > R$, заключаем, что $H(t)f(t)$ является оригиналом.

Поскольку ряд для $f(t)$ сходится равномерно в каждом круге, можно умножить его на e^{-pt} и почленно проинтегрировать:

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt} dt = \dots = \sum_{n \geq 1} c_n p^{-n} = F(p),$$

что и требовалось. $\square$

Пример применения первой теоремы разложения рассмотрен в следующем разделе после отступления для краткого знакомства с новыми важными функциями. Другие содержательные примеры ещё сложнее.

Аналитическое продолжение бета-функции

Преобразование Лапласа позволяет быстро получить формулу

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$$

связывающую бета-функцию и гамма-функцию комплексных аргументов. Поскольку уже известны мероморфность гамма-функции и эта формула для положительных вещественных аргументов, согласно идеологии аналитического продолжения она же должна быть верна и

для комплексных. С другой стороны, есть определение бета-функции интегралом, куда тоже можно подставить комплексные переменные:

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt.$$

Проверим, что эти определения согласованы. Для этого в интеграле

$$\int_0^x t^{z-1} (x-t)^{w-1} dt = x^{z-1} * x^{w-1}$$

распознаем свёртку двух степенных функций. Свёртка оригиналов равна произведению изображений:

$$x^{z-1} \doteq \frac{\Gamma(z)}{p^z}, \quad x^{w-1} \doteq \frac{\Gamma(w)}{p^w} \Rightarrow x^{z-1} * x^{w-1} \doteq \frac{\Gamma(z)}{p^z} \cdot \frac{\Gamma(w)}{p^w}.$$

Однако для этого изображения столь же легко найти оригинал:

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{p^{z+w}} \doteq \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} x^{z+w-1}.$$

Полагая теперь $x = 1$, получаем искомую формулу.

4.6. Цилиндрические функции Бесселя

лекция 15
13.12.23

Разложение Фурье плоской волны

Для плоской волны физики пишут $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$, где θ это угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ и радиус-вектором $\mathbf{r}$. Плоская волна $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ является периодической функцией угла θ , поэтому её можно представить рядом Фурье

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(kr) e^{in\theta}.$$

Положим $x = kr$ для краткости. Коэффициенты Эйлера — Фурье находятся по известным формулам

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos \theta} e^{-in\theta} d\theta = i^n J_n(x).$$

Это равенство — первый интеграл Бесселя — можно взять за определение [цилиндрической функции Бесселя](#) (первого рода).

Пример. [Графики](#), [ещё графики](#).

Чтобы устранить множитель i^n , сдвинем угол: $\phi = \theta + \pi/2$. Получим

$$e^{ix \sin \phi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) e^{in\phi},$$

а также

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \phi - n\phi)} d\phi.$$

Раскроем экспоненту по формуле Эйлера и воспользуемся чётностью косинуса и нечётностью синуса. Это даёт чисто вещественное интегральное представление цилиндрических функций Бесселя:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \phi - n\phi) d\phi.$$

Все эти формулы переносятся без изменений на комплексную переменную z вместо вещественной x .

Производящая функция

От последнего ряда Фурье перейдём к ряду Лорана с переменной $w = e^{i\phi}$. Поскольку $i \sin \phi = \frac{1}{2}(w - \frac{1}{w})$, увидим разложение

$$F(z, w) = \exp\left(\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) w^n.$$

Эту функцию двух переменных называют **производящей** функцией для последовательности функций Бесселя $J_n(x)$. В четвёртом семестре на основах функционального анализа в главе об ортогональных многочленах вам предстоит познакомиться подробнее с таким способом упаковки некоторых последовательностей функций с акцентом на наиболее важные для математической физики.

Производящая функция позволяет получить ряд свойств функций Бесселя. Например, делая в ней подстановку $w = -1/t$, а затем сравнивая коэффициенты ряда, в силу единственности ряда Лорана приходим к равенству

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

Упражнение (теорема сложения). *Выведите равенство*

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(z_1) J_{n-k}(z_2).$$

Упражнение. Полагая $w = zt$, выведите равенства

$$\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z), \quad \frac{d}{dz}(z^{-n} J_n(z)) = -z^{-n} J_{n+1}(z).$$

Степенные ряды и уравнение Бесселя

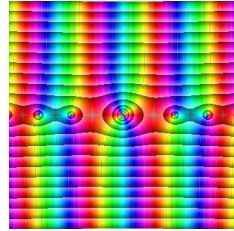
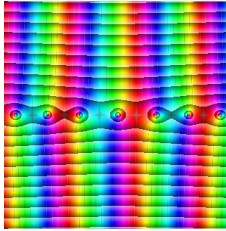
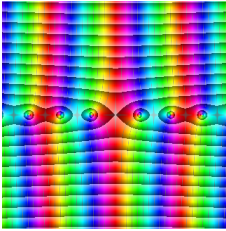
Разложим две экспоненты в степенные ряды

$$\exp \frac{zw}{2} = \sum_{j \geq 0} \frac{w^j}{j!} \left(\frac{z}{2}\right)^j, \quad \exp \frac{-z}{2w} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-w)^{-k}}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^k,$$

и перемножим их. Собирая коэффициенты для $j + k = n \geq 0$, получим разложения функций Бесселя:

$$J_n(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}.$$

Легко проверить, что для всех $n \geq 0$ радиус сходимости бесконечен, а потому эти функции целые. Вдали от точки $z = 0$ они весьма похожи на синус и косинус, но нули у них расположены не на равных расстояниях. По методу цветных областей отрисованы функции J_0 , J_1 , J_2 в квадрате со стороной $2^{7/2} \approx 22.6$.



При решении разделением переменных уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полярных координатах, а также в других задачах с цилиндрической симметрией, возникают **уравнения Бесселя**

$$t^2 \ddot{x} + t \dot{x} + (t^2 - n^2)x = 0$$

на радиальные функции. Целый параметр n связан с периодичностью по угловой переменной. Дифференцируя ряд для $J_n(t)$, можно убедиться, что эта функция удовлетворяет уравнению. Прикинем очень грубо её поведение при больших t : сначала отбросим слагаемое с n^2 , затем поделим на t^2 и отбросим слагаемое $\dot{x}/t$. Останется приближённое уравнение $\ddot{x} + x = 0$, имеющее общим решением синус со сдвигом по фазе. Поэтому примерно так же выглядят функции Бесселя.

Пример на первую теорему разложения

Решим уравнение Бесселя порядка $n = 0$; одну степень t тогда можно сразу сократить.

Положим

$$x(t) \doteq X(p), \quad x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = B.$$

Известные вам свойства преобразования Лапласа дают

$$\dot{x}(t) \doteq pX(p) - A, \quad \ddot{x}(t) \doteq p^2X(p) - Ap - B,$$

откуда далее

$$tx(t) \doteq -X'(p),$$

$$t\ddot{x}(t) \doteq -(p^2X(p) - Ap - B)' = -2pX(p) - p^2X'(p) + A.$$

Складывая преобразования Лапласа от слагаемых уравнения Бесселя, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(p^2 + 1)X'(p) + pX(p) = 0.$$

Оно легко решается разделением переменных:

$$X(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Выберем простейшее значение для постоянной: $C = 1$.

Полученная функция $X(p)$ аналитична на бесконечности: можно выбрать ветвь корня, соединяя точки ветвления $p = \pm i$ разрезом по отрезку. Разложим её в ряд Лорана, пользуясь биномиальным рядом:

$$X(p) = \frac{1}{p}(1 + p^{-2})^{-1/2} = \dots = \sum_{k \geq 0} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} p^{-2k-1}.$$

Наконец, первая теорема разложения даёт в виде ряда искомое решение — функцию Бесселя нулевого порядка

$$J_0(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.$$

Независимое второе решение уравнения таким методом не найти, ибо оно не является оригиналом (имеет особенность при $t = 0$).

Прийти к этому ряду можно и напрямую, ища решение дифференциального уравнения Бесселя в виде степенного ряда. Для произвольного целого порядка $n > 0$ получается найденный выше ряд

$$J_n(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}.$$

Эту формулу можно обобщить и на нецелые порядки, заменив $(k+n)!$ гамма-функцией. Функции Бесселя полуцелых порядков оказываются элементарны — они выражаются через $\sqrt{t}$ и тригонометрию — и возникают в задачах со сферической симметрией. Другие порядки возникают в более специальных вопросах.

Колебания висящей цепи

Бессель первым систематически изучил названные его именем функции, столкнувшись с ними при описании движения планет. Однако задолго до него эти функции появлялись у нескольких ведущих математиков в самых разных задачах. Эйлер получил уравнение Бесселя, изучая колебания круглой мембраны, но ещё раньше его друг Бернулли изучал колебания висящей цепи и встретил функцию J_0 .

Подвесим цепь за один конец и поместим начало координат в точку равновесия свободного конца. Цепь колеблется в плоскости Oxy . В предположении, что отклонение цепи от равновесия мало, натяжение цепи направлено вертикально: $F(y) = \mu gy$. Горизонтальная сила $F_x(y)$ в каждой точке появляется из-за изгиба цепи и выражается через угол $\alpha(y)$, образуемый с вертикальной осью. Поэтому

$$dF_x(y) = d(\mu gy \sin \alpha(y)) \approx d(\mu gy \operatorname{tg} \alpha(y)) = d\left(\mu gy \frac{\partial x}{\partial y}\right).$$

По второму закону Ньютона

$$dF_x(y) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dm = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \mu dy.$$

Получаем уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial x}{\partial y} \right).$$

Поиск его решения в виде $x(y, t) = Y(y)T(t)$, то есть метод разделения переменных, приводит к уравнению вида

$$yY''(y) + Y'(y) + aY(y) = 0.$$

Искомым решением является функция $Y(y) = J_0(2\sqrt{y/a})$. Точка закрепления цепи не колеблется, так что в неё обязан попасть один из нулей решения. Какой именно по счёту? Любой, и этим номером определяется мода колебаний.

По общей технологии метода разделения переменных, константа a каждой моды определяет частоту этой моды. Поскольку отношения различных нулей функции Бесселя иррациональны, сумма даже двух мод неперiodична во времени и демонстрирует хаотичное поведение.

Глава 5. АСИМПТОТИКА

5.1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Пример Эйлера

Математические модели природных явлений обычно ведут к столь сложным зависимостям, что точное решение неудобоваримо или вовсе невозможно. Приходится искать приближённые решения, отбрасывая несущественные детали. Путь к этому часто открывает наличие очень малого или очень большого параметра. Методы, основанные на стремлении параметра к нулю или бесконечности, называют **асимптотическими**. Попыткой введения в них было бы точнее называть всю эту главу.

лекция 15
08.12.21

Пример. Классический пример использования асимптотических методов даёт формула Тейлора: гладкую функцию заменяют приближающим её полиномом.

Ряд Тейлора функции e^{-z} сходится во всей комплексной плоскости:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k = \sum_{0 \leq k \leq n} + \sum_{k > n} = S_n(z) + R_n(z).$$

Удобно разбить его на **частичную сумму** и **хвост**. При этом в произвольной фиксированной точке z хвост стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. При увеличении степени полинома абсолютная погрешность приближения стремится к нулю, что позволяет (в теории) вычислить значение функции с наперёд заданной точностью.

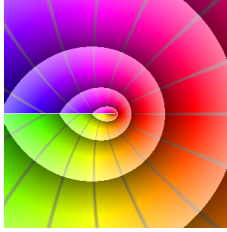
Однако при изучении поведения функции вблизи нуля часто полезнее оказывается оценка

$$f(z) - S_n(z) = o(z^n),$$

где важно, что каждое слагаемое частичной суммы ряда бесконечно мало по сравнению с предыдущим, а хвост бесконечно мал по сравнению с частичной суммой. Речь тогда идёт не об абсолютной, а об относительной погрешности при замене $f(z)$ на $S_n(z)$, стремящейся к нулю при $z \rightarrow 0$. Как ни странно, сходимость ряда не нужна.

Пример. Ещё Эйлер рассмотрел степенной ряд

$$\sum_{k \geq 0} (-z)^k k!,$$



имеющий нулевой радиус сходимости, и связанную с ним функцию

$$E(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{1+zt}.$$

Она аналитична в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной вещественной полуоси. Отрисована по методу цветных областей в квадрате со стороной 16.

Чтобы увидеть искомую связь, разложим под интегралом начало геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+zt} = \frac{1 - (-zt)^{n+1}}{1+zt} + \frac{(-zt)^{n+1}}{1+zt} = \sum_{0 \leq k \leq n} (-zt)^k + \frac{(-zt)^{n+1}}{1+zt}$$

и проинтегрируем почленно, помня равенство

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \Gamma(k+1) = k!.$$

Получим частичную сумму ряда Эйлера и хвост

$$E(z) = S_n(z) + R_n(z) = \sum_{0 \leq k \leq n} (-z)^k k! + (-z)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{n+1}}{1+zt} dt.$$

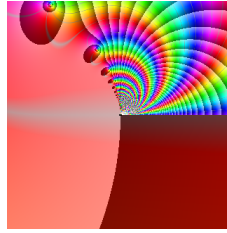
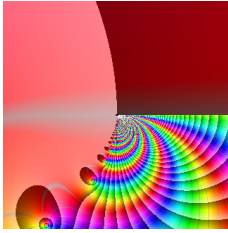
Последовательность частичных сумм расходится при всех $z \neq 0$. При фиксированном $z \neq 0$ абсолютная погрешность $|E(z) - S_n(z)|$ растёт при увеличении n .

Однако ситуация выглядит совсем иначе, если зафиксировать n и устремить z к нулю должным образом. Ограничимся сектором

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi - \delta\}.$$

Множество точек вида $\frac{1}{1+zt}$, где $z \in \Omega$ и $t \in [0, +\infty)$, ограничено двумя дугами окружностей. Поэтому найдётся такое число $M = M(\delta)$, что

$$|R_n(z)| \leq M(n+1)! \cdot |z|^{n+1}.$$



Значит, при замене функции $E(z)$ частичной суммой $S_n(z)$ погрешность стремится к нулю при $z \rightarrow 0$ в секторе Ω . Верно и утверждение о сравнении соседних слагаемых.

Можно проверить, что асимптотические формулы

$$E(z) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k z^k + o(z^n) \quad \text{при } \Omega \ni z \rightarrow 0$$

однозначно определяют коэффициенты $a_k = (-1)^k k!$.

Ещё два рисунка показывают аналитическое продолжение функции $E(z)$ в квадрате со стороной $1/4$. На первом $0 < \arg z < 2\pi$, на втором $-2\pi < \arg z < 0$. Видно, что при стремлении z к точке ветвления $z = 0$ не существует предела функции, ибо картинка весьма похожа на существенно особую точку. При этом на главной ветви $-\pi < \arg z < \pi$ предел существует и равен 1.

Последовательности и разложения

Асимптотической последовательностью при $z \rightarrow p$ называют такую последовательность функций $\{\varphi_n(z)\}$, что

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z))$$

при $z \rightarrow p$ для всех n . Точка p должна быть предельной для области определения каждой функции. Нередко область определения вещественна; тогда переменную обозначаем буквой x . Кроме того, функции не могут быть тождественными нулями.

Пример. Вблизи нуля чаще всего используется асимптотическая последовательность $\varphi_n(z) = z^n$.

Пример. На бесконечности чаще всего используется асимптотическая последовательность $\varphi_n(z) = z^{-n}$.

Пример. Последовательность $\varphi_n(z) = z^{-n}e^z$ тоже асимптотическая при $z \rightarrow \infty$. Несмотря на то, что в секторе, лежащем в правой полуплоскости, все эти функции бесконечно большие, определяющее условие малости соблюдено:

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} = z^{-1} \rightarrow 0.$$

Имея асимптотическую последовательность $\{\varphi_n(z)\}$ при $z \rightarrow p$, мы можем пытаться раскладывать функции. **Асимптотическим разложением** или **асимптотическим рядом** функции $f(z)$ называют такой формальный ряд $\sum a_n \varphi_n(z)$, что

$$f(z) - \sum_{k \leq n} a_k \varphi_k(z) = o(\varphi_n(z)) \quad \text{при } z \rightarrow p.$$

При этом пишут

$$f(z) \simeq \sum a_n \varphi_n(z) \quad \text{при } z \rightarrow p.$$

Для примера обратимся к рассмотренному выше ряду Эйлера. Сходящиеся ряды Тейлора подходят под данное определение, но не подходят по смыслу: новая терминология подчёркивает неважность сходимости ряда; либо её на самом деле нет, либо она не установлена. Ситуация с рядами Лорана на бесконечности аналогична: для этой темы они являются тривиальным случаем.

Упражнение. В определении асимптотического ряда можно заменить $o(\varphi_n(z))$ на $O(\varphi_{n+1}(z))$.

Существование разложения в общем случае не гарантировано, и часть задачи для конкретной функции может состоять именно в отыскании подходящей асимптотической последовательности.

Пример. Функция $\cos x$ не разлагается по $\{x^{-n}\}$ при $x \rightarrow \infty$. Причина в отсутствии предела, а ведь коэффициент при x^0 должен быть им:

$$\cos x \stackrel{?}{=} a_0 x^0 + o(x^0) \quad \Rightarrow \quad \cos x \rightarrow a_0.$$

Нули и совпадение

Некоторые функции могут оказаться «меньше» всех элементов выбранной асимптотической последовательности. Функцию $f(z)$ называют **асимптотическим нулём** относительно последовательности $\{\varphi_n(z)\}$, если $f(z) = o(\varphi_n(z))$ для всех n . Далее, функции $f(z)$ и $g(z)$ называют

асимптотически совпадающими, если $f - g$ является асимптотическим нулём. В этом случае будем писать $f \asymp g$.

Пример. Наблюдаем $\exp(-x^{-2}) \asymp 0$ относительно асимптотической последовательности $\{x^n\}$ при $x \rightarrow 0$.

Теорема. Если две функции допускают асимптотические разложения по одной последовательности, то эти разложения совпадают тогда и только тогда, когда функции асимптотически совпадают.

Значит, асимптотический ряд определяется однозначно. При этом разные функции могут иметь одинаковые асимптотические ряды. Выпишем явную формулу для вычисления коэффициентов:

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{\varphi_0(x)}, \quad a_n = \lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{\varphi_n(x)} \left(f(x) - \sum_{k < n} a_k \varphi_k(x) \right).$$

Общие свойства

Теорема. Разложения

$$f(z) \simeq \sum a_n \varphi_n(z), \quad g(z) \simeq \sum b_n \varphi_n(z)$$

влекут разложения линейных комбинаций:

$$\alpha f(z) + \beta g(z) \simeq \sum (\alpha a_n + \beta b_n) \varphi_n(z).$$

Доказательства этой и предыдущей теорем прямо следуют из свойств бесконечномалых.

Теорема. Вещественные асимптотические разложения обычно можно почленно интегрировать.

Формулировка требует уточнений. Предположим, что

- (1) в асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ все функции положительны на промежутке $[a, p)$;
- (2) имеется разложение $f(x) \simeq \sum a_n \varphi_n(x)$ при $x \rightarrow p$;
- (3) все упомянутые функции непрерывны на промежутке $[a, p)$;
- (4) при $a \leq x < p$ сходятся интегралы

$$\Phi_n(x) = \int_x^p \varphi_n(t) dt, \quad F(x) = \int_x^p f(t) dt.$$

Тогда имеется разложение $F(x) \simeq \sum a_n \Phi_n(x)$.

Доказательство. Положительность функций $\varphi_n(x)$ влечёт положительность функций $\Phi_n(x)$. Необходимые o -малости проверяются по правилу Бернулли — Лопиталья. Во-первых, первообразные образуют асимптотическую последовательность, ибо

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\Phi_{n+1}(x)}{\Phi_n(x)} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow p} \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)} = 0.$$

Далее возьмём остатки

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k \leq n} a_k \varphi_k(x) = o(\varphi_n(x)), \quad R_n(x) = \int_x^p r_n(t) dt.$$

Тогда, во-вторых,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R_n(x)}{\Phi_n(x)} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow p} \frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = 0,$$

так что интегрирование разложения даёт

$$F(x) - \sum_{k \leq n} a_k \Phi_k(x) = o(\Phi_n(x)),$$

что и требовалось. $\square$

Дифференцировать в общем случае нельзя, и проблема в том, что не гарантировано разложение производной.

Пример. Функция $f(x) = e^{-x} \sin(e^x)$ является асимптотическим нулём относительно последовательности $\{x^{-n}\}$ при $x \rightarrow +\infty$, но её производная $f'(x) = \cos(e^x) - e^{-x} \sin(e^x)$ не допускает асимптотического разложения по последовательности $\{-nx^{-n-1}\}$.

Степенные разложения

Степенными называют разложения по асимптотическим последовательностям $\{(z-p)^n\}$ при $z \rightarrow p$ и $\{z^{-n}\}$ при $z \rightarrow \infty$. Заменой переменной они сводятся к случаю $p = 0$. Благодаря тому, что произведение элементов последовательности также в неё входит, а производные и первообразные отличаются от элементов лишь постоянными множителями, появляются дополнительные свойства.

Теорема. *Разложения двух функций*

$$f(z) \simeq \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad g(z) \simeq \sum_{n \geq 0} b_n z^n$$

влекут разложения их произведения $f(z) \cdot g(z)$ и, при условии $b_0 \neq 0$, частного $f(z)/g(z)$; коэффициенты находятся по тем же формулам, что и для степенных рядов.

Напомним, что для произведения имеем

$$f(z) \cdot g(z) \simeq \sum_{n \geq 0} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j,$$

а для частного нужно вывернуть эти соотношения.

Теорема. Разложения двух функций

$$f(z) \simeq \sum_{n \geq 1} a_n z^n, \quad g(w) \simeq \sum_{n \geq 0} b_n w^n$$

влекут разложение их композиции

$$g(f(z)) \simeq \sum_{n \geq 0} c_n z^n;$$

коэффициенты находятся формальной подстановкой ряда в ряд.

Почленное интегрирование и дифференцирование вещественных степенных разложений аналогичны этим же операциям со сходящимися рядами, причём — как и там — для производной требуется дополнительное предположение.

Теорема. Если функция непрерывна на промежутке, то её разложение влечёт разложение первообразной:

$$f(x) \simeq \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad \int_0^x f(t) dt \simeq \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Теорема. Если функция гладкая на промежутке и её производная допускает степенное асимптотическое разложение, то его можно получить почленным дифференцированием:

$$f(x) \simeq \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) \simeq \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Упражнение. Напишите степенные асимптотические разложения при $z \rightarrow 0$ **неэлементарных** целых функций: функции ошибок, интегрального синуса, интегралов Френеля.

Аналитические функции

Тут мы рассматриваем только степенные разложения при $z \rightarrow \infty$.

Теорема. Если однозначная функция $f(z)$, аналитическая в области $|z| > R$, допускает асимптотическое разложение

$$f(z) \simeq \sum_{n \geq 0} a_n z^{-n},$$

то этот асимптотический ряд является её рядом Лорана и сходится в той же области.

Доказательство. Такая функция разлагается в ряд Лорана. Все его коэффициенты c_n нулевые при $n > 0$, поскольку $f(z) \rightarrow a_0$ при $z \rightarrow \infty$. Единственность ряда Лорана влечёт $a_n = c_{-n}$ для всех $n \geq 0$. $\square$

Достаточно часто встречаются функции, аналитические в секторе

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R > 0, \alpha < \arg z < \beta\}$$

с углом раствора $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. Их асимптотические разложения обладают дополнительными свойствами.

Теорема. Если в секторе Ω однозначная функция $f(z)$ аналитична и $f(z) \simeq \sum c_n z^{-n}$, причём $c_0 = c_1 = 0$, то

$$F(z) = \int_z^\infty f(t) dt \simeq \sum_{n \geq 2} \frac{c_n}{n-1} z^{1-n},$$

где интеграл берётся по произвольному пути в секторе Ω .

Отсутствие слагаемых z^0 и z^{-1} требуется для сходимости интеграла. Интегрировать проще всего по лучу.

Теорема. Степенной асимптотический ряд аналитической функции можно почленно дифференцировать.

Уточним формулировку. Степенное асимптотическое разложение функции в секторе Ω влечёт аналогичное разложение её производной в любом секторе $\Omega' \subset \Omega$:

$$f(z) \simeq \sum_{n \geq 0} c_n z^{-n} \quad \Rightarrow \quad f'(z) \simeq - \sum_{n \geq 1} n c_n z^{-n-1}.$$

В доказательстве используется представление производной с помощью интегральной формулы Коши.

Теорема. *Всякий формальный степенной ряд является асимптотическим рядом аналитической функции.*

5.2. АСИМПТОТИКА НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Интегрирование по частям

*Пример (почти **интеграл Дюсона**). Найдём начало асимптотического разложения при $x \rightarrow +\infty$ функции (целой на самом деле)*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/4} \sin xt \, dt.$$

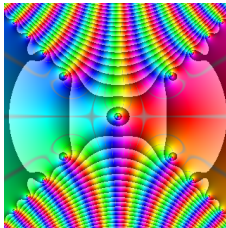
Это синус-преобразование Фурье плотности нормального распределения, что обеспечивает применения не только в теории вероятностей, но и в физике. Лемма Римана — Лебега, с которой вы познакомились при изучении преобразования Фурье в курсе основ функционального анализа, влечёт $F(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Задача в том, чтобы уточнить характер этого стремления. Внизу картинка в квадрате со стороной 8.

Проинтегрируем по частям, внося $\sin xt$ под дифференциал:

$$\begin{aligned} \int e^{-t^2/4} \sin xt \, dt &= -\frac{1}{x} \int e^{-t^2/4} d(\cos xt) \\ &= -\frac{1}{x} \left(e^{-t^2/4} \cos xt + \frac{1}{2} \int te^{-t^2/4} \cos xt \, dt \right). \end{aligned}$$

Тут потребовалось компенсирующее деление на x , откуда и появится главный член искомой асимптотики. Граничное слагаемое в пределах от 0 до $+\infty$ даёт -1 , а интегральное есть $o(1)$ опять же по лемме Римана — Лебега. Поэтому

$$F(x) \simeq x^{-1} + o(x^{-1}).$$



Следующее слагаемое асимптотического разложения можно найти, продолжая интегрировать по частям. Из-за чередования (ко)синусов граничное слагаемое при x^{-2} зануляется. Ещё один шаг выдаёт

$$F(x) \simeq x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-3} + o(x^{-3}).$$

Упражнение. Заполните детали и найдите следующее слагаемое.

Первый из двух типов интегралов, которые нам нужно рассмотреть, обобщает преобразование Лапласа:

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t)e^{\lambda S(t)} dt.$$

Здесь всё вещественное и достаточно гладкое. Функции $A(t)$ и $S(t)$ называют амплитудой и фазой. Случай $S(t) = t$ соответствует преобразованию Лапласа. Нас интересует асимптотика интеграла при $\lambda \rightarrow +\infty$. **Ясно**, что основной вклад набирается вблизи глобальных максимумов фазовой функции на промежутке интегрирования.

Попробуем найти главный член асимптотики тем же приёмом, что и выше в примере — интегрированием по частям. Компенсирующее деление будет на $\lambda S'(t)$, поэтому намеченный способ применим только в случае $S'(t) \neq 0$ на $[a, b]$. Получим

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{A(t)}{S'(t)} e^{\lambda S(t)} \right]_{t=a}^{t=b} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b \left(\frac{A(t)}{S'(t)} \right)' e^{\lambda S(t)} dt.$$

Край промежутка с большим значением фазы внесёт главный член асимптотики. В противном случае действуют иначе.

Метод Лапласа

Пример. Сперва вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t^2\right) dt.$$

Здесь фазовая функция имеет максимум в точке $t = 0$. Заменяя переменную так, что $\frac{1}{2}\lambda t^2 = u^2$, получаем известный вам интеграл Пуассона с дополнительным сомножителем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t^2\right) dt = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

Если в интеграле типа преобразования Лапласа глобальный максимум фазовой функции $S(t)$ достигается в критической точке $t = 0$, то вблизи неё разложим

$$S(t) = S(0) + \frac{1}{2}S''(0)t^2 + o(t^2),$$

причём $S''(0) \leq 0$. Предположим, что эта критическая точка невырожденная, то есть $S''(0) \neq 0$. Тогда адаптация вычисленного в примере интеграла даёт искомый главный член асимптотики. Постоянное слагаемое $S(0)$ просто выносится из-под интеграла; в квадратичном при аналогичной замене усложняется выражение под корнем; вклад остальных слагаемых убывает быстрее выписанных. Итого,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda S(t)} dt \simeq e^{\lambda S(0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(0)}} = \lambda^{-1/2} e^{\lambda S(0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|S''(0)|}}.$$

Легко достигается обобщение при невырожденных максимумах. Вместо $t = 0$ подставляем $t = t_k$, домножаем вклад на значение амплитуды $A(t_k)$, суммируем по всем глобальным максимумам t_k . Для максимума на краю берём половину.

Когда встречается вырожденный глобальный максимум, его вклад в главный член асимптотики порядка $\lambda^{-1/n} e^{\lambda S(t_k)}$ находится не через интеграл Пуассона, а более хитрой заменой с гамма-функциями.

Пример. Определяющий гамма-функцию интеграл, хоть и не попадает в обсуждаемый тип, сводится к попадающему заменой $t = \lambda x$:

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{\lambda \ln t - t} dt = \lambda^{\lambda+1} \int_0^{+\infty} e^{\lambda(\ln x - x)} dx.$$

Теперь выделим амплитуду $A(x) = 1$ и фазу $S(x) = \ln x - x$. Максимум фазы достигается в точке $x = 1$, причём $S(1) = -1$ и $S''(1) = -1$. Поэтому при $\lambda \rightarrow +\infty$ имеем формулу Стирлинга

$$\Gamma(\lambda + 1) \simeq \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} = \sqrt{2\pi\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda.$$

Метод стационарной фазы

Второй из двух типов интегралов, которые нам нужно рассмотреть, обобщает преобразование Фурье:

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) e^{i\lambda S(t)} dt.$$

Визуальное отличие от первого типа лишь в наличии мнимой единицы в показателе степени. Лемма Римана — Лебега влечёт $F(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Задача в том, чтобы уточнить характер этого стремления. Если $S'(t) \neq 0$, то асимптотика находится интегрированием по частям аналогично примеру в начале раздела. Иначе имеются критические точки, так что **выясняем сперва**, что ведущие вклады набираются именно вблизи них благодаря меньшей частоте колебаний. Этим оправдываются как термин «фаза», так и название метода.

Ограничимся случаем невырожденной стационарной точки $t = t_0$. Пройдём по изложению метода Лапласа, отмечая модификации, необходимые здесь. Снова воспользуемся разложением Тейлора, где важно квадратичное слагаемое. Ввиду множителя i в показателе экспоненты, в методе стационарной фазы роль канонического интеграла переходит к **интегралу Френеля**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\pm it^2) dt = \sqrt{\pi} \exp(\pm \frac{\pi i}{4}).$$

Необходимый знак перед i совпадает со знаком вещественного числа $S''(t_0)$. В итоге

$$F(\lambda) \simeq C \cdot \lambda^{-1/2} e^{i\lambda S(t_0)}, \quad C = A(t_0) \cdot e^{\operatorname{sgn} S''(t_0) \pi i / 4} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{|S''(t_0)|}}.$$

Если стационарных точек несколько, то их вклады нужно сложить.

Пример. Исходя из интегрального представления

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix \sin t - int) dt$$

функции Бесселя, найдём главный член её асимптотики при $x \rightarrow +\infty$. Здесь $A(t) = e^{-int}$ и $S(t) = \sin t$. Видим две стационарные точки; в них

$$S(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad S''(\frac{\pi}{2}) = -1, \quad S(\frac{3\pi}{2}) = -1, \quad S''(\frac{3\pi}{2}) = 1.$$

Находим вклады по полученной выше формуле и складываем их:

$$\begin{aligned} J_n(x) &\simeq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} (e^{ix} e^{-i\pi n/2} e^{-i\pi/4} + e^{-ix} e^{i\pi n/2} e^{i\pi/4}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

Вместо целого числа n здесь годится любое вещественное.