МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

А. П. Ульянов

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ФИЗИКОВ

Учебное пособие
по курсу линейной алгебры и геометрии

Новосибирск
2010

УДК: 510
ББК: В14я73-1 + В151.54я73-1
У 517

Ульянов А. П. Алгебра и геометрия плоскости и пространства для студентов-физиков: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. 80 с.

Пособие содержит краткий конспект лекций, прочитанных автором для студентов 1-го курса физического и геолого-геофизического факультетов НГУ по новой программе в осеннем семестре 2009 г.

В пособие включены следующие темы: трёхмерная векторная алгебра; прямые и плоскости; линии второго порядка; комплексные числа и многочлены; системы линейных уравнений и матрицы; определители; квадратичные формы и поверхности второго порядка.

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009-2018 гг.

Версия от 6 октября 2014 г.

Глава 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Векторы в пространстве

Определение вектора. Знакомясь с векторами, мы опираемся на известные из элементарной геометрии понятия: пространство с содержащимися в нём точками, прямые, плоскости. Единицу измерения длин будем считать выбранной раз и навсегда.

Определение. **Вектором** называется упорядоченная пара точек. Первая точка есть **начало** вектора, а вторая – его **конец**. Если начало и конец вектора совпадают, то это **нулевой** вектор; в противном случае вектор можно представить направленным отрезком.

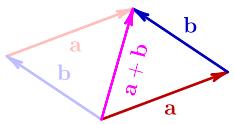
Расстояние между началом и концом вектора называют его **длиной**, **модулем**, либо **абсолютной величиной**.

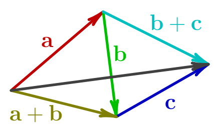
Пример. Многие физические величины являются векторами: перемещение, скорость, ускорение, сила...

Векторы обозначают стрелочками над буквами ($\vec{a}$, на письме) либо жирным шрифтом ($\mathbf{a}$, в книгах и этом конспекте). Длину вектора $\mathbf{a}$ обозначают $|\mathbf{a}|$.

Начало вектора также называют его **точкой приложения**. Различают векторы **приложенные** и **свободные**. Свободными векторами пользуются, когда направление и длина существенны, а точка приложения безразлична. Это обычная ситуация в математике, где поэтому принято называть векторами именно свободные векторы, а при рассмотрении приложенного вектора — вводить уточнение оборотом «вектор, отложенный от точки». В этом курсе мы следуем математическому употреблению. Итак, вектор можно свободно переносить от одной точки приложения к другой, а полученный в результате переноса вектор считается *равным исходному.*

Операции с векторами. Сложение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выполняется по **правилу треугольника**: откладываем $\mathbf{b}$ от конца $\mathbf{a}$, и тогда началом и концом $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ будут начало $\mathbf{a}$ и конец $\mathbf{b}$. Иногда удобнее равносильное **правило параллелограмма**: $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ есть диагональ параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.





Утверждение. *Сложение векторов обладает алгебраическими свойствами, аналогичными свойствам обычного сложения чисел:*

(1) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ *для всех векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$*;*
(2) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ *для всех векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$*;*
(3) *есть такой вектор* $\mathbf{0}$*, что* $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ *для каждого вектора* $\mathbf{a}$*;*
(4) *для каждого* $\mathbf{a}$ *есть такой вектор* $-\mathbf{a}$*, что* $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

Доказательство. (1) **Ассоциативность** геометрически очевидна.
(2) **Коммутативность** геометрически очевидна.
(3) Это нулевой вектор.
(4) Вектор $-\mathbf{a}$ получается из $\mathbf{a}$ перестановкой начала и конца. □

Умножение вектора $\mathbf{a}$ на вещественное число λ выполняется умножением длины $\mathbf{a}$ на $|\lambda|$, а также изменением направления на противоположное в случае $\lambda<0$. Поэтому $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ и $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$.

Утверждение. *Умножение векторов на числа обладает алгебраическими свойствами, аналогичными свойствам обычного умножения чисел, где все векторы и числа произвольны:*

(1) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$*;*
(2) $(\lambda\mu)\mathbf{a}=\lambda(\mu\mathbf{a})$*;*
(3) $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$*;*
(4) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$.

Доказательство. Всё проверяется непосредственно. □

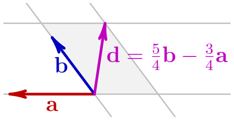
1.2. Базис и координаты

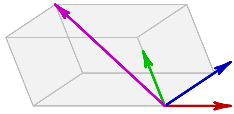
Два вектора, лежащие на одной прямой, то есть имеющие одинаковые или противоположные направления, называют **коллинеарными**. Три вектора, лежащие в одной плоскости, называют **компланарными**.

Утверждение. *Если векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *не коллинеарны, то каждый вектор* $\mathbf{d}$*, лежащий в одной плоскости с ними, представляется их комбинацией:* $\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$.

Доказательство. Через начало и конец вектора $\mathbf{d}$ проведём по прямой, параллельной каждому из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Стороны образованного параллелограмма равны $\alpha\mathbf{a}$ и $\beta\mathbf{b}$, где коэффициенты находятся как отношения длин с учётом направления. □

Утверждение. *Если векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *не компланарны, то каждый вектор* $\mathbf{d}$ *представляется их комбинацией:* $\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$.





Доказательство. Через начало и конец вектора $\mathbf{d}$ проведём по плоскости, параллельной каждой паре векторов из тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Стороны образованного параллелепипеда равны $\alpha\mathbf{a}$, $\beta\mathbf{b}$ и $\gamma\mathbf{c}$. □

Итак, выбрав три некомпланарных вектора, мы можем представить любой вектор пространства их комбинацией. Поэтому такую упорядоченную тройку $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ называют **базисом** пространства. Коэффициенты α, β, γ разложения $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ по этому базису называют **координатами** вектора $\mathbf{d}$ относительно выбранного базиса.

Компланарность и линейная зависимость. Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны, то хотя бы один из них можно представить комбинацией двух других: $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Если при этом среди данных векторов нет коллинеарных, то каждый из них представляется комбинацией двух других.

Следующая равносильная формулировка избегает условностей и исключений: векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда найдутся такие числа α, β, γ, не все равные нулю, что комбинация $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ равна нулевому вектору. Такая формулировка легко распространяется на произвольное количество векторов и оказывается исключительно удобной при дальнейшем изучении линейной алгебры.

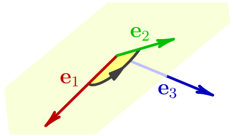
Определение. Множество $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ векторов называют **линейно независимым**, если

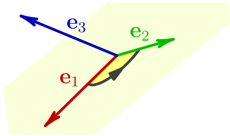
$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \implies \text{все } \alpha_i \text{ равны нулю.}$$

Линейно зависимым это множество называют в противном случае: если существуют такие коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Ориентация пространства. Все базисы в пространстве делятся на два класса. Чтобы уловить различие между классами, представим, что первые два вектора, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, уже выбраны. Проходящая через них плоскость делит пространство на две части, а третий вектор $\mathbf{e}_3$, отложенный от той же точки, что и первые два, должен лежать по одну сторону от этой плоскости. Повернём $\mathbf{e}_1$ в направлении $\mathbf{e}_2$ через меньший из образованных ими двух углов. С конца $\mathbf{e}_3$ это вращение





будет казаться идущим либо по часовой стрелке, либо против. Базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ принято называть **левым** в первом случае и **правым** — во втором.

Для некоторых построений необходимо решить, базисы какого из двух классов считать положительными, а какого — отрицательными. Этот выбор называется выбором **ориентации** пространства, а когда он сделан, пространство называют **ориентированным**. Как правило, положительными считаются правые базисы.

В ориентированном пространстве понятие объёма дополняют более тонким понятием **ориентированного объёма**. Достаточно ввести его для параллелепипедов. Если базис положителен, то ориентированный объём построенного на нём параллелепипеда положителен и равен обычному объёму; для отрицательных базисов ориентированный объём отличается от обычного своим отрицательным знаком.

1.3. Скалярное, смешанное и векторное произведения

В этом разделе геометрически определены названные операции и отмечены их простейшие свойства: поведение при перестановках аргументов, при умножении одного аргумента на число, а также **дистрибутивность** относительно сложения, ведущая к линейности по каждому аргументу.

Во всех трёх случаях несложно проверить геометрически первые два свойства. Доказательства дистрибутивности каждого произведения отсрочены в целях скорейшего достижения координатных формул для работы с этими произведениями.

Определение. **Скалярным произведением** векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, угол между которыми равен φ, называют число $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi$.

В ходу несколько обозначений для скалярного произведения. Чаще всего это $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ либо $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Когда $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, получаем связь скалярного квадрата вектора с его длиной: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

Утверждение. *Скалярное произведение обладает следующими свойствами, где все векторы и числа произвольны:*

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
(2) $(\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$;
(3) $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}$;
(4) $(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b} = \lambda_1(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}) + \lambda_2(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b})$.

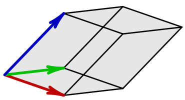
Доказательство. (1) Формула для скалярного произведения не чувствительна к перестановке векторов.

(2) При умножении вектора $\mathbf{a}$ на $\lambda > 0$ на это же число умножится его длина. При умножении на $\lambda < 0$ изменится также направление, так что вместо угла φ будет угол $\pi - \varphi$. Поскольку $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, требуемое равенство сохранится.

(3) Доказательство дистрибутивности несколько длиннее. Отложим его до следующей лекции.

(4) Нужно применить (3) и (2). □

Последнее свойство в утверждении указывает на поведение скалярного произведения, когда в первый его аргумент подставлена линейная комбинация: оказывается возможным провести вычисления отдельно для каждого слагаемого, вынося коэффициенты. Это очень удобное и важное свойство называют **линейностью** скалярного произведения (по первому аргументу). Ввиду возможности переставлять аргументы, имеется линейность и по второму аргументу. Поэтому говорят, что скалярное произведение **билинейно**.



Определение. **Смешанным произведением** трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называют численное значение ориентированного объёма параллелепипеда на этих векторах. В компланарном случае оно равно нулю.

Смешанное произведение обозначают через $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Утверждение. *Смешанное произведение обладает следующими свойствами, где все векторы и числа произвольны:*

(1) *при перестановках меняется знак, то есть*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b});$$

(2) $(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$;
(3) $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$;
(4) $(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \lambda_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

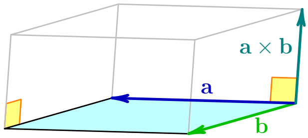
Доказательство. (1) Такие перестановки не меняют параллелепипед, но порядок векторов определяет «правость» или «левость» составленного из них базиса.

(2) При умножении одной стороны на λ объём параллелепипеда умножается на $|\lambda|$. Если $\lambda < 0$, то ориентация параллелепипеда меняется на противоположную.

(3) Отложим доказательство и этой дистрибутивности.

(4) Нужно применить (3) и (2). $\square$

Ввиду возможности переставлять аргументы, смешанное произведение линейно по всем трём аргументам (трилинейно).

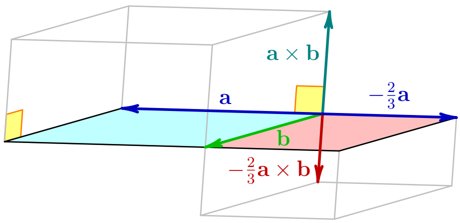


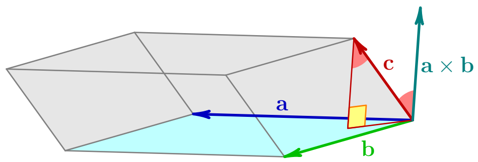
Определение. **Векторным произведением** векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют вектор, обозначаемый через $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ либо $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, длина и направление которого определены следующими правилами: если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$; иначе длина численно равна площади параллелограмма со сторонами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, то есть $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\varphi$, а направление перпендикулярно обоим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и таково, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ является положительным базисом.

Утверждение. *Векторное произведение обладает следующими свойствами, где все векторы и числа произвольны:*

(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$;
(2) $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$;
(3) $(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\times\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}$;
(4) $(\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b} = \lambda_1(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b})+\lambda_2(\mathbf{a}_2\times\mathbf{b})$.

Доказательство. (1) Вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ обладает всеми свойствами, характеризующими произведение $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, за исключением того, что $\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{a}\times\mathbf{b}$





образуют отрицательный базис. Поэтому для $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ не остаётся другой возможности, кроме как равняться $-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

(2) При $\lambda > 0$ наблюдаются лишь изменение длины и соответствующее изменение площади, а при $\lambda < 0$ наблюдается также изменение направлений первого сомножителя и всего произведения на противоположные.

(3) Отложим.

(4) Нужно применить (3) и (2). □

Утверждение. *Смешанное произведение выражается через скалярное и векторное:*

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}.$$

Этим и объясняется термин «смешанное».

Доказательство. В некомпланарном случае, представив объём параллелепипеда как произведение площади основания на высоту:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\cos\theta,$$

где θ есть угол между $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, получаем совпадение абсолютных величин $|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})| = |(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|$. А знаки совпадут, потому что векторы $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ направлены в одну сторону от плоскости, содержащей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, тогда и только тогда, когда базис $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ положителен.

В компланарном случае получим $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{0}$. □

Легко убедиться, что $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ не обязано равняться $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$.

Утверждение. *Двойное векторное произведение можно выразить через скалярные по формуле*

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

известной как «бац минус цаб».

Доказательство. Когда мы выведем формулы для вычисления произведений в координатах, это равенство можно просто проверить, в чём и состоит стандартный способ его доказательства. Чисто геометрическое рассуждение будет дано ниже. □

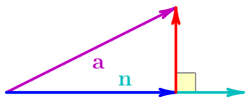
Следствие. *Векторное произведение удовлетворяет* **тождеству Якоби**

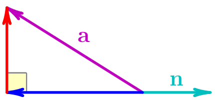
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Шесть слагаемых, получаемых при раскрытии двойных векторных произведений, попарно сокращаются. □

Следствие. *Если* $|\mathbf{n}| = 1$, *то* $\mathbf{a} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{n}$.

Доказательство. $(\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})$. □





Этим указано разложение всякого вектора $\mathbf{a}$ в сумму $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\|\mathbf{n}} + \mathbf{a}^{\perp\mathbf{n}}$, где первое слагаемое, называемое **проекцией** $\mathbf{a}$ на $\mathbf{n}$, коллинеарно $\mathbf{n}$, а второе ему перпендикулярно. Из доказательства следует также формула проектирования на любой ненулевой вектор $\mathbf{n}$, не обязательно единичный:

$$\mathbf{a}^{\|\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n}.$$

1.4. Вычисления в координатах

Выберем в пространстве базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и будем представлять каждый вектор $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ тройкой его координат $[a_1, a_2, a_3]$, употребляя ту же букву, но «обезжиренную».

Утверждение. *Сложение векторов и умножение вектора на число выполняются покоординатно.*

Доказательство. Имеются в виду формулы

$$\lambda[a_1, a_2, a_3] = [\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3],$$
$$[a_1, a_2, a_3] + [b_1, b_2, b_3] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3],$$

всего лишь выражающие равенства

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda a_2)\mathbf{e}_2 + (\lambda a_3)\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + (a_3 + b_3)\mathbf{e}_3$$

в координатах относительно базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. □

Рассмотрим теперь скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Пользуясь билинейностью, раскрываем скобки:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)\cdot(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3)\\ &= a_1b_1\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + a_1b_2\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + a_1b_3\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3\\ &+ a_2b_1\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 + a_2b_2\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 + a_2b_3\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3\\ &+ a_3b_1\,\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 + a_3b_2\,\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 + a_3b_3\,\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Видно, что для вычисления произвольных скалярных произведений в выбранном базисе достаточно знать скалярные произведения базисных векторов между собой. При этом особенно удобны базисы, удовлетворяющие условию $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases}1 & \text{при } i = j,\\ 0 & \text{при } i \neq j,\end{cases}$$

есть **символ Кронекера**; проще говоря, в этом случае базисные векторы единичны и перпендикулярны друг другу. Такие базисы называют **ортонормированными**, сокращённо ОНБ. В ортонормированном базисе координатное вычисление скалярных произведений упрощается до

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Аналогичным образом раскроем векторное произведение:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)\times(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3)\\ &= a_1b_1\,\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 + a_1b_2\,\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 + a_1b_3\,\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3\\ &+ a_2b_1\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1 + a_2b_2\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 + a_2b_3\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\\ &+ a_3b_1\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 + a_3b_2\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 + a_3b_3\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Здесь по свойству $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ три слагаемых равны нулю, а оставшиеся можно сгруппировать попарно:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\\ &+ (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1\\ &+ (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Обычно вычисление векторных произведений ведётся в правом ОНБ. В этом случае

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1.$$

Взяв смешанное произведение трёх векторов, разложенных по базису, при раскрытии всех скобок мы получаем 27 слагаемых со смешанными произведениями базисных векторов, но из них 21 содержат повторения аргументов и потому равны нулю. В остальных слагаемых переставим аргументы, приводя их «в порядок» $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ с учётом изменения знаков:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= a_1b_2c_3\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_2b_1c_3\,(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)\\ &+ a_3b_1c_2\,(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + a_1b_3c_2\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)\\ &+ a_2b_3c_1\,(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + a_3b_2c_1\,(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)\\ &= D\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3),\end{aligned}$$

где

$$D = a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1.$$

Для правого ОНБ имеем $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$ и получаем $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = D$.

1.5. Определители второго и третьего порядков

В целях более компактной записи координатных выражений векторного и смешанного произведений введём понятие **определителя**. Позже определители будут появляться во многих других ситуациях. Для непосредственных целей нужны определители второго и третьего порядков, где порядок означает размер матрицы. Второй порядок:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1;$$

третий порядок:

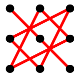
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1,$$

или в точности число D, возникшее в конце предыдущего раздела. Это формулы полного раскрытия определителя, с которыми выражения для смешанного и векторного произведений в правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ принимают вид

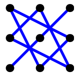
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}.$$

Есть чёткие правила, по которым составлены формулы полного раскрытия. Не только в указанных случаях, но и для произвольного порядка n, раскрытие является суммой со знаками всевозможных слагаемых, равных произведению n компонент матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Всего слагаемых $n!$. Детали общего правила выбора знаков мы разберём значительно позже, но для третьего порядка отметим простую картинку:

$$(+): \quad \begin{array}{ccc} a_1 & {\color{gray}b_1} & {\color{gray}c_1} \\ {\color{gray}a_2} & b_2 & {\color{gray}c_2} \\ {\color{gray}a_3} & {\color{gray}b_3} & c_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} {\color{gray}a_1} & b_1 & {\color{gray}c_1} \\ {\color{gray}a_2} & {\color{gray}b_2} & c_2 \\ a_3 & {\color{gray}b_3} & {\color{gray}c_3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} {\color{gray}a_1} & {\color{gray}b_1} & c_1 \\ a_2 & {\color{gray}b_2} & {\color{gray}c_2} \\ {\color{gray}a_3} & b_3 & {\color{gray}c_3} \end{array}$$



$$(-): \quad \begin{array}{ccc} {\color{gray}a_1} & b_1 & {\color{gray}c_1} \\ a_2 & {\color{gray}b_2} & {\color{gray}c_2} \\ {\color{gray}a_3} & {\color{gray}b_3} & c_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_1 & {\color{gray}b_1} & {\color{gray}c_1} \\ {\color{gray}a_2} & {\color{gray}b_2} & c_2 \\ {\color{gray}a_3} & b_3 & {\color{gray}c_3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} {\color{gray}a_1} & {\color{gray}b_1} & c_1 \\ {\color{gray}a_2} & b_2 & {\color{gray}c_2} \\ a_3 & {\color{gray}b_3} & {\color{gray}c_3} \end{array}$$



Отметим ещё выражение определителя третьего порядка через определители второго порядка, группируя слагаемые с одинаковыми c_i:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3.$$

Здесь стоит обратить внимание на минус в правой части. Это формула раскрытия определителя третьего порядка по третьему столбцу. Особенно употребительно её приложение к векторному произведению:

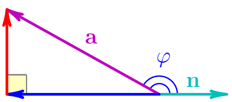
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3.$$

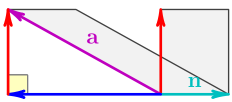
Группируя слагаемые иначе, можно получить формулы раскрытия по другим столбцам, а также по строкам.

1.6. Отложенные геометрические доказательства

Лемма. *Если* $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, *то* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a}^{\parallel \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}$ *и* $\mathbf{a} \times \mathbf{n} = \mathbf{a}^{\perp \mathbf{n}} \times \mathbf{n}$ *для каждого вектора* $\mathbf{a}$.

Доказательство. Скалярные произведения равны $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{n}|\cos\varphi$. Векторные произведения дают равные и одинаково ориентированные площади параллелограмма и прямоугольника. $\square$





Лемма. *Если* $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, *то*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\parallel \mathbf{n}} = \mathbf{a}^{\parallel \mathbf{n}} + \mathbf{b}^{\parallel \mathbf{n}}, \quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\perp \mathbf{n}} = \mathbf{a}^{\perp \mathbf{n}} + \mathbf{b}^{\perp \mathbf{n}}$$

для любых векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$.

Доказательство. Рассмотрим треугольную призму. Коллинеарные $\mathbf{n}$ составляющие складываются вдоль её боковых рёбер, а перпендикулярные — в плоскостях её оснований. □

Установим формулу $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$. Если $\mathbf{c}=\mathbf{0}$, то обе части нулевые. Иначе, леммы позволяют заменить векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на их составляющие коллинеарные $\mathbf{c}$ и свести требуемое к равенству

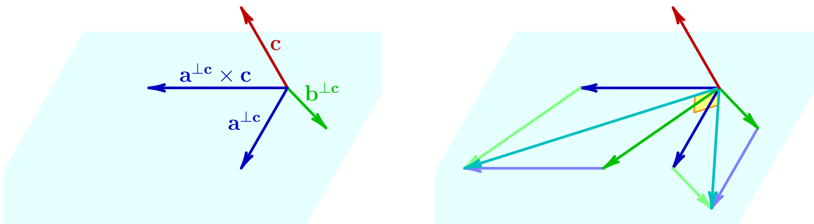
$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\|\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}^{\|\mathbf{c}}+\mathbf{b}^{\|\mathbf{c}})\cdot\mathbf{c} \stackrel{?}{=} \mathbf{a}^{\|\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}^{\|\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c},$$

проверяемому непосредственно, на одной прямой.

Установим формулу $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Если $\mathbf{c}=\mathbf{0}$, то обе части нулевые. Иначе, леммы позволяют заменить векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на их составляющие перпендикулярные $\mathbf{c}$ и свести требуемое к равенству

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\perp\mathbf{c}}\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}^{\perp\mathbf{c}}+\mathbf{b}^{\perp\mathbf{c}})\times\mathbf{c} \stackrel{?}{=} \mathbf{a}^{\perp\mathbf{c}}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}^{\perp\mathbf{c}}\times\mathbf{c}.$$

Параллелограмм на векторах $\mathbf{a}^{\perp\mathbf{c}}$ и $\mathbf{b}^{\perp\mathbf{c}}$ лежит в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{c}$. При векторном умножении на $\mathbf{c}$ вся эта плоскость поворачивается на прямой угол и масштабируется с коэффициентом подобия $|\mathbf{c}|$.



Дистрибутивность смешанного произведения по каждому из аргументов сводится к дистрибутивности скалярного и векторного произведений. Например, по второму аргументу:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2,\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2))\cdot\mathbf{c}\\ &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b}_1+\mathbf{a}\times\mathbf{b}_2)\cdot\mathbf{c}\\ &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b}_1)\cdot\mathbf{c}+(\mathbf{a}\times\mathbf{b}_2)\cdot\mathbf{c}\\ &= (\mathbf{a},\mathbf{b}_1,\mathbf{c})+(\mathbf{a},\mathbf{b}_2,\mathbf{c}).\end{aligned}$$

Установим теперь формулу $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

Предположим сначала, что $\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Тогда сомножители коллинеарны: $\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Выразив отсюда один из векторов и подставив в правую часть искомого равенства, найдём $\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{0}$, так что в этом случае формула верна.

Предположим теперь, что $\mathbf{b}\times\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Тогда по определению векторного произведения векторы $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют базис пространства. Разложим $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}\times\mathbf{c} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ и проверим формулу отдельно для каждой компоненты, пользуясь дистрибутивностью всех слагаемых. Значит, эту проверку достаточно сделать в трёх «базисных» случаях: $\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.

При $\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}$ все слагаемые равны нулю ввиду повторения векторов. При $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ перепишем искомое равенство $\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \stackrel{?}{=} \mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})$ в виде $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \stackrel{?}{=} (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{b}$. Разделим на $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \neq 0$, введём единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ и увидим уже давно знакомую формулу $\mathbf{c} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{c})\mathbf{n} + (\mathbf{n}\times\mathbf{c})\times\mathbf{n}$ для разложения $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{\parallel\mathbf{n}} + \mathbf{c}^{\perp\mathbf{n}}$. При $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ проверка аналогична, только $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ меняются ролями.

Глава 2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

2.1. Задание прямой и плоскости

Выберем в пространстве точку O в качестве начала отсчёта. Тогда каждой точке A пространства соответствует её **радиус-вектор** $\mathbf{r}(A)$: это вектор с началом O и концом A. Получаем взаимно-однозначное соответствие между точками и векторами. Подразумевая выбранное начало отсчёта, бывает удобно говорить о радиус-векторе, имея в виду соответствующую точку, либо наоборот.

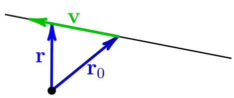
Уравнениями геометрической фигуры в выбранной системе координат называют условия (в виде равенств) на координаты произвольной точки, которые выполнены тогда и только тогда, когда точка принадлежит фигуре. Система координат выбирается прежде всего, но мы не будем напоминать про этот этап в каждой ситуации.

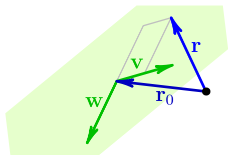
Уравнения прямой либо плоскости записывают в различных формах. Выделим четыре способа: параметрический, нормальный, общий, поточечный; при этом первые две формы используют радиус-векторы, а последние две — координаты. В векторных уравнениях обеих форм, будь то на плоскости или в пространстве, обозначим через $\mathbf{r}$ радиус-вектор произвольной (неизвестной) точки. Остальные участвующие в уравнениях векторы предполагаем известными.

Возьмём на данной прямой ℓ точку и обозначим её радиус-вектор через $\mathbf{r}_0$. Далее, возьмём параллельный ℓ вектор $\mathbf{v}$. Тогда для каждого вещественного числа t вектор $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ есть радиус-вектор точки на прямой ℓ. Поэтому

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v},$$

где t — переменный **параметр**, называют **параметрическим заданием** прямой. Постоянный вектор $\mathbf{v}$ называют **направляющим вектором** этой прямой, а точку (соответствующую) $\mathbf{r}_0$ — её **начальной точкой**. Когда t пробегает все вещественные числа, конец радиус-вектора $\mathbf{r}$ пробегает все точки прямой ℓ. Физически можно трактовать $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}$ как начальное положение и скорость «материальной точки». Всякая прямая имеет бесконечно много параметрических заданий с разными $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}$.

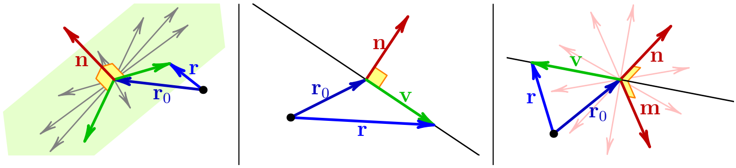




Возьмём на данной плоскости Π точку и обозначим её радиус-вектор через $\mathbf{r}_0$. Далее, возьмём в Π два неколлинеарных вектора $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Тогда для любых вещественных чисел t, s вектор $t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ лежит в этой же плоскости Π, причём все векторы в ней имеют такое представление, а $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ есть радиус-вектор точки на Π. Поэтому

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} + s\mathbf{w},$$

где t и s — переменные параметры, называют параметрическим заданием плоскости. Постоянные векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ называют направляющими векторами этой плоскости, а точку $\mathbf{r}_0$ — её начальной точкой. Когда t и s независимо пробегают все вещественные числа, конец радиус-вектора $\mathbf{r}$ пробегает все точки плоскости Π.



Нормалью к прямой или к плоскости называют вектор, ортогональный каждому вектору, лежащему в этой прямой/плоскости. **Нормальные уравнения** $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ в случаях прямой на плоскости и плоскости в пространстве отражают тот факт, что одна точка $\mathbf{r}_0$ на прямой/плоскости и нормаль $\mathbf{n}$ к ней определяют прямую/плоскость. Поскольку здесь $\mathbf{n}$ и $\mathbf{r}_0$ известны, можно подставить их скалярное произведение в уравнение и получить его вариант $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = D$.

Для прямой в пространстве редко говорят о нормальном уравнении, хотя можно выбрать два *неколлинеарных* нормальных вектора $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ и записать систему

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \\ \mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \end{cases}$$

Она равносильна уравнению $\mathbf{v} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$, в котором $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}$ является направляющим вектором прямой. Здесь тоже можно подставить $\mathbf{a} = \mathbf{v} \times \mathbf{r}_0$ и получить вариант $\mathbf{v} \times \mathbf{r} = \mathbf{a}$. Однако одно уравнение с векторным произведением лишь на первый взгляд экономичнее системы из двух скалярных, ведь в координатах оно превращается в три уравнения, а значит, одно из них всегда оказывается лишним.

Теорема. *В координатах относительно произвольного базиса*

(1) *в пространстве всякая плоскость задаётся уравнением вида*

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

(2) *на плоскости всякая прямая задаётся уравнением вида*

$$Ax + By + D = 0;$$

(3) *в пространстве всякая прямая задаётся системой вида*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Их называют **общими** уравнениями прямой или плоскости. За сам вид — без произведений и степеней переменных — такие уравнения называют **линейными**.

Доказательство. (1) Подставим разложение $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ неизвестного радиус-вектора в нормальное уравнение $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ и сразу получим выражения для коэффициентов искомого общего уравнения:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)x + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2)y + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3)z + (-\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0) = 0.$$

(2) Аналогично первому случаю, но $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$.

(3) Аналогично первому случаю, но нормалей две. □

Теорема. *В координатах относительно произвольного базиса каждое линейное уравнение, в котором хотя бы один коэффициент при неизвестных ненулевой, задаёт плоскость в пространстве либо прямую на плоскости.*

В случае системы из двух линейных уравнений условие, при котором она задаёт прямую в пространстве, более сложное: это условие, что две плоскости пересекаются по прямой.

Доказательство. Теперь, наоборот, нужно по линейному уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$ найти нормаль к гипотетически задаваемой им плоскости. Из-за произвольности базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ответ менее очевиден, чем был бы в ОНБ. Поэтому возьмём вектор

$$\mathbf{n} = \frac{A\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + B\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + C\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

Для $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ получим $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = Ax + By + Cz$, ибо в числителе образуются 9 смешанных произведений, из которых 6 содержат повторяющиеся векторы, а остальные равны знаменателю. Далее, возьмём $\mathbf{r}_0 = -D\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$; тогда $D = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$, так что исходное уравнение равносильно нормальному уравнению плоскости $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

К уравнению $Ax + By + D = 0$ постараемся применить тот же трюк, считая, что оно имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, но $C = 0$. Поскольку ситуация плоская и третьего базисного вектора нет, можно выйти в пространство и выбрать $\mathbf{e}_3$ ортогональным к $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Тогда загадочная формула даст $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$ и о пространстве можно «забыть». Радиус-вектор начальной точки находится так же: $\mathbf{r}_0 = -D\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}$. $\square$

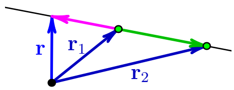
Перед тем, как заняться уравнениями по точкам, соберём в таблицу наиболее употребительные способы задания прямых и плоскостей и некоторые дополнительные сведения:

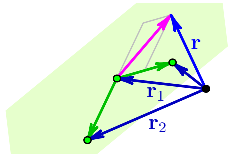
(1) общее уравнение;
(2) нормальное уравнение;
(3) коразмерность;
(4) размерность;
(5) параметрическое уравнение;
(6) уравнение по точкам обычное;
(7) уравнение по точкам через определитель/-и;
(8) уравнение по точкам через ранг.

Значки $\Diamond$, $\triangle$, и ∇ в таком контексте совершенно нестандартны, но в этой главе я нахожу удобным пользоваться ими для ссылок.

$\triangle$	$\Diamond$	∇	
плоскость в пространстве	прямая на плоскости	прямая в пространстве	
$Ax+By+Cz+D=0$	$Ax+By+C=0$	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	(1)
$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$	$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$	$\begin{cases} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0 \\ \mathbf{m}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0 \end{cases}$	(2)
1	1	2	(3)
2	1	1	(4)
$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}+s\mathbf{w}$	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$	(5)
$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	(6)
$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}=0$	(7)
$\operatorname{rk}\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}=3$	$\operatorname{rk}\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}=2$	$\operatorname{rk}\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{bmatrix}=2$	(8)

С видом уравнений, записанных в остальных строках таблицы, тесно связаны числа в строках (3) и (4): это соответственно **размерность** и **коразмерность** фигуры. Размерность равна количеству параметров, а коразмерность равна количеству общих уравнений и дополняет размерность до **объемлющей** размерности.





Через две различные фиксированные точки на плоскости или в пространстве, с радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, проходит единственная прямая. **Уравнения по точкам** (6$\Diamond$) и (6$\triangledown$) этой прямой выражают коллинеарность векторов $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ как пропорциональность их координат. Аналогично, уравнение по точкам (6$\triangle$) единственной плоскости, проходящей через три фиксированные точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, выражает компланарность векторов $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$ как зануление их смешанного произведения. Алгебраически эти условия в строке (6) таблицы кажутся разнородными, но, переформулировав их, можно сделать их похожими во всех трёх случаях. Этому посвящён (необязательный) следующий раздел.

Каждый из перечисленных способов задания прямой или плоскости в определённых ситуациях лучше других, поэтому при решении задач регулярно требуется переходить от одного к другому. Для большинства переходов действия слабо зависят от варианта ($\triangle$,$\Diamond$,$\triangledown$).

($1 \rightsquigarrow 2$) Каждая нормаль $\mathbf{n}$ выписывается из уравнения: $\mathbf{n}=(A,B)$ или $\mathbf{n}=(A,B,C)$. Чтобы угадать точку $\mathbf{r}_0$, можно подставить, например, $x=0$, а также $y=0$ в случае (1$\triangle$). Если $A=0$, следует занулить другую координату.

($1 \rightsquigarrow 6$) Угадывать можно так, как в ($1 \rightsquigarrow 2$), но используя две или три разные подстановки.

($2 \rightsquigarrow 5$) Обозначение ($\swarrow\!\!\searrow$) призвано напоминать простой способ нахождения векторов, ортогональных данному: если $\mathbf{n}=(a,b)$, то $\mathbf{v}=(b,-a)$; если $\mathbf{n}=(a,b,c)$, то $\mathbf{v}=(b,-a,0)$ и $\mathbf{w}=(0,c,-b)$ при $b\neq 0$, а иначе, взять $(c,0,-a)$ за $\mathbf{v}$ или $\mathbf{w}$.

($5 \rightsquigarrow 2$) Этот переход симметричен ($2 \rightsquigarrow 5$).

($6 \rightsquigarrow 1$) Раскрыть определитель и собрать коэффициенты.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">По</th><th colspan="4">ищем</th></tr>
<tr><th>(1)</th><th>(2)</th><th>(5)</th><th>(6)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">(1)</td><td>△</td><td rowspan="3">общее</td><td rowspan="3">списать $\mathbf{n}$
угадать $\mathbf{r}_0$</td><td rowspan="3">пройти через точки</td><td rowspan="3">угадать две или три точки</td></tr>
<tr><td>◊</td></tr>
<tr><td>▽</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(2)</td><td>△</td><td rowspan="3">раскрыть скобки</td><td rowspan="3">нормальное</td><td>$\mathbf{v}, \mathbf{w} = (\times)\mathbf{n}$</td><td rowspan="3">пройти через параметры</td></tr>
<tr><td>◊</td><td>$\mathbf{v} = (\times)\mathbf{n}$</td></tr>
<tr><td>▽</td><td>$\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(5)</td><td>△</td><td rowspan="3">пройти через нормальное</td><td>$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$</td><td rowspan="3">параметры</td><td rowspan="3">подставить значения параметров</td></tr>
<tr><td>◊</td><td>$\mathbf{n} = (\times)\mathbf{v}$</td></tr>
<tr><td>▽</td><td>$\mathbf{n}, \mathbf{m} = (\times)\mathbf{v}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(6)</td><td>△</td><td rowspan="3">раскрыть всё</td><td rowspan="3">пройти через параметры</td><td rowspan="3">$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1$
$\mathbf{v} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$
$\mathbf{w} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$</td><td rowspan="3">по точкам</td></tr>
<tr><td>◊</td></tr>
<tr><td>▽</td></tr>
</table>

2.2. Дополнение об уравнениях по точкам

Первым делом перепишем пропорцию (6◊) как

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

что уже походит на выражение компланарности (6△): отличие лишь в порядке определителя. Далее, заметим совпадение (с точностью до знака) значений этого определителя и определителя (7◊):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ \hline x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{array}\right|$$

Аналогичное явление заметно и в столбце (△), где появляется определитель *четвёртого* порядка. Да, он большой, зато по сравнению с (6△) элементы его завидно проще! Получаем задание прямой на плоскости и плоскости в пространстве уравнением «красивый определитель равен нулю». В случае прямой в пространстве из двух пропорций получаем два таких уравнения (7▽).

Однако можно пойти дальше. Равенство определителя квадратной матрицы нулю, как мы позже установим, эквивалентно тому, что одну из её строк можно выразить через другие, а это означает, что ранг этой матрицы меньше максимально возможного: «ранг падает». С другой стороны, ранг ни одной матрицы в строке (8) не может упасть более чем на единицу, ибо это исключено предположением **общего положения** зафиксированных точек: если их две, то они различны; если их три, то они не лежат на одной прямой.

В самом деле, для двух случаев прямых условия общего положения пары точек записываются с помощью рангов в виде

$$\operatorname{rk}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 2, \qquad \operatorname{rk}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Эти равенства гарантируют, что ранги матриц в клетках $(8\lozenge)$ и $(8\triangledown)$ не меньше двух. Поэтому условие, что ранг такой матрицы не равен трём, то есть падает, задаёт искомую прямую.

Условие общего положения трёх точек в пространстве также записывается с помощью ранга в виде

$$\operatorname{rk}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

ибо в соответствии с уже обоснованным уравнением прямой $(8\triangledown)$ это означает, что первая точка не лежит на прямой, проходящей через вторую и третью. Итак, в строке (8) уравнения стали единообразны.

2.3. Расстояния и проекции

Расстоянием между двумя фигурами называют кратчайшее расстояние от точки на одной фигуре до точки на другой. Расстояния между точками, прямыми и плоскостями находят через различные произведения; соберём все случаи в таблицу, а формулы для указанных в ней величин найдём позже. В этом разделе большинство формул содержат вектор $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ между начальными точками фигур.

Если фигуры параллельны, то для вычисления расстояния одна из них заменяется любой своей точкой; при этом в случае прямой и плоскости в пространстве заменяется прямая, потому что расстояния от её точек до плоскости одинаковы, но не наоборот. Без параллельности нетривиален только случай скрещивающихся прямых.

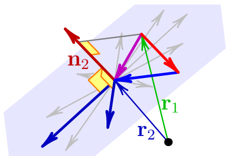
		если $\parallel$			если $\nparallel$		
	$\bullet$	$\triangle$	$\lozenge$	$\triangledown$	$\triangle$	$\lozenge$	$\triangledown$
$\bullet$	D_p	D_s	D_s	D_v			
$\triangle$	D_s	D_s		D_s	0		0
$\lozenge$	D_s		D_s			0	
$\triangledown$	D_v	D_s		D_v	0		D_t

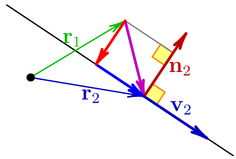
Найдём обещанные расстояния. Равенство $D_p = |\Delta\mathbf{r}|$ есть просто определение расстояния между точками, а формулы

$$D_s = \frac{|\mathbf{n}_2 \cdot \Delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{n}_2|}, \qquad D_v = \frac{|\mathbf{v}_2 \times \Delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{v}_2|}, \qquad D_t = \frac{|(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \Delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}.$$

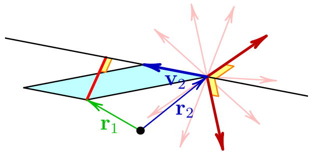
для расстояний D_s, D_v и D_t следуют из геометрических свойств скалярного, векторного и смешанного произведений.

(D_s) Это расстояние равно длине (норме) проекции $\Delta\mathbf{r}^{\|\mathbf{n}_2}$.

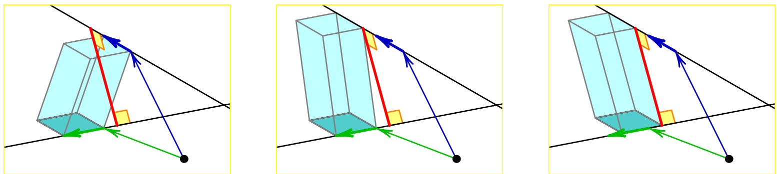




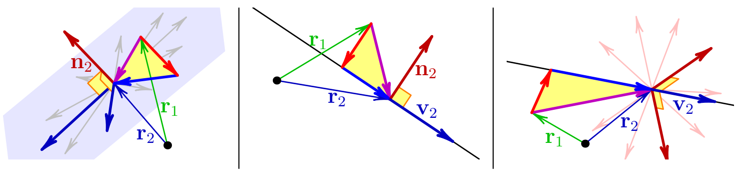
(D_v) Площадь параллелограмма делится на длину его основания.



(D_t) Объём параллелепипеда делится на площадь его основания.



Как узнать положение **проекций** — точек, реализующих кратчайшие расстояния? Привлекается проектирование на векторы, задающие данную прямую или плоскость. Поэтому естественно возникают два случая: при размерности фигуры, равной 1, используем её направляющий вектор, а при коразмерности, равной 1 — нормаль к ней.



Положение проекции $\mathbf{r}_\perp$ точки $\mathbf{r}_1$ на прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{v}_2$ как ($\Diamond$) на плоскости, так и ($\bigtriangledown$) в пространстве, даёт формула

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_\perp = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^{\|\mathbf{v}_2} \implies \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_2 - \Delta\mathbf{r}^{\|\mathbf{v}_2} = \mathbf{r}_2 - \frac{\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2.$$

Положение проекции $\mathbf{r}_\perp$ точки $\mathbf{r}_1$ на плоскость ($\triangle$) или прямую ($\Diamond$) с нормальным уравнением $\mathbf{n}_2\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) = 0$ даёт формула

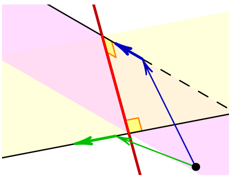
$$\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^{\|\mathbf{n}_2} \implies \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}^{\|\mathbf{n}_2} = \mathbf{r}_1 + \frac{\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_2}\mathbf{n}_2.$$

В случае ($\Diamond$) они дадут одинаковые ответы, ибо $\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}^{\|\mathbf{v}_2} + \Delta\mathbf{r}^{\|\mathbf{n}_2}$ потому что $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{n}_2$ ортогональны.

На каждой из данной пары скрещивающихся прямых $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{v}_2$ есть точка, ближайшая к другой прямой. Содержащую эти две точки прямую называют **общим перпендикуляром** к данным прямым, а точки эти называют его **основаниями**. Нормальное уравнение общего перпендикуляра можно найти, не зная самих оснований:

$$\begin{cases} (\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \boxed{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_1) = 0, \\ (\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \boxed{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_2) = 0. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений выражает через смешанное произведение условие компланарности и задаёт плоскость, содержащую одну из скрещивающихся прямых и искомый общий перпендикуляр. Тому, кто запомнил это свойство, не придётся запоминать сами формулы.



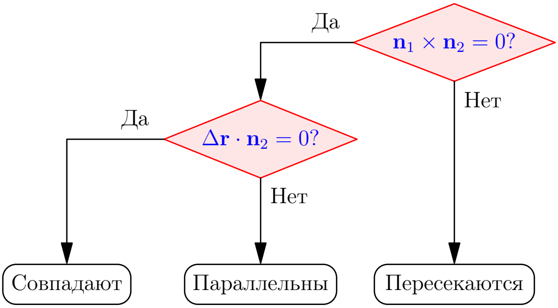
Подставляя в эти уравнения $\boxed{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{v}_1$ и $\boxed{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{v}_2$, сразу находим значения t_k, отвечающие положениям оснований:

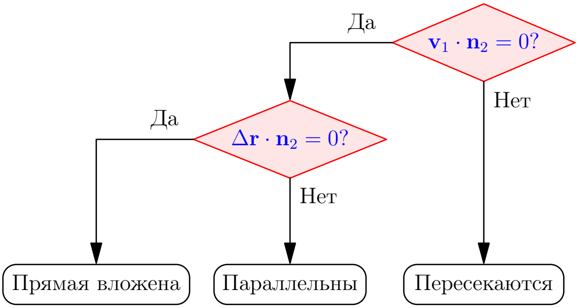
$$t_1 = \frac{(\Delta\mathbf{r}\times\mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)} \quad \text{и} \quad t_2 = -\frac{(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_1\times\Delta\mathbf{r})}{(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)}.$$

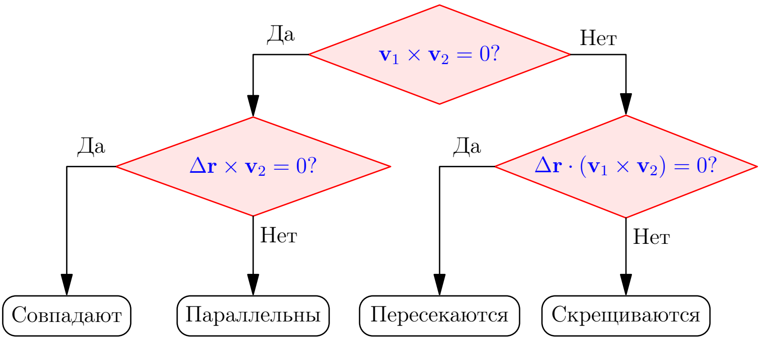
Здесь, как и прежде, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Отметим, что для нахождения именно *расстояния* между скрещивающимися прямыми гораздо проще пользоваться указанной выше формулой (D_t), чем искать основания общего перпендикуляра.

2.4. Взаимное расположение прямых и плоскостей

Взаимное расположение двух прямых/плоскостей, когда прямые заданы в параметрическом виде, а плоскости — в нормальном, можно определить по их направляющим векторам $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, нормалям $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и вектору $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ между их начальными точками.







Глава 3. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1. Эллипсы, параболы и гиперболы

Аналитическая геометрия — область геометрии, в которой геометрические фигуры изучаются с помощью линейной алгебры на основе применения координат. Приложения к геометрии более сложной алгебры относят в область **алгебраической геометрии**, а приложения математического анализа — в область **дифференциальной геометрии**. Эти предметы значительно превосходят аналитическую геометрию по своей трудности и объёму; достаточно сказать, что оба они в числе активно развивающихся областей современной математической науки.

Традиционно выделяют две задачи аналитической геометрии:

(1) фигура $\rightsquigarrow$ уравнения (**задание** фигур);
(2) уравнения $\rightsquigarrow$ фигура (**исследование** фигур).

Наши цели при изучении аналитической геометрии весьма скромны:

Уравнения	*Фигуры*	
	на плоскости	*в пространстве*
линейные	прямые	плоскости и прямые
квадратичные	коники	квадрики

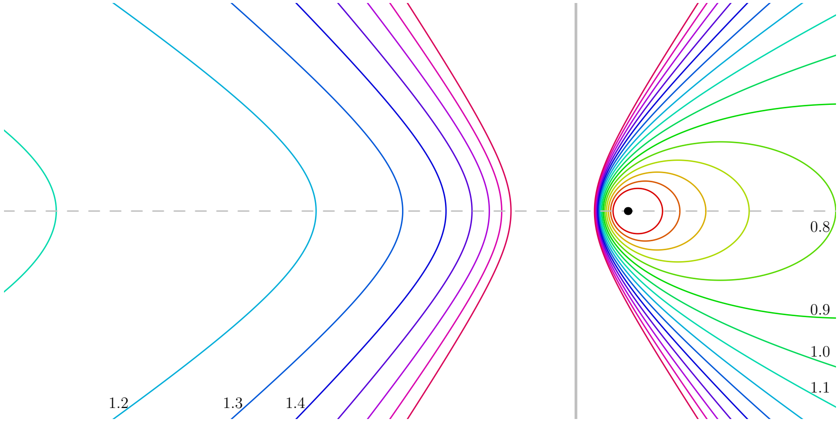
Итак, линии и поверхности первого порядка мы изучали в предыдущей главе, а в этой займёмся линиями второго порядка, оставив поверхности на конец семестра. Важнейшие линии второго порядка — эллипсы (и окружности как их частный или предельный случай), параболы и гиперболы. Для получения полного списка к этим трём типам нужно добавить шесть различных типов распадения или вырождения, проявляющихся как пара прямых, прямая, точка или пустое множество.

Зафиксируем на плоскости прямую δ (**директрису**) и не лежащую на ней точку F (**фокус**). Выберем число $e > 0$ (**эксцентриситет**) и рассмотрим геометрическое место точек X, расстояния от каждой из которых до δ и F связаны соотношением $d(X, F) = e \cdot d(X, \delta)$.

Из определения несложно вывести уравнение этой фигуры в полярных координатах (φ, ρ), помещая полюс в фокус и направляя ось прочь от директрисы:

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\varphi}, \qquad (✪)$$

где p есть расстояние от фокуса до директрисы. Значение эксцентриситета определяет тип и форму полученной линии.

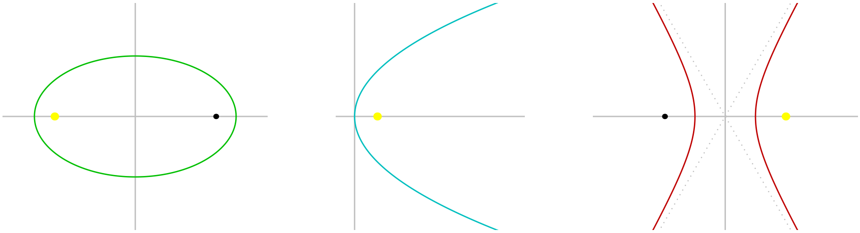


Пример. Именно этими формами (если пренебречь различными малыми возмущениями) обладают орбиты планет и траектории заряженных частиц в центрально-симметричном электрическом поле.

В прямоугольной системе координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ уравнение (❂) даст $x^2+y^2 = e^2(x+p)^2$, но это не та запись, которую принято пропагандировать. Дальше обычно ведут анализ отдельно для каждого типа, сдвигом начала переходя к **каноническим** уравнениям. В них удобны новые параметры a и b, кроме случая параболы. Ось Oy канонической системы координат не совпадает с директрисой.

Фигура	Эллипс	Парабола	Гипербола
Эксцентриситет	$e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
Каноническое уравнение	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 - 2px = 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

При стремлении эксцентриситета к нулю эллипс превращается в окружность; тогда в каноническом уравнении будет $a = b$. В полярных координатах уравнением окружности служит $\rho = \text{const}$.

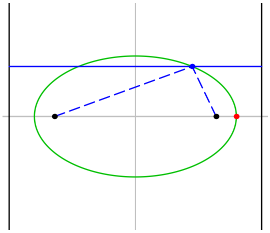


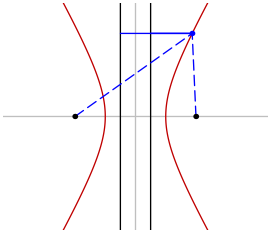
Фокус F лежит на оси Ox, а в случаях эллипса и гиперболы канонические уравнения неизменны при отражении относительно обеих осей. Следовательно, эти фигуры имеют и по второму фокусу.

Теорема (фокальные свойства). *Для каждой точки P на эллипсе или гиперболе с фокусами F_1 и F_2 расстояния $d_i = d(P, F_i)$ до фокусов связаны следующими формулами:*

(1) *для эллипса $d_1 + d_2 = 2a$, независимо от точки P;*

(2) *для гиперболы $d_1 - d_2 = \pm 2a$, независимо от точки P, причём разные знаки соответствуют двум ветвям гиперболы.*

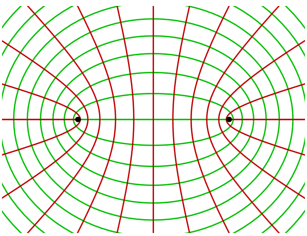


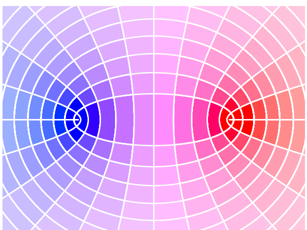


Доказательство. (1) Директрисы параллельны друг другу, поэтому сумма расстояний от P до них постоянна, а по изначальному определению эллипса она равна $(d_1 + d_2)/e$. Легко увидеть, что она же равна $2a$, т. е. **большой оси**, если выбрать P в вершине эллипса.

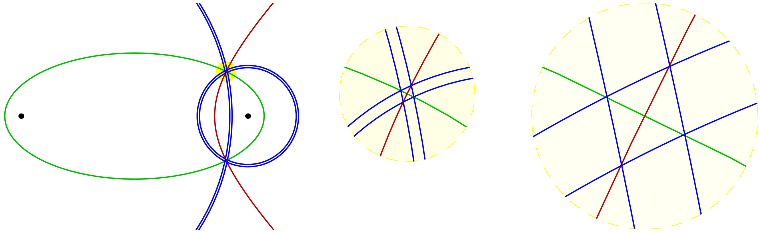
(2) Аналогично. Разность возникает, потому что обе директрисы лежат между двумя ветвями гиперболы. □

Теорема (ортогональность). *Эллипс и гипербола, у которых совпадают оба фокуса, пересекаются ортогонально.*





Доказательство. Обозначим через $d_i = d(P, F_i)$ расстояния от общей точки P эллипса и одной ветви гиперболы до их общих фокусов F_i. Рассмотрим в микроскоп вблизи точки P пары окружностей с центрами в фокусах и радиусами $d_i \pm \varepsilon$ для очень маленького $\varepsilon > 0$.

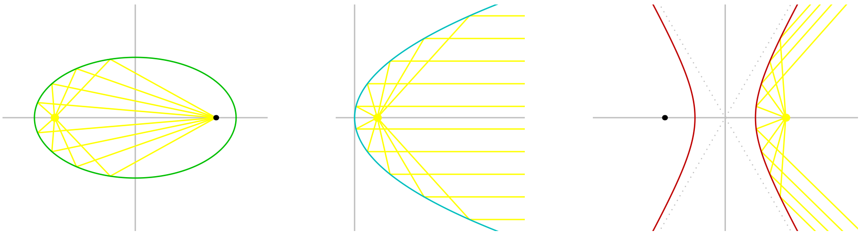


При достаточно большом увеличении эти окружности не отличимы от двух пар параллельных прямых, разделённых расстоянием 2ε, а точки их пересечения образуют крошечный ромбик. Эллипс же и гипербола, благодаря своим фокальным свойствам, при этом не отличимы от диагоналей ромбика. При стремлении $\varepsilon \to 0$ диагонали дают в пределе касательные к этим линиям. □

Пример. Поместим электрические заряды q в точки F_1 и F_2. Силовые линии наведённого ими (в плоскости) электрического поля будут гиперболами с фокусами F_i, а ортогональные им эллипсы будут эквипотенциалями.

Теорема (оптические свойства)**.** *Поместим источник света в фокус эллипса, параболы, или гиперболы.*

(1) *Отразившись от эллипса, лучи пройдут через другой фокус.*
(2) *Отразившись от параболы, лучи станут параллельны её оси.*
(3) *Отразившись от гиперболы, лучи будут казаться выпущенными из другого фокуса.*



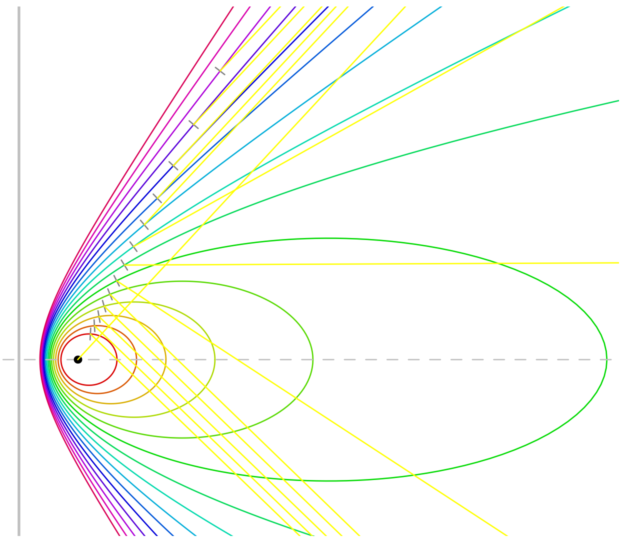
Доказательство. (1) Выберем на эллипсе точку P и проведём в ней касательную. Всякая точка $K \neq P$ касательной лежит снаружи эллипса, а потому — на софокусном эллипсе с большей большой полуосью, так что

$$d(K, F_1) + d(K, F_2) > d(P, F_1) + d(P, F_2).$$

Теперь забудем про эллипс, оставив только его фокусы и касательную. Из полученного неравенства геометрически выводится (упражнение), что среди точек этой прямой именно в точке P реализуется оптический закон «угол падения равен углу отражения».

(3) Следствие ортогональности и оптического свойства эллипса.

(2) Вместе с параболой рассмотрим эллипсы и гиперболы (❂) с теми же фокусом и директрисой. Выпустим луч из фокуса. Если ещё до параболы он отразится от какого-то эллипса, ему суждено пересечь ось во втором фокусе. Если луч пройдёт сквозь прозрачную параболу, но отразится от какой-то гиперболы, то он продолжит удаляться от оси. Что остаётся делать лучу, если он отразится именно от параболы? □



3.2. Смена координат и матричный язык

Необходимо знать правила пересчёта координат точек и векторов из одной прямоугольной системы в другую. Две таких системы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ могут отличаться расположением начала, единицей длины, направлениями осей и ориентацией параллелограмма на ортах. Проще всего связать системы, отличающиеся лишь в одном из этих аспектов.

Выпишем правила пересчёта $(x, y) \mapsto (x', y')$ координат каждой точки в таких случаях. Координаты векторов при сдвиге неизменны, а при остальных переходах ведут себя идентично координатам точек.

Переход $\mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}'$	*Отличие* $\mathcal{K}'$ *от* $\mathcal{K}$
Сдвиг (перенос)	Расположение начала
Растяжение или сжатие	Единица длины
Поворот	Направления осей
Отражение	Ориентация

• При сдвиге, если начало системы $\mathcal{K}$ имеет координаты (u, v) в системе $\mathcal{K}'$:

$$x' = x + u,$$
$$y' = y + v;$$

• при растяжении или сжатии:

$$x' = cx,$$
$$y' = cy;$$

• при повороте осей на угол α против часовой стрелки:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha; \end{aligned}$$

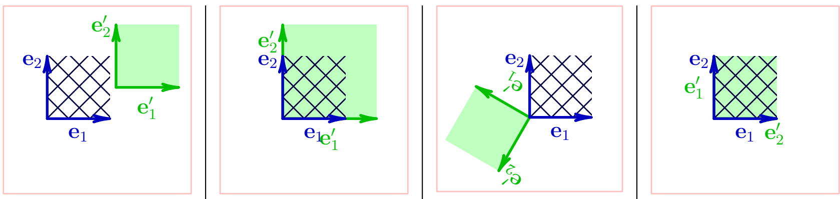
• при отражении, меняющем оси местами:

$$x' = y,$$
$$y' = x.$$

В последних трёх случаях «старая» система $\mathcal{K}$ и «новая» система $\mathcal{K}'$ имеют общее начало, а три соответствующих правила можно объединить в одно:

$$x' = ax + by,$$
$$y' = cx + dy,$$

с подходящими значениями коэффициентов.



сдвиг | растяжение | поворот | отражение

Поскольку системы $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}$ совершенно равноправны, такую же форму должно иметь выражение старых координат через новые:

$$(\spadesuit)\qquad \begin{aligned} x &= a'x' + b'y', \\ y &= c'x' + d'y'. \end{aligned}$$

Далее мы будем изучать формулы перехода именно в этой форме.

Пусть теперь имеется три системы координат $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}''$ с общим началом. Цепочка из двух переходов $\mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}' \rightsquigarrow \mathcal{K}''$ даёт тот же результат, что и непосредственный переход $\mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}''$. Подставляя в выражения ($\spadesuit$) для перехода $\mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}'$ аналогичные выражения для перехода $\mathcal{K}' \rightsquigarrow \mathcal{K}''$, мы получаем связь коэффициентов непосредственного перехода с коэффициентами двух шагов эквивалентной ему цепочки:

$$(\clubsuit)\qquad \begin{aligned} x &= (a'a'' + b'c'')x'' + (a'b'' + b'd'')y'', \\ y &= (c'a'' + d'c'')x'' + (c'b'' + d'd'')y''. \end{aligned}$$

Тупо запоминать подобные формулы опасно, но к счастью, не нужно, потому что для них есть более удобный язык.

Любой прямоугольный массив чисел называют **матрицей**. Первые характеристики матрицы — количество её **строк** и количество её **столбцов**. Выписывая всю матрицу или упоминая её отдельные элементы, номера строк и столбцов указывают двойными индексами, например:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Две матрицы совпадающих размеров складывают, просто складывая элементы в соответствующих позициях:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Матрицы несовпадающих размеров без крайней нужды не складывают. Вычитание полностью аналогично сложению.

Более хитро устроено умножение матриц. Весь смысл хитрости в том, что формулы ($\spadesuit$) и ($\clubsuit$) переписываются в виде

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}.$$

Здесь координаты точек записаны столбцами, а информация о переходах, сохраняющих начало координат, собрана в квадратные **матрицы**

перехода, которые от самих точек не зависят. Это позволяет изучать такие переходы цельно, абстрагируясь от конкретных точек. Композиция таких переходов соответствует произведению их матриц.

Выпишем правило перемножения в индексных обозначениях:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Инспектируя это правило, следует заключить, что в общем случае матричное произведение AB определено, только когда количество столбцов A равно количеству строк B. Тогда AB имеет столько же строк, сколько A, и столько же столбцов, сколько B. Итак,

$$(\text{матрица } m \times s) \cdot (\text{матрица } s \times n) = (\text{матрица } m \times n),$$

а элемент матрицы AB, стоящий в строке i и столбце j, вычисляется по формуле

$$(AB)_{ij} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant s} a_{ik} b_{kj}.$$

Если произведение AB определено, то вовсе не обязательно произведение BA также должно быть определено. Для квадратных матриц ситуация проще; тем не менее, сразу нужно запомнить, что и для них обычно $AB \neq BA$.

Пример. Легко проверить, что операции поворота и отражения прямоугольных систем координат не перестановочны. При повороте на угол φ вокруг нуля и при отражении относительно оси Ox координаты связаны соответственно правилами

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы переходов хотя бы для $\varphi = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3. Общее уравнение линии второго порядка

Определение. **Линией второго порядка** называют фигуру на плоскости $\mathbb{R}^2$, уравнение которой задаётся квадратичным многочленом:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

или в индексных обозначениях,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Аналогично, **поверхностью второго порядка** называют фигуру в пространстве $\mathbb{R}^3$, уравнение которой задаётся квадратичным многочленом:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0.$$

Выбор таких обозначений для коэффициентов, вместе с двойками, связан с тем, что эти многочлены можно переписать в виде матричных произведений. Для линии второго порядка получим общее уравнение

$$\left[\begin{array}{cc|c} x & y & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ \hline a_1 & a_2 & a \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right] = 0,$$

где матрицу коэффициентов можно выбрать *симметричной*: $A^\top = A$. Аналогично для поверхности, но с 4×4 матрицей коэффициентов.

Обозначим одной буквой каждый блок в предыдущей записи:

$$\left[\begin{array}{c|c} X^\top & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A_2 & A_1 \\ \hline A_1^\top & A_0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right] = 0.$$

Этот более компактный вариант пригоден и для линий, и для поверхностей, и даже для многомерных квадратичных гиперповерхностей. Раскрывая матричные произведения, приведём его к

$$X^\top A_2\, X + X^\top A_1 + A_1^\top X + A_0 = 0,$$

причём слагаемые $X^\top A_1$ и $A_1^\top X$ всегда совпадают. Наконец, если расширить столбец переменных, включив туда константу 1, то получится самая компактная запись общего уравнения квадрики:

$$X^\top A\, X = 0.$$

Актуальна следующая геометрическая задача: *определить вид и расположение линии или поверхности второго порядка, заданной общим уравнением.* Для этого нужно по общему уравнению найти каноническое и связь канонической системы координат с исходной.

В зависимости от того, сколько информации о квадрике необходимо узнать, применяются различные методы. Наиболее резок контраст между теми, где система координат подвергается лишь поворотам и сдвигам, и теми, где вместе со сдвигами допускаются произвольные линейные преобразования (для этого достаточно помимо поворотов позволять растяжение вдоль одной из осей). Соответственно говорят о **метрической** и **аффинной** классификациях линий и поверхностей второго порядка.

При приведении к каноническому виду допускается только изменение направления осей и начала координат с сохранением всех углов и длин. (Трудности из-за ориентации в этих вопросах не возникают.) Поэтому, каноническая и исходная системы координат связаны поворотом и сдвигом, причём: при помощи поворота из уравнения всегда удаётся убрать произведения разных переменных; при помощи сдвига удаётся сократить количество неквадратичных слагаемых до одного.

Теорема. *Поворотом и сдвигом общее уравнение линии второго порядка приводится к одному из пяти видов:*

Класс	*Уравнение*
2+	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + p = 0$
2	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$
2−	$\lambda_1 x^2 + 2py = 0$
1+	$\lambda_1 x^2 + p = 0$
1	$\lambda_1 x^2 = 0$

Замечание. Для поверхностей таблица уравнений содержит те же случаи, но появляются ещё три (самые интересные):

Класс	*Уравнение*
3+	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + p = 0$
3	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$
3−	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2pz = 0$

Доказательство. Поворот плоскости всегда имеет вид

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{cases}$$

Подставляя эту связь в уравнение, получим много ненужных слагаемых, но потребуем равенства нулю коэффициента при $x'y'$. Выходит

$$-2A\cos\varphi\sin\varphi + 2B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2C\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Пользуясь формулами двойного угла, при условии $B \neq 0$ находим

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{A - C}{2B}.$$

Если же $B = 0$, то поворот системы координат и не нужен.

Теперь уравнение линии упростилось до

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

причём хотя бы один из коэффициентов при квадратах ненулевой: иначе уравнение стало бы линейным и обратный поворот никак не сделал бы из него исходное квадратичное. Применяя нижеследующую лемму, избавляемся хотя бы от одного из линейных слагаемых $2D'$ и $2E'$. Останется только то из них, которое является старшим по своей переменной; это случай $A' = 0$ либо $C' = 0$. Тогда вторым сдвигом можно избавиться от постоянного слагаемого. □

Лемма. *Для каждого многочлена* $a(t')$ *есть такой сдвиг* $t' = t + s$, *что в* $a(t)$ *коэффициент, следующий за старшим, равен нулю.*

Доказательство. Подстановкой найдём условие на сдвиг:

$$\begin{aligned} a(t+s) &= a_n(t+s)^n + a_{n-1}(t+s)^{n-1} + (\text{младшие по } t+s) \\ &= a_n t^n + (na_n s + a_{n-1})t^{n-1} + (\text{младшие по } t). \end{aligned}$$

Следовательно, $s = -a_{n-1}/na_n$. □

На практике можно сократить вычисления, делая сдвиг вперёд поворота и прибегая к дополнительным таблицам с различными случаями. Обоснование этого метода существенно длиннее.

Полученные в теореме классы уравнений могут распадаться в зависимости от знаков коэффициентов на несколько типов, указанных в следующей таблице. Умножение уравнения на ненулевую константу не меняет фигуры, поэтому у большинства типов есть два варианта комбинации знаков коэффициентов, один из которых включён в таблицу.

Класс и тип линии		*Знаки*		
		λ_1	λ_2	p
2+	Мнимый эллипс	$+$	$+$	$+$
	Гипербола	$-$	$+$	$+$
	Эллипс	$-$	$-$	$+$
1+	Параллельные мнимые прямые	$+$	0	$+$
	Параллельные прямые	$-$	0	$+$
2−	Парабола	$+$	0	$+$
		$-$	0	$+$
2	Мнимые прямые, пересекающиеся в вещественной точке	$+$	$+$	0
	Пересекающиеся прямые	$-$	$+$	0
1	Двойная прямая	$+$	0	0

3.4. Уравнение касательной

В заключение выведем уравнение касательной к линии второго порядка, применив к её уравнению в форме $X^\top A\,X = 0$ общий рецепт решения такой задачи (**линеаризацию**) для линии C.

- Возьмём две близкие точки $P = (x_0, y_0)$ и $Q = (x_0 + \delta u, y_0 + \delta v)$ на линии — так что $u = x - x_0$ и $v = y - y_0$, а δ мало;
- подставим координаты Q в уравнение;
- выделим три группы слагаемых смотря по степени вхождения δ;
- группа слагаемых, не содержащих δ, равна нулю, ибо $P \in C$;
- группу слагаемых, содержащих высокие степени δ, отбросим;
- оставшаяся группа после деления на δ и даёт искомое уравнение:

$$\begin{aligned} 0 &= (X_0 + \delta U)^\top A\,(X_0 + \delta U) \\ &= \left[X_0^\top A\,X_0\right] + \delta\left[U^\top A\,X_0 + X_0^\top A\,U\right] + \delta^2\left[U^\top A\,U\right] \\ &\approx \delta\left[(X - X_0)^\top A\,X_0 + X_0^\top A\,(X - X_0)\right] \\ &= \delta\left[X^\top A\,X_0 + X_0^\top A\,X\right] - 2\delta\left[X_0^\top A\,X_0\right] \\ &= 2\delta\left[X_0^\top A\,X\right]. \end{aligned}$$

Оставшиеся слагаемые совпадают ввиду симметричности матрицы коэффициентов, $A = A^\top$. Итак, уравнение касательной к линии второго порядка $X^\top A\,X = 0$ в точке X_0 есть $X_0^\top A\,X = 0$. Красиво!

К этому же результату приводит рассмотрение x и y как функций от t и дифференцирование исходного уравнения по t, которым пользуются чаще. Вот популярные ответы в канонической системе координат:

Фигура	Эллипс	Парабола	Гипербола
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 - 2px = 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Уравнение касательной	$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$	$y_0 y - p(x + x_0) = 0$	$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

Глава 4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

4.1. Комплексные числа и движения плоскости

Очень эффективный способ описания движений плоскости появляется с введением на радиус-векторах её точек особой операции умножения. Вместе с их сложением как векторов образуется замечательная структура **комплексных чисел**, во многом похожих на действительные, а кое в чём даже более удобных.

Обозначим начало координат через 0, а концы орт — через 1 и i. Теперь точке (a, b) плоскости соответствует комплексное число $a + ib$;

$$\{\text{точки прямой}\} \leftrightarrow \mathbb{R}, \qquad \{\text{точки плоскости}\} \leftrightarrow \mathbb{C},$$

а сложение и вычитание выполняются по формуле

$$(a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2).$$

Определим на них умножение — а позже и деление — так, чтобы:

- выполнялись привычные числовые законы ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности (в школе их называют «сочетательный», «переместительный», «распределительный»), нуля и единицы;
- прямая, проходящая через точки 0 и 1, представляла $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ввиду требования дистрибутивности достаточно научиться перемножать орты, а свойства единицы

$$1 \cdot 1 = 1 \quad \text{и} \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i$$

оставляют неясным лишь значение произведения $i^2 = i \cdot i$. Стоящую задачу решает выбор

$$i^2 = -1.$$

Любопытные могут самостоятельно исследовать, к чему ведут другие варианты — они лежат чуть в стороне от нашего сегодняшнего предмета. Итак, получаем правило умножения комплексных чисел:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_2b_1 + a_1b_2).$$

Фактически, при умножении нужно просто раскрывать скобки, а затем заменять i^2 на -1.

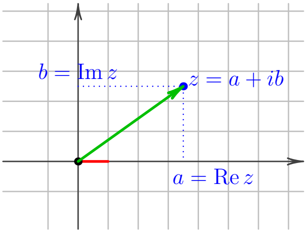
В поисках формулы для деления, рассмотрим сначала

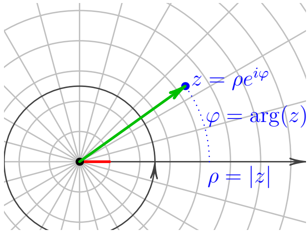
$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Поэтому, деление возможно на любое комплексное число $a + ib \neq 0$ и выполняется по формуле

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

что весьма неудобно для запоминания. Проще помнить приём, применённый в предыдущем равенстве для избавления от i в знаменателе и называемый **домножением на сопряжённое**.





Полярные координаты, связанные с прямоугольными формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\varphi, \end{cases}$$

дают другую удобную форму записи комплексных чисел:

- прямоугольная система $\leftrightarrow$ **алгебраическая форма** $z = a + ib$;
- полярная система $\leftrightarrow$ **экспоненциальная форма** $z = \rho e^{i\varphi}$,

где $e^{i\varphi}$ из формулы Эйлера (Cotes, 1714; Euler, 1748)

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi}$$

пока можно считать просто удачным обозначением. Явная запись с косинусом и синусом, называемая **тригонометрической формой**, очевидно более громоздка, в особенности когда вместо φ подставляется очень большое выражение (что типично в физике). Поэтому рекомендуется привыкать именно к экспоненциальной форме.

При этом называют $\left\{\begin{array}{ll} a = \operatorname{Re} z & \textbf{действительной частью} \\ b = \operatorname{Im} z & \textbf{мнимой частью} \\ \rho = |z| & \textbf{модулем} \\ \varphi = \arg z & \textbf{аргументом} \end{array}\right\}$ комплексного числа z.

Часто встречается операция **комплексного сопряжения**:

$$z = a + ib = \rho e^{i\varphi} \mapsto \bar{z} = a - ib = \rho e^{-i\varphi}.$$

Геометрически это отражение относительно вещественной оси. Легко проверить, что сопряжение уважает арифметические операции:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2.$$

Кроме того,

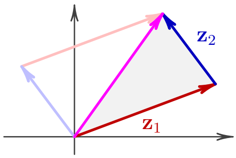
$$z + \bar{z} = 2a = 2\mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

Отсюда следует **мультипликативность** модуля:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,.$$

В отличие от $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$ нет порядка: запись $z_1 < z_2$ не имеет полезного смысла для z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Сравнивать комплексные числа можно только по модулю, причём выполнено **неравенство треугольника**

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|\,.$$



Оценим, насколько удачно обозначение $e^{i\varphi}$, вычисляя:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi}e^{i\psi} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) \\ &= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \\ &= e^{i(\varphi+\psi)}. \end{aligned}$$

Поэтому экспоненциальная форма записи комплексных чисел удобна для умножения и деления:

$$\rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \quad \rho_1 e^{i\varphi_1}/\rho_2 e^{i\varphi_2} = (\rho_1/\rho_2)e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Отсюда прямо следует правило возведения в целую степень:

$$(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi} \text{ для } n \in \mathbb{Z}.$$

Формулой Муавра (de Moivre) называют более длинный вариант

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Теорема. *Умножение на комплексное число $w = e^{i\varphi}$ является поворотом комплексной плоскости на угол $\varphi = \arg w$ вокруг нуля.*

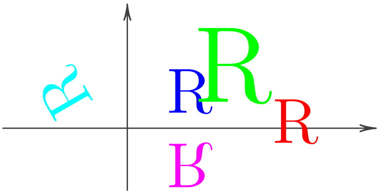
Первое доказательство. Умножим $z = x + iy$ на $w = \cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$zw = (x\cos\varphi - y\sin\varphi) + i(x\sin\varphi + y\cos\varphi).$$

Теперь сравним с формулой поворота плоскости. Противоположность знаков при синусах объясняется тем, что здесь мы вертим сами *точки* плоскости, а в той формуле поворота — систему координат. □

Второе доказательство. Естественно, полярные координаты удобны для записи поворотов. Преобразование $z \mapsto ze^{i\varphi}$ сохраняет начало координат (число 0) и все длины: $\left|ze^{i\varphi}\right| = |z| \cdot \left|e^{i\varphi}\right| = |z|$. Нужно также убедиться, что оно сохраняет ориентацию. □

Преобразование плоскости $\mathbb{C}$	*Формула*
Сдвиг (перенос)	$z \mapsto z + w$, где $w \in \mathbb{C}$
Растяжение или сжатие	$z \mapsto z\,a$, где $a \in \mathbb{R}_{>0}$
Поворот	$z \mapsto z\,e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$
Отражение мнимой оси	$z \mapsto \bar{z}$



Найдём теперь все значения выражения $\sqrt[n]{z}$ для положительного целого n. Из правила возведения в степень одно решение очевидно:

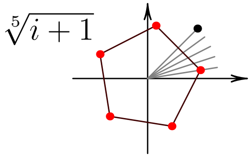
$$\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\varphi/n}.$$

Хитрость, открывающая все решения, в том, что аргумент φ определён не однозначно, а лишь с точностью до $2\pi i$, поскольку $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2\pi k)}$ для всех целых k. Следовательно, $\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}}$ есть *множество*

$$\left\{ \sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\varphi+2\pi k)/n} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

Каждое ненулевое комплексное число имеет ровно n различных корней степени n. Это важное явление, подобного которому в $\mathbb{R}$ нет. На комплексной плоскости корни степени n из данного ненулевого $z \in \mathbb{C}$ расположены в вершинах правильного n-угольника с центром в нуле.

Интересные вещи выявляются при дотошном рассмотрении корней из единицы («унипотентов»). Произведение унипотентов степени n



есть такой же унипотент, и даже произведение унипотентов неравных целых степеней — опять унипотент.

4.2. Комплексная экспонента

Вернёмся к формуле $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$. Функция $E(x)$, обладающая свойством $E(x_1+x_2) = E(x_1)E(x_2)$, обязательно имеет вид $E(x) = e^{\alpha x}$. При этом константу α можно определить из правила $\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}$. Применим это к функции $E(x) = \cos x + i \sin x$:

$$\tfrac{d}{dx}(\cos x + i\sin x) = (-\sin x + i\cos x) = i(\cos x + i\sin x).$$

Значит, в этом случае $E(x)$ является экспоненциальной функцией e^{ix}, что и оправдывает использование такого обозначения сразу, с предыдущего раздела. (В лекциях по математическому анализу В. В. Иванов указывает на связь функции e^{ix} с равномерным вращением как естественную и фундаментальную причину её полезности.)

К такому же выводу приводят разложения Тейлора:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= \cos x + i\sin x. \end{aligned}$$

Подставляя в экспоненту значение аргумента π, выводим знаменитое тождество Эйлера:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

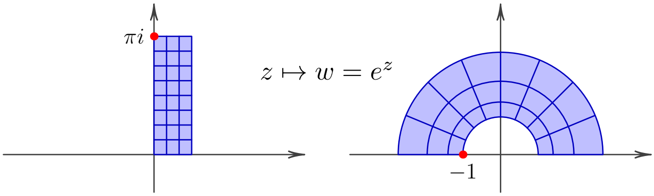
Отметим в качестве необязательного дополнения, что теперь легко определить функцию e^z комплексной переменной z, обладающую свойством

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

для всех $z_i \in \mathbb{C}$. Достаточно положить для всех $a, b \in \mathbb{R}$

$$\exp(a+ib) = e^{a+ib} \leftrightharpoons e^a e^{ib} \leftrightharpoons e^a(\cos b + i\sin b).$$

Есть и другие, аналитические способы введения e^z, аналогичные случаю вещественной переменной: как предел последовательности, как сумма ряда; в результате получается одна и та же функция.



Определим также комплексные функции

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

По сути, не только гиперболические, но и обычные косинус и синус оказываются всего лишь тенями комплексной экспоненты; её использование зримо упрощает вывод многих тригонометрических тождеств.

4.3. Основная теорема алгебры многочленов

Обозначим через $\mathbb{F}$ одну из числовых систем $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. **Многочленом** от буквы x с коэффициентами в $\mathbb{F}$ называют выражение вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

где все $a_k \in \mathbb{F}$. Если букве x не придавать никакого смысла, то её степени просто удобно организуют поведение коэффициентов при сложении и умножении многочленов по знакомым правилам: слагаемые с одинаковой степенью собираются вместе, а степени складываются при перемножении. Множество всех многочленов с коэффициентами в $\mathbb{F}$ обозначают через $\mathbb{F}[x]$. Индекс n последнего ненулевого (**старшего**) коэффициента многочлена f называют **степенью** f и пишут $\deg f = n$.

Операции деления на многочленах нет, потому что частным является, вообще говоря, дробь. Однако имеется деление с остатком.

Лемма. *Если даны многочлены f и $g \neq 0$, то однозначно находятся такие многочлены q и r, что $\deg r < \deg g$ и $f = qg + r$.*

Доказательство. По алгоритму деления «столбиком». □

Вместо x можно подставлять различные выражения, и в частности, числа. **Корнем** многочлена $f(x)$ называют такое число c, что $f(c) = 0$.

Многие задачи математики требуют отыскать корни многочлена или описать их совокупность.

Пример. Многочлен $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ не имеет корней в $\mathbb{R}$, но имеет два корня $\pm i \in \mathbb{C}$.

Теорема (Bezout). *Равносильны утверждения:*

(1) *число $c \in \mathbb{F}$ есть корень $f(x) \in \mathbb{F}[x]$;*
(2) *линейный многочлен $(x - c)$ делит $f(x)$ в $\mathbb{F}[x]$.*

Доказательство. По делению с остатком, $f(x) = (x - c)q(x) + r(x)$ и $\deg r(x) < \deg(x - c) = 1$, поэтому $r(x) = \text{const} = r(c) = f(c)$. □

Если $f(x)$ делится на $(x - c)^k$, но не на $(x - c)^{k+1}$, где $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, то c называют корнем $f(x)$ **кратности** k.

Следствие. *Всякий многочлен степени n имеет не более n корней, учитывая кратности.*

Теорема (Gauss, 1799; Argand, 1806). *Всякий многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени n имеет в $\mathbb{C}$*

(1) *хотя бы один корень;*
(2) *в точности n корней, учитывая кратности.*

До сих пор, т. е. уже более 200 лет, это утверждение называют «**основная теорема алгебры**». Более точным было бы говорить «**фундаментальная**» (как на Западе). Исторически, предмет алгебры состоял во многом в решении уравнений, а значит, именно в отыскании корней многочленов. В частности, этим и объясняется особо почётный статус основной теоремы алгебры многочленов.

Доказательство. (2) Прямо следует из (1) по теореме Безу.

(1) Для нашего курса это трудно; чисто алгебраического доказательства всё ещё нет, и вероятно, нет вообще. Простое доказательство даётся средствами комплексного анализа в курсах ТФКП. Тем не менее, идеи доказательства наглядно представлены ниже. □

Следствие. *Всякий многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ раскладывается на линейные множители:*

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

где x_i есть корни $f(x)$, повторяющиеся согласно кратностям.

Доказательство. Берём имеющийся по основной теореме корень x_1 и по теореме Безу выделяем множитель $x - x_1$. Второй множитель имеет меньшую степень $(n-1)$ и корень x_2. Так один за другим выделим все множители.

Более формально это рассуждение можно оформить (хотя нужды нет) в виде индукции по степени раскладываемого многочлена. □

Неприводимым называют многочлен без собственных делителей, т. е. не разложимый на множители меньших степеней. В алгебре многочленов это аналог простого числа. Полезно иметь описание всех неприводимых многочленов в $\mathbb{F}[x]$. Решения этой задачи для различных $\mathbb{F}$ весьма отличаются, поскольку неприводимость конкретного многочлена сильно зависит от того, какие коэффициенты вообще допускаются при разложении; поэтому говорят о неприводимости, например, над $\mathbb{C}$, над $\mathbb{R}$, над $\mathbb{Q}$. Основная теорема алгебры многочленов, вместе с теоремой Безу, решает вопрос над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

Следствие. *Все неприводимые над $\mathbb{C}$ многочлены в $\mathbb{C}[x]$ — линейные.*

Лемма. *Для всякого многочлена $f(x)$ с вещественными коэффициентами свойство $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ выполнено для всех $z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пользуемся тем, что сопряжение уважает операции:

$$\begin{aligned} \overline{f(z)} &= \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 z^2} + \cdots + \overline{a_n z^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\bar{z} + \overline{a_2}\,\overline{z^2} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{z^n} \\ &= a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + \cdots + a_n \bar{z}^n \\ &= f(\bar{z}). \end{aligned}$$

На последнем шаге $\overline{a_k} = a_k$, ибо $a_k \in \mathbb{R}$. □

Следствие. *Все неприводимые над $\mathbb{R}$ многочлены в $\mathbb{R}[x]$ — линейные или квадратичные с отрицательным дискриминантом.*

Доказательство. Разложим многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ на линейные множители над $\mathbb{C}$. Вещественные корни приносят линейные множители над $\mathbb{R}$. Поскольку $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$, все корни вне $\mathbb{R}$ появляются сопряжёнными парами z, $\bar{z}$, так что в комплексном разложении присутствует $(x-z)(x-\bar{z})$. Однако для каждого $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ многочлен

$$(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - x(z+\bar{z}) + z\bar{z} = x^2 - 2x \operatorname{Re} z + |z|^2$$

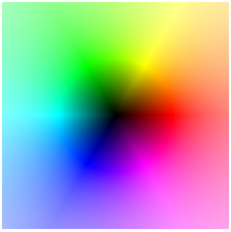
есть вещественный квадратичный с дискриминантом $-(2 \operatorname{Im} z)^2$. □

Не известно никакого простого описания неприводимых многочленов над $\mathbb{Q}$; имеются таковые любой степени, например, $x^n - 2$.

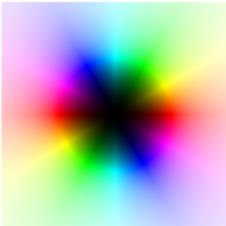
4.4. Изображение функций комплексной переменной

Желание нарисовать график даже простейшей комплекснозначной функции одной комплексной переменной наталкивается на серьёзное препятствие: необходимость рисовать в четырёх измерениях! Однако есть очень красивое решение этой проблемы.

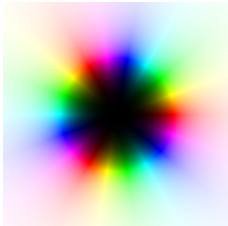
Два имеющихся у нас измерения отдадим независимой переменной, а значениям функции сопоставим вариации цвета. Именно, представим $|f(z)|$ и $\arg f(z)$ соответственно яркостью и оттенком точки z. Идею демонстрирует картинка для $f(z) = z$; на остальных картинках применено такое же соответствие между значением $f(z)$ и цветом.



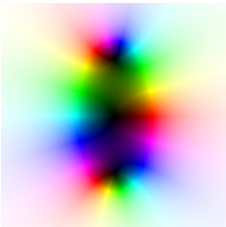
$f(z) = z$



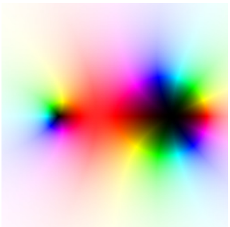
$f(z) = z^2$



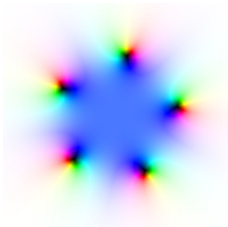
$f(z) = z^3$



$f(z) = z^3 + z$



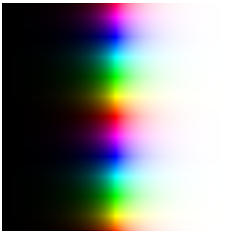
$f(z) = (z+1)(z-1)^2$



$f(z) = z^5 - i - 1$

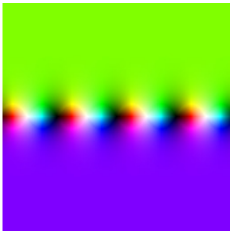
Этот приём эффективен и для других функций, и здесь уже велик соблазн совершить познавательный экскурс в комплексный анализ. Но прежде сто́ит пояснить на картинках идею доказательства того, что всякий комплексный многочлен степени n имеет ровно n комплексных корней, с учётом кратностей.

В комплексной плоскости с изображением многочлена $f(z)$ возьмём контур и обратим внимание на изменение $\arg f(z)$ при обходе контура, что легко отследить по изменению оттенка. Принято всегда обходить контур так, чтобы охватываемая им область была слева по ходу. Примеры показывают, что приращение $\arg f(z)$ при однократном обходе равно $2\pi i \cdot N$, где N есть сумма кратностей корней $f(z)$ внутри контура. Поскольку число корней конечно, в качестве контура можно взять окружность настолько большого радиуса, что по сравнению с ним все корни будут очень близки к нулю. Картинка $f(z)$, вмещающая контур, будет не отличима от картинки функции z^n, где $n = \deg f(z)$, а приращение $\arg f(z)$ будет равно $2\pi i \cdot n$. Значит, сумма кратностей всех комплексных корней многочлена всегда равна его степени.

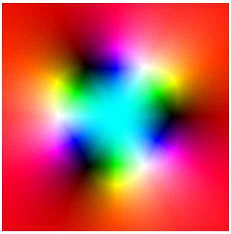


$f(z) = e^{3z}$

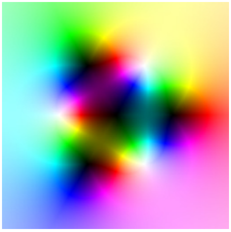
$f(z) = \cos 3z$



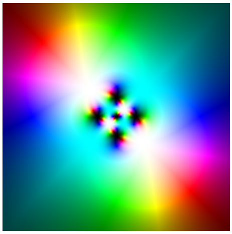
$f(z) = \operatorname{tg} 3z$



$f(z) = \dfrac{z^3 - 1}{z^3 + 1}$



$f(z) = z\dfrac{z^3 - 1}{z^3 + 1}$



тетраэдрическая дробь Клейна

Глава 5. НАЧАЛА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

5.1. Системы линейных уравнений

Займёмся общими системами m линейных уравнений

$$(\bigstar) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

с n неизвестными для произвольных m, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. **Коэффициенты** a_{ij} и **свободные члены** b_j чаще всего являются вещественными числами. Встречаются задачи, где они комплексные, рациональные, либо ещё более хитрые, но поначалу это не существенно для нашей будущей теории. Поэтому будем обозначать через $\mathbb{F}$ **основную** числовую систему, в которой лежат значения всех известных и неизвестных букв.

Изучая линейные системы, удобно оставлять в тени неизвестные и выписывать лишь **основную** и **расширенную матрицы** системы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Решением системы $(\bigstar)$ называют список $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ элементов $\mathbb{F}$, подстановка которых вместо x_i превращает все уравнения системы $(\bigstar)$ в тождества. По количеству решений системы делятся на совместные и несовместные, на определённые и неопределённые:

<table>
<tr><th>Решения</th><th colspan="2">система</th></tr>
<tr><td>нет</td><td>несовместна</td><td rowspan="2">определена</td></tr>
<tr><td>одно</td><td rowspan="2">совместна</td></tr>
<tr><td>много</td><td>неопределена</td></tr>
</table>

Две линейные системы одинаковых размеров **эквивалентны**, если множества их решений одинаковы. Два простых преобразования переводят систему в ей эквивалентную:

(R1) умножение одного уравнения на ненулевой элемент $\alpha \in \mathbb{F}$;
(R2) прибавление к одному уравнению другого.

Комбинациями этих примитивов представимы преобразования:

(R2′) прибавление к одному уравнению другого, помноженного на любой элемент из $\mathbb{F}$;
(R3) перестановка пары уравнений местами.

Часто список **элементарных преобразований** составляют из преобразований (R1), (R2′) и (R3): это удобнее для применений на практике, в то время как простота (R1) и (R2) удобна в доказательствах.

Лемма. *Две линейные системы эквивалентны, если одна получается из другой конечной цепочкой элементарных преобразований.* □

5.2. Метод исключения неизвестных

Чтобы перейти от данной системы к более простой, путём элементарных преобразований методично зануляют коэффициенты.

Пример. Для системы уравнений выписана расширенная матрица:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -6, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -5 & -6 \end{array}\right].$$

Эта система элементарными преобразованиями…

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 0x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -6, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -5 & -6 \end{array}\right],$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 0x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 0x_1 - x_3 + x_4 - 3x_5 = -5, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right],$$

$$\begin{cases} -x_1 + 0x_3 - 2x_4 - x_5 = -4, \\ 0x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 0x_1 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 + 0x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ 0x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 0x_1 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Общее решение исходной системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 5 + x_4 - 3x_5, \\ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \text{ — произвольные.} \end{cases}$$

Значит, система совместна и неопределена; при каждом наборе значений **параметров** x_2, x_4, x_5 имеется одно решение.

Матрицу коэффициентов назовём **ступенчатой**, когда:

(1) первый слева ненулевой элемент каждой строки есть единица, называемая **главной**;
(2) столбец, содержащий главную единицу, в остальном нулевой;
(3) главные единицы уходят направо и вниз:

$$\begin{bmatrix} \dots 0 & 1 & * & * \dots 0 & * & * \dots * & 0 & * \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 & * & * \dots * & 0 & * \\ \hdotsfor{8} \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & * \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как и в рассмотренном выше примере, решения системы ступенчатого вида выписывают непосредственно по её расширенной матрице. При этом множества решений у любой пары различных систем ступенчатого вида обязательно получаются различны.

Теорема. *Всякая система линейных уравнений эквивалентна (единственной) системе ступенчатого вида.*

Алгоритм. Доказательством существования служит конкретный метод приведения произвольной матрицы к ступенчатой. Результатом промежуточного этапа является матрица

$$\begin{array}{c} \text{готовый} \\ \text{блок} \\ \hline \\ \text{нулевой} \\ \text{блок} \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \text{пассивный} \\ \text{блок} \\ \hline \\ \text{активный} \\ \text{блок} \end{array}$$

блочного вида. Её левый верхний блок есть ступенчатая матрица без нулевых строк, а правые блоки предстоит вычищать.

В активном блоке ищется первый ненулевой элемент:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \downarrow & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \downarrow & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array}\right].$$

Если до его обнаружения в активном блоке найдены нулевые столбцы, то граница блоков (мысленно) передвигается вправо от них. При том, если весь активный блок оказывается нулевым, то ступенчатый вид получен. Иначе, первый ненулевой элемент становится **ведущим**:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array}\right].$$

Перестановками строк ведущий элемент помещаем в верхний левый угол активного блока; делением ведущей строки на ведущий элемент превращаем его в будущую главную единицу:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array}\right].$$

Вычитанием ведущей строки, помноженной на соответствующие элементы ведущего столбца, из остальных строк, зануляем все элементы этого столбца, кроме остающейся главной единицы:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right].$$

Последнюю операцию проводим также и с верхними строками:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right].$$

Сдвигая границу блоков вправо от ведущего столбца, получаем матрицу, пригодную для следующей итерации метода исключения. □

Удивительно, что этот метод знали в Китае ещё во II в. до н. э., хотя европейская традиция приписывает его Гауссу (начало XIX в.).

Замечание. В некоторых учебниках пропускают последний описанный шаг, а ступенчатый вид соответственно определяют, не требуя зануления элементов матрицы над главными единицами. Это допустимо для простых задач, поскольку обратную подстановку, дающую решение системы по ступенчатому виду её расширенной матрицы, легко выполнить и в таком ослабленном варианте.

Преимущество взятого здесь сильного варианта в том, что он позволяет утверждать единственность ступенчатого вида любой матрицы.

Следствие. (1) *Число параметров, описывающих множество решений совместной системы, равно числу неглавных столбцов.*

(2) *Система определена* $\iff$ *все столбцы главные.*

(3) *Система совместна* $\iff$ *каждой нулевой строке соответствует нулевой свободный член.*

Наличие нулевых строк в расширенной ступенчатой матрице сигнализирует, что исходная система избыточна: лишние уравнения можно отбросить, не изменив множество решений. Какие именно уравнения излишни, сказать нелегко, но *количество* существенных уравнений видно: оно равно количеству главных единиц.

Рабочее определение. **Рангом** матрицы A назовём количество ненулевых строк в ступенчатом виде, к которому A приводится.

Рабочим это определение является сразу в двух смыслах:

(1) вскоре его заменят «настоящие» определения ранга, коих будет целых три;

(2) даже после грядущей замены, практически найти ранг матрицы обычно быстрее всего именно приведением её к ступенчатому виду.

Следствие (критерий совместности)**.** *Линейная система совместна* $\iff$ *ранги основной и расширенной матриц равны.*

Следствие. *Совместная система имеет единственное решение* $\iff$ *число неизвестных равно рангу системы.*

5.3. Линейные пространства строк и столбцов

Работая с векторами в фиксированной системе координат, мы оперируем над столбцами их координат; эти столбцы мы можем складывать и умножать на скаляры. Решая линейные системы элементарными преобразованиями, мы оперируем над строками расширенной матрицы; эти строки мы можем складывать и умножать на числа (тоже называемые скалярами). Дальнейшее изучение математики и физики постоянно будет сталкивать студента с объектами самой разной природы, которые можно складывать и умножать на скаляры. Как правило, при этом выполнены 8 привычных свойств сложения и умножения, перечисленных в самом первом разделе лекций.

Множество $\mathcal{L}$ с двумя такими операциями называют **линейным** или **векторным пространством**. Элементы любого линейного пространства называют векторами. Это довольно плохо, ибо вызывает конфликт с физическим пониманием вектора как направленного отрезка, но такое употребление в математике прижилось, а лучшего слова пока нет.

Познакомимся с основополагающими понятиями линейной алгебры на примере пространства вещественных строк длины n и пространства вещественных столбцов высоты n. Обозначим оба через $\mathbb{R}^n$, потому что часто нет разницы, о строках речь или о столбцах.

Зафиксируем множество векторов $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Их **линейной комбинацией** с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ называют

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k.$$

Линейную комбинацию, в которой не все коэффициенты равны нулю, называют **нетривиальной**.

Понятия линейной (не)зависимости множества векторов линейного пространства вводят в точности так же, как и ранее для трёхмерного пространства. Множество $\{X_1, \ldots, X_k\}$ **линейно зависимо**, если найдутся такие коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, что линейная комбинация $\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k$ равна нулевому вектору. Линейная зависимость множеств из одного, двух, или трёх векторов это: (1) равенство нулю; (2) коллинеарность; (3) компланарность.

В противном случае нулевой вектор нельзя представить нетривиальной линейной комбинацией векторов из данного множества, которое тогда называют **линейно независимым**. Часто используется равносильная переформулировка, говорящая, что нулевая линейная комбинация векторов линейно независимого множества $\{X_1, \ldots, X_k\}$ обязательно тривиальна:

$$\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k = \mathbf{0} \implies \alpha_1 = 0 \wedge \ \ldots \ \wedge \ \alpha_k = 0.$$

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^4$ возьмём строки

$$Z_1 = [1, -1, 0, 0], \quad Z_2 = [0, 1, -1, 0], \quad Z_3 = [0, 0, 1, -1], \quad Z_4 = [-1, 0, 0, 1].$$

Тогда $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ линейно независимо, а $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ линейно зависимо: $Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 0$.

Множество $\langle \mathcal{X} \rangle$ всевозможных линейных комбинаций векторов из $\mathcal{X}$ называют **линейной оболочкой** множества $\mathcal{X}$. Поскольку

$$X, Y \in \langle \mathcal{X} \rangle \implies \alpha X + \beta Y \in \langle \mathcal{X} \rangle,$$

каждая линейная оболочка сама является линейным пространством: в ней можно выполнять все действия с векторами, не выходя в объемлющее пространство $\mathbb{R}^n$. Можно сказать, что $\langle\mathcal{X}\rangle$ является **подпространством** в $\mathbb{R}^n$.

Лемма. *Для любого множества векторов* $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ *произвольного линейного пространства:*

(1) *если* $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *линейно зависимо, то* $\mathcal{X}$ *линейно зависимо;*

(2) *если* $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ *и* $\mathcal{X}$ *линейно независимо, то* $\mathcal{Y}$ *линейно независимо;*

(3) *хотя бы один из* $X_i \in \mathcal{X}$ *есть линейная комбинация остальных* $\iff$ *множество* $\mathcal{X}$ *линейно зависимо;*

(4) *если* $\mathcal{X}$ *линейно независимо, то вектор* $Z \in \langle\mathcal{X}\rangle \iff$ *множество* $\mathcal{X} \cup \{Z\}$ *линейно зависимо.*

Доказательство. Это простое, но важное упражнение на логику.

(1) Зависимость не может исчезнуть при увеличении множества.

(2) Зависимость не может появиться при уменьшении множества.

(3) Вычитая вектор из его выражения через остальные, получим нулевую нетривиальную линейную комбинацию. Наоборот, имея оную, можно выразить хотя бы один из входящих векторов.

(4) Вывод слева направо верен для любого $\mathcal{X}$. Наоборот, ввиду линейной независимости $\mathcal{X}$, нулевая нетривиальная линейная комбинация векторов из $\mathcal{X} \cup \{Z\}$ невозможна без участия Z с ненулевым коэффициентом, а тогда Z выражается через векторы из $\mathcal{X}$. □

Определение. **Базисом** линейного подпространства $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ называется такое (упорядоченное) множество векторов $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$, что:

(1) множество $\mathcal{X}$ линейно независимо и

(2) пространство $\mathcal{L}$ совпадает с линейной оболочкой $\langle\mathcal{X}\rangle$.

Иначе говоря, каждый вектор $X \in \mathcal{L}$ записывается единственным образом в виде линейной комбинации

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k.$$

При этом числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ называют **координатами** X в базисе $\mathcal{X}$.

Пример. **Стандартным базисом** $\mathbb{R}^n$ называют $\{E_{(1)}, \ldots, E_{(n)}\}$, где

$$E_{(i)} = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0] \quad \text{(единица написана в позиции } i\text{)}.$$

Пример. Любые три различных вектора из $\mathcal{Z} = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$, рассмотренного выше, образуют базис $\langle\mathcal{Z}\rangle$. Базисов $\langle\mathcal{Z}\rangle$ много: пригоден любой набор из трёх линейно независимых векторов из $\langle\mathcal{Z}\rangle$.

Лемма. *Если* $\{X_1, \dots, X_r\}$ *есть базис линейного пространства* $\mathcal{L}$ *и множество* $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_s\} \subset \mathcal{L}$ *линейно независимо, то:*

(1) $s \leqslant r$;

(2) *можно дополнить* $\mathcal{Y}$ *до базиса* $\mathcal{L}$.

Доказательство. (1) Составим линейную комбинацию

$$\alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_s Y_s = \mathbf{0}$$

с неизвестными коэффициентами α_i. Распишем в ней все Y_i по базису,

$$Y_i = y_{1i} X_1 + \ldots + y_{ri} X_r,$$

и, собрав коэффициенты при $X_1, \dots, X_r$, получим систему из r однородных линейных уравнений

$$y_{k1}\alpha_1 + \ldots + y_{ks}\alpha_s = 0, \quad k = 1, \dots, r,$$

с s неизвестными α_i. Если $s > r$, она всегда имеет ненулевое решение, что противоречит линейной независимости $\{Y_1, \dots, Y_s\}$.

(2) Выбросим из списка $Y_1, \dots, Y_s, X_1, \dots, X_r$ один за другим все векторы, линейно выражающиеся через предыдущие. Линейная оболочка списка при этом неизменна и равна $\mathcal{L}$, а множество оставшихся векторов линейно независимо и содержит $\mathcal{Y}$. □

Теорема. *Каждое подпространство* $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ *имеет конечный базис.*

Доказательство. Будем наращивать линейно независимое множество векторов, используя утверждение (4) первой леммы. Начав с пустого, далее добавляем к имеющемуся списку $\{X_1, \dots, X_k\}$ любой вектор X_{k+1} из $\mathcal{S} \setminus \langle X_1, \dots, X_k \rangle$, пока таковые есть. По второй лемме с $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$ мы сможем так набрать не более n векторов. Значит, при некотором $r \leqslant n$ рост остановится и мы получим искомое $\mathcal{S} = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$. □

Следствие. *Все базисы* $\mathcal{S}$ *состоят из одинакового числа векторов.*

Доказательство. Если в одном базисе s векторов, а в другом r, то по второй лемме $s \leqslant r \leqslant s$, где или первый базис есть $\mathcal{Y}$, или второй. □

Определение. Число векторов в базисе линейного пространства $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ называют его **размерностью** и обозначают $\dim \mathcal{L}$. Кроме того, число векторов в базисе линейной оболочки множества $\mathcal{X}$ называют **рангом** $\mathcal{X}$.

Следствие. *Для любого пространства* $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$:

(1) *если* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$ *есть подпространство, то* $\dim \mathcal{S} \leqslant \dim \mathcal{L}$;

(2) *если при том* $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{L}$, *то* $\mathcal{S} = \mathcal{L}$.

Доказательство. (1) Базис $\mathcal{S}$ можно дополнить до базиса $\mathcal{L}$.

(2) Базис $\mathcal{S}$ уже является базисом $\mathcal{L}$. □

5.4. Ранг матрицы и критерий совместности

Определение. **Рангом по строкам/столбцам** матрицы A называют ранг множества её строк/столбцов. Эти числа временно обозначим через $\mathrm{rk}_{\text{г}}\, A$ и $\mathrm{rk}_{\text{в}}\, A$. **Пространством строк/столбцов** матрицы A называют линейную оболочку множества её строк/столбцов.

Лемма. *Элементарные преобразования строк матрицы не меняют пространство строк; аналогично для столбцов.*

Доказательство. Достаточно проверить (R1) и (R2). Преобразования обоих типов выдают линейные комбинации, т. е. новые строки являются элементами исходного пространства; поэтому пространство строк не увеличивается. Преобразования обратимы, поэтому пространство строк не уменьшается. □

Лемма. *У всякой матрицы ступенчатого вида:*

(1) *все ненулевые строки линейно независимы;*
(2) *все столбцы являются линейными комбинациями главных;*
(3) *ранги по строкам и по столбцам равны.*

Доказательство. Упражнение. □

Лемма. *Если матрицы A и Z связаны конечной цепочкой элементарных преобразований строк, то их ранги по столбцам равны.*

Доказательство. Считаем, что первые $r = \mathrm{rk}_{\text{в}}\, A$ столбцов матрицы A составляют базис пространства её столбцов: иначе можно прибегнуть к перенумерации столбцов. Каждый столбец $A^{(k)}$ запишется какой-то линейной комбинацией

$$A^{(k)} = \alpha_{k1}A^{(1)} + \ldots + \alpha_{kr}A^{(r)}.$$

Любое элементарное преобразование строк сохраняет это соотношение между столбцами, поэтому выполнено равенство

$$Z^{(k)} = \alpha_{k1}Z^{(1)} + \ldots + \alpha_{kr}Z^{(r)}.$$

Значит, $\mathrm{rk}_{\text{в}}\, A \geqslant \mathrm{rk}_{\text{в}}\, Z$. Поскольку элементарные преобразования обратимы, аналогично выводится обратное неравенство. □

Теорема. *Ранги любой матрицы по строкам и по столбцам равны.*

Определение. Вот это число и называется **рангом** матрицы.

Доказательство. Возьмём произвольную прямоугольную матрицу A, её ступенчатый вид A' и проверим цепочку равенств

$$\operatorname{rk}_{\text{г}} A = \operatorname{rk}_{\text{г}} A' = \operatorname{rk}_{\text{в}} A' = \operatorname{rk}_{\text{в}} A.$$

Их поочерёдно обеспечивают три приведённых леммы. □

Теперь можно заново посмотреть на вопрос совместности системы линейных уравнений.

Теорема (критерий совместности)**.** *Система линейных уравнений совместна* $\iff$ *равны ранги её основной и расширенной матриц.*

Доказательство. Совместность линейной системы $AX = B$ эквивалентна тому, что B есть линейная комбинация столбцов матрицы A с какими-то неизвестными и разыскиваемыми коэффициентами x_i:

$$x_1 A^{(1)} + \ldots + x_n A^{(n)} = B.$$

По первой лемме о линейной (не)зависимости, это равносильно совпадению линейных оболочек $\langle\{\text{столбцы } A\}\rangle$ и $\langle\{\text{столбцы } A\} \cup \{B\}\rangle$, а тогда и ранги их равны. Обратно, если ранги равны, то совпадают и сами оболочки, так как вторая включает первую. □

5.5. Общее решение системы линейных уравнений

Однородной называют систему линейных уравнений, у которой столбец свободных членов нулевой: $AX = \mathbf{0}$. Если известно некоторое множество решений $\{X_1, \ldots, X_k\}$ однородной системы, то всякая линейная комбинация их также будет решением. Вообще, множество всех решений есть линейное пространство; оно называется **пространством решений** этой однородной системы.

Пример. Возьмём систему и приведём её к ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Все решения этой системы можно выписать, беря x_2, x_4 и x_5 в качестве параметров. Базис находим, поочерёдно подставляя единицу в каждый параметр и одновременно зануляя остальные:

$$X_1 = [0, 1, 0, 0, 0]^\top, \quad X_2 = [-2, 0, 1, 1, 0]^\top, \quad X_3 = [-1, 0, -3, 0, 1]^\top$$

составляют базис пространства решений, также называемый **фундаментальной системой решений**. Пространство решений задаётся в виде

$$\{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\};$$

эта запись даёт все решения исходной линейной системы и потому называется **общим решением** системы. Различных его записей такого вида бесконечно много, как и выборов фундаментальной системы решений.

Множество $\mathcal{M}$ всех решений произвольной неоднородной линейной системы $AX = B$ не есть линейное пространство. Однако это подмножество пространства столбцов связано с пространством $\mathcal{L}$ решений **сопутствующей** однородной системы $AX = \mathbf{0}$. В самом деле,

$$AX = B \ \wedge \ AY = \mathbf{0} \implies A(X+Y) = B;$$
$$AX = B \ \wedge \ AX' = B \implies A(X - X') = \mathbf{0}.$$

Поэтому можно написать $\mathcal{M} = X + \mathcal{L}$, понимая под этим

$$\mathcal{M} = \{X + Y \mid Y \in \mathcal{L}\}.$$

Определение. **Линейным (под)многообразием** в линейном пространстве называется его подмножество вида $\mathcal{M} = \mathbf{v} + \mathcal{L}$ для каких-то фиксированных подпространства $\mathcal{L}$ и вектора $\mathbf{v}$.

Пример. Линейные подпространства и многообразия в обычном $\mathbb{R}^3$:

$\dim \mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{M}$
0	Нулевое подпространство $\{\mathbf{0}\}$	Точка
1	Прямая, содержащая $\mathbf{0}$	Прямая
2	Плоскость, содержащая $\mathbf{0}$	Плоскость
3	Само пространство $\mathbb{R}^3$	

Пример. Возьмём систему и приведём её к ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -6; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Многообразие её решений можно задать в виде

$$\{X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\},$$

где X_0 есть некоторое **частное** решение, скажем, $X_0 = [4, 0, 5, 0, 0]^\top$, а $\{X_1, X_2, X_3\}$ — фундаментальное решение сопутствующей однородной системы, рассмотренной выше. Частное решение проще всего выписать, положив все параметры равными нулю.

Глава 6. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

6.1. Комбинаторное строение определителей

Определители произвольного порядка формально вводят несколькими очень разными способами. Отметим основные:

(1) геометрически мотивированный;
(2) индуктивный;
(3) аксиоматический;
(4) комбинаторный.

При геометрическом подходе определителем $n \times n$ матрицы называют ориентированный объём параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, образованного её строками; мы уже видели это в размерностях 2 и 3. При индуктивном подходе определитель порядка n вводится через формулу раскрытия по строке или столбцу, аналогично данной в гл. 1. При аксиоматическом подходе определитель возникает как единственная функция на наборе строк матрицы, имеющая три заданных свойства.

Мы выберем комбинаторный подход ради короткого и строгого определения, затем получим индуктивное свойство, кососимметричность и полилинейность, а также несколько простых свойств, являющихся их следствиями. Многомерной геометрии в этом курсе почти не будет.

Определение. Биективное отображение конечного множества Ω в себя называют **перестановкой** Ω. Обычно берут $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$; множество его перестановок обозначают через $\mathbb{S}_n$ (или Σ_n).

Пример. Стандартный компактный способ записи перестановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \mathbb{S}_5,$$

указывает, что $\sigma(1) = 5$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 2$ и $\sigma(5) = 4$. Будет полезно также изображать перестановку картинкой:

	1	2	3	4	5
1					x
2			x		
3	x				
4		x			
5				x	

Инверсии: $(1,2), (1,3), (1,4), (1,5),$
$(2,3), (2,4)$.

Чётность: чётная, $\mathrm{inv}(\sigma) = 6$.

Определение. **Инверсией** перестановки $\sigma \in \mathbb{S}_n$ называют такую пару (i, j), что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. На картинке это будет каждая пара крестиков, прямая через которую наклонена вправо.

Чётностью перестановки σ называют чётность количества $\mathrm{inv}(\sigma)$ всех её инверсий, а **знаком**, число $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}$.

В доказательствах нам будет удобно говорить также о чётности картинки, имея в виду чётность изображаемой ею перестановки.

Перестановки дают возможность единообразно записать формулы полного раскрытия определителей второго и третьего порядков, указанные ещё в начале курса. Результат немедленно обобщается на произвольный порядок (Leibniz, 1683).

Определение. **Определителем** $n \times n$ матрицы $A = [a_{ij}]$ называют сумму

$$(\sharp) \qquad \det A \leftrightharpoons \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)}.$$

В правой части этой формулы стоит алгебраическая сумма $n!$ однотипных мономов. Например, нарисованная выше перестановка $\sigma \in \mathbb{S}_5$ вносит моном $a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54}$, причём с плюсом, ибо она чётна:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow\rightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

Лемма. *Число инверсий картинки любой перестановки:*

(1) *неизменно при отражении относительно главной диагонали;*

(2) *меняет чётность при обмене двух строк или двух столбцов;*

(3) *содержащих крестик в строке i и столбце j, имеет такую же чётность как число $i + j$.*

Доказательство. (1) Благодаря симметрии в определении инверсии.

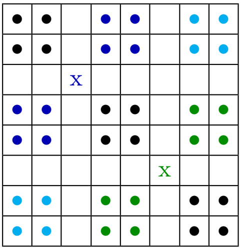
(3) Встанем с компасом в строку i и столбец j. Севернее (выше) расположено $i - 1$ крестиков, а западнее (левее) расположено $j - 1$ крестиков. При том, если к северо-западу находится k крестиков, то к северо-востоку их $i - k - 1$, а к юго-западу $j - k - 1$. Значит, всего крестик в клетке (i, j) входит в $i + j - 2(k + 1)$ инверсионных пар.

●	●		●	●
●	●		●	●
●	●		●	●
		x		
●	●		●	●

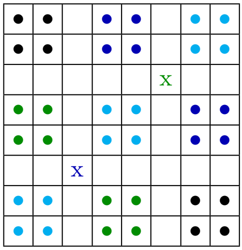
(2) Прежде всего заметим, что если выбранная для обмена пара строк содержит инверсионную пару крестиков, то обмен делает её не

инверсионной, и наоборот. Остаётся проверить, что чётность числа прочих инверсий не меняется.

Нужно рассмотреть все возможные случаи расположения одного неподвижного крестика относительно обменивающейся пары. Возьмём пару крестиков, не образующих инверсию, а в остальных клетках отметим разными кружками, сколько инверсий с обменивающейся парой даст крестик, помещённый туда.



● = 0 инверсий
● = 1 инверсия
● = 1 инверсия
● = 2 инверсии



Сравним с аналогичной картинкой после обмена строк. Всего видим девять случаев, но лишь в «центральной части» исследуемое число меняется, причём на 2. □

6.2. Свойства определителей

Здесь мы трижды проведём рассуждения по следующей схеме:

(א) Распишем определители в обеих частях доказываемого равенства по определению, как суммы мономов.

(ב) Убедимся, что списки мономов слева и справа одинаковы.

(ג) Сравним знаки каждого монома с двух сторон при помощи леммы о свойствах чётности перестановок.

Повторяющиеся при этом простые шаги упоминать явно не будем.

Лемма. *Для всякой квадратной матрицы,* $\det A = \det A^\top$*.*

Ввиду этой леммы все свойства определителей, формулируемые или доказываемые для строк, верны и для столбцов.

Доказательство. (ג) Транспонирование отражает картинку, сохраняя чётность. Поэтому мономы двух симметричных картинок, например,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix},$$

входят с одинаковыми знаками в $\det A$ и $\det A^\top$. $\square$

Определение. **Минором** порядка k произвольной (не обязательно квадратной) матрицы A называют определитель матрицы, составленной из элементов A, стоящих на пересечении каких-то выбранных в ней различных k строк и различных k столбцов:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

Примечательны миноры порядка $n-1$ квадратной матрицы размера $n \times n$. Обозначим через $M_{ij}(A)$ минор, получаемый вычёркиванием из A строки i и столбца j: Значение $(-1)^{i+j} M_{ij}(A)$ называют **алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} матрицы A. Откуда такое название?

Лемма. *Зависимость определителя от клетки* (i, j) *имеет вид*

$$\det A = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A) + \sum(\textit{мономы без } a_{ij}).$$

Доказательство. ($\sqsupset$) Внимание сосредоточено на картинках перестановок $\sigma \in \mathbb{S}_n$ с крестиком в клетке (i, j). Удаление строки i и столбца j даёт картинки всех перестановок в $\mathbb{S}_{n-1}$, которые и нужны при раскрытии минора M_{ij}. Разберите случай $n = 3$ как упражнение.

($\beth$) Третье утверждение в лемме об инверсиях и компенсирующий множитель $(-1)^{i+j}$ обеспечивают правильные знаки мономов. $\square$

Теорема (Leibniz, Laplace). *Для каждой строки матрицы* A *определитель* $\det A$ *равен сумме произведений элементов в этой строке на их алгебраические дополнения; аналогично для каждого столбца:*

$$\det A = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A) \quad \textit{для всех } 1 \leqslant i \leqslant n;$$

$$\det A = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}(A) \quad \textit{для всех } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Доказательство. Достаточно применять лемму, двигаясь по строке i либо столбцу j. Каждый моном определителя попадёт ровно в одну группу слагаемых, выделяемых леммой для клеток, потому что в него входит ровно один элемент этой строки (либо столбца). $\square$

Определение. Квадратную матрицу $A = [a_{ij}]$, у которой $a_{ij} = 0$ при $i > j$, т. е. все элементы ниже главной диагонали нулевые, называют **верхнетреугольной**. Аналогично определяют **нижнетреугольные** матрицы.

Следствие. *Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению элементов на её главной диагонали,* $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$; *также и для нижнетреугольной.*

Первое доказательство. Если в картинке нет крестиков ниже диагонали, то и выше диагонали их там тоже быть не может: нет места. Значит, единственный ненулевой моном суммы ($\sharp$) — диагональный. $\square$

Второе доказательство. По индукции, всё время раскрывая определитель по первому столбцу (для верхнетреугольной) или первой строке (для нижнетреугольной). $\square$

В частности, определитель единичной матрицы равен единице; назовём это свойством (D1).

Следствие. *Определители* **блочно-треугольных** *матриц*

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right] \quad \text{и} \quad \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right],$$

где матрицы A и D квадратные, равны $\det A \cdot \det D$.

Доказательство. Скомбинировать идею первого доказательства предыдущего следствия и идею доказательства третьего утверждения в лемме об инверсиях. Ненулевые мономы большого определителя не затрагивают блоки B и C, а инверсий между блоками A и D нет, так что они раскрываются независимо и возникает произведение. $\square$

Пример. Рассмотрим случай $n = 4$ с блоками 2×2. Здесь всего четыре потенциально ненулевых монома:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{43} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{43} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{43} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{43} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Разность двух верхних мономов равна $(\det A)a_{33}a_{44}$, а разность двух нижних — $(\det A)a_{34}a_{43}$. Разность этих разностей равна $(\det A)(\det D)$.

Теорема. (D2) *Определитель матрицы меняет знак на противоположный при обмене местами любой пары её строк. Иначе говоря,* det *есть* **кососимметрическая** *функция строк матрицы.*

Доказательство. ($\beth$) Картинки перестановок, дающие один и тот же моном до и после обмена строк, например,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix},$$

отличаются как во втором утверждении леммы об инверсиях. □

Теорема. (D3) *Определитель матрицы есть линейная функция элементов любой строки. Иначе говоря,* det *есть* **полилинейная** *функция строк матрицы.*

Доказательство. Утверждается, что если квадратные матрицы A, B и C отличаются лишь своими i-ми строками, равными соответственно $A_{(i)}$, $B_{(i)}$ и $C_{(i)} = \alpha A_{(i)} + \beta B_{(i)}$, то $\det C = \alpha \det A + \beta \det B$.

Для проверки этого заметим, что миноры $M_{ij}(A)$, $M_{ij}(B)$ и $M_{ij}(C)$ идентичны, подставим $c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$ в формулу раскрытия $\det C$ по строке i и вынесем скаляры α и β из-под суммирования. □

Теорема. *Если функция $\mathcal{D}\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, как функция строк матрицы, кососимметрическая и полилинейная, то она отличается от определителя лишь постоянным множителем, равным своему значению на единичной матрице: $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(E) \cdot \det A$ для всех A.*

Доказывать эту теорему мы не будем. Однако отсюда следует, что свойства (D1), (D2) и (D3) однозначно задают det как отображение $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ и потому могут быть взяты в качестве абстрактного определения.

Полезны ещё несколько простых следствий основных свойств:

(D4) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ для всех $n \times n$ матриц A и скаляров λ;

(D5) определитель матрицы с нулевой строкой равен нулю;

(D6) определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен нулю;

(D7) определитель неизменен при элементарных преобразованиях строк типа (R2′).

Теорема (Binet, Cauchy, 1812). *Для всех $n \times n$ матриц A и B,*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Первое доказательство. Обозначим через $A_{(i)}$ строку i матрицы A и аналогично для других используемых матриц. Поскольку

$$A_{(i)} = a_{i1}E_{(1)} + \ldots + a_{in}E_{(n)} \quad \text{и} \quad (AB)_{(i)} = a_{i1}B_{(1)} + \ldots + a_{in}B_{(n)},$$

элементарными преобразованиями строк типа (R2′) левая матрица приводится к правой:

$$\left[\begin{array}{c|c} E & B \\ \hline -A & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|c} E & B \\ \hline 0 & AB \end{array}\right].$$

По свойству (D7) определители этих матриц равны; остаётся правильно их посчитать, используя свойства (D2) и (D4) и следствие про блочно-треугольные матрицы. □

Второе доказательство. Зафиксируем B и определим отображение

$$\mathcal{D}_B \colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \det AB.$$

Далее проверим, что это кососимметрическая и полилинейная функция строк матрицы A. Тогда по предыдущей теореме

$$\det AB = \mathcal{D}_B(A) = \mathcal{D}_B(E) \cdot \det A = \det B \cdot \det A. \qquad \square$$

Идея третьего доказательства. Возьмём в $\mathbb{R}^n$ линейно независимые векторы $X_1, \ldots, X_n$ и обозначим через $\mathrm{Vol}\,(X_1, \ldots, X_n)$ ориентированный объём n-мерного параллелепипеда на них. Оказывается, что

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(AX_1, \ldots, AX_n)}{\mathrm{Vol}\,(X_1, \ldots, X_n)} = \det A.$$

Неосознанно, мы уже встречали это равенство при $n = 3$, вычисляя смешанное произведение в координатах. Определитель осмысливается как коэффициент искажения объёма, а при композиции преобразований такие коэффициенты умножаются. □

6.3. Критерий невырожденности матрицы

Теорема. *Равносильны следующие условия на $n \times n$ матрицу A:*

(1) $\det A \neq 0$;
(2) $\mathrm{rk}\, A = n$;
(3) *существует такая матрица A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.*

Определение. Если эти условия выполнены, то матрицу A называют **невырожденной**, а матрицу A^{-1} — **обратной** к A.

Доказательство. ($1 \Rightarrow 2$) Если $\operatorname{rk} A < n$, то хотя бы одна из строк A есть линейная комбинация других. Тогда элементарными преобразованиями типа (R2′) можно получить нулевую строку, т. е. $\det A = 0$ по свойствам (D5) и (D7).

($3 \Rightarrow 1$) Следует из теоремы об определителе произведения матриц.

($2 \Leftrightarrow 3$) Мы уже рассмотрели (на семинарах) способ нахождения A^{-1} как решения матричного уравнения $AX = E$; он работает тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A$ максимально возможный. □

Имеется явная формула для обратной матрицы. Обозначим через $A^\vee$ транспонированную матрицу алгебраических дополнений, т. е. матрицу с элементами $a^\vee_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}(A)$. Тогда

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} A^\vee.$$

В самом деле, чтобы проверить, что $AA^\vee = E \det A$, вычислим произведение $AA^\vee$. Его элемент в строке i и столбце k равен

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} a^\vee_{jk} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (-1)^{k+j} a_{ij} M_{kj}(A).$$

Тут мы видим в точности правую часть формулы раскрытия определителя по k-й строке, примененную к матрице, полученной из A заменой строки k на копию строки i. При $i = k$ это будет сама матрица A и выражение сворачивается в $\det A$. При $i \neq k$ выражение сворачивается в определитель матрицы с двумя одинаковыми строками i и k; он равен нулю по свойству (D6).

Теперь мы можем получить известное ещё Лейбницу, хотя редко эффективное на практике уже при $n > 3$, «правило Крамера» для решения систем линейных уравнений с квадратной и невырожденной основной матрицей.

Следствие. *Если* $\det A \neq 0$*, то система* $AX = B$ *линейных уравнений в матричной форме записи, она же в форме*

$$A^{(1)} x_1 + \ldots + A^{(n)} x_n = B$$

линейной комбинации столбцов, имеет единственное решение

$$X = [\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n]^\top, \qquad \hat{x}_j = D_j / \det A,$$

а D_j *есть определитель матрицы, полученной из* A *заменой столбца* $A^{(j)}$ *на столбец* B*.*

Доказательство. Поскольку основная матрица системы невырождена, единственность решения доказана ранее и его можно найти, вычислив $X = A^{-1}B$. Используя матрицу $A^{\vee}$, получаем

$$\hat{x}_j = (\det A)^{-1} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a^{\vee}_{ji} b_i = (\det A)^{-1} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1)^{i+j} b_i M_{ij}(A).$$

Раскрыв определитель D_j по столбцу j, лицезреем эту же сумму. □

6.4. Ранг матрицы по минорам

Определение. **Рангом по минорам** произвольной (не обязательно квадратной) матрицы A называют наибольший порядок $\operatorname{rk}_{\text{м}} A$ её минора с отличным от нуля значением.

Теорема. *Ранг всякой матрицы A по минорам совпадает с её рангом по строкам/столбцам.*

Доказательство. Из матрицы A выберем $\operatorname{rk} A$ линейно независимых строк и составим из них матрицу A'. Из неё выберем $\operatorname{rk} A$ линейно независимых столбцов и составим из них матрицу A''. Она невырождена и является минором исходной матрицы. Поэтому $\operatorname{rk} A \leqslant \operatorname{rk}_{\text{м}} A$.

Найдём в A минор наибольшего порядка с отличным от нуля значением. Его строки линейно независимы, а тогда строки самой матрицы, его содержащие, тоже независимы. Поэтому $\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk}_{\text{м}} A$. □

Определение. **Окаймляющим минором** данного минора M матрицы A называют каждый минор $\tilde{M}$, вычёркивание из которого одной крайней строки и одного крайнего столбца даёт M.

Теорема. *Ранг A по минорам равен такому числу r, что у A имеется минор M порядка r с отличным от нуля значением, а значения всех миноров A, окаймляющих M, нулевые.*

Доказательство. Удалено за ненадобностью. □

Метод вычисления ранга матрицы пошаговым переходом от уже найденного ненулевого минора к окаймляющему называют **методом окаймляющих миноров**. Он особенно удобен в тех случаях, когда помимо ранга нужно узнать, какие именно строки и/или столбцы линейно независимы.

Глава 7. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

7.1. Билинейные и квадратичные формы

В этой главе мы будем изучать выражения

$$f(X,Y) = X^\top A\,Y,$$
$$q(X) = f(X,X) = X^\top A\,X$$

со столбцами $X = [x_1,\dots,x_n]^\top$ и $Y = [y_1,\dots,y_n]^\top$ из $\mathbb{R}^n$ в качестве независимых переменных и с $n\times n$ матрицей коэффициентов $A = [a_{ij}]$. Раскрыв матричное произведение, получим

$$f(X,Y) = X^\top A\,Y = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_iy_j.$$

Непосредственно проверяется, что

$$f(\alpha_1X^{(1)} + \alpha_2X^{(2)}, Y) = \alpha_1 f(X^{(1)},Y) + \alpha_2 f(X^{(2)},Y),$$
$$f(X, \beta_1Y^{(1)} + \beta_2Y^{(2)}) = \beta_1 f(X,Y^{(1)}) + \beta_2 f(X,Y^{(2)}).$$

Такая функция называется билинейной, как напоминает наш первый

Пример. Стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^3$, вычисляемое по координатам в стандартном ОНБ по правилу

$$X^\top Y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Здесь матрицы A явно не видно: она единичная, а $X^\top E\,Y = X^\top Y$.

Прежде в математике широко употреблялось слово «форма»; в этой тематике оно выжило и мы будем называть $f(X,Y)$ **билинейной формой**, а $q(X)$ **квадратичной формой**.

Пример. Интервал между событиями в пространстве Минковского вычисляется через квадратичную форму

$$q(X) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Утверждение. *Для всякой билинейной функции $f(X,Y)$ столбцов найдётся такая матрица A, что $f(X,Y) = X^\top A\,Y$.*

Доказательство. Разложим столбцы по стандартому базису:

$$X = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_iE^{(i)}, \quad Y = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} y_jE^{(j)}.$$

Ввиду билинейности, как и в случае обычного скалярного произведения, $f(X, Y)$ выразится через координаты и значения $f(E^{(i)}, E^{(j)})$:

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= f\Bigg(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i E^{(i)}, \sum_{1\leqslant j\leqslant n} y_j E^{(j)}\Bigg) \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i f\Bigg(E^{(i)}, \sum_{1\leqslant j\leqslant n} y_j E^{(j)}\Bigg) \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j f(E^{(i)}, E^{(j)}). \end{aligned}$$

Искомую матрицу A нужно составить из $a_{ij} = f(E^{(i)}, E^{(j)})$. □

Определение. Билинейная форма f называется **симметричной**, если

$$f(X, Y) = f(Y, X)$$

для всех столбцов X, Y.

Утверждение. *Билинейная форма симметрична тогда и только тогда, когда симметрична её матрица.*

Доказательство. Подставляя столбцы стандартного базиса в аргументы симметричной формы, получим симметричность её матрицы.

Наоборот, если $A^\top = A$, то

$$f(X, Y)^\top = (X^\top A\, Y)^\top = Y^\top A^\top X = Y^\top A\, X = f(Y, X).$$

Но $f(X, Y)$ есть не чувствующий транспонирования скаляр. □

Утверждение. *Всякая квадратичная форма задаётся симметричной матрицей.*

Доказательство. Возьмём квадратичную форму $q(X) = X^\top A\, X$ с произвольной матрицей и проверим, что $q(X) = X^\top B\, X$ с симметричной матрицей $B = \frac{1}{2}(A + A^\top)$. □

Таким образом, изучение квадратичных форм и изучение симметричных билинейных форм это практически одно и то же.

7.2. Канонический вид симметричной формы

Стандартный базис пространства столбцов может быть неудобным для работы с конкретной билинейной или квадратичной формой. Пример тесно связанного явления мы видели, занимаясь приведением линий второго порядка к каноническому виду.

При смене базиса матрица перехода S связывает столбцы старых и новых координат соотношениями $X = SX'$ и $Y = S\,Y'$. Подставляя эти выражения в билинейную форму от старых переменных, мы получим билинейную форму от новых переменных. Сравнивая записи в двух базисах:

$$X^\top A\,Y = (SX')^\top A\,(S\,Y) = (X')^\top S^\top A\,S\,Y' = (X')^\top A'\,Y',$$

приходим к закону изменения матрицы билинейной формы:

$$A' = S^\top A\,S.$$

Таков же закон изменения матрицы квадратичной формы.

Определение. Такую пару матриц A и A' называют **конгруэнтными**.

Следствие. *Ранги конгруэнтных матриц равны.*

Доказательство. Матрица перехода всегда обратима и умножение на неё не меняет ранг. □

Определение. Пару билинейных форм, получаемых одна из другой заменой переменных, называют **эквивалентными**.

В последующем полезно изменить точку зрения и считать эквивалентные билинейные формы разными *видами* одной и той же функции пары векторов, получающимися при выборе разных базисов в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Если матрица A симметричной билинейной формы f в каком-то базисе $\mathcal{B}$ диагональна, то $\mathcal{B}$ называют **каноническим базисом** для f и говорят, что в этом базисе f имеет **канонический вид**.

На практике квадратичные формы приводят к каноническому виду поочерёдным избавлением от недиагональных слагаемых ($i \neq j$):

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j \rightsquigarrow \sum_{1\leqslant i\leqslant r} c_ix_i^2.$$

`Шаг 1:` если канонический вид ещё не получен, найти такую пару индексов $i < j$, что $a_{ij} \neq 0$.

`Шаг 2:` если $a_{ii} \neq 0$, прыгнуть на `шаг 4`.

`Шаг 3:` сделать замены $x_i = x_i' + x_j'$ и $x_j = x_i' - x_j'$, затем стереть штрихи (чтобы штрихи не накапливались).

`Шаг 4:` теперь квадратичная форма имеет вид

$$f = ax_i^2 + 2azx_i + g = a(x_i + z)^2 - az^2 + g,$$

причём $a \neq 0$, а z и g не зависят от x_i; подставить $x_i = x_i' - z$, затем стереть штрихи и повторить `шаг 1`.

В основе метода — выделение полных квадратов на шаге 4, а возникающее препятствие обходится на шаге 3. Чтобы в итоге получить не только канонический вид формы, но и соответствующий ей канонический базис, к этому рецепту нужно добавить ещё несложное средство отслеживания всех произведённых замен.

Теорема (Lagrange)**.** *Для всякой квадратичной формы найдётся канонический базис.*

Доказательство. Метод выделения квадратов. □

7.3. Вещественные квадратичные формы

Следствие. *Для всякой квадратичной формы q ранга r на пространстве $\mathbb{F}^n$, где $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, найдётся базис, в котором*

$$q(\mathbf{x}) = c_1 x_1^2 + \ldots + c_r x_r^2, \qquad \textit{где } c_i \in \mathbb{F}^\times = \mathbb{F} \smallsetminus \{0\}.$$

В случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ каждая квадратичная форма приводится к сумме квадратов, поскольку должной заменой все константы c_i упрятываются внутрь x_i. Случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ сложнее: нельзя избавиться от минусов.

Следствие. *Для всякой вещественной квадратичной формы q найдётся базис, в котором она принимает* **нормальный вид**

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2.$$

Теорема (закон инерции)**.** *Числа p и r, определяющие нормальный вид вещественной квадратичной формы q, зависят только от q, но не от выбора базиса, приводящего её к нормальному виду.*

Определение. Возникающие инварианты имеют особые названия:

r	**Индекс инерции** (ранг)
p	**Положительный** индекс инерции
$r-p$	**Отрицательный** индекс инерции
$2p-r$	**Сигнатура**

Часто сигнатурой также называют пару $(p, r-p)$, что информативнее.

Определение. В следующей таблице приведены названия важных специальных типов вещественных квадратичных форм на $\mathbb{R}^n$ с крайними значениями индексов. В нормальном виде таких форм априорное разнообразие $\{-1, 0, 1\}$ коэффициентов ещё более ограничено.

$r = n$	**Невырожденной**	
$p = n$	**Положительно определённой**	$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies q(\mathbf{x}) > 0$
$r - p = n$	**Отрицательно определённой**	$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies q(\mathbf{x}) < 0$
$r - p = 0$	**Неотрицательно полуопределённой**	$q(\mathbf{x}) \geqslant 0$
$p = 0$	**Неположительно полуопределённой**	$q(\mathbf{x}) \leqslant 0$

Доказательство закона инерции. Инвариантность ранга уже получена выше. Инвариантность положительного индекса инерции докажем от противного: допустим, что в базисе $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ форма имеет вид

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2,$$

а в базисе $(\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n)$ она же имеет вид

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_t^2 - x_{t+1}^2 - \ldots - x_r^2,$$

причём $s > t$. Тогда сужения q на линейные оболочки $\mathcal{L} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s \rangle$ и $\mathcal{L}' = \left\langle \mathbf{v}'_{t+1}, \ldots, \mathbf{v}'_n \right\rangle$ соответственно будут положительно определённая и неположительно полуопределённая квадратичные формы.

Если есть ненулевой вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$, то получается противоречие: $q(\mathbf{x})$ одновременно положительно и неположительно. Если же ненулевого общего вектора нет, то по определению никакие нетривиальные линейные комбинации $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_s \mathbf{v}_s \in \mathcal{L}$ и $\alpha'_{t+1} \mathbf{v}'_{t+1} + \ldots + \alpha'_n \mathbf{v}'_n \in \mathcal{L}'$ не могут быть равны. Тогда множество $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}'_{t+1}, \ldots, \mathbf{v}'_n\}$ из $s + n - t > n$ векторов линейно независимо, что невозможно. □

Утверждение. *Положительная определённость квадратичной формы q сохраняется при сужении на любое подпространство.*

Доказательство. Сохраняется свойство $q(\mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. □

Пример. Невырожденность формы может потеряться при сужении на подпространство. Например, сужение формы $x_1^2 - x_2^2$ (в стандартном базисе плоскости $\mathbb{R}^2$) на прямую $\left\langle [1, 1]^\top \right\rangle$ тождественно нулевое.

Утверждение. *Для всякой симметричной билинейной формы f равносильны следующие свойства:*

(1) *ассоциированная квадратичная форма вырождена;*
(2) *существует такой вектор $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, что $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ для всех векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$ Годится вектор канонического базиса, соответствующий нулевому диагональному элементу матрицы формы.

(2 $\Rightarrow$ 1) Дополнив $\mathbf{y}$ произвольно до базиса всего пространства, мы представим форму f матрицей с нулевым столбцом. $\square$

Лемма. *Определители любых двух конгруэнтных матриц имеют одинаковые знаки.*

Доказательство. Если $A' = S^\top A\, S$, то $\det A' = (\det S)^2 \det A$. $\square$

Следствие. *Матрица положительно определённой формы в любом базисе имеет положительный определитель.*

Определение. **Главным минором** матрицы A называется минор $\Delta_k(A)$, составленный из её первых k строк и первых k столбцов.

Следствие. *Главный минор $\Delta_k(F)$ матрицы квадратичной формы в базисе $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ идентичен матрице сужения этой формы на подпространство $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.*

С помощью главных миноров $\Delta_k(F)$ матрицы квадратичной формы часто удаётся быстро узнать её сигнатуру. Удобно не различать в обозначениях минор (матрицу) и его численное значение, а также полагать $\Delta_0 = 1$ и $\Delta_n = \det F$, причисляя их тоже к главным минорам.

Теорема. *Если все главные миноры матрицы вещественной квадратичной формы q имеют ненулевые значения $\Delta_0, \ldots, \Delta_n$, то количества сохранений и перемен знака в этой последовательности равны положительному и отрицательному индексам инерции формы q.*

Доказательство. Докажем даже, что такую форму можно привести к нормальному виду $\sum c_k z_k^2$, в котором знаки коэффициентов согласованы с переменами знаков главных миноров в том смысле, что

$$\operatorname{sgn} c_k = \operatorname{sgn}(\Delta_k / \Delta_{k-1})$$

для $1 \leqslant k \leqslant n$. Отсюда утверждение об индексах следует простым подсчётом количеств плюсов и минусов.

Воспользуемся индукцией по числу переменных. Приведём исходную форму к нормальному виду в три этапа. Сначала игнорируем слагаемые с последней переменной; все прочие составляют квадратичную форму от $n-1$ переменной с теми же главными минорами, кроме отсутствующего Δ_n. Предполагаем по индукции, что она приведена к согласованному нормальному виду в переменных y_k:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \pm 1 & 0 & 0 & b_{14} \\ 0 & \pm 1 & 0 & b_{24} \\ 0 & 0 & \pm 1 & b_{34} \\ \hline b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right].$$

Теперь задача весьма аналогична той, что мы решали, двигая линии второго порядка. Переходя к переменным

$$z_k = \begin{cases} y_k \pm b_{kn} y_n & \text{при } k < n, \\ y_k & \text{при } k = n, \end{cases}$$

получим канонический вид исходной формы в переменных z_k:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \pm1 & 0 & 0 & b_{14} \\ 0 & \pm1 & 0 & b_{24} \\ 0 & 0 & \pm1 & b_{34} \\ \hline b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c_4 \end{array}\right].$$

Наконец, заменой последней переменной сведём c_n к ±1. По лемме о сохранении знака, определитель D полученной диагональной матрицы имеет тот же знак, что и Δ_n. Итак,

$$\operatorname{sgn} \Delta_n = \operatorname{sgn} D = \operatorname{sgn} \Delta_{n-1} \cdot \operatorname{sgn} c_n,$$

что и требовалось. □

Следствие (критерий Сильвестра)**.** *Для всякой вещественной квадратичной формы равносильны утверждения:*

(1) *она положительно определённая;*
(2) *в любом базисе все её главные миноры положительны.*

7.4. Поверхности второго порядка

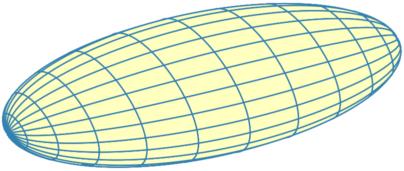
Познакомимся с поверхностями второго порядка, или **квадриками** для краткости, анализируя по очереди все классы канонических уравнений, аналогичные уравнениям линий, в зависимости от знаков их коэффициентов. Во всех случаях очень полезно рассматривать сечения квадрики плоскостями, параллельными координатным.

Класс 3+. Уравнение $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + p = 0$ попадает в один из четырёх типов. Это эллипсоиды и гиперболоиды. Уравнение

$$\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} = 1$$

задаёт **эллипсоид**, причём можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Все его непустые и неодноточечные плоские сечения есть эллипсы. Различают четыре формы эллипсоидов:

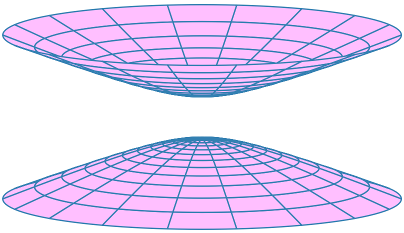
- сфера при $a = b = c$;
- вытянутый эллипсоид вращения при $a > b = c$;
- сжатый эллипсоид вращения при $a = b > c$;
- трёхосный эллипсоид при $a > b > c$.



Вытянутый и сжатый эллипсоиды образованы вращением в пространстве эллипса
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$$
вокруг его большой или малой оси соответственно.

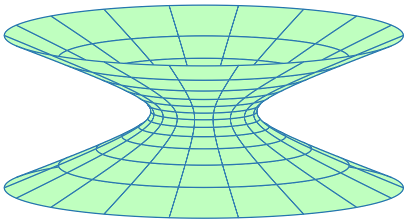
Уравнение
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$
задаёт «мнимый эллипсоид», но вещественных точек нет.

Уравнение
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$
задаёт **двуполостный гиперболоид**. Его сечения плоскостями $z = z_0$ пусты при $|z_0| < c$, так что поверхность, как и плоская гипербола, состоит из двух частей, называемых **полостями**. При $|z_0| > c$ в сечениях будут



эллипсы. Все сечения плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ являются гиперболами. При $a = b$ двуполостный гиперболоид вращения образован вращением в пространстве гиперболы
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad y = 0$$
вокруг её действительной оси Oz. Дополнительное сжатие двуполостного гиперболоида вращения вдоль одной оси даёт двуполостный гиперболоид с $a \neq b$. Аналогично и в других случаях ниже.

Уравнение
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
задаёт **однополостный гиперболоид**. Все сечения плоскостями $z = z_0$ являются эллипсами, а плоскостями $x = x_0 \neq \pm a$ и $y = y_0 \neq \pm b$ — гиперболами, но парой пересекающихся прямых в оставшихся особых



случаях. При $a = b$ однополостный гиперболоид вращения образован вращением в пространстве гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$$

вокруг её мнимой оси Oz. Интересно, что он также образован вращением любой из пары прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{y}{b} = 1$$

вокруг оси Oz.

Остальные варианты расстановки знаков в уравнении этого класса сводятся к уже рассмотренным умножением уравнения на -1. Таким же образом почти вдвое сокращается перечень типов в других классах.

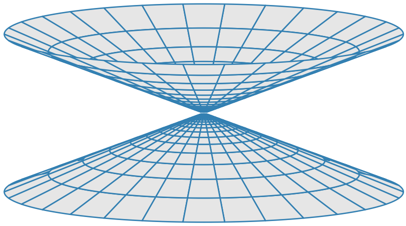
Класс 3. Уравнение $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$ попадает в один из двух типов. Это конусы. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

задаёт «мнимый конус» с единственной вещественной точкой — вершиной в начале координат, а уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

задаёт **конус**. Все сечения конуса плоскостями $z = z_0$ при $z_0 \neq 0$ являются эллипсами, а плоскостями $x = x_0 \neq 0$ и $y = y_0 \neq 0$ — гиперболами. Сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ дают по паре пересекающихся



в начале координат прямых. При $a = b$ конус образован вращением прямой

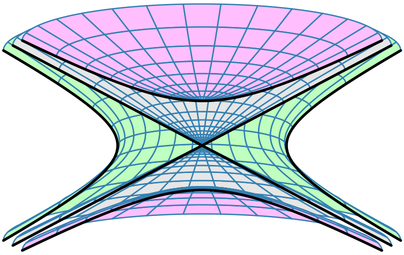
$$\tfrac{x}{a} - \tfrac{z}{c} = 0, \quad y = 0$$

вокруг оси Oz. Конус является объединением прямых (его **прямолинейных образующих**), проходящих через его вершину. Плоскость, параллельная прямолинейной образующей конуса и не содержащая её, пересекает конус по параболе.

Полезно рассмотреть конус совместно с двумя гиперболоидами

$$\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} - \tfrac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

Эту ситуацию описывают словами: данный конус является **асимптотическим конусом** обоих данных гиперболоидов.

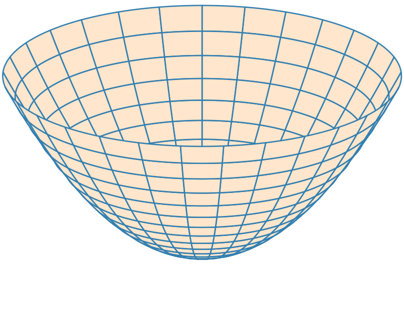


В качестве упражнения найдите плоскость, пересекающую гиперболоид по параболе.

Класс 3−. Уравнение $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2pz = 0$ попадает в один из двух типов. Это параболоиды. Уравнение

$$\tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = z$$

задаёт **эллиптический параболоид**. Сечения плоскостями $z = z_0 > 0$ являются эллипсами, а плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ — параболами.



При $a = b$ параболоид вращения образован вращением параболы

$$\frac{x^2}{a^2} = z, \quad y = 0$$

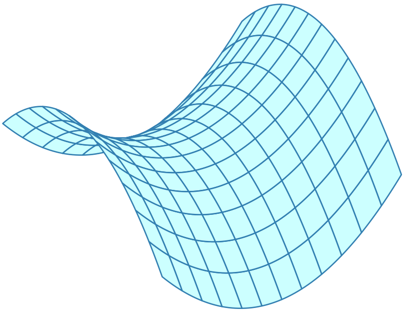
вокруг её оси Oz. Эллиптический параболоид также образован поступательным движением этой параболы так, что её вершина движется вдоль параболы

$$\frac{y^2}{b^2} = z, \quad x = 0.$$

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

задаёт **гиперболический параболоид**. Форма этой поверхности напоминает седло. Сечения плоскостями $z = z_0 \neq 0$ являются гиперболами,



плоскостью $z = 0$ — парой прямых, пересекающихся в начале координат, а плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ — параболами. Гиперболический параболоид образован поступательным движением параболы

$$\frac{x^2}{a^2} = z, \quad y = 0$$

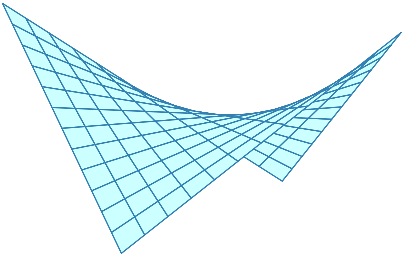
так, что её вершина движется вдоль параболы

$$-\frac{y^2}{b^2} = z, \quad x = 0.$$

Интересно отметить, что гиперболический параболоид содержит два семейства прямых. Для простоты возьмём $a = b$ и тогда уравнения этих семейств будут

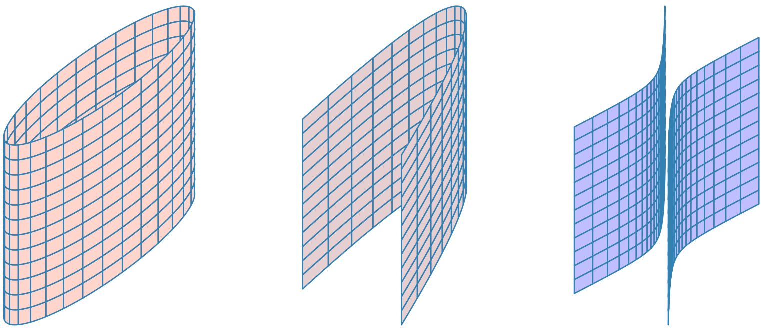
$$\begin{cases} \alpha(x - y) = \beta z, \\ \beta(x + y) = \alpha; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha(x - y) = \beta, \\ \beta(x + y) = \alpha z. \end{cases}$$

Здесь α и β не равны нулю одновременно, а их отношение является параметром обоих семейств. Аналогично находятся два семейства прямых на однополостном гиперболоиде.



Остальные случаи расстановки знаков в уравнении этого класса сводятся к рассмотренным умножением уравнения на -1 и/или изменением направления оси Oz.

Уравнения оставшихся классов не содержат третьей переменной. Задаваемая таким «неполным» уравнением квадрика получается из линии второго порядка в плоскости $z = 0$ с тем же уравнением её поступательным движением вдоль оси Oz и называется **цилиндром**. Можно сказать и иначе: цилиндр заметается прямой, параллельной оси Oz и двигающейся через точки плоской линии.



Если линия есть эллипс, парабола, или гипербола, то заметённый цилиндр называют соответственно эллиптическим, параболическим, или гиперболическим. Есть ещё «мнимый эллиптический цилиндр» без вещественных точек.

В менее интересных случаях прочих типов линий второго порядка так получаются пары пересекающихся или параллельных плоскостей или «мнимых» плоскостей (причём две «мнимые» плоскости пересекаются по вещественной прямой), а также двойная плоскость.

Оглавление