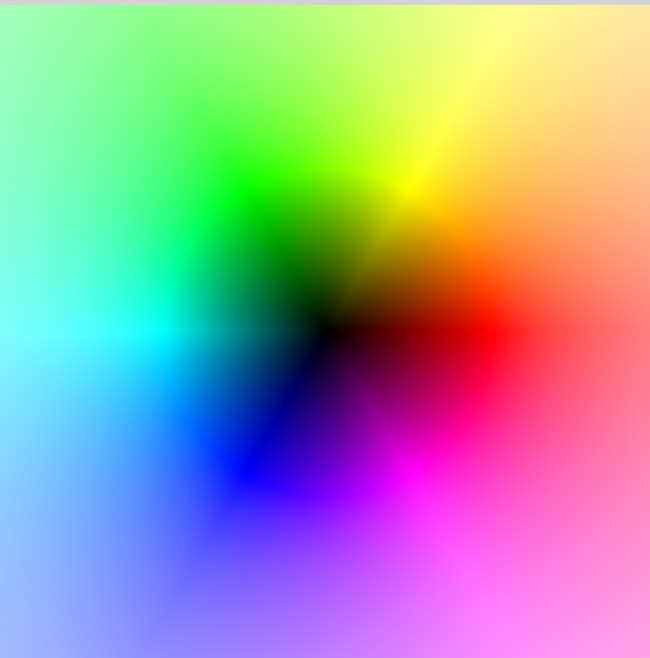


Комплексные функции: метод цветных областей

Ульянов А.П., ФФ НГУ

май 2017



$z \mapsto f(z) = z \mapsto \text{цвет}$

$\arg f(z) \mapsto \text{оттенок}$

$|f(z)| \mapsto \text{яркость и насыщенность}$

$f(z) \rightarrow 0$ чернее

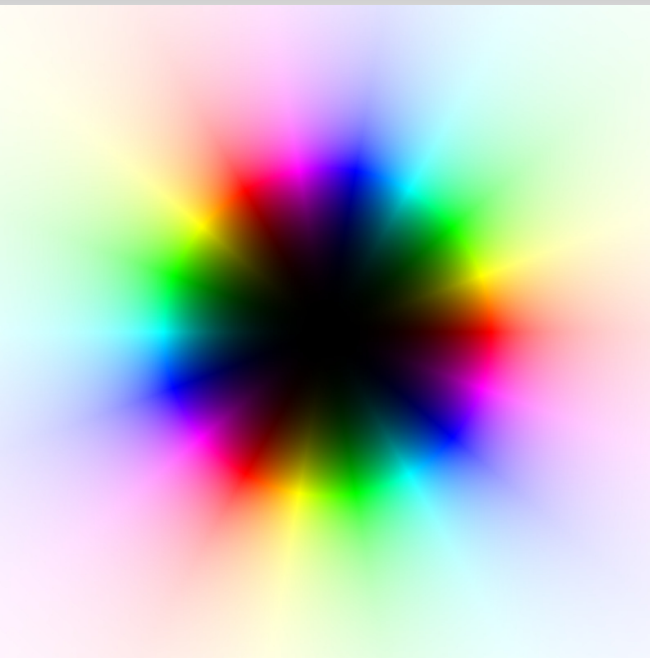
$f(z) \rightarrow \infty$ белее

цвета на сфере Римана



$$z \mapsto f(z) = z^2$$

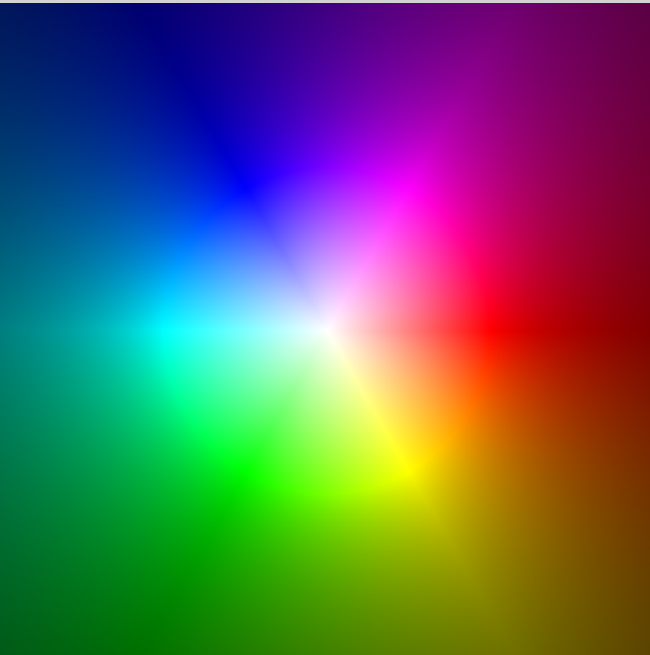
нуль второго порядка
два оборота оттенка



$$z \mapsto f(z) = z^3$$

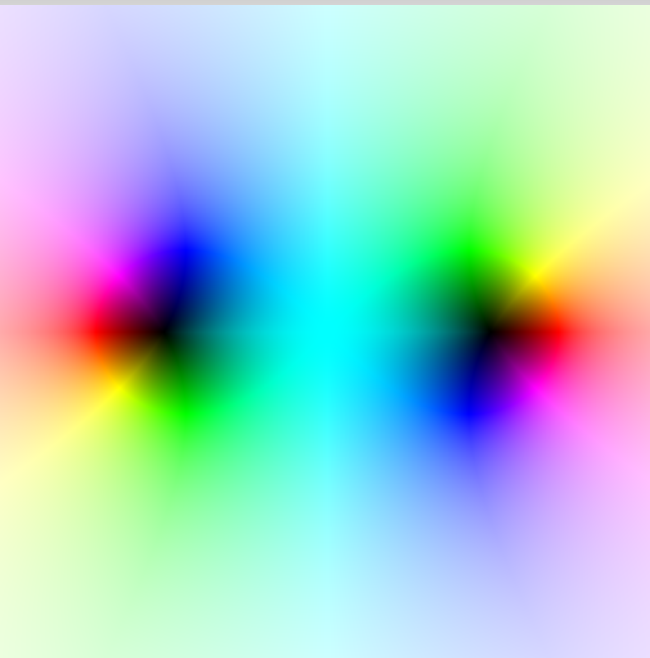
нуль третьего порядка
три оборота оттенка

центр = 0, окно = ± 2



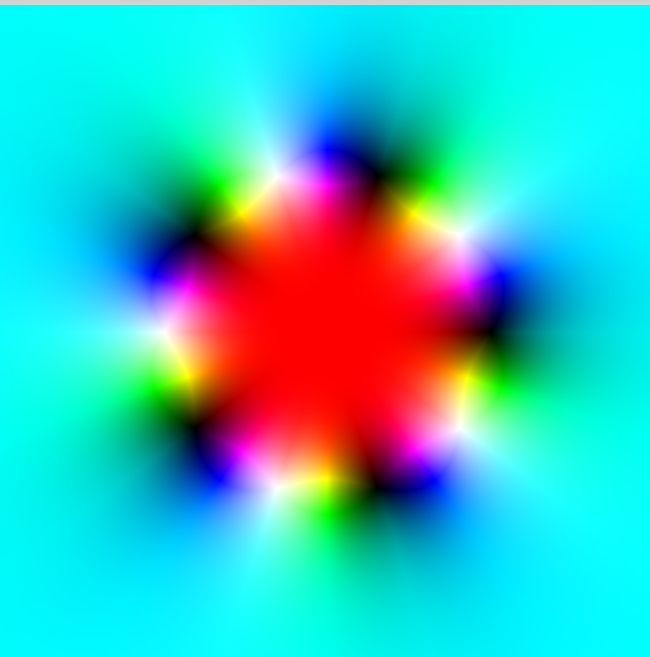
$$z \mapsto f(z) = z^{-1}$$

простой полюс
минус один оборот



$$f(z) = z^2 - 1$$

два простых нуля
два оборота оттенка
если обходить далеко



$$f(z) = \frac{1 - z^5}{1 + z^5}$$

пять нулей

пять полюсов

нуль оборотов

Принцип аргумента:

$N - P$ внутри контура

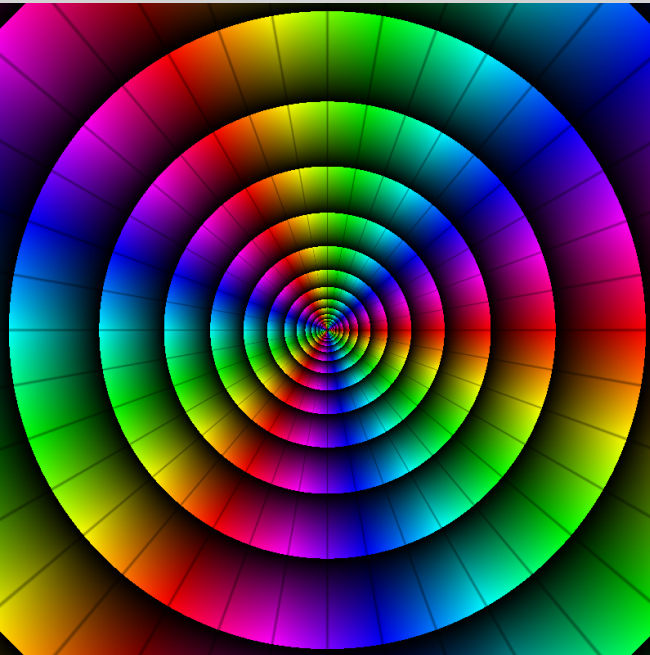
= обороты оттенка

Следствие:

основная теорема

алгебры полиномов

стой! дальше зебры



$$z \mapsto f(z) = z^{-3}$$

тройной полюс
минус три оборота

скачки яркости вдоль
линий уровня модуля

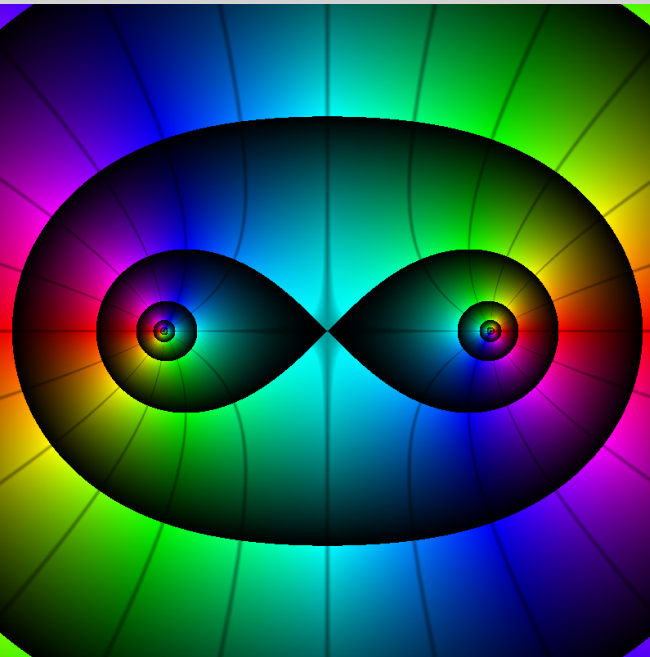
выбрал уровни

$$\ln |f(z)| \in \mathbb{Z}$$

на лекции сомневался
зря! написано верно,
дальше это видно по
картинке e^z

экспоненциальная
зебра

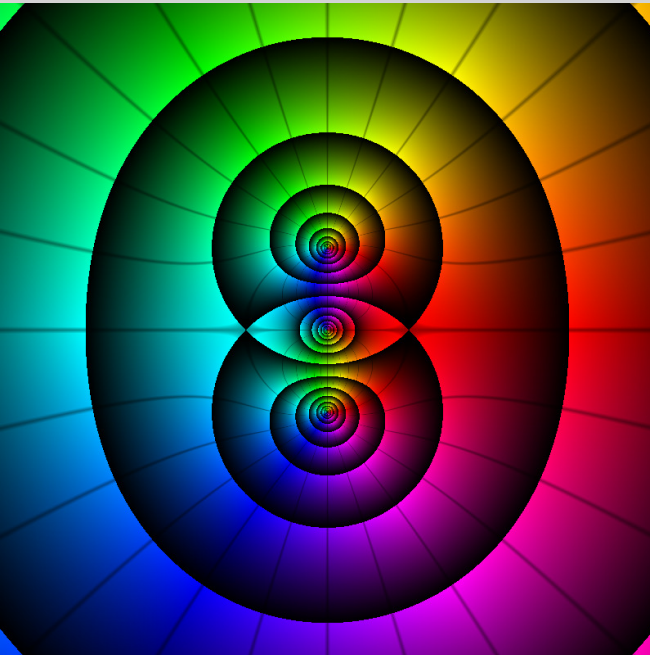
центр = 0, окно = ± 2 , зебра = 1, мрак = 1



$$f(z) = z^2 - 1$$

зебра та же

лемниската Бернулли
две ямы внутри неё

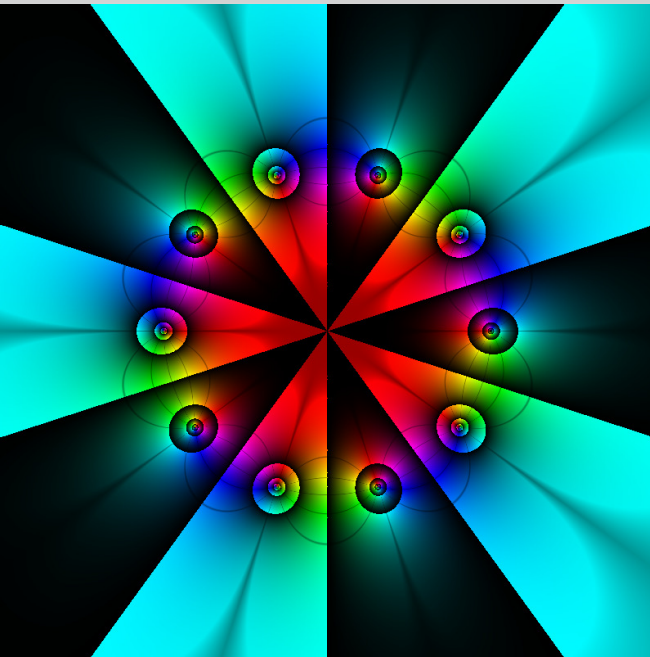


функция Жуковского

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

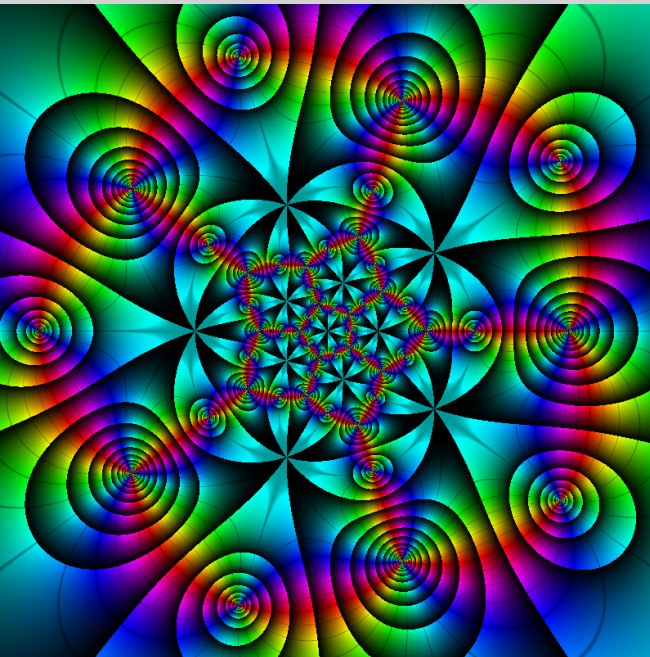
зебра удвоена

нули как ямы
полюс как башня



$$f(z) = \frac{1 - z^5}{1 + z^5}$$

нули как ямы
полюса как башни



Икосаэдр Клейна

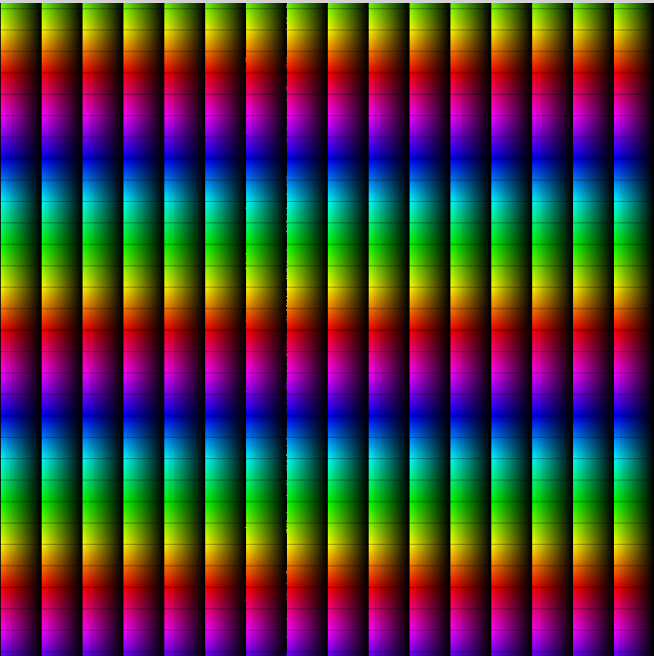
20 тройных нулей

30 двойных полюсов

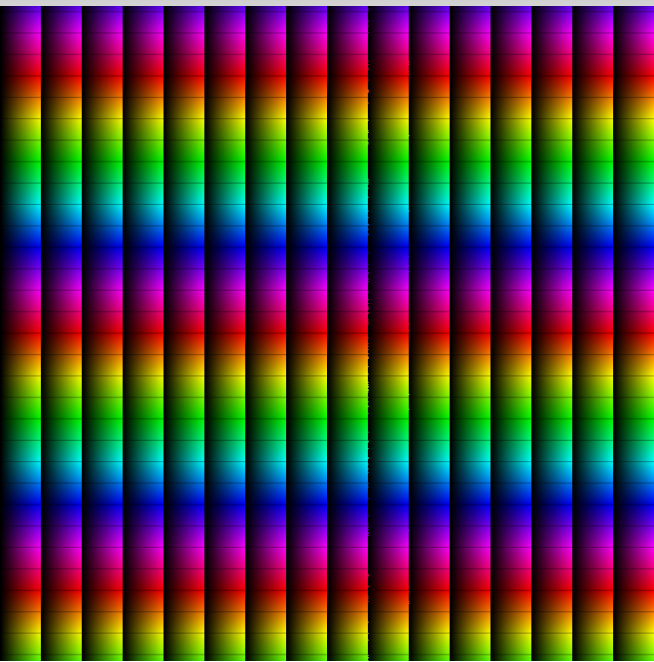
симметрия икосаэдра

стой! дальше транс

центр = 0, окно = ± 4 , зebra = 1, мрак = 1



$f(z) = \exp z$



$$f(z) = \exp(-z)$$

прибавим это к $\exp z$,
что увидим?

стой! дальше глаза

Аргумент

Модуль

Экспонента

Корни

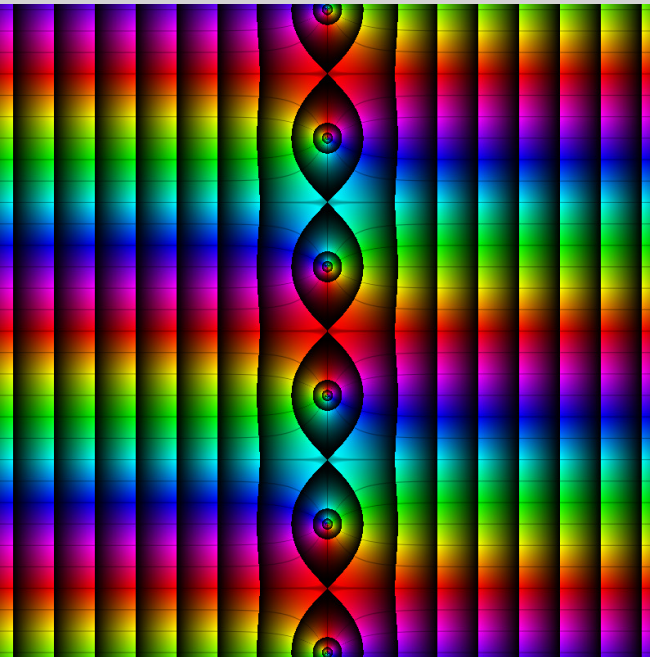
Логарифм

Гамма

Ламберт

Существо

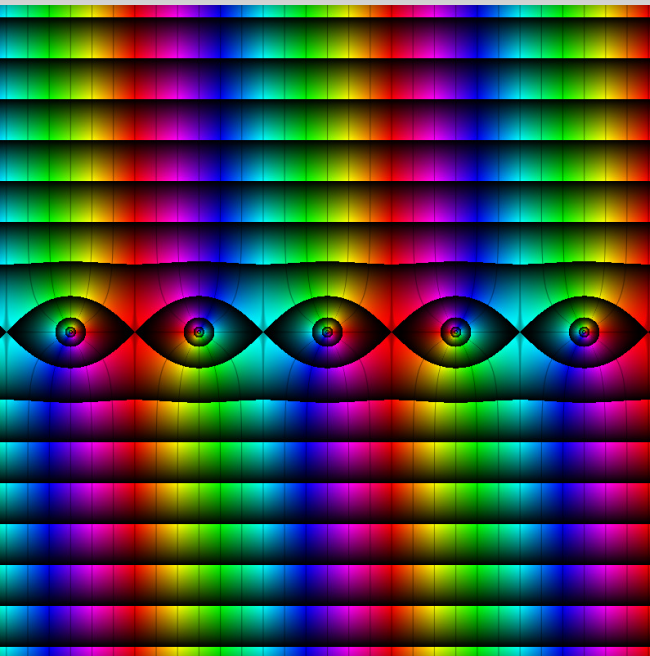
Струи



гиперболический
косинус

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

центр = 0, окно = ± 8 , зebra = 1, мрак = 1



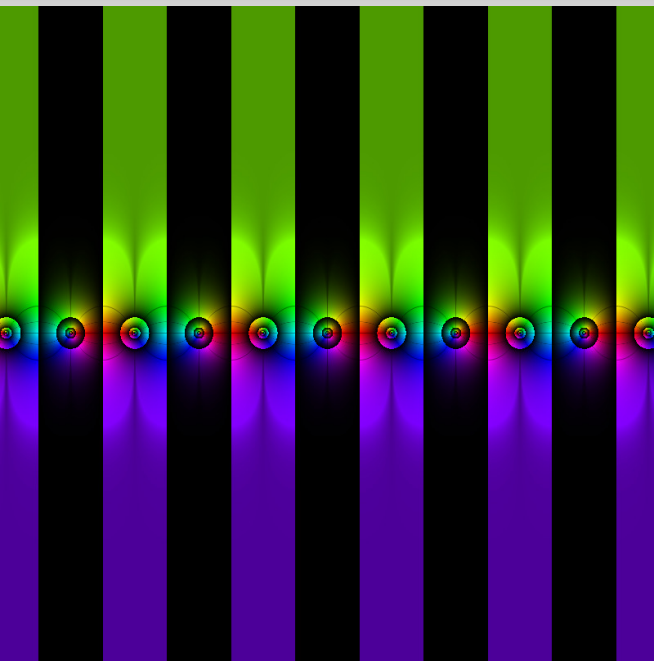
$$f(z) = \sin z$$

предыдущую картинку
повернули:

$$\cos z = \operatorname{ch} iz$$

затем подвинули:

$$\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$$



$$f(z) = \operatorname{tg} z$$

Аргумент

Модуль

Экспонента

Корни

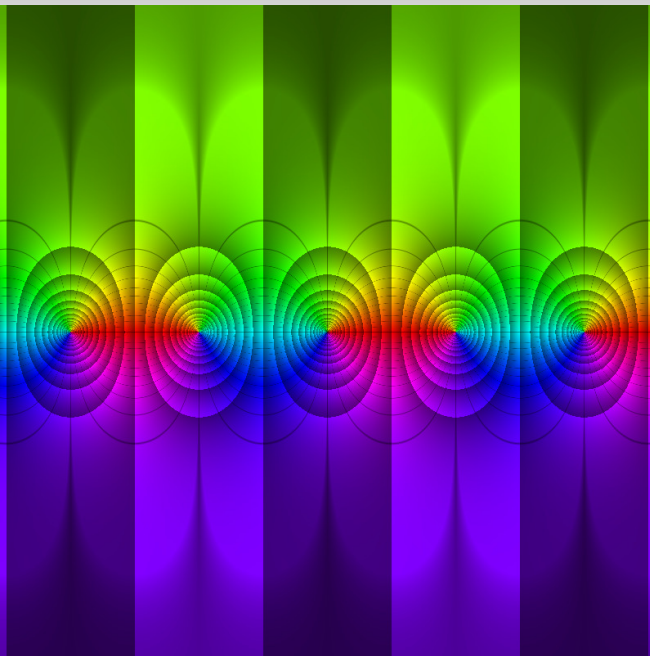
Логарифм

Гамма

Ламберт

Существо

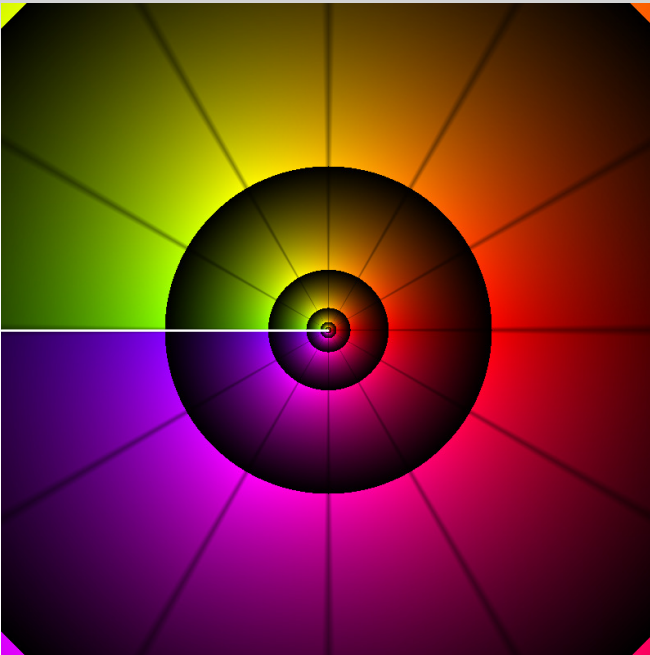
Струи



$$f(z) = \operatorname{tg} z$$

стой! дальше ветви

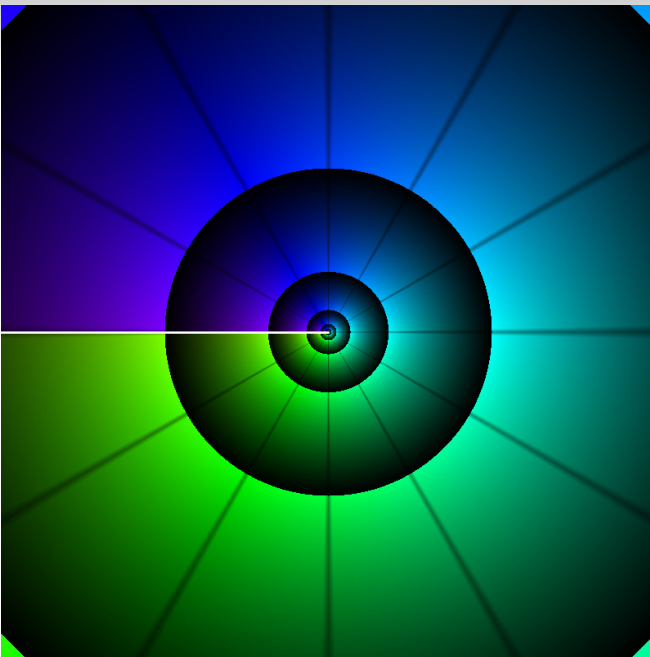
центр = 0, окно = ± 4 , зебра = 4, мрак = 0.5



$$f(z) = \sqrt{z}$$

берега разреза
не стыкуются

это лишь главный лист

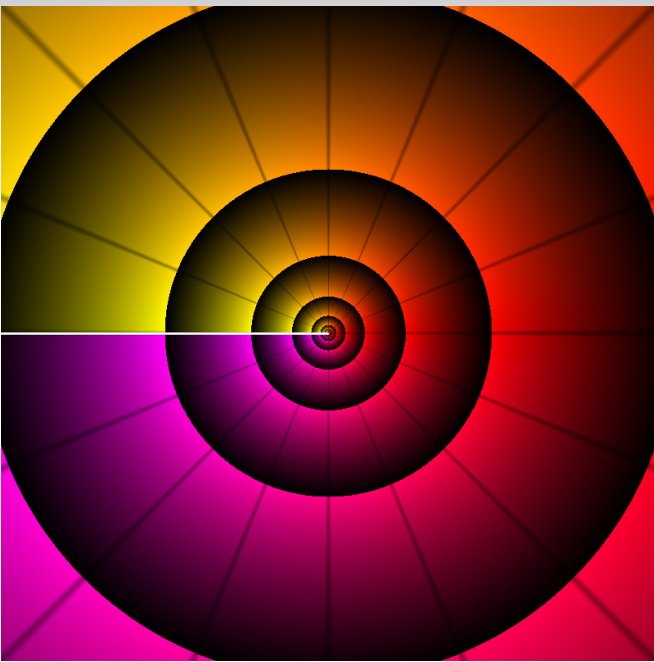


$$f(z) = -\sqrt{z}$$

это второй лист
два листа стыкуются

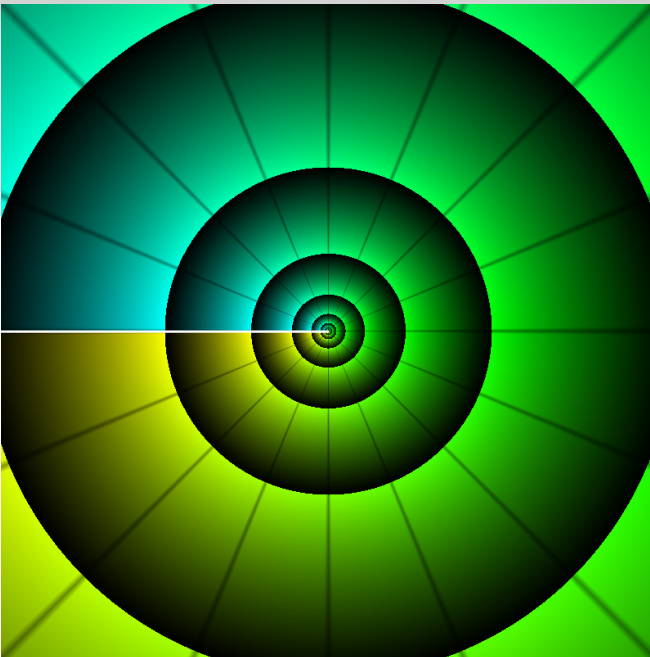
двулистная функция

ветвление порядка 2



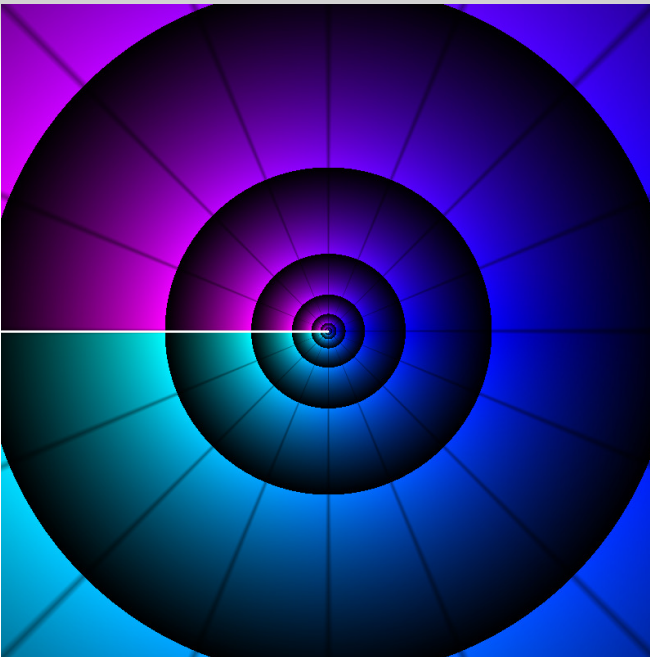
$$f(z) = z^{1/3}$$

главный лист
трёхлистной функции



$$f(z) = z^{1/3} \cdot e^{2\pi i/3}$$

второй лист
трёхлистной функции



$$f(z) = z^{1/3} \cdot e^{-2\pi i/3}$$

третий лист
трёхлистной функции



$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$$

две точки ветвления
двулистная функция

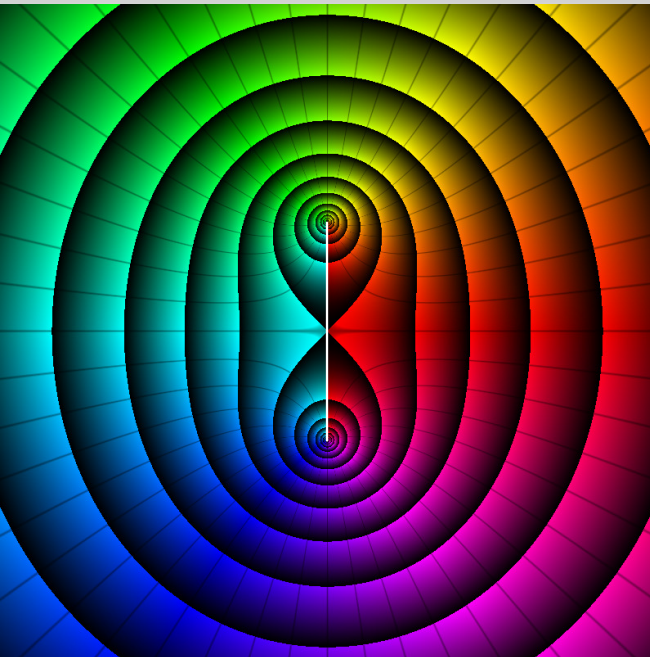
разрезы через ∞

тогда листы есть
чётные функции



$$f(z) = \sqrt{z+i}\sqrt{z-i}$$

ой! так нельзя!



$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1} \cdot (\text{fix})$$

две точки ветвления
двулистная функция

разрезы через 0

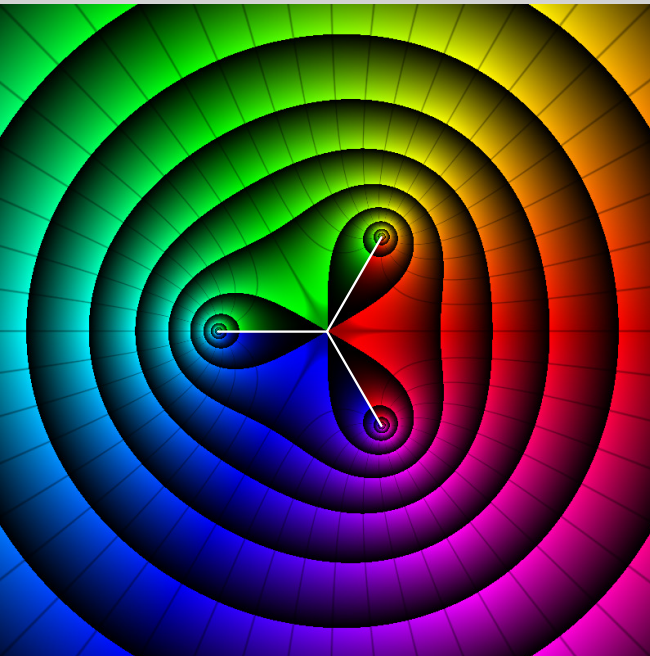
тогда листы есть
нечётные функции



$$f(z) = (z^3 + 1)^{1/3}$$

три точки ветвления
трёхлистная функция

разрезы через ∞

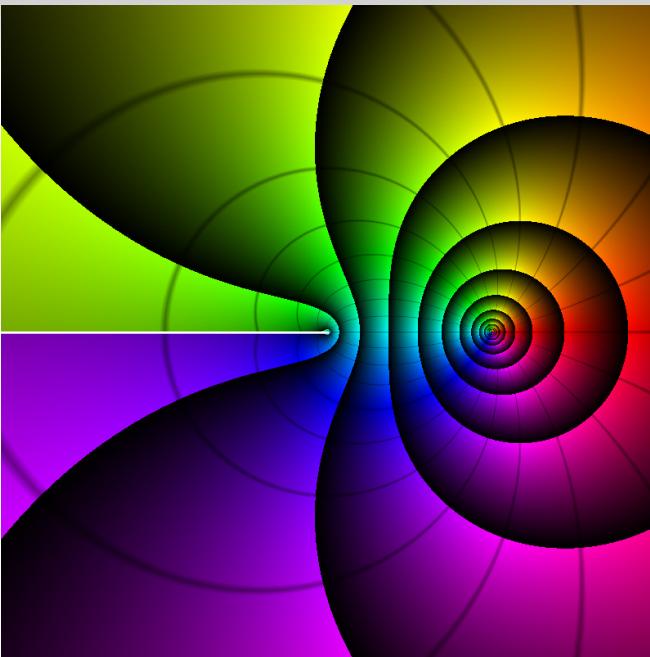


$$f(z) = (z^3 + 1)^{1/3}$$

три точки ветвления
трёхлистная функция

разрезы через 0

стой! дальше пауки



$$f(z) = \ln z$$

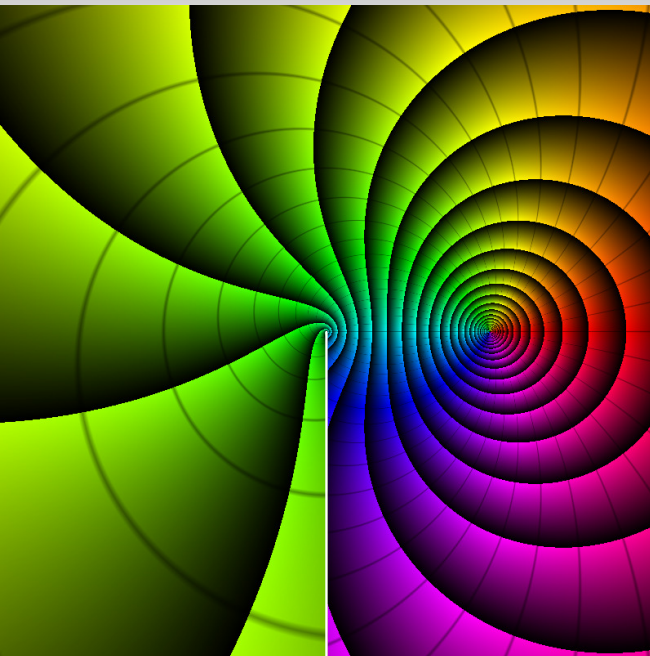
главный лист

а ветвление тут
бесконечное...

ибо экспонента
периодична:

$$e^w = e^{w+2\pi i \cdot n}$$

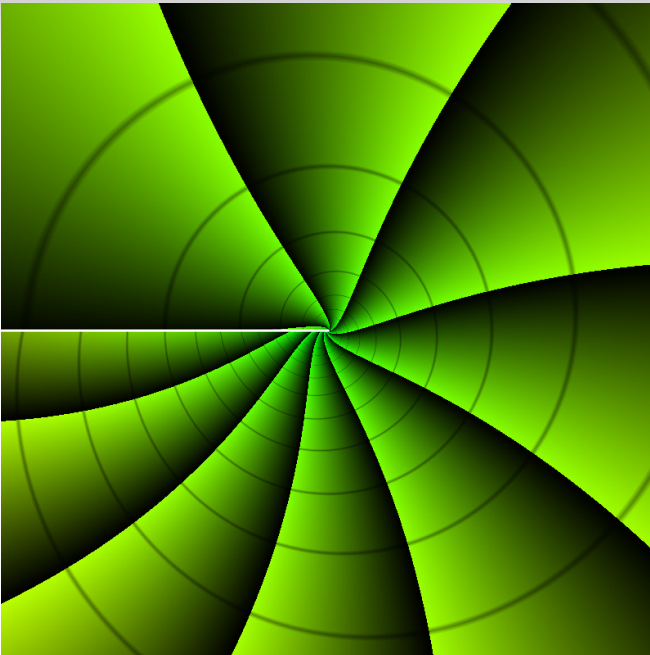
логарифмическое
ветвление



$$f(z) = \ln \frac{z}{i} + \arg i$$

идём на соседний лист
увеличивая зebre

аналитическое
продолжение

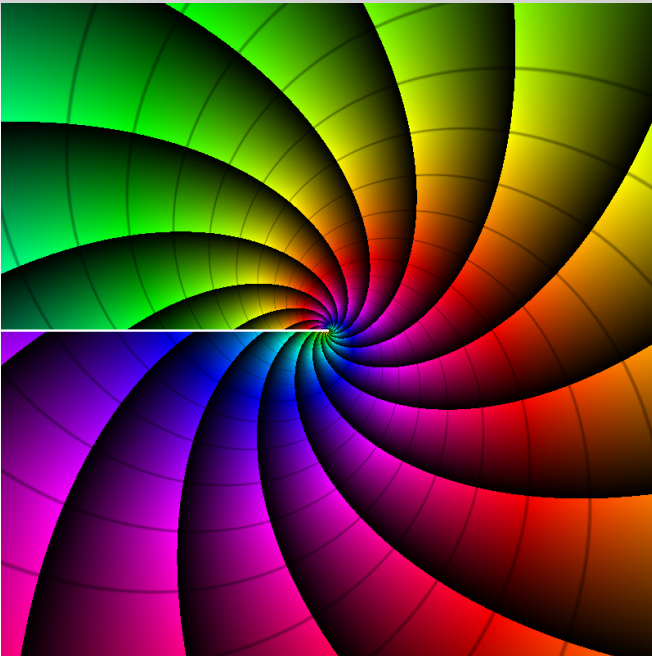


$$f(z) = \ln z + 2\pi i$$

соседний лист

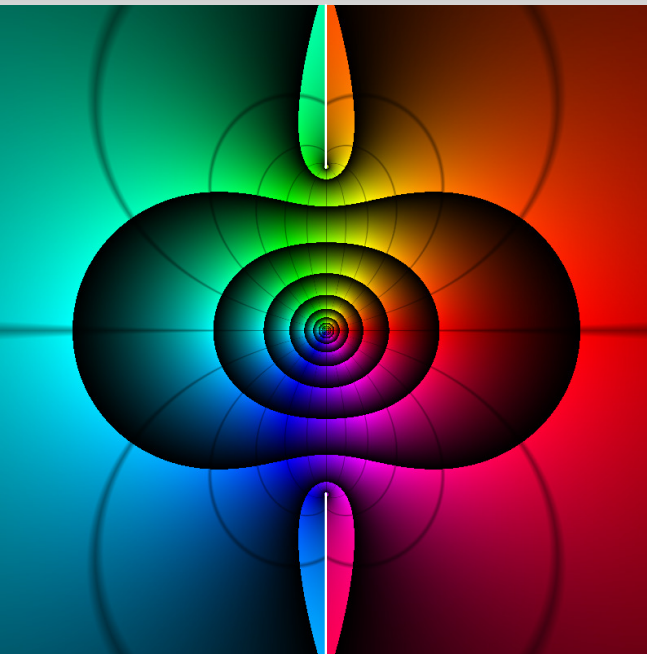
все листы вместе
составляют геликоид

Риманова поверхность



$$f(z) = z^{i+2/3}$$

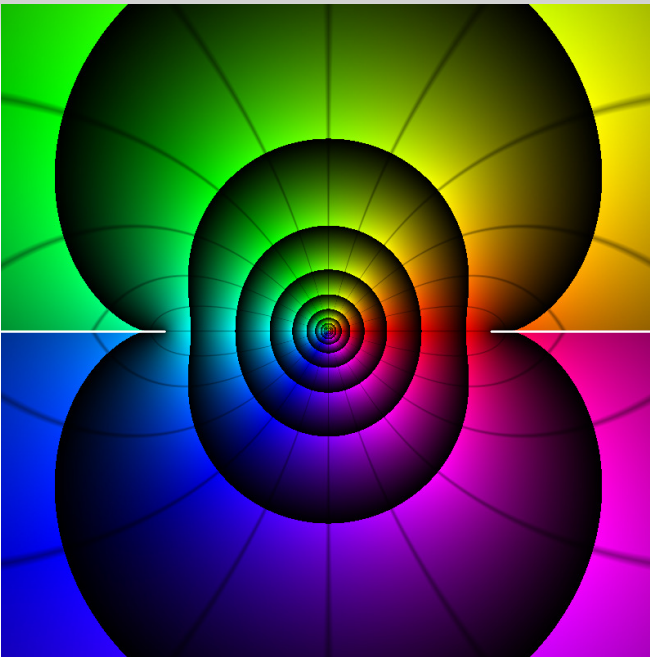
определяется как
 $\exp\left((i + \frac{2}{3}) \ln z\right)$



$$f(z) = \operatorname{arctg} z$$

определяется как
 $\frac{i}{2}(\ln(1 - iz) - \ln(1 + iz))$
формулу поправил!

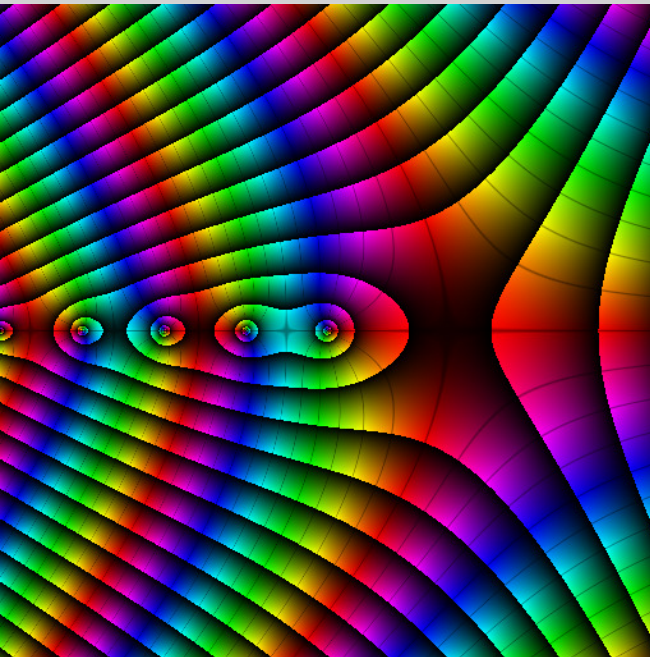
две логарифмических
точки ветвления $\pm i$



$$f(z) = \arcsin z$$

определяется как
 $-i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

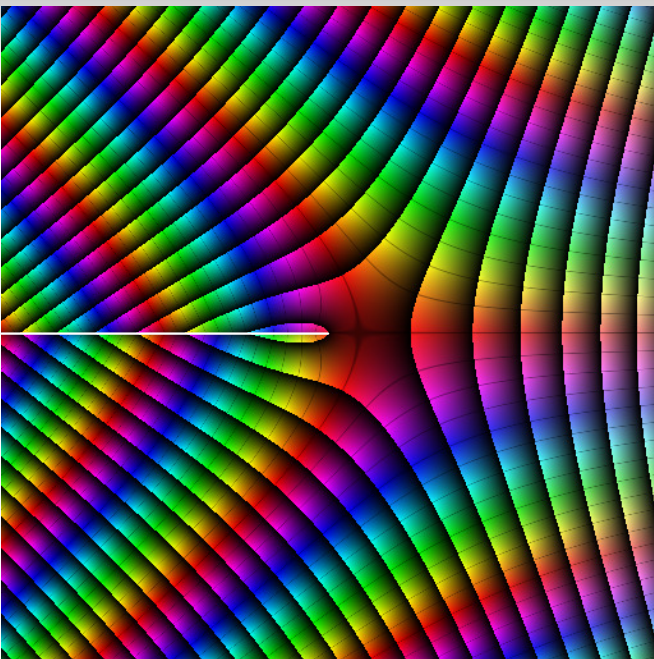
точки ветвления ± 1



$$f(z) = \Gamma(z)$$

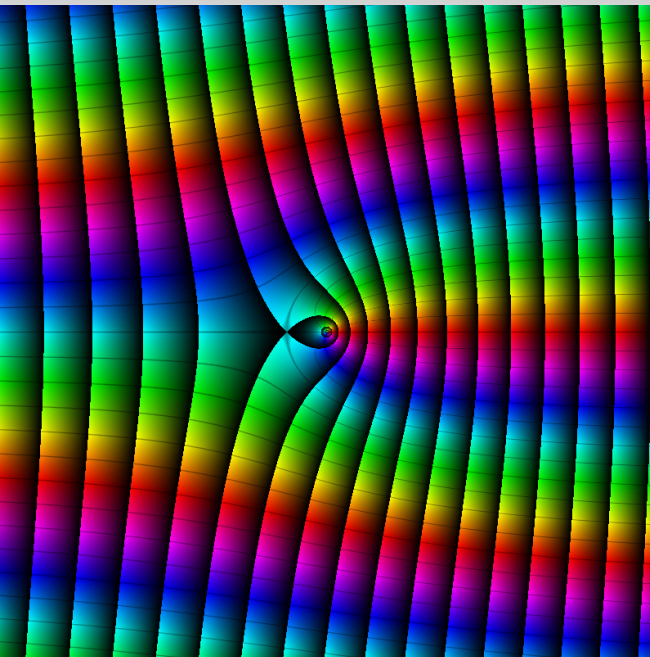
полюса при $z \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$

функция $1/\Gamma(z)$
аналитична на всей
плоскости (**целая**)



$$f(z) = \exp(z \ln z) = z^z$$

разрез как $y \ln z$



$$f(z) = ze^z$$

интересно найти
обратную функцию

было в первом задании
разложить неявную
 $W(x)$



функция Ламберта

$$f(z) = W(z)$$

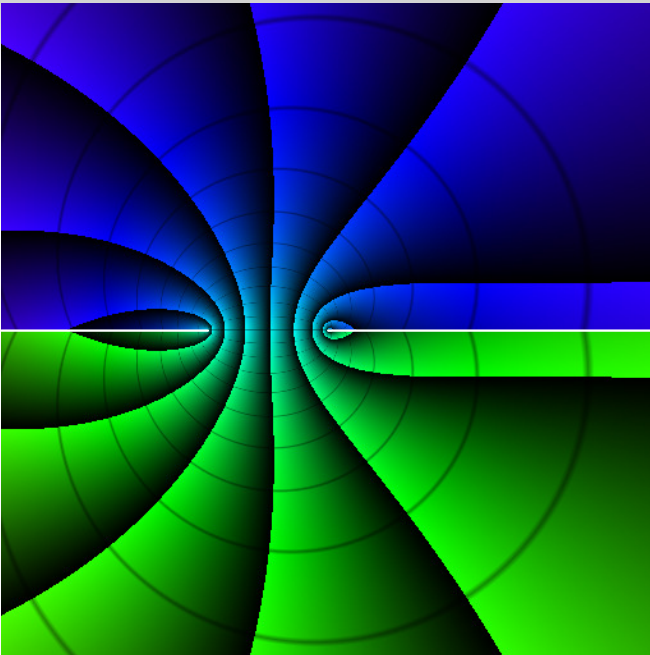
определяется неявно
как $we^w = z$

две точки ветвления:

0 логарифмическая
−1/e порядка 2

тут главная ветвь

$$W_0(z)$$



функция Ламберта

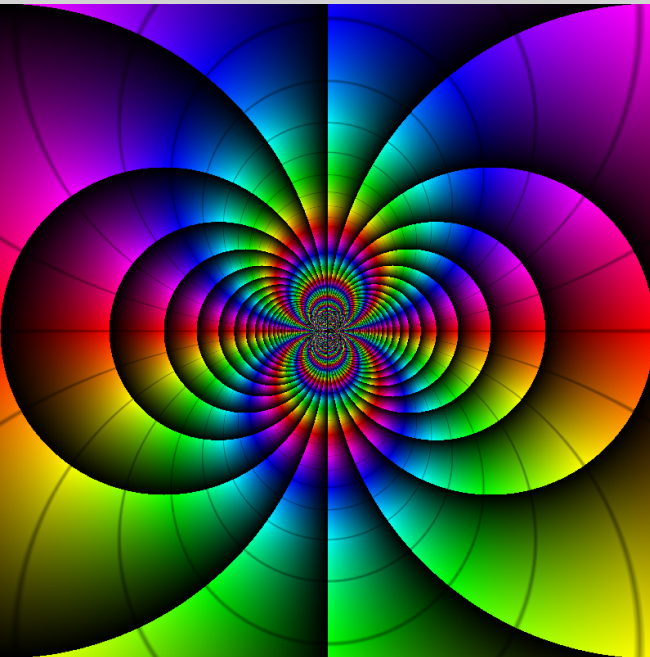
тут соседние ветви:

$W_{-1}(z)$ выше оси

$W_1(z)$ ниже оси

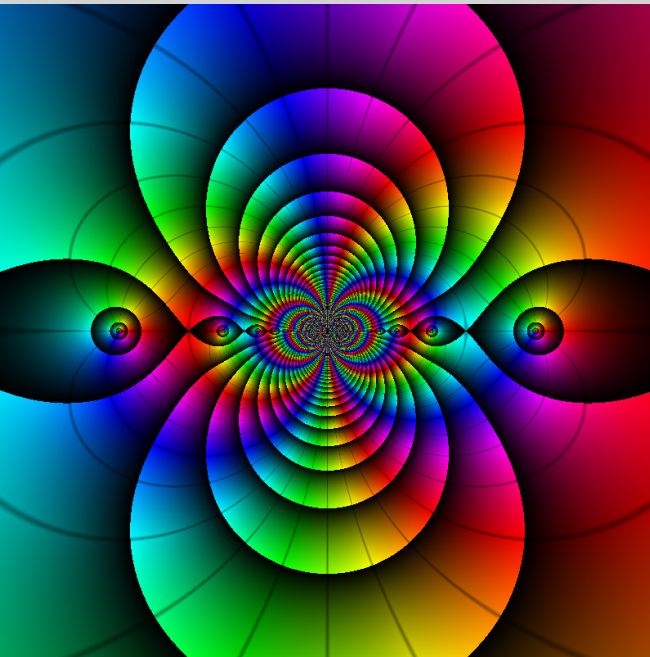
стой!!

дальше существо



$$f(z) = \exp(1/z)$$

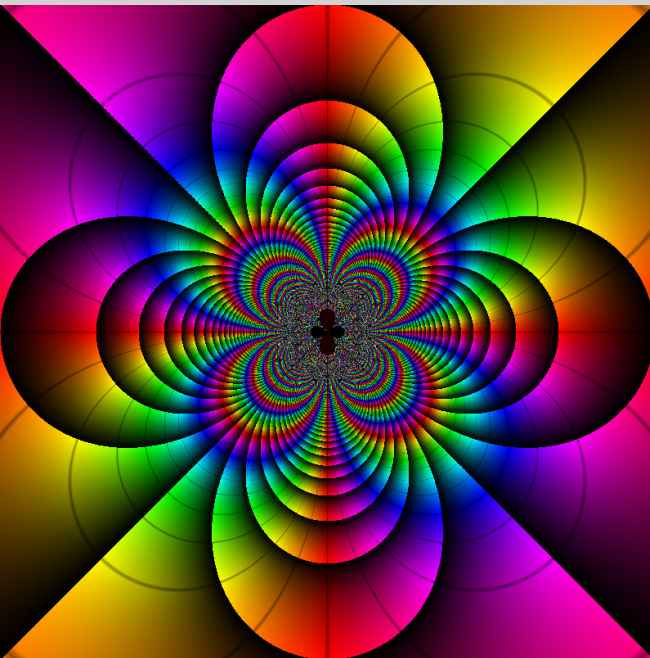
существенно особая
точка $z = 0$



$$f(z) = \sin(1/z)$$

существенно особая
точка $z = 0$

её видно при $z \in \mathbb{R}$



$$f(z) = \exp(-1/z^2)$$

существенно особая
точка $z = 0$

однако при $z \in \mathbb{R}$
плоскота с нулевым
рядом Тейлора

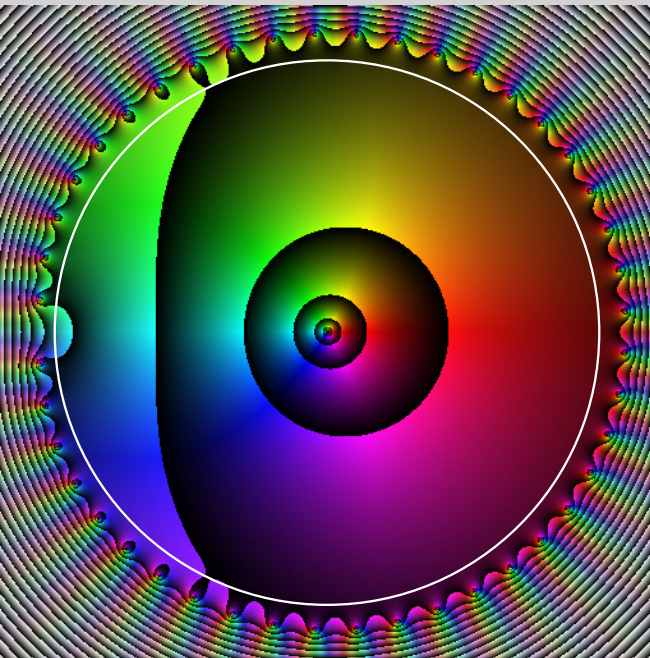
стой! дальше струи



струёй называют
частичную сумму
ряда Тейлора

функция $\ln(1+z)$
струя степени 11

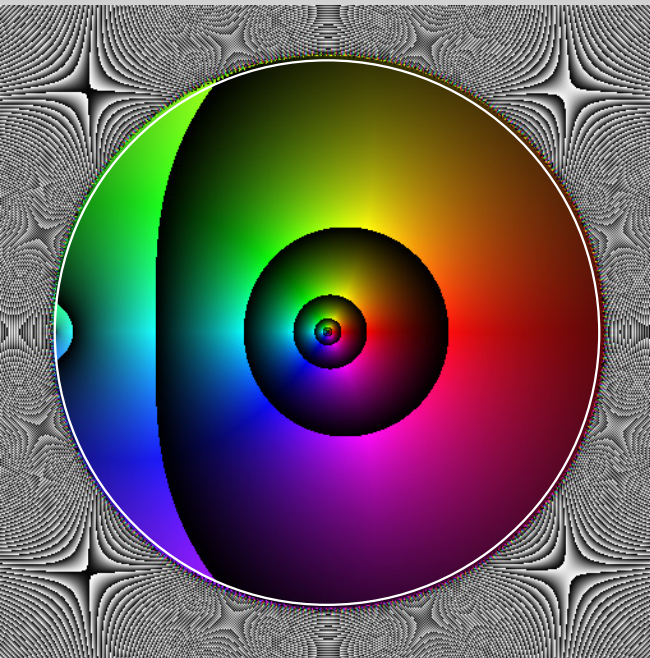
и круг сходимости ряда



струёй называют
частичную сумму
ряда Тейлора

функция $\ln(1+z)$
струя степени 45

ожерелье нулей
вне круга сходимости

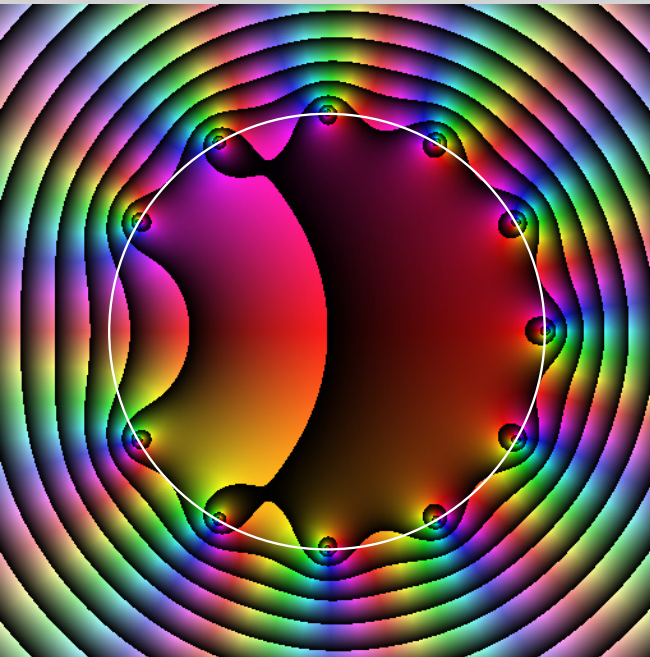


струей называют
частичную сумму
ряда Тейлора

функция $\ln(1+z)$
струя степени 375

ожерелье нулей
вне круга сходимости

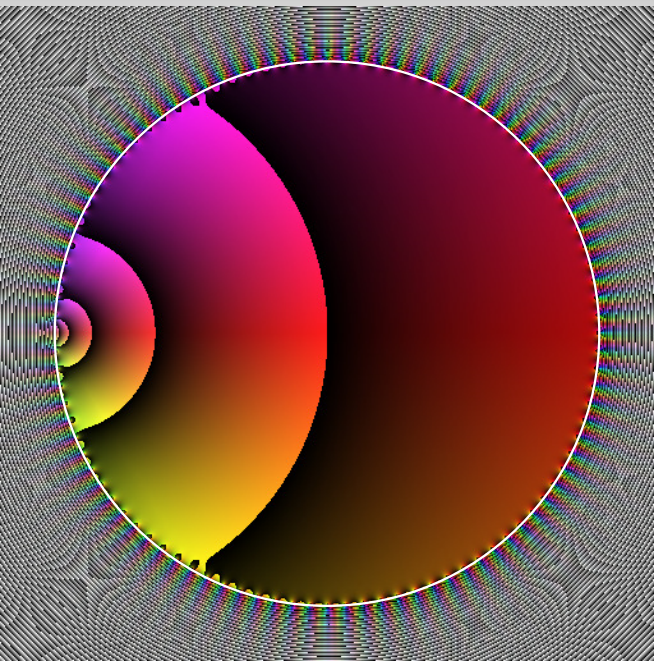
сумма ряда
ветвится при $z = -1$



функция $(1+z)^{-1}$
струя степени 11

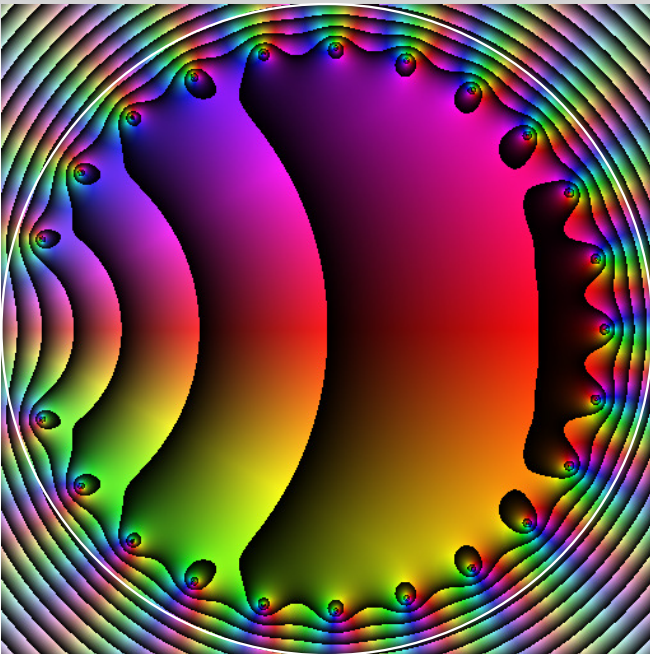
и круг сходимости ряда

ожерелье нулей
на границе круга



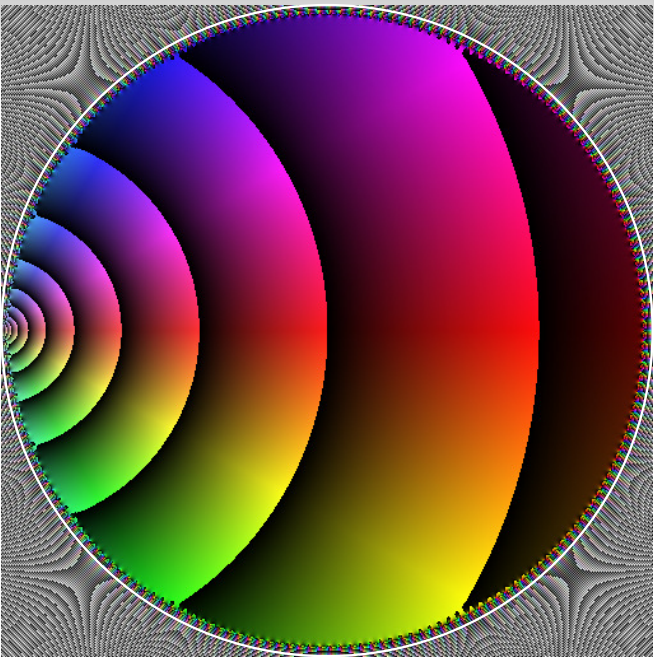
функция $(1 + z)^{-1}$
струя степени 95

ожерелье нулей
на границе круга



функция $(1+z)^{-2}$
струя степени 23

ожерелье нулей
внутри круга



функция $(1 + z)^{-2}$
струя степени 191

ожерелье нулей
внутри круга