МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

А. П. Ульянов

# ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ФИЗИКОВ

## Часть 2. Одномерный анализ

Учебное пособие
по курсу основ математического анализа

Новосибирск
~~2013~~ 2018

УДК: 510
ББК: В14я73-1 + В151.54я73-1
У 517

**Ульянов А. П.** Основы математического анализа для студентов-физиков. Часть 2. Одномерный анализ. Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013.

ISBN ??

Пособие содержит конспект лекций, прочитанных автором для студентов 1-го курса физического и геолого-геофизического факультетов НГУ. Ввиду большого объёма курса и разнообразия материала пособие разделено на несколько частей. Часть 2 содержит фундамент одномерного анализа, включающий следующие темы: предел функции и непрерывность; числовые последовательности; несобственные интегралы и числовые ряды.

Пособие предназначено для студентов первого курса физического и геолого-геофизического факультетов НГУ.

Рецензент
проф. В.А. Александров

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009-2018 гг.

**Версия от 1 апреля 2018 г.**

# Глава 5. НАЧАЛЬНАЯ АРИФМЕТИЗАЦИЯ

## 5.1. Точные грани и полнота

**Формы выражения полноты.** Мы всегда представляем себе вещественные числа как точки на прямой. Иными словами, множество вещественных чисел и множество точек на прямой находятся во взаимно-однозначном соответствии. лекция 12+ 13.10.16

Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ есть простейший пример бесконечного множества чисел, расстояния между которыми на прямой не меньше фиксированного. Такие называют **дискретными**. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ обладает противоположным свойством: между любой парой неравных рациональных чисел есть ещё одно (их полусумма) и даже бесконечное множество рациональных чисел. Рациональные числа располагаются на вещественной прямой без скачков, или **всюду плотно**. При этом между рациональными точками остаются иррациональные «пробелы». Чтобы заполнить их, ввели вещественные числа, выражаемые бесконечными (десятичными) дробями. На этом этапе **полнотой** вещественных чисел можно считать то, что вещественные точки «заполняют» прямую без пробелов: каждой точке соответствует число. текст раздела 2012

Полноту вещественных чисел выражают в различных формах. Сейчас мы дополним уже знакомые теми, которые нам скоро пригодятся для формулировок и доказательств теорем анализа, освобождённых от опоры на физическую или геометрическую интуицию:

- представление чисел (десятичными) дробями;
- существование точных граней числовых множеств;
- существование сечений Дедекинда;
- принцип вложенных отрезков.

Также мы убедимся, что все эти формы полноты равносильны.

**Точные нижние и верхние грани.** Число $u \in \mathbb{R}$ называют **верхней гранью** числового множества $A$, если $a \leqslant u$ для всех $a \in A$. Когда $A$ имеет верхнюю грань, его называют **ограниченным сверху**. Аналогично определяются нижняя грань и ограниченность снизу. Числовое множество, ограниченное и снизу, и сверху, называют **ограниченным**.

*Пример.* Числа 3, 4, 5 являются верхними гранями отрезка $[0,3]$.

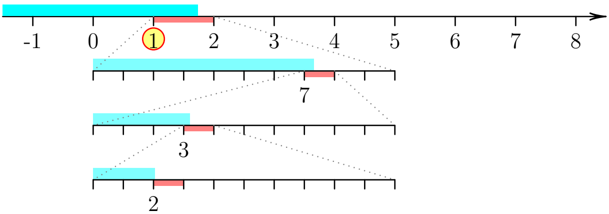
Понятия верхней и нижней грани — предварительные, вспомогательные. В отличие от промежутков, для числовых множеств сложного или не вполне понятого устройства сходу не укажешь наиболее точную из верхних или нижних граней. Кроме того, часто полезно именно само наличие какой-нибудь грани, без её уточнения.

Bolzano 1817

**Теорема.** *Если непустое числовое множество $A$ ограничено сверху, то среди его верхних граней имеется наименьшая.*

*Доказательство.* Считаем, что $A$ содержит положительное число, ибо если это изначально не так, то мы прибавим достаточно большое целое число ко всем его элементам.

Разобьём $\mathbb{R}$ на отрезки с целыми концами. Выберем из них отрезки, содержащие элементы $A$. Ввиду ограниченности $A$ сверху, среди них есть крайний справа отрезок $K_0$; обозначим его левый конец через $c_0$. Далее разобьём $K_0$ на 10 равных частей. Найдём крайнюю правую часть из содержащих элементы $A$ и обозначим её через $K_1$, а соответствующую цифру через $c_1$. Продолжая в том же духе, получим последовательность цифр $c_j$, задающую десятичную дробь $c = c_0{,}c_1c_2c_3\ldots$.




Число $c$ и есть требуемая наименьшая верхняя грань. Действительно, если имеется $a > c$, то в какой-то позиции $j$ цифра в записи числа $a$ больше $c_j$, что противоречит построению. Аналогично, если $b < c$ для какой-то верхней грани $b$, то $b$ лежит левее одного из десятикратно уменьшающихся отрезков $K_j$, содержащего элементы $A$. □

переписать?

*Определение.* Наименьшую верхнюю грань числового множества $A$ называют его **точной верхней гранью** или **супре́мумом**, а наибольшую нижнюю грань — **точной нижней гранью** или **и́нфимумом**. Точные грани обозначают через $\sup A$ и $\inf A$.

Если $A$ имеет наибольший элемент $\max A$, то $\sup A = \max A$, и аналогично $\inf A = \min A$. Преимущество точных граней — в освобождении от этого «если».

*Пример.* Множество $A = \{p/q \mid p > 0,\ q > 0,\ p^2 > 2q^2\}$ состоит из положительных рациональных чисел, квадрат которых больше двух. Оно имеет точную нижнюю грань $\inf A = \sqrt{2}$, а среди рациональных чисел точной грани нет.

**Лемма.** *Если числовое множество $A \neq \varnothing$ ограничено сверху, то всякая окрестность точки* $\sup A$ *содержит точки из $A$ и точки не из $A$.*

*Доказательство.* Упражнение. $\square$

Когда непустое числовое множество $A$ не имеет верхних граней, полагают $\sup A = +\infty$, а когда оно не имеет нижних граней, полагают $\inf A = -\infty$. Наконец, для полноты картины, для пустого множества парадоксально на первый взгляд полагают $\sup \varnothing = -\infty$ и $\inf \varnothing = +\infty$. Однако, этот парадокс рассеивается быстро.

**Лемма.** *Если $A \subseteq B$, то* $\sup A \leqslant \sup B$ *и* $\inf A \geqslant \inf B$.

*Доказательство.* Упражнение. $\square$

**Теорема Дедекинда о сечении.** Эта теорема является ярким примером утверждения, веками считавшегося очевидным и не требующим доказательства. Лишь формализация анализа школой Вейерштрасса и размышления о природе вещественных чисел изменили взгляды. Euclid?

**Теорема.** *Если непустые числовые множества $A$ и $B$ таковы, что $a \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$, то существует $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$ и $b \in B$.* Dedekind 185

*Доказательство.* Каждый элемент $b \in B$ является верхней гранью для $A$, так что $\sup A \leqslant b$. Следовательно, $\sup A \leqslant \inf B$ и для любого числа $c$ между этими точными гранями имеем $a \leqslant c \leqslant b$. $\square$

Дедекинд предлагал использовать сечения для построения вещественных чисел из чисто рационального материала: для задания числа по точке прямой в качестве $A$ и $B$ выбираются множества всех рациональных точек, лежащих соответственно левее и правее. Это оказалось неудобным, однако сама теорема остаётся полезным фактом.

**Принцип вложенных отрезков.** Часто в доказательствах теорем анализа необходимо установить существование точки с определёнными свойствами. Её можно получать и как сечение Дедекинда, но принцип вложенных отрезков предоставляет другой удобный способ.

**Теорема.** *Для любой последовательности $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ вложенных отрезков существует общая точка всех отрезков.*

Пересечением такой последовательности отрезков может быть или одна точка, или отрезок, согласно тому, стремятся уменьшающиеся длины $K_n$ к нулю или нет. Интересный и важный для приложений случай — первый, причём обычно отрезки упорно делят пополам.

*Доказательство.* Для множеств $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$, состоящих соответственно из левых и правых концов отрезков $K_n = [a_n, b_n]$, выполнены условия теоремы Дедекинда: $a_i \leqslant b_j$ для любых значений индексов. Получаемое в теореме сечение $c$ удовлетворяет $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ и потому есть общая точка всех отрезков $K_n$. □

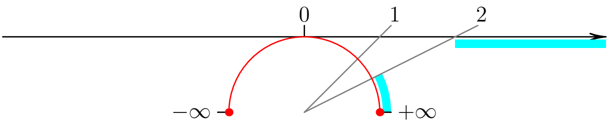
Представление произвольной точки на вещественной прямой десятичной дробью нетрудно вывести из принципа вложенных отрезков, тем самым замкнув круг. Вывод очень похож на нахождение точной грани в первой теореме раздела, только несколько проще.

**Упражнение.** *Проведите требуемые модификации.*

**Расширенная числовая прямая.** Множество $\overline{\mathbb{R}}$ вводится добавлением к $\mathbb{R}$ двух элементов $\pm\infty$, удовлетворяющих естественному неравенству $-\infty < a < +\infty$ для всех $a \in \mathbb{R}$. Это позволяет переформулировать утверждение о существовании точных граней числовых множеств в более красивой форме.

**Теорема.** *Всякое подмножество расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани.*

Кроме того, этот приём позволяет «поместить» бесконечные промежутки в конечные типы, что иногда сокращает формулировки и доказательства. Окрестностью точки $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ логично считать любой «полуинтервал» $(a, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Поэтому в $\mathbb{R}$ бесконечные промежутки часто выступают в этом же качестве.

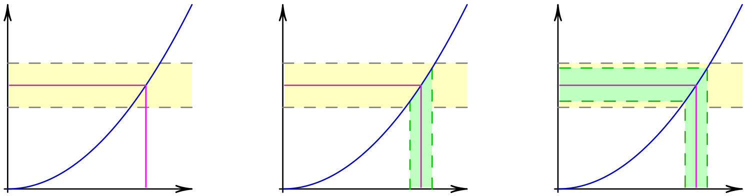



## 5.2. Непрерывность функции в точке

лекция 13
17.10.16

**Эволюция определения непрерывности.** Понятие непрерывной функции появилось довольно поздно. В нём не было особой нужды, пока всякая функция задавалась одной формулой, несмотря на отдельные странности вроде $(-1)^x$, внимание на которые обращал Эйлер. Потребность возникла, когда в результате различных исследований и накопления странностей от задания формулой перешли к заданию правилом, тем самым радикально расширив понятие функции.

На интуитивном уровне непрерывность функции $f$ в точке $p$ означает, что $f(x) \approx f(p)$ при $x \approx p$. Также мы говорили, и будем говорить, о стремлении $f(x) \to f(p)$ при $x \to p$. Более точно эту мысль выражают так: разность $f(x) - f(p)$ можно сделать сколь угодно малой, делая разность $x - p$ достаточно малой. Отсюда до формального определения уже один шаг, не вполне справедливо приписываемый Коши. Точнее и раньше Коши выражался Больцано, но он десятилетиями оставался безвестным. За это время формальный подход утвердил Вейерштрасс, переняв обозначения влиятельного Коши. Bolzano 1817



*Определение.* Функцию $f(x)$ называют **непрерывной** в точке $x = p$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|x - p| < \delta$ влечёт $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ для всех $x$ из области определения функции.

Область определения будем обозначать через $X$, а по небрежности вообще будем забывать упомянуть её. Отметим, что тут всегда $p \in X$.

Малость $\varepsilon$ и $\delta$ обычно не проговаривается, но на неё указывает само употребление этих букв. Исходно $\varepsilon$ означало допустимую ошибку (франц. *erreur*) приближённых вычислений, теперь же символизирует точность и строгость математического анализа. Полезна ещё аналогия с термином *допуск* в технике: например, диаметр детали может быть 5 миллиметров плюс/минус (допуск) 3 микрона.

Определение непрерывности не содержит никакого стремления, никакого движения. Оно абсолютно статично. Это достигнуто благодаря двухшаговой структуре: (1) допуск $\varepsilon$ обычно определяется требованиями конкретной задачи; (2) какой бы допуск ни был, требования выполнимы, если находиться достаточно близко к интересующей точке. Акцент тут на формальной проверяемости определения, которой нельзя добиться при опоре на движение.

Многие математики любят ещё высушивать подобные формальные **высказывания**, заменяя все слова специальными значками. После этой замены определение непрерывности в точке выглядит так:

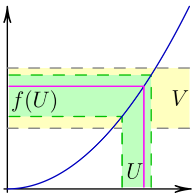
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon (\forall x \in X)\ |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Часто умалчивают о зависимости $\delta = \delta(\varepsilon)$, поскольку на неё указывает само появление $\delta$ после $\varepsilon$ в этом высказывании.

Два неравенства в определении непрерывности задают множества чисел, на которые нам придётся часто ссылаться по имени. Это окрестности особого симметричного вида. Множество значений $x$, заданное условием $|x - p| < \delta$, называют **$\delta$-окрестностью** точки $p$ и обозначают $B_\delta(p)$. Аналогично, второе неравенство говорит, что $f(x)$ попадает в $\varepsilon$-окрестность точки $f(p)$. Поэтому на языке окрестностей сухое определение становится таким:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon x \in B_\delta(p) \cap X \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon\big(f(p)\big).$$

Избавляясь от $\varepsilon$ и $\delta$, получим более современную формулировку: для любой окрестности $V$ точки $f(p)$ найдётся такая окрестность $U$ точки $p$, что если $x \in U$, то $f(x) \in V$. Заключение ещё более сокращают, написав $f(U) \subseteq V$.




**Упражнение.** *Докажите, что более современная формулировка непрерывности равносильна $\varepsilon$-$\delta$ формулировке Вейерштрасса.*

**Маленькие хитрости неравенств.** Ближайшие доказательства не сложны, но содержат пару специфических приёмов, которые мы будем многократно применять и в дальнейшем:

(1) уже пригодную $\delta$-окрестность всегда можно уменьшить;
(2) если удалось втиснуть функцию в $2\varepsilon$-окрестность, то её удастся втиснуть и в $\varepsilon$-окрестность, ведь $\varepsilon > 0$ любое и его всегда можно «переименовать».

Как правило, первым приёмом добиваются дополнительных выгодных свойств или упрощений.

Вторым приёмом в учебниках пользуются намного реже, чем могли бы; более того, можно заменить $2\varepsilon$ на $M\varepsilon$, где $M > 0$ не зависит от $\varepsilon$. Готовые, книжные доказательства часто начинаются с неожиданных и потому непонятных требований: нечто не превосходит какой-либо доли $\varepsilon$; лишь в конце рассуждения доли складываются в «целое» $\varepsilon$. Второй приём позволяет бесхитростно начинать с «целого» $\varepsilon$ и заканчивать рассуждение на его «кратном», а также на нестрогом неравенстве. Иной удобной концовкой, которую мы часто будем молча пропускать, могут послужить такие слова: $M\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

**Лемма** (Неравенство треугольника)**.** *Все вещественные и комплексные величины удовлетворяют неравенствам*

$$|u + v| \leqslant |u| + |v|, \qquad |u - w| \leqslant |u - v| + |v - w|.$$

Этот простой и известный факт применяется в анализе регулярно. Такие ходы будем помечать значком $\trianglelefteqslant$ вместо обычного $\leqslant$. Второй вариант неравенства полезен при умном выборе величины $v$, исходно отсутствующей в выражении; её введение должно разделять сложности, реализуя принцип «разделяй и властвуй».


Отметим также одно несложное следствие непрерывности функции в точке. Обычно его не оформляют отдельным утверждением, но это будет полезно в доказательствах. Чтобы лучше запомнилось, можно даже назвать его «леммой о близких значениях».

**Лемма.** *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = p$ и $f(p) > y$, то неравенство $f(x) > y$ верно и на некоторой окрестности этой точки, и аналогично для неравенств со знаками $<$ и $\neq$.*

*Доказательство.* Упражнение. □

**Непрерывность и операции.** Установим теперь строго, что арифметические операции сохраняют непрерывность.

**Лемма.** *Если в точке $p$ непрерывны функции $f(x)$ и $g(x)$, то непрерывны $f(x)\pm g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$. При условии $g(p) \neq 0$ непрерывна также $f(x)/g(x)$.*

*Доказательство.* Введём сокращённые обозначения

$$F = f(x),\ G = g(x),\ A = f(p),\ B = g(p).$$

рисунок?

Возьмём такие $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ что

$$|x-p| < \delta_1 \Rightarrow |F-A| < \varepsilon, \qquad |x-p| < \delta_2 \Rightarrow |G-B| < \varepsilon.$$

Тогда $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ годится сразу для обеих импликаций. Здесь мы применяем первый приём.

Для суммы функций получим «ошибку»

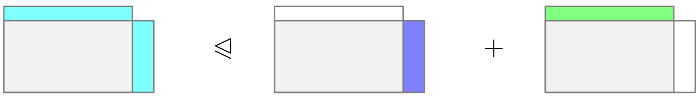
$$|F+G-A-B| \leqslant |F-A| + |G-B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Формально, для установления непрерывности функции $f+g$ в точке $p$ нужно справа получить $\varepsilon$ вместо $2\varepsilon$. Конечно, достаточно выше иметь $\varepsilon/2$ вместо $\varepsilon$, однако заранее это не очевидно. Второй приём избавляет от необходимости гадать и перечёркивать.

Для произведения функций неравенство треугольника проходит во второй версии, через подбираемые слагаемые:

$$\begin{aligned} |FG-AB| &\leqslant |FG-AG| + |AG-AB| \\ &= |F-A| \cdot |G| + |A| \cdot |G-B|. \end{aligned}$$

Правая часть не превосходит $M\varepsilon$, где $M = |A| + |B| + \varepsilon > |A| + |G|$, так что опять помогает второй приём.



Наконец, при условии $B \neq 0$ всегда можно выбрать $\varepsilon < |B|/2$, и тогда $|G-B| < \varepsilon$ влечёт $|G| > |B|/2 \neq 0$. Переписав

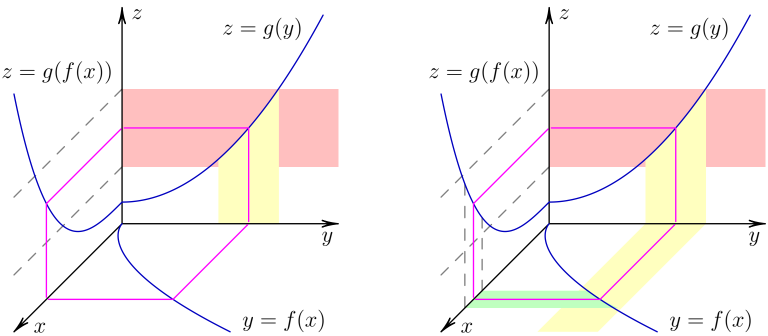
$$|G^{-1} - B^{-1}| = |B-G|/|BG|,$$

сразу, без треугольников, видим, что правая часть не превосходит $M\varepsilon$, где $M = 2/|B|^2$. Зная второй приём, получаем непрерывность функции $1/g(x)$, откуда непрерывность частного $f(x)/g(x) = f(x) \cdot 1/g(x)$ следует с помощью уже доказанной непрерывности произведения. □

там надо полнее

**Упражнение.** *Сравните преобразования для каждой операции с выводом формулы для производной в таком же случае.*

**Лемма.** *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $p$ и функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $f(p)$, то композиция $z = g(f(x))$ тоже непрерывна в точке $p$.*




*Доказательство.* Здесь участвуют не две, а три окрестности, а потому дополнительная греческая буква. Для любого $\zeta > 0$ найдём нужное $\varepsilon > 0$, по которому затем найдём $\delta > 0$ так, чтобы получить

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(p))| < \zeta.$$

В симметричных окрестностях можем написать

$$x \in B_\delta(p) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon\big(f(p)\big) \Rightarrow g(f(x)) \in B_\zeta\big(g(f(p))\big).$$

Забывая о промежуточной стадии, видим непрерывность композиции, только с буквой $\zeta$ вместо $\varepsilon$.

То же самое в современном виде: для любой окрестности $W$ точки $g(f(p))$ существует такая окрестность $V$ точки $f(p)$, что $g(V) \subseteq W$. Для любой окрестности точки $f(p)$, и в частности для только что найденной $V$, существует такая окрестность $U$ точки $p$, что $f(U) \subseteq V$. Поэтому $g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$. □

**Теорема.** *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.*

*Перспективное доказательство.* Ввиду последних двух лемм, достаточно установить непрерывность основных элементарных функций. Для $f(x) = x^n$ она следует из свойства предела произведения. Для трансцендентных функций доказательство опирается на две теоремы, которые мы получим позже: непрерывность первообразных и непрерывность обратной функции. □

Вне отдельных точек, непрерывность элементарных функций следует из более простого их свойства — липшицевости.

## 5.3. Теоремы о непрерывных функциях

**Липшицевы функции.** Рассмотрим кратко одно свойство функций, похожее на непрерывность, но проще и «лучше».

Функцию $f$ называют **липшицевой** на множестве $X$, если для некоторого числа $L = L(X)$ неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L \cdot |x_1 - x_2|$$

выполнено при всех $x_1$, $x_2 \in X$. Большинство обычных функций липшицевы. Например, $\sin x$ и $\cos x$ липшицевы на всей оси с $L = 1$.

**Упражнение.** *Для каждой основной элементарной функции найдите все промежутки её липшицевости.*

**Упражнение.** *Исследуйте сохранение липшицевости при обычных операциях с функциями.*

**Теорема.** *Всякая липшицева функция на множестве $X$ непрерывна на нём.*

*Доказательство.* Благодаря липшицевости с параметром $L$, по произвольному $\varepsilon > 0$ возьмём $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / L$ и для любой точки $p \in X$ получим

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| \leqslant L \cdot |x - p| < L\delta = \varepsilon.$$

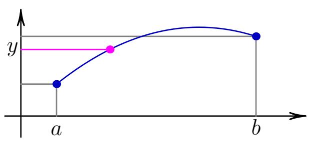
Значит, $f(x)$ непрерывна в точке $p$. □

лекция 14
20.10.16

**Промежуточные и экстремальные значения.** Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции интуитивно очевидна. Однако она была одним из первых серьёзных шагов на пути формального построения анализа, начатого Больцано.

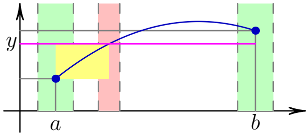
Bolzano 1817
Cauchy 1821

**Теорема.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для каждого числа $y$ между $f(a)$ и $f(b)$ есть такая точка $p$ на $[a, b]$, что $f(p) = y$.*




*Первое доказательство.* Если $y = f(a)$ или $y = f(b)$, то доказывать нечего. Случаи $f(a) < y < f(b)$ и $f(a) > y > f(b)$ полностью аналогичны, поэтому разберём только первый. Введём множество

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < y\}$$




и точку $p = \sup A$. По лемме о близких значениях, для каждой точки $x$ нашего отрезка неравенство $f(x) < y$ приносит окрестность, целиком лежащую в $A$, а неравенство $f(x) > y$, наоборот, окрестность, целиком лежащую вне $A$. Оба неравенства исключены для $x = p$, ибо по свойству точной грани в любой окрестности $p$ есть точки как из $A$, так и извне его. Остаётся искомое $f(p) = y$. □

**Упражнение.** *Что нужно изменить в случае $f(a) > f(b)$?*

**Упражнение.** *Получите точку $p$ по методу деления отрезка пополам, показанному ниже (это метод самого Больцано).*

Проникнув в основы анализа глубже и получив новые средства, мы дадим другие доказательства теоремы о промежуточных значениях и следующей далее теоремы об экстремальных значениях, также строго установленной Больцано, но не публиковавшейся почти сто лет, а потому закрепившейся за Вейерштрассом.

Функцию $f$ называют **ограниченной** на множестве $X$, если ограничен образ $f(X)$. Однако даже в этом случае значения функции могут не достигать точных граней, ведь $\sup f(X)$ не обязательно лежит в $f(X)$.

**Упражнение.** *Найдите примеры функции на отрезке и непрерывной функции на интервале, не достигающих точной грани образа.*

Точку $p$ называют точкой (глобального) **максимума** функции $f$ на множестве $X$, если $f(x) \leqslant f(p)$ для всех $x \in X$. Противоположным неравенством определяют точку (глобального) минимума.

**Теорема.** *Всякая непрерывная функция на отрезке ограничена и достигает своего минимума и своего максимума.* Bolzano 1833
Weierstrass 1

*Первое доказательство.* Укажем лишь получение максимума, ибо для минимума всё делается аналогично.

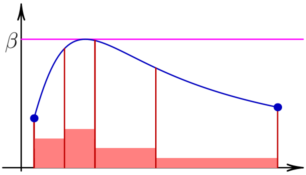
Рассуждение основано на методе деления отрезка пополам. Для исходного отрезка $K_0 = [a, b]$ положим

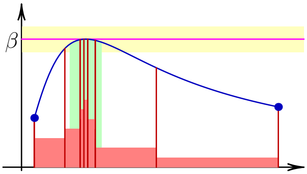
$$\beta = \sup\{f(x) \mid x \in K_0\}.$$

Поделим $K_0$ пополам и возьмём в качестве $K_1$ такую половину, что

$$\beta = \sup\{f(x) \mid x \in K_1\}.$$

Продолжим делить, сохраняя такое же равенство для всех вложенных отрезков $K_n$. Общую точку всех $K_n$ обозначим через $p$. Функция определена в ней и $f(p) \leqslant \beta$. Если $f(p) = \beta$, то это значение конечно и является максимумом.




Предположив, что $f(p) < \beta$, возьмём любое $y$ на интервале $(f(p), \beta)$. По лемме о близких значениях получаем $f(x) < y$ на некоторой окрестности $U$ точки $p$. Она включает отрезочки $K_n$ с достаточно большими номерами. Тогда $\beta = \sup f(K_n) \leqslant \sup f(U) \leqslant y$ даёт противоречие. □

**Следствие.** *Если непостоянная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $K$, то образ $f(K)$ является отрезком.*

*Доказательство.* Упражнение. □

$\sin \frac{1}{x}$ Уклоняясь слегка в сторону, коснёмся ситуации на промежутках.

**Теорема.** *Если непостоянная функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $\Delta$, то образ $f(\Delta)$ является промежутком.*

*Доказательство.* Не исключая бесконечности, положим

$$\alpha = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}, \qquad \beta = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

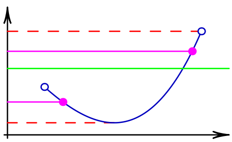
Следовательно, $f(\Delta) \subseteq [\alpha, \beta]$. По определению точных граней, для любого $y \in (\alpha, \beta)$ существуют такие точки $u$, $v \in \Delta$, что

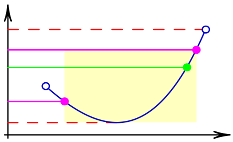
$$\alpha \leqslant f(u) < y < f(v) \leqslant \beta.$$

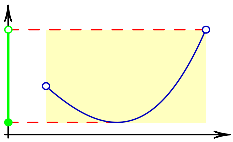
На отрезке $K \subset \Delta$ с концами $u$ и $v$ применима теорема о промежуточных значениях: существует такая точка $x \in K$, что $f(x) = y$, а тогда $y \in f(\Delta)$. Поэтому

$$(\alpha, \beta) \subseteq f(\Delta) \subseteq [\alpha, \beta],$$

что оставляет четыре варианта для $f(\Delta)$ и они все промежутки. □



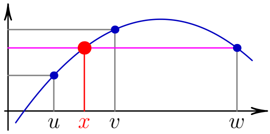




**Монотонные функции.** Отображение $f$ называется **инъективным**, если $x_1 \neq x_2$ влечёт $f(x_1) \neq f(x_2)$. Строго монотонная функция всегда инъективна. Непрерывность позволяет вывести обратное свойство.

**Теорема.** *Если функция на отрезке непрерывна и инъективна, то она строго монотонна.*

*Доказательство.* Нужно показать, что для любой пары точек $x_1 < x_2$ отрезка $[a, b]$ сохраняется один и тот же знак неравенства между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, совпадающий со знаком неравенства между $f(a)$ и $f(b)$.




Для любой тройки точек $u < v < w$ отрезка $f(v)$ лежит между $f(u)$ и $f(w)$: иначе по теореме о промежуточных значениях отрезок содержит ещё одну точку $x$ со значением $f(x)$, равным $f(u)$ или $f(w)$, что противоречит инъективности. Возможны два варианта:

$$f(u) < f(v) < f(w) \quad \text{либо} \quad f(u) > f(v) > f(w).$$

Для четвёрки $a < x_1 < x_2 < b$ видим аналогичную цепь неравенств, поэтому для каждой функции реализуется лишь один вариант. $\square$

С другой стороны, по области значений монотонной функции видно, непрерывна ли функция.

**Теорема.** *Если функция $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ на промежутке $\Delta$ монотонна и её образ $f(\Delta)$ является промежутком, то $f(x)$ непрерывна на $\Delta$.*

*Доказательство.* Разберём случай возрастающей функции.

Возьмём точку $p$ внутри $\Delta$. При необходимости уменьшим $\varepsilon$ из определения непрерывности, чтобы вся $\varepsilon$-окрестность точки $f(p)$ вошла в $f(\Delta)$. Тогда в $\Delta$ найдутся такие точки $u < p$ и $v > p$, что

$$-\varepsilon < f(u) - f(p) < 0, \quad 0 < f(v) - f(p) < \varepsilon.$$

Ввиду монотонности, $u < x < v$ влечёт $f(u) < f(x) < f(v)$, так что $-\varepsilon < f(x) - f(p) < \varepsilon$. Выходит, весь образ окрестности $(u, v)$ точки $p$

попадает в заданную окрестность $B_\varepsilon\big(f(p)\big)$, что и означает искомую непрерывность. Ради буквального совпадения с её $\varepsilon$-$\delta$ определением замените $(u, v)$ на $B_\delta(p)$, где $\delta = \min\{v - p,\ p - u\}$.

Когда $\Delta$ включает одну или обе свои граничные точки $a$ и $b$, для них вместо окрестности $(u, v)$ аналогично получаем односторонние окрестности $[a, v)$ и $(u, b]$, подходящие на роль $B_\delta(a) \cap \Delta$ и $B_\delta(b) \cap \Delta$. $\square$

**Теорема.** *Если функция $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ на промежутке $\Delta$ непрерывна и строго монотонна, то обратная функция существует, строго монотонна того же типа и непрерывна на образе $f(\Delta)$.*

*Доказательство.* Обратимость очевидна: каждый элемент промежутка $f(\Delta)$ имеет единственный прообраз в силу строгой монотонности. Монотонность получается применением $f^{-1}$ к соотношению

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

в случае возрастания $f$, с соответствующим изменением знака в случае её убывания. Непрерывность получается применением предыдущей теоремы к функции $f^{-1}$. $\square$

## 5.4. Предел функции

лекция 15 24.10.16

**Определение предела функции в точке.** Можно теперь угадать это определение, связав предел и непрерывность: $f(x)$ должна быть непрерывна в точке $f(p)$ тогда и только тогда, когда предел $f(x)$ при $x \to p$ и значение $f(p)$ существуют и равны.

На практике вопрос о пределе становится актуальным именно когда функция $f(x)$ разрывна в точке $x = p$, например, не определена в ней, или когда функция непрерывна, но $f(p)$ не находится напрямую. Поэтому нужно взять определение непрерывности и убрать из него опору на значение $f(p)$. Также следует запретить возможность $x = p$. Тем самым, вопрос первоначально разбивается на два односторонних случая, на интервалы $(p - \delta, p)$ и $(p, p + \delta)$.

*Определение.* Запишем два высказывания:

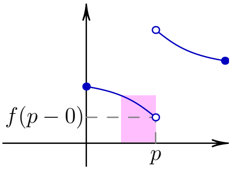
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon p - \delta < x < p \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$

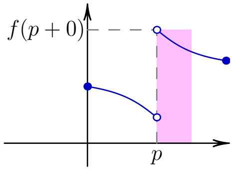
- $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

Функция $f(x)$ имеет конечный **односторонний предел** $A$

- при $x \to p$ **слева**, или при $x \to p - 0$, если верно первое;
- при $x \to p$ **справа**, или при $x \to p + 0$, если верно второе.

Соответственно случаю, пишут $\lim\limits_{x\to p-0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to p+0} f(x) = A$, либо кратко $f(p-0) = A$ и $f(p+0) = A$.



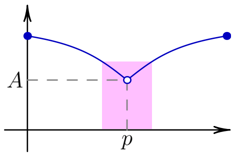




*Определение.* Функция $f(x)$ при $x \to p$ имеет конечный **предел** $A$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

При этом пишут $\lim\limits_{x\to p} f(x) = A$.

Когда это условие выполнено, мы по-прежнему будем говорить, что $f(x)$ стремится к $A$ при $x \to p$, ибо так удобно, хотя и дано проверяемое статичное определение. Однако бессмысленно говорить отдельно о стремлении $x \to p$ либо о стремлении $f(x) \to A$.




Данные определения вызывают потребность в дополнительной проверке согласованности. Этот момент легко упустить, если не интересоваться деталями.

**Лемма.** *Предел функции в конечной точке существует тогда и только тогда, когда её левый и правый пределы существуют и равны:*

$$f(x) \to A \text{ при } x \to p \quad \Leftrightarrow \quad f(p-0) = f(p+0) = A.$$

Ввиду этой связи, общие утверждения о пределах одинаковы для всех вариаций. В дальнейшем, говоря о пределе при $x \to p$, мы будем подразумевать возможность любой вариации; односторонние пределы указываем явно лишь при необходимости.

Откуда возникла потребность в такой лемме? Причина кроется в использовании в определении предела симметричной $\delta$-окрестности, тогда как на самом деле слева и справа могут быть нужны разные функции $\delta(\varepsilon)$. Однако эта искусственная причина слабнет и почти исчезает при ином подходе.

Окрестность точки без самой этой точки называют **выколотой**:

$$B^\circ_\delta(p) = B_\delta(p) \smallsetminus \{p\} = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < |x-p| < \delta\}.$$

С этим обозначением определение предела можно переписать как

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon x \in B^\circ_\delta(p) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(A).$$

Исключая $\delta$ и $\varepsilon$, получим следующую формулировку: для любой окрестности $V$ точки $A$ существует такая выколотая окрестность $U^\circ$ точки $p$, что $f(U^\circ) \subseteq V$. Вполне естественным образом, $U^\circ$ является объединением двух интервалов не связанных между собой длин, отвечающих односторонним пределам.

**Упражнение.** *Сравните последнюю формулировку с похожим выражением непрерывности через произвольные окрестности.*

**Общие свойства предела.** Сюда относятся единственность, арифметические и порядковые свойства. Проще начать с последних. Будем говорить лишь об обычных (двусторонних) пределах; все утверждения верны и для односторонних, а их доказательства идентичны или требуют совсем небольших поправок.

**Теорема.** *При $x \to p$, если $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$, то*

(1) *из условия $A < B$ следует, что $f(x) < g(x)$ вблизи $x = p$;*
(2) *из условия $f(x) < g(x)$ вблизи $x = p$ следует лишь, что $A \leqslant B$.*

*Пример.* Последнее неравенство в общем случае нестрогое. Скажем, $f(x) = 0$ и $g(x) = e^{-x}$ удовлетворяют $f(x) < g(x)$ везде и при этом имеют равные пределы при $x \to +\infty$.

Высказывание $Q(x)$ *вблизи* $x = p$ здесь является сокращением для $Q(x)$ *в некоторой выколотой окрестности точки* $p$, или формально: *существует такое* $\delta > 0$, *что* $Q(x)$ *при* $0 < |x-p| < \delta$.

*Доказательство.* (1) Всё дело в том, что $\varepsilon$-окрестности точек $A$ и $B$ не пересекаются, когда $2\varepsilon < B - A$, а в них будут (соответственно) лежать образы подходящей выколотой $\delta(\varepsilon)$-окрестности точки $x = p$.

(2) Тут короткое рассуждение от противного: из $A > B$ по первому утверждению с обратным знаком неравенства получаем $f(x) > g(x)$ вблизи $x = p$, что противоречит условию. $\square$

**Следствие.** *Существует не более одного предела $f(x)$ при $x \to p$.*

*Доказательство.* Существование двух пределов $A$ и $B$ и первое утверждение леммы для $g(x) = f(x)$ дали бы абсурдное $f(x) < f(x)$. □

**Теорема.** *При $x \to p$, если $f(x) \to A$ и $g(x) \to B$, то*

(1) $f(x) \pm g(x) \to A \pm B$;
(2) $f(x)g(x) \to AB$;
(3) $f(x)/g(x) \to A/B$ *в случае* $B \neq 0$.

*Доказательство.* Выкладки совпадают с проведёнными для непрерывности суммы, произведения и частного; лишь в самом начале нужно заменить $A = f(p)$ на $A = \lim\limits_{x\to p} f(x)$ и аналогично для $B$. □

Итак, предельный переход:

- уважает неравенства, но превращает строгие в нестрогие;
- уважает арифметические операции.

**Бесконечные вариации на тему предела.** Выше как $p$, так и $A$ предполагаются числами. Теперь допустим на их место бесконечности. При $A = \pm\infty$ говорят о бесконечном пределе функции, а при $p = +\infty$ и $p = -\infty$ о пределе функции на бесконечности.

*Примеры.* Бесконечный предел: $1/x^2 \to +\infty$ при $x \to 0$.
Конечный предел на бесконечности: $\operatorname{arctg} x \to -\pi/2$ при $x \to -\infty$.
Бесконечный предел на бесконечности: $\ln x \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Пределы на бесконечности являются односторонними, хотя это обычно не указывают. Для некоторых целей бывает полезно считать пределы при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ разными сторонами одного предела при $x \to \infty$. рисунок?

**Упражнение.** *Найдите все возможные пределы каждой основной элементарной функции.*

Формальные записи бесконечных версий в простейшем виде содержат отличия в неравенствах, полностью проистекающие из иной записи окрестностей $\pm\infty$ неравенствами:

$$B^\circ_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon, 1) \cup (1, 1+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x-1| < \varepsilon\};$$
$$B^\circ_N(+\infty) = (N, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon x > N\};$$
$$B^\circ_N(-\infty) = (-\infty, -N) = \{x \in \mathbb{R} \colon x < -N\}.$$

Психологически малое $\varepsilon$ здесь заменено на психологически большое $N$. Иногда удобнее брать

$$B^\circ_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -1/\varepsilon), \quad B^\circ_\varepsilon(+\infty) = (1/\varepsilon, +\infty).$$

Это конфликтует с предыдущим обозначением, если $\varepsilon = 1/N$, поэтому потребует уточнений при употреблении.

**Упражнение.** *Есть три возможности для p и три для A. Запишите формальные высказывания для всех девяти вариантов.*

**Упражнение.** *Запишите отрицания формальных высказываний о пределе во всех вариантах.*

Утверждения о порядковых и арифметических свойствах справедливы и для бесконечных пределов, кроме случаев неопределённостей $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$ и $\infty/\infty$.

док-ва?

**Простейшие признаки существования.** Рассмотрим две наиболее ходовых ситуации, в которых наличие предела гарантировано.

Первая ситуация: пределы монотонных функций реализуются как точные грани, а мы знаем уже, что точные грани всегда существуют.

**Лемма.** *Всякая монотонная функция на промежутке имеет односторонние пределы в каждой мыслимой точке.*

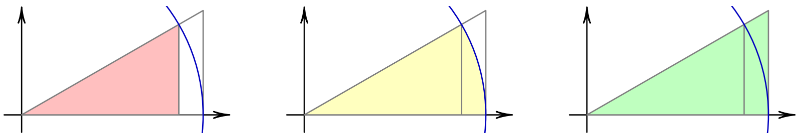
*Доказательство.* Из вариантов монотонности выберем неубывание, а из двух односторонних пределов — правый. В этом случае для точки $p$, отличной от правого конца промежутка, положим

$$L = \inf\{f(x) \mid x > p\}$$

и проверим, что $L = f(p+0)$. Поскольку $L + \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$ не является нижней гранью, найдётся такое $\delta > 0$, что $f(p+\delta)$ определено и меньше $L+\varepsilon$. Тогда по монотонности $p < x < p+\delta$ влечёт $L \leqslant f(x) < L+\varepsilon$.

Остальные случаи весьма аналогичны. □


**Упражнение.** *Выведите отсюда теорему о непрерывности монотонной функции.*



Вторая ситуация: необычайно удобно находить предел функции, зажимая её между двумя более простыми функциями с общим пределом в интересующей нас точке.

**Лемма.** *Если $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ вблизи $x = p$, причём $f(x) \to A$ и $h(x) \to A$ при $x \to p$, то также $g(x) \to A$ при $x \to p$.*

*Доказательство.* Упражнение. □

*Пример* (Первый замечательный предел)*.* Докажем, что

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \quad \text{при } x \to 0.$$

Ввиду чётности функции достаточно рассмотреть $x > 0$. Сравнение удвоенных площадей кругового сектора с углом раствора $x$ и двух треугольников даёт неравенство $\sin x \cos x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$, откуда находим $\cos x \leqslant x / \sin x \leqslant 1 / \cos x$. Искомое заключение следует из стремления $\cos x \to 1$ при $x \to 0$.

**Упражнение.** *Докажите неравенства*

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|, \qquad |\cos x_1 - \cos x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$$

*для всех вещественных $x_1$ и $x_2$.*

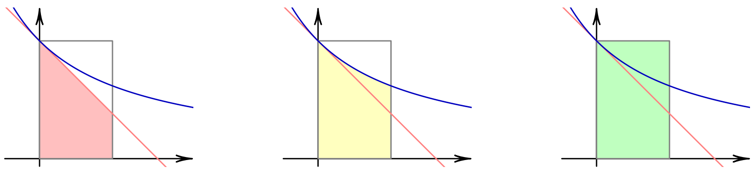
*Пример* (Третий замечательный предел)*.* Докажем, что

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1 \quad \text{при } x \to 0.$$

Воспользуемся определением логарифма как первообразной. Сравним при $x > 0$ площади $S(x)$ трапеции под касательной к графику $\frac{1}{1+x}$ в нуле, криволинейной трапеции под графиком и прямоугольника:

$$S(x) \leqslant \ln(1+x) \leqslant x,$$

но $S(x)/x = 1 - x/2 \to 1$ при $x \to 0$.



## 5.5. Дальнейшее изучение предела

Утверждения, собранные в этом разделе, весьма разнородны. В учебниках они могут находиться далеко друг от друга.

**Замена переменной.** Ввиду близкого родства предельного перехода и непрерывности, поищем для предела аналог леммы о непрерывности композиции $z = g(f(x))$ непрерывных функций.

Заменим требование непрерывности внешней функции $g(y)$ в точке $y = f(a)$ на предельный переход при $y \to f(a)$. Из-за того, что в предельном переходе при $y \to f(a)$ налагается запрет $y \neq f(a)$, непрерывность функции $f(x)$ в точке $x = a$ становится излишним требованием и можно заменить её на существование предела $b = \lim_{x\to a} f(x)$. При этом появится дополнительное условие $f(x) \neq b$ в некоторой выколотой окрестности точки $x = a$. Оно совсем не обременительно, поскольку на практике замены переменных должны быть обратимыми, а потому они всегда делаются на участках монотонности функции замены $y = f(x)$.

**Лемма.** *Если выполнены три условия:*

(1) $f(x) \to b$ *при* $x \to a$,
(2) $f(x) \neq b$ *вблизи точки* $x = a$, *кроме возможно её самой,*
(3) $g(y) \to c$ *при* $y \to b$,

*то* $g(f(x)) \to c$ *при* $x \to a$.

*Доказательство.* Повторим доказательство леммы о непрерывности композиции, заменяя окрестности на выколотые. □

Когда $g(y)$ непрерывна в точке $y = b$, отсюда получается правило

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big),$$

которым мы уже пользовались в примерах на раскрытие неопределённостей в пределах функций $x^x$, $x^{1/x}$ и $(1+x)^{1/x}$.

*Пример.* Посмотрим, что бывает, если забыть второе условие леммы. Возьмём функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0, \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = 0, \\ 1 & \text{при } y \neq 0. \end{cases}$$

Тогда $g(f(x)) = f(x) \to 0$ при $x \to 0$, хотя $g(y) \to 1$ при $y \to f(0) = 1$.

**Правила Бернулли — Лопиталя.** Напомним правило раскрытия основных неопределённостей типов $0/0$ и $\infty/\infty$.

лекция 16
27.10.16

**Теорема.** *Если $f(x) \to A$ и $g(x) \to A$ при $x \to a+0$, причём обе функции дифференцируемы на некотором интервале $(a, b)$, то в случаях $A = 0$ либо $A = +\infty$ выполнено равенство*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*как только предел в правой части существует.*

*Для других версий предела — двустороннего, слева, на бесконечности — верны аналогичные утверждения с соответствующей заменой интервала.*

*Доказательство.* Хотя первое правило, то есть случай $A = 0$, мы уже доказали в разделе 4.5, дадим сперва более формальное его доказательство с помощью $\varepsilon$ и $\delta$. ref

Если предел $f'(x)/g'(x)$ бесконечен, то перевернём дроби и продолжим. Если он конечен и равен $L$, то по произвольному $\varepsilon > 0$ найдём такое $\delta > 0$, что $|f'(x)/g'(x) - L| < \varepsilon$ на интервале $(a, a+\delta)$. Возьмём на нём три такие точки $u < c < v$, что

$$\frac{f(v) - f(u)}{g(v) - g(u)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Поскольку мы воспользовались здесь теоремой Коши о среднем, нужно предполагать, что $g'(x) \neq 0$ всюду на $(a, a+\delta)$. Значит,

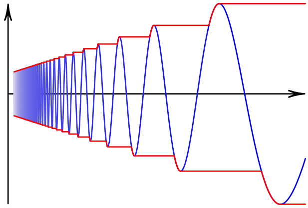
$$\left|\frac{f(v) - f(u)}{g(v) - g(u)} - L\right| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $u \to a+0$, получим $|f(v)/g(v) - L| \leqslant \varepsilon$.

Переходя теперь к случаю $A = +\infty$, задействуем те же обозначения. Умножим последнее допредельное неравенство на $1 - g(v)/g(u)$ и затем перегруппируем в левой части:

$$\left|\frac{f(u)}{g(u)} - \frac{f(v)}{g(u)} - L + \frac{g(v)}{g(u)} \cdot L\right| < \left|1 - \frac{g(v)}{g(u)}\right| \cdot \varepsilon.$$

Фиксируя $v$, устремим $u \to a+0$. Тогда $g(u) \to A = +\infty$ и слагаемые с выделенными знаменателями стремятся к нулю. Поэтому достаточно близко к $a$ будет выполнено неравенство $|f(u)/g(u) - L| < 2\varepsilon$. $\square$



**Верхние и нижние пределы.** В этом относительно продвинутом подразделе мы говорим в основном об односторонних пределах. Как мы видели, монотонные функции всегда их имеют. Простейшие примеры знакомых функций, не имеющих предела при $x \to +\infty$, это колеблющиеся $\cos x$ и $\sin x$. Композицию $\sin \frac{1}{x}$ часто указывают как пример функции с плохим разрывом при $x = 0$: оба односторонних предела не существуют, поскольку в любой окрестности этой точки функция колеблется, заполняя значениями отрезок $[-1, 1]$.

Возьмём теперь любую функцию $f(x)$, определённую справа от точки $x = p$. Фиксируя $p$, определим вспомогательные функции

$$f_*(p, \delta) = \inf\{f(x) \mid p < x < p + \delta\},$$
$$f^*(p, \delta) = \sup\{f(x) \mid p < x < p + \delta\}.$$

Первое удобство точных граней в том, что они всегда существуют. Второе их удобство в том, что $\delta_1 > \delta_2 > 0$ влечёт

$$f_*(\delta_1) \leqslant f_*(\delta_2), \quad f^*(\delta_1) \geqslant f^*(\delta_2),$$

то есть эти функции монотонны, несмотря на возможные колебания самой функции $f(x)$, а значит, всегда имеют пределы при $\delta \to +0$. Их называют **нижним** и **верхним пределами** $\underline{f(x)}$ $\overline{f(x)}$ при $x \to p + 0$. Эти предельные операции обозначают через $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$, либо $\liminf$ и $\limsup$. Начальные курсы анализа обычно обходятся без них, за исключением одного из основных признаков сходимости рядов, где нужен верхний предел последовательности, а не функции более привычного вида.

Аналогично вводят нижний и верхний пределы при $x \to p - 0$, двусторонние, а также на бесконечностях; нужно лишь заменить окрестности, используемые в определении вспомогательных функций.

*Пример.* При $x \to +\infty$ у функции $\sin x$ нижний предел равен $-1$, а верхний равен 1. Таковы же значения нижнего и верхнего пределов функции $\sin \frac{1}{x}$ при $x \to +0$.

*Пример.* Функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ колеблется вблизи нуля вместе с предыдущей, но тут множитель $x$ гасит колебания, ведь $|f(x)| \leqslant |x|$.

Нижний и верхний пределы равны 0, а потому $f(x) \to 0$ при $x \to 0$. Вывод также (более просто) следует из зажатости $-x \leqslant f(x) \leqslant x$.

**Теорема.** *Предел функции в точке существует, если и только если соответствующие нижний и верхний пределы совпадают, и в этом случае им равен.*

*Доказательство.* Упражнение. □

**Критерий Коши.** Определение предела функции $f(x) \to A$ использует само значение $A$. Поэтому оно становится непроверяемым и, следовательно, бесполезным, когда нет даже догадки, чему предел может быть равен. Теперь мы, вслед за Коши, наметим обходной путь. Идея в том, что при стремлении к конечному пределу значения функции в близких точках мало отличаются.

Говорят, что для $f(x)$ выполнено **условие Коши** при $x \to p$, если Cauchy 1821

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \colon x_1, x_2 \in B^\circ_\delta(p) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

**Теорема.** *Функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \to p \Leftrightarrow$ она удовлетворяет условию Коши при $x \to p$.*

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Дело сводится к простому неравенству

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A|.$$

($\Leftarrow$) Интересную часть своего критерия Коши доказать не смог. Как выяснилось через десятки лет, здесь прячется серьёзный вопрос о природе вещественных чисел. Доказательство должно опираться на свойство полноты, причём нам уже доступно простое рассуждение. Dedekind 187

Если функция $f(x)$ не имеет предела при $x \to p$, то её нижний и верхний пределы $A$ и $B$ в этой точке различны. По определению точных граней, любая окрестность точки $p$ содержит как точки, образы которых близки к $A$, так и точки, образы которых близки к $B$:

$$|f(x_1) - A| < \varepsilon, \quad |f(x_2) - B| < \varepsilon.$$

Выбрав $3\varepsilon < B - A$, получим $f(x_2) - f(x_1) > \varepsilon$, так что условие Коши не выполнено. Случаи с бесконечностями тут не охвачены, но они не сложны (упражнение). □

**Изолированные точки и точки сгущения.** В каких точках имеет смысл вообще говорить о непрерывности и пределе функции?

Чтобы правильно ответить на этот вопрос, мы должны вспомнить, что при $x \to p$ рассматриваются точки, удовлетворяющие одновременно двум условиям:

(1) точка $x$ находится в некоторой окрестности точки $p$;
(2) точка $x$ находится в области определения функции.

Поэтому ответ даётся в терминах, характеризующих расположение точки $p$ относительно точек области определения. Для простеньких областей определения, а они ведь чаще всего промежутки, ответ ясен, правда? Однако математики хотят иметь ответ для любой экзотической области определения; для этого тут вводятся новые термины.

*Определение.* Точку $p$ числового множества $X$ называют его **изолированной точкой**, если существует окрестность $p$, не содержащая других точек $X$.

*Определение.* Точку $p$ называют **точкой сгущения** числового множества $X$, если всякая выколотая окрестность $p$ содержит точку $X$.

Точка сгущения множества может лежать как в нём, так и вне его, но «на краю». Каждая точка числового множества является либо его изолированной точкой, либо его точкой сгущения.

*Примеры.* Все точки $\mathbb{N}$ являются его изолированными точками.
Все точки $\mathbb{Q}$ являются его точками сгущения.
Множеством точек сгущения $(0, 1)$ является $[0, 1]$.
Множеством точек сгущения $\mathbb{N}$ является $\{+\infty\}$.
Множеством точек сгущения $\mathbb{Q}$ является $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

**Лемма.** *Каждая функция непрерывна во всех изолированных точках своей области определения.*

*Доказательство.* В этой ситуации единственной полезной точкой, находящейся вблизи изолированной, является она сама, поэтому искомое неравенство в определении непрерывности выполнено тривиальным образом: $f(x) = f(p)$, ибо $x = p$. □

Однако в определении предела $x \neq p$, поэтому нелепо говорить о пределе функции в изолированной точке её области определения. Содержательно рассматривать только точки сгущения. Конечно, лучше запомнить это сейчас, чтобы впоследствии не отвлекаться регулярно на это проявление педантизма.

На самом деле, термины этого подраздела относятся к началам высокой и красивой науки — топологии. Позже мы столкнёмся ещё с несколькими, без которых трудно обсуждать многомерный анализ.

## 5.6. Дифференцируемость и дифференциалы

лекция 17
31.10.16

**Эволюция определения дифференцируемости.** Для строгого определения производной и дифференцируемости функции нам формально недоставало понятия предела. Уже упоминавшаяся во введении формулировка, данная Коши, непосредственно использует предел. Две более поздние формулировки не содержат предела явно, а опираются на непрерывность; они оказываются во многом более удобны.

Функции здесь определены на некотором промежутке, а дифференцируемость изучается в его внутренней точке.

*Определение* (Коши). Функцию $f(x)$ называют **дифференцируемой** в точке $x = p$, если существует конечный предел Cauchy 1821

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Значение этого предела называют **производной** функции $f$ в точке $p$ и обозначают через $f'(p)$.

Часто бывает удобно ввести $\delta = x - p$ и переписать предел как

$$f'(p) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(p+\delta) - f(p)}{\delta},$$

как мы делали ранее.

Ближе к Ньютону, введём теперь функцию $r(x)$ по правилу

$$r(x) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} - f'(p)$$

при $x \neq p$ и положим $r(p) = 0$, чтобы устранить разрыв. Дифференцируемость функции $f(x)$ по Коши в точке $x = p$ равносильна непрерывности в ней функции $r(x)$. Этим можно воспользоваться, чтобы сформулировать определение дифференцируемости иначе.

*Определение* (Вейерштрасс). Функцию $f(x)$ называют **дифференцируемой** в точке $x = p$, если существуют такое число $f'(p)$ и такая функция $r(x)$, непрерывная и зануляющаяся в точке $x = p$, что Weierstrass 1

$$f(x) = f(p) + f'(p)\cdot(x - p) + r(x)\cdot(x - p).$$

Эта форма условия дифференцируемости подчёркивает уравнение касательной к графику $f(x)$ в точке $x = p$. Кроме того, она прекрасно подходит для обобщения на функции нескольких переменных.

**Теорема.** *Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в ней.*

*Доказательство.* Это заложено в свойства функции $r(x)$. □

Можно принять определение Вейерштрасса и перейти к доказательству правил дифференцирования, но ещё большее упрощение формулировок и доказательств получится, если скомбинировать два последних слагаемых из этого определения в одно.

*Определение* (Каратеодори). Функцию $f(x)$ называют **дифференцируемой** в точке $x = p$, если существует такая функция $\varphi(x)$, непрерывная в точке $x = p$, что

athéodory 1950

$$f(x) = f(p) + \varphi(x) \cdot (x - p).$$

Производной $f'(p)$ называют значение $\varphi(p)$.

**Общие правила дифференцирования.** Установим теперь все общие правила дифференцирования: для арифметических операций, композиции и обратной функции. Необходимые проверки проводятся легко и практически единообразно на основе последнего определения дифференцируемости и свойств непрерывных функций.

**Теорема.** *Если функции $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $p$, то там дифференцируемы $f \pm g$, $fg$, а также $f/g$ при $g(p) \neq 0$, и их значения находятся по правилам из раздела 1.1.*

ref

*Доказательство.* Запишем по определению

$$f(x) = f(p) + \varphi(x) \cdot (x - p),$$
$$g(x) = g(p) + \psi(x) \cdot (x - p),$$

где функции $\varphi$ и $\psi$ непрерывны в точке $x = p$, и подставим в интересующую арифметическую операцию. Собрав затем слагаемые при множителе $x - p$, получим функцию, непрерывную в точке $x = p$ и имеющую там ожидаемое (правила-то давно известны) значение.

Сумма и разность совсем просты. Для произведения получаем

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(x)g(p) + f(x)\psi(x) \cdot (x - p) \\ &= f(p)g(p) + \big(\varphi(x)g(p) + f(x)\psi(x)\big) \cdot (x - p). \end{aligned}$$

Забавна асимметрия, пропадающая при подстановке $x = p$.

Для частного приведём дроби к общему знаменателю,

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{f(x)g(p) - f(p)g(x)}{g(x)g(p)},$$

подставим в числитель $f(x)$ и $g(x)$ и сократим слагаемые $\pm f(p)g(p)$.

От всей дроби останется

$$\frac{\varphi(x)g(p) - f(p)\psi(x)}{g(x)g(p)} \cdot (x - p),$$

откуда мы видим знакомое значение производной частного. □

**Теорема.** *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = p$ и функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке $y = f(p)$, то композиция $g(f(x))$ дифференцируема в точке $x = p$ и*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p).$$

*Доказательство.* Аналогично предыдущему рассуждению, запишем

$$f(x) - f(p) = \varphi(x) \cdot (x - p),$$
$$g(y) - g(f(p)) = \psi(y) \cdot (y - f(p))$$

и подставим первое во второе:

$$g(y) - g(f(p)) = \psi(f(x))\varphi(x) \cdot (x - p).$$

Выделенная функция непрерывна в точке $x = p$ и даёт требуемое значение производной композиции. □

**Теорема.** *Если функция $f(x)$ обратима и дифференцируема в точке $x = p$, причём $f'(p) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1}$ дифференцируема в точке $q = f(p)$ и*

$$(f^{-1})'(q) = (f'(p))^{-1}.$$

*Доказательство.* Опять запишем

$$f(x) - f(p) = \varphi(x) \cdot (x - p)$$

и выразим всё через $y = f(x)$ и обратную функцию:

$$y - q = \varphi(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1}(y) - f^{-1}(q)).$$

Умножив на функцию $1/\varphi(f^{-1}(y))$, непрерывную в точке $y = q$, получим требуемую формулировку дифференцируемости $f^{-1}$. □

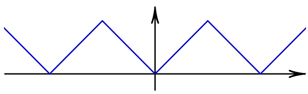
**Следствие.** *Все основные элементарные функции дифференцируемы внутри области определения.*

*Доказательство.* Дифференцируемость всех полиномов требует только арифметических свойств. Дифференцируемость $e^x$ и $\sin x$ выводится из замечательных пределов, как показано в разделе 1.1. Остальные функции — или обратные, или получаются через тригонометрические тождества. □ ref

Оговорка о внутренних точках исключает бесконечные производные функций $\arcsin x$ и $\arccos x$ в точках $\pm 1$ и функций типа $\sqrt{x} = x^{1/2}$ в нуле. При этом функции типа $x^{2/3}$ приходится считать определёнными только при $x \geqslant 0$. Однако композиция функций может переместить краевые эффекты внутрь области определения и породить там особую точку элементарной функции.

*Пример.* Функция $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ определена и непрерывна везде, но не дифференцируема в точке $x = 0$.

*Пример.* Функция $f(x) = \arccos(\cos x)$ определена и непрерывна везде, но не дифференцируема в точках $x = \pi k$ для всех целых $k$.



**Касательные и первые дифференциалы.** Вернёмся к определению дифференцируемости по Вейерштрассу и сопутствующей картинке с касательной, сперва считая фиксированной точку приложения $x_0$ вместо $p$.

Для изучения функции $y = f(x)$ вблизи одной точки $x = x_0$ выгодно ввести систему координат, привязанную к точке $(x_0, y_0)$ как началу. Координаты в этой системе называют **дифференциалами** и обозначают через $dx$ и $dy$, либо $df$. Уравнение касательной в этих координатах,

$$dy = f'(x_0)\, dx,$$

связывает дифференциалы между собой посредством производной и объясняет формальное равенство

$$f' = \frac{dy}{dx}.$$

При этом дифференциал независимой переменной просто равен её приращению: $dx = x - x_0$. Дифференциал функции обычно не равен её приращению точно, но является линейным приближением:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) = dy + o(dy).$$

Когда понято происходящее в фиксированной точке $x_0$, позволим ей меняться. Связь между дифференциалами часто приходится писать в неизвестной точке, поэтому $df = f'(x)\, dx$, где буква $x$ играет роль, выше принадлежавшую $x_0$, а в прежней роли $x$ появится $x + \Delta x$. Приращение $\Delta x$ не зависит от $x$. При каждом значении $x$ дифференциалы $dx$ и $df$ линейно зависят от $\Delta x$:

$$dx(\Delta x) = \Delta x, \qquad df(\Delta x) = f'(x)\Delta x.$$

Их пропорциональность и выражает формула $dy = f'(x)\,dx$.

Ввиду такой связи, правила вычисления производных немедленно влекут правила вычисления дифференциалов:

$$\begin{aligned} d(f \pm g) &= df \pm dg; \\ d(f \cdot g) &= df \cdot g + f \cdot dg; \\ d(f/g) &= (df \cdot g - f \cdot dg)/g^2. \end{aligned}$$

Возьмём теперь дифференцируемые функции $y = y(x)$ и $x = x(t)$. Правилу дифференцирования композиции $y = y(x(t))$ можно придать различные равносильные формы, например:

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t; \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Сравнивая линейные функции $dy$, $dx$ и $dt$ переменной $\Delta t$, видим

$$dy = y'_x\,dx = y'_x\,x'_t\,dt.$$

Поскольку $dy = y'_t\,dt$, получаем формулу

$$dy = y'_x\,dx = y'_t\,dt.$$

Её смысл в том, что форма (первого) дифференциала функции $y(x)$ не чувствительна к тому, является при этом $x$ независимой переменной или зависит от какой-то другой. Это свойство называют инвариантностью формы первого дифференциала.

**Две переменных.** Здесь мы можем скакнуть вперёд и рассмотреть хорошую функцию двух переменных $z = f(x, y)$. График является поверхностью в трёхмерном пространстве и в точке $(x_0, y_0, z_0)$ он имеет касательную плоскость; найдём коэффициенты её уравнения

$$z - z_0 = \alpha \cdot (x - x_0) + \beta \cdot (y - y_0).$$

Придадим приращение переменной $x$, оставляя значение $y$ постоянным. Сечение поверхности плоскостью $y = y_0$ есть линия $z = f(x, y_0)$. Видим отсюда, что $\alpha$ должно равняться наклону касательной к этой линии, а значит, значению производной от $f(x, y)$ как функции только переменной $x$ при неизменном $y$. Её называют **частной производной** функции $f(x,y)$ по $x$ и обозначают через $f'_x$ или $\frac{\partial f}{\partial x}$. Аналогично найдём $\beta$ и получим уравнение касательной плоскости

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Это даёт выражение дифференциала функции двух переменных:

$$df = f'_x(x_0, y_0)\, dx + f'_y(x_0, y_0)\, dy.$$

Когда понято происходящее в фиксированной точке $(x_0, y_0)$, позволим ей меняться и запишем дифференциал

$$df = f'_x(x, y)\, dx + f'_y(x, y)\, dy.$$

*Пример.* Возьмём функцию $z = x^2 + y^2$. Её дифференциал есть

$$dz = 2x\, dx + 2y\, dy.$$

Например, в точке $(3, -1)$ получаем $dz = 6\, dx - 2\, dy$. Уравнение касательной плоскости к графику этой функции в точке $(3, -1, 10)$ есть

$$z - 10 = 6 \cdot (x - 3) - 2 \cdot (y + 1) \quad \Longrightarrow \quad z = 6x - 2y - 10.$$

*Пример.* Найдём производную неявной функции $y = y(x)$, заданной условием $x^2 + y^2 = 1$. Используем предыдущий пример. Теперь $z = 1$ постоянно, а потому $dz = 0$. Получаем $y'(x) = dy/dx = -x/y$. Это выражение пригодно при $y \neq 0$, так что исключаются именно те две точки, вблизи которых нельзя задать $y(x)$ явной функцией.

Обобщая второй пример, получим правило дифференцирования неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $f(x, y) = 0$:

$$df = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'_x\, dx + f'_y\, dy = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -f'_x / f'_y.$$

Отметим в качестве стороннего замечания, что перегруппировка правила дифференцирования композиции даёт формулу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt}.$$

Она полезна, когда явная зависимость $y(x)$ не известна или сложна, а вместо того известны дифференцируемые функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда говорят, что функция $y(x)$ задана **параметрически**.

*Пример.* Для $x = \cos t$ и $y = \sin t$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{\sin t} = \mp \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Этот же результат получается дифференцированием явного выражения $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ или неявного из предыдущего примера.

**Высшие дифференциалы.** Первый дифференциал $df$, через свой коэффициент $f'(x)$, обычно зависит и от $x$. Поэтому осмыслен дифференциал дифференциала $d^2f = d(df)$. Продифференцируем произведение в выражении для первого дифференциала:

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) &= d\big(f'(x)\,dx\big) \\ &= d\big(f'(x)\big)\,dx + f'(x)\,d(dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)\,d^2x. \end{aligned}$$

Когда $x$ является независимой переменной, $dx$ есть функция от $\Delta x$, не зависящая от $x$, а тогда её дифференциал $d^2x$ равен нулю, поэтому $d^2f = f''(x)\,dx^2$. Аналогично, дифференциал произвольного порядка $m$ есть степенная функция приращения: $d^mf = f^{(m)}(x)\,dx^m$.

Здесь и везде $dx^m$ означает $(dx)^m$, а не $d(x^m)$; в последнем случае обязательны скобки.

Иначе, при $x = x(t)$, раскроем $d(dx)$ таким же образом и получим

$$d^2f = \big(f''_{xx}(x'_t)^2 + f'_x x''_{tt}\big)\,dt^2.$$

Инвариантностью формы высшие дифференциалы не обладают.

**Упражнение.** *Перепишите формулу Тейлора через дифференциалы:* Euler 1735?

$$\Delta f(\Delta x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} \frac{1}{k!} d^k f(\Delta x) + o\big(|\Delta x|^m\big).$$

**Упражнение** (Формула Лейбница)**.** *Проверьте, что*

$$d^m(u\cdot v) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \binom{m}{k}\, d^k(u)\, d^{m-k}(v).$$

**Упражнение.** *Найдите малоизвестную, но комбинаторно красивую формулу для высшего дифференциала $d^mf$ функции $f(x(t))$.*

## 5.7. Интегрирование по Риману и Дарбу

**Площадь как первообразная.** Напомним сперва некоторые основные понятия и свойства, упомянутые в первой главе. Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Обозначим через $S(x)$ площадь под графиком непрерывной функции на отрезке $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$.

**Теорема.** *Площадь $S(x)$ является первообразной для $f(x)$.*

*Доказательство.* Выберем малое $\delta > 0$ и введём функции

$$m(x) = \min\{f(c) \mid c \in [x, x+\delta]\},$$
$$M(x) = \max\{f(c) \mid c \in [x, x+\delta]\}.$$

рисунок Тогда из геометрии

$$m(x)\delta \leqslant S(x+\delta) - S(x) \leqslant M(x)\delta.$$

Поделим это неравенство на $\delta$ и перейдём к пределу при $\delta \to 0$. Ввиду непрерывности $f(x)$, при этом $m(x) \to f(x)$ и $M(x) \to f(x)$ для каждого фиксированного $x$. Мы получаем $f(x) \leqslant S'(x) \leqslant f(x)$. $\square$

Здесь мы исходим из интуитивного представления о площади и, тем не менее, сразу получаем важное её свойство. Более фундаментальный подход ниже в этом разделе как раз и служит, в частности, формальным определением площади. Площадь под графиком $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равна значению определённого интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

который вводится через интегральные суммы при помощи предельного перехода либо точных граней.

лекция 18
03.11.16

**Интегральные теоремы о среднем.** Если первообразная для $f(x)$ существует на некотором промежутке $\Delta$, то $f(x)$ называют **интегрируемой** на $\Delta$. Ниже в этом разделе мы установим, что каждая непрерывная функция на отрезке интегрируема. Отметим, что первообразная дифференцируема.

**Теорема.** *Если на отрезке $[a, b]$ интегрируемая функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то*

Cauchy 1821

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Получаемое неравенство полезно также переписать в виде

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

рисунок *Доказательство.* Это утверждение очевидно геометрически и может быть доказано разными способами. Один мы дадим здесь, а другой сразу для более общей теоремы.

Применим теорему Лагранжа о среднем к первообразной

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Получим $F(b) = f(c)(b-a)$ для некоторой точки $c \in (a,b)$. При этом $m \leqslant f(c) \leqslant M$. □

**Теорема** (Взвешенное среднее)**.** *Если функции $f(x)$ и $g(x) \geqslant 0$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $c \in [a,b]$, что* Cauchy 1821

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Это обобщение теоремы о среднем полезно для физических приложений. Вторая функция $g(x)$ играет роль удельной плотности, а в математике её обычно называют **весом**. Интеграл в правой части равенства вычисляет массу.

*Пример.* Если отрезок $[a,b]$ представляет собой стержень линейной плотности $g(x)$, то координата $x = c$ его центра тяжести определяется по формуле из теоремы, где нужно взять $f(x) = x$.

*Доказательство.* Для постоянной функции $f(x)$ получаем утверждение, просто вынося постоянную $f(x) = f(c)$ из-под интеграла. Иначе образ $f([a,b])$ отрезка является некоторым отрезком $[m,M]$. Умножив неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $g(x)$ и проинтегрировав, получим

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Это и означает, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

для подходящей точки $c \in [a,b]$. □

**Упражнение.** *Убедитесь, что теорема о взвешенном среднем работает в конце одного из доказательств формулы Тейлора, данных в разделе 4.4.* ref

**Линейность, аддитивность, монотонность.** Непосредственно геометрическими свойствами площади мотивированы основные свойства интеграла. Поскольку строгое построение интеграла ещё не дано, их следует расценивать как требования, которым искомое построение обязано удовлетворить. Все величины, выражающиеся интегралами, также ими обладают.

Линейность означает, что интеграл от линейной комбинации функций равен соответствующей линейной комбинации интегралов: для любых постоянных коэффициентов $\alpha$ и $\beta$ выполнено

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

Аддитивность нужна при разбиении отрезка на части:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

При заменах переменных удобно допускать случай, когда верхний предел интегрирования меньше нижнего. Сохранение аддитивности тогда влечет требование

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Монотонность означает, что (при $a \leqslant b$)

$$f(x) \geqslant 0 \text{ на } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Благодаря линейности, это сразу обобщается до

$$f(x) \geqslant g(x) \text{ на } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx,$$

ибо нужно лишь рассмотреть функцию $f - g \geqslant 0$.

В разнообразных доказательствах применяется неравенство

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

которое естественно (с высоты грядущих знаний) считать интегральным аналогом одной из форм неравенства треугольника:

$$|f(a) + f(b)| \trianglelefteq |f(a)| + |f(b)|.$$

Оно получается вследствие обобщённого свойства монотонности при интегрировании неравенства $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.

**Разбиения отрезка.** Построение интеграла Римана на отрезке основано на понятии разбиения. Чтобы указать разбиение отрезка $[a, b]$, на нём выбирают несколько точек. Для краткости, именно список точек

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

удобно называть **разбиением**. Обозначим длины фрагментов через

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

**Характерным параметром** разбиения $P$ называют $\delta(P) = \max\{\Delta x_k\}$.

Добавляя новые точки в имеющееся разбиение $P$, получаем разбиение $P' \supset P$. Тогда говорят, что $P'$ **мельче** $P$. Объединяя списки точек двух произвольных разбиений, получим разбиение, которое (вероятно) мельче обоих исходных. Дальше мы будем ссылаться на возможность рассмотрения всё более и более мелких разбиений. Важно при этом не столько увеличение количества точек, хотя оно и следует, сколько стремление к нулю характерного параметра.

**Интегральные суммы Римана.** Теперь у нас появляется функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Сделав разбиение отрезка, выберем произвольно по одной точке на каждом фрагменте: $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Составим **интегральную сумму**

рисунок

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Геометрически мы тут получим некоторое приближение к площади под графиком $f(x)$ на $[a, b]$. Точность приближения зависит от функции и от разбиения. Переходя к более мелким разбиениям, для хороших, плавных функций мы вправе надеяться на более точные приближения. Риман мимоходом осмелился рассматривать и неплавные. Euler 1768

*Определение.* Если предел интегральных сумм при $\delta(P) \to 0$ существует, конечен, и одинаков при любом выборе разбиений и точек, то его называют **определённым интегралом Римана** функции на отрезке и обозначают Riemann 185

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

В отличие от пределов функций и последовательностей, тут более сложный и громоздкий предельный процесс. На практике он актуален прежде всего для численного интегрирования на компьютерах, и то, разумеется, на конечной (допредельной) стадии.

Darboux 1875

**Интегральные суммы Дарбу.** Модификация построения, предложенная Дарбу, выглядит попроще и, во всяком случае, гораздо элегантнее. Для конкретного разбиения $P$ определим

$$m_k(P) = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k\},$$
$$M_k(P) = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k\}.$$

Возможность бесконечных точных граней исключим, предполагая $f(x)$ ограниченной на $[a, b]$.

Составим **нижнюю** и **верхнюю интегральные суммы**

$$\sigma(f, P) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} m_k(P)\Delta x_k, \quad \Sigma(f, P) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} M_k(P)\Delta x_k.$$

Поскольку $m_k(P) \leqslant M_k(P)$ по определению и $\Delta x_k > 0$, всегда верно неравенство $\sigma(f, P) \leqslant \Sigma(f, P)$.

**Лемма.** *Если $P \subset P'$, то для любой функции выполнено*

$$\sigma(f, P) \leqslant \sigma(f, P') \leqslant \Sigma(f, P') \leqslant \Sigma(f, P).$$

*Доказательство.* Достаточно понять, что происходит при добавлении к разбиению одной точки. □

рисунок

Смысл леммы без формул: при измельчении разбиения нижняя сумма может только увеличиться, а верхняя только уменьшиться. Определим теперь точные грани

$$L = \sup\{\sigma(f, P)\}, \quad U = \inf\{\Sigma(f, P)\}$$

по всевозможным разбиениям $P$ фиксированного отрезка.

*Определение.* Если $L = U$, то это число называют **определённым интегралом Дарбу** функции $f(x)$ на выбранном отрезке.

Если же $L < U$, то $f(x)$ не интегрируема на этом отрезке.

**Лемма.** *Интегрирования по Риману и Дарбу равносильны.*

Это значит, что каждая функция либо одновременно интегрируема в обоих смыслах и её интегралы Римана и Дарбу совпадают как числа, либо одновременно не интегрируема в обоих смыслах. Доказательство опустим, чтобы не разбираться в деталях сложных предельных процессов, излишних на уровне этого курса.

**Упражнение.** *Установите линейность, аддитивность и монотонность определённого интеграла Дарбу на основе арифметических свойств предела либо соответствующих свойств точных граней.*

**Интегрируемость и разрывы.** Отметим важнейшие классы интегрируемых функций. Прежде всего, это все непрерывные функции; однако монотонности оказывается достаточно при любых разрывах. Интересна также схожесть доказательств в этих двух случаях.

**Теорема.** *Всякая монотонная ограниченная функция на отрезке интегрируема.* Lacroix 1798

*Доказательство.* Разберём случай неубывающей функции $f(x)$. Возьмём любое разбиение $P$ с характерным параметром $\delta$. На каждом фрагменте $m_k(P) = f(x_{k-1})$ и $M_k(P) = f(x_k)$ ввиду монотонности. Поэтому разность сумм Дарбу быстро схлопывается: рисунок

$$\begin{aligned}\Sigma - \sigma &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} (M_k - m_k)\cdot \Delta x_k \\ &\leqslant \delta \cdot \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = \delta\cdot(f(b) - f(a)),\end{aligned}$$

что стремится к нулю вместе с $\delta$. □

**Теорема.** *Всякая непрерывная функция на отрезке интегрируема.* Cauchy 1823

Эта теорема закрывает последний формальный пробел в строгом обосновании фундаментальной теоремы анализа, более известной как формула Ньютона — Лейбница. Для доказательства полезно новое понятие, которое можно разглядеть и в предыдущем рассуждении, а также вспомогательное утверждение о малых колебаниях.

*Определение.* **Колебанием** функции $f$ на множестве $X$ назовём

$$\omega(f, X) = \sup f(X) - \inf f(X).$$

Неприятность $\infty - \infty$ не возникает там, где мы будем применять колебание: для ограниченных функций.

**Лемма.** *Если функция непрерывна на отрезке $K$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно разбить $K$ на конечное число фрагментов так, что колебание на каждом фрагменте меньше $\varepsilon$.*

*Доказательство теоремы.* Возьмём разбиение отрезка $[a, b]$ на $n$ фрагментов $P_k$ с малыми колебаниями, доставляемое леммой. Тогда рисунок

$$\Sigma - \sigma = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \omega(f, P_k)\cdot\Delta x_k < \varepsilon\cdot \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k = \varepsilon\cdot(b-a),$$

что стремится к нулю вместе с $\varepsilon$. □

*Доказательство леммы.* Предположим, что требование не достижимо, и придём к противоречию методом деления отрезка пополам.

Начнём с $K_0 = K$. Если бы обе его половины можно было разбить на фрагменты как требуется, то это дало бы разбиение всего $K_0$. Значит, хотя бы одну из половинок разбить нельзя; её и берём за $K_1$. Продолжая в том же духе, получим вложенные отрезки $K_0 \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ с одной общей точкой $p$.

По непрерывности найдём такое $\delta = \delta(\varepsilon/2) > 0$, что $|x-p| < \delta$ влечёт $|f(x) - f(p)| < \varepsilon/2$. Тогда на окрестности $U = B_\delta(p)$ имеем колебание $\omega(f, U) < 2\varepsilon/2 = \varepsilon$. Однако $K_n \subset U$ для достаточно больших номеров. Это даёт $\omega(f, K_n) \leqslant \omega(f, U) < \varepsilon$, поэтому $K_n$ годен как фрагмент, что противоречит его построению. □

*Определение.* Функцию называют **кусочно-непрерывной**, если она имеет конечное количество разрывов первого рода, вне которых непрерывна.

**Теорема.** *Всякая кусочно-непрерывная функция на отрезке интегрируема.*

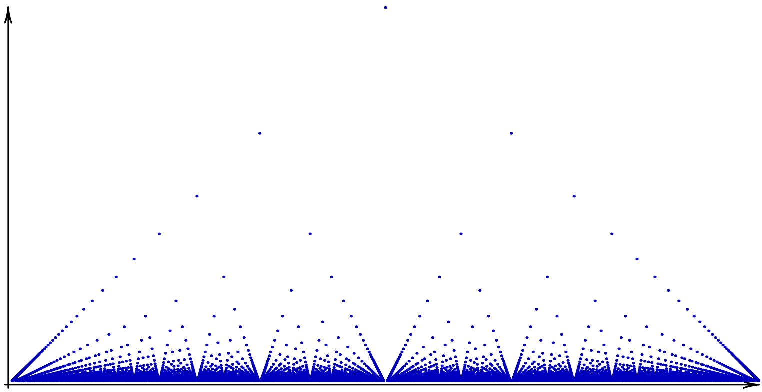
*Доказательство.* Разобьём весь отрезок на отрезки, внутри которых функция непрерывна, и рассмотрим их отдельно. Теперь у нас возможны лишь скачки на концах. Вклад скачка высоты $h$ в одной точке в разность между верхней и нижней суммами Дарбу не превосходит $|h| \cdot \delta(P)$, поэтому при измельчении разбиения он сводится к нулю. □

**Следствие.** *Изменение значений функции на конечном множестве точек не влияет на интегрируемость и значение интеграла.*

*Пример* (Функция Дирихле). Эта функция принимает значение 1 во всех рациональных точках и значение 0 во всех иррациональных. Её колебание на любом отрезке равно 1 и, в частности, она разрывна в каждой точке. На отрезке $[0, 1]$ всякая верхняя сумма Дарбу равна 1, а всякая нижняя равна 0. Поэтому функция Дирихле не интегрируема.

*Пример* (Функция Римана). Эта функция принимает значение $1/q$ в каждой рациональной точке $p/q$, где дробь несократимая, и равна нулю в иррациональных точках. На рисунке «Звёзды над Вавилоном» показаны значения этой функции во всех рациональных точках интервала $(0, 1)$ со знаменателями меньше 200.

Риман придумал этот (по сути) пример, чтобы показать силу предложенного им формального понятия интегрируемости. Несмотря на внешнее сходство с функцией Дирихле, функция ~~Римана~~ Томэ интегрируема по Риману на любом отрезке; интеграл равен 0. Множество



её точек разрыва совпадает с $\mathbb{Q}$ и оказывается недостаточно «большим», чтобы воспрепятствовать интегрируемости.

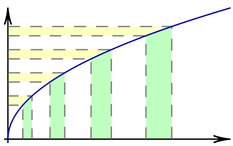
Точный порог в этом вопросе нашёл лишь Лебег: функция интегрируема по Риману на отрезке тогда и только тогда, когда она ограничена и множество точек разрыва пренебрежимо. Понятием пренебрежимости и другими элементами теории интеграла Лебега мы можем заниматься только в самом конце второго семестра. Lebesgue 190

**Упражнение.** *Для функции Римана установите: разрывность в рациональных точках; непрерывность в иррациональных точках; интегрируемость.*

**Равномерная непрерывность.** Изучая интегрируемость непрерывной функции, обычно выделяют одно из усилений непрерывности на множестве. Сначала запишем формально условие непрерывности во всех точках:

$$\forall p \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(p, \varepsilon)\colon \forall x \in X\ |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Почему здесь написано $\delta(p, \varepsilon)$? Это «мера» непрерывности в точке $p$.



*Примеры.* Возьмём функцию $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[0, 1]$ и найдём $\delta(\varepsilon)$ в разных точках.

Также для $f(x) = 1/x$ на полуинтервале $(0, 1]$.

Также для $f(x) = x^2$ на всей оси.

Как показывают примеры, априори нет никаких оснований считать, что одна и та же функция $\delta(\varepsilon)$ пригодна во всех точках $p \in X$. Однако со временем стала ясна важность этого случая. Итак, функцию $f$ называют **равномерно непрерывной** на множестве $X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\colon \forall x, y \in X \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Визуальное отличие от предыдущего — в расположении кванторов.

Dirichlet 1862
Heine 1872

**Теорема.** *Всякая непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна на нём.*

**Упражнение.** *Докажите эту теорему с помощью леммы о малых колебаниях на фрагментах.*

В следующей главе мы получим иное доказательство. Есть и другие, в том числе доступные сейчас, но хитроумные. Часто интегрируемость непрерывной функции на отрезке проводят через теорему о равномерной непрерывности, минуя лемму о малых колебаниях на фрагментах.

# Глава 6. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## 6.1. Зачем нужны последовательности?

лекция 19
07.11.16

Последовательности — одно из основных орудий математического анализа. Стандартные изложения предмета сперва заняты изучением их и только потом переходят к материалу, непосредственно нужному для приложений. Этот курс, наоборот, сначала освещает ту существенную часть одномерного анализа, приложения которой раньше востребованы физическими курсами, и где, вдумавшись, можно обойтись без последовательностей. Однако двигаться дальше без них нельзя.

**Определение последовательности.** Когда для каждого положительного целого числа $n$ задано число $x_n$, мы говорим, что определена (бесконечная) **последовательность** чисел $\{x_n\}$. В других разделах математики конечные последовательности также используют, но в анализе этот термин обычно относится только к бесконечным, а конечные называют иначе — например, наборами. Фигурные скобочки, вследствие дефицита типов скобочек, совпадают с обозначением для множеств; однако последовательности отличаются от множеств тем, что элементы первых перенумерованы и могут повторяться.

*Примеры.* Арифметическая прогрессия: $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

Геометрическая прогрессия: $\{3, 6, 12, 24, 48, \dots\}$.

Ещё геометрическая прогрессия: $\{1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$.

Десятичные приближения иррационального числа:

$$\{3, 3.1, 3.14, 3.142, 3.1416, 3.14159, \dots\}.$$

Последовательности бывают не только числовые, хотя в этой главе мы изучаем именно их. Последовательности вообще могут состоять из объектов любой природы. Например, нам уже встречались последовательности вложенных отрезков. Позже в курсе основ анализа мы будем отдельно изучать последовательности функций.

**Откуда берутся последовательности.** Источники числовых последовательностей весьма разнообразны, но можно выделить несколько характерных групп:

- итерации, или бесконечные повторяющиеся процессы;
- суммирование бесконечных рядов;
- последовательности как инструмент доказательства;
- искусственные примеры со специальными свойствами.

Итерации применялись с глубокой древности (Вавилон) для вычисления рациональных приближений к иррациональным числам.

*Пример.* Древняя рекуррентная формула, выражающая следующее приближение $x_{n+1}$ через известное $x_n$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big).$$

При разумном начальном приближении $x_1$ последовательность $\{x_n\}$ стремится к важному числу. Эта задача помещена в задания.

Newton 1669
Raphson 1690

*Пример* (Метод Ньютона — Рафсона)*.* Корни уравнения $f(x) = 0$, где функция достаточно хорошая, часто вычисляют с любой точностью, применяя простую рекурсию

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

рисунок

Её можно вывести, заменив функцию линейным приближением. Квадратичное приближение ведёт к более сложной, зато более точной формуле. Успех метода тем вероятнее, чем ближе начальное приближение $x_0$ к одному из корней. Ньютон рекомендовал искать $x_0$ графически.

Диофант?

*Пример.* Возьмём бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $a_n = 2^{-n}$. Частичной суммой прогрессии называют

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Частичные суммы образуют новую последовательность $\{S_n\}$, для вычисления которой имеется рекурсия $S_n = S_{n-1} + a_n$. С увеличением $n$ частичные суммы в данном случае приближаются к числу 1, которое и объявляют суммой исходной бесконечной прогрессии.

Бесконечный процесс, применённый в этом примере к геометрической прогрессии, в случае произвольных $a_n$ называют **суммированием ряда**. Суммой ряда называют предел $\lim S_n$ частичных сумм, когда он существует и конечен. Выделим такие процессы в отдельную группу ввиду их особой важности в анализе. Числовыми рядами мы займёмся в следующей главе, а функциональные появляются весной и подробнее изучаются на втором курсе.

Гораздо реже используются в приложениях вне самой математики бесконечные произведения, соответствующие рекурсии $P_n = P_{n-1} \cdot a_n$, и цепные дроби, соответствующие рекурсии $Q_n = a_n + 1/Q_{n-1}$, хотя их изучение тоже составляло целые области раннего анализа и принесло в математику много красивых фактов.

Wallis 1656

*Пример.* Число $\pi$ представляется бесконечным произведением:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \times \cdots .$$

Любопытно, что в этом открытии фигурируют факториалы полуцелых чисел и интеграл, определяющий бэта-функцию.

*Пример.* Функция $\sin x$ представляется бесконечным произведением Euler 1735

$$\sin x = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right) \times \cdots .$$

До этого Эйлер догадался по аналогии с (конечным) разложением произвольного комплексного полинома на линейные множители, соответствующие его нулям.

Одно из популярных применений последовательностей в доказательствах относится к альтернативному подходу к пределу функции, изложенному в конце следующего раздела. Кроме того, обобщения многих фактов одномерного анализа на многомерный удобно проводить на языке произвольных последовательностей.

## 6.2. Предел последовательности

**Определение предела последовательности.** Мы уже знакомы с пределом функции, так что понятие предела последовательности, вместе практически со всеми его свойствами, получается автоматически, как только уяснён тот факт, что числовая последовательность $\{a_n\}$ есть функция на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, заданная правилом $n \mapsto a_n$. Единственной точкой сгущения подмножества $\mathbb{N}$ расширенной числовой прямой является $+\infty$; значит, предел последовательности всегда берётся при $n \to +\infty$.

Излагая фокус иначе, по заданной числовой последовательности $\{a_n\}$ всегда можно определить функцию $a(x) = a_{\lfloor x \rfloor}$ для положительных $x$. Напомним, что $\lfloor x \rfloor$ обозначает округление вещественного числа вниз: наибольшее целое число, не превосходящее $x$. Пределом последовательности $\{a_n\}$ можно просто назвать предел функции $a(x)$ при $x \to +\infty$, и лишь затем интересоваться, существует он или нет.

Тем не менее, дадим здесь основные определения и формулировки так, будто пределов функции мы не знаем, лишь местами указывая на связи с ними. Это ближе к стандартным изложениям анализа, где предел последовательности вводится раньше предела функции, играя роль базового понятия. На реальных лекциях акцентируются новые явления и возможности, а не повторы уже увиденных.

Если элементы последовательности $\{a_n\}$ с достаточно большими номерами приближают число $a$ с произвольной заданной точностью, то $a$ называют **пределом** последовательности $\{a_n\}$. При этом говорят также, что $\{a_n\}$ **стремится** к $a$, и пишут $a_n \to a$, либо что $\{a_n\}$ **сходится**.

рисунок

Здесь важен акцент на проверяемости условия и связанная с ним двухшаговая структура формулировки. Сначала задаётся требуемая точность в виде маленького числа $\varepsilon > 0$, затем по ней находится достаточно большой номер $N(\varepsilon)$, обеспечивающий нужное приближение. Когда увеличивается требуемая точность, то есть уменьшается допуск $\varepsilon$, следует ожидать увеличения и порогового номера $N(\varepsilon)$.

Формальное компактное утверждение обычно выглядит так.

Gregory 1668
Alembert 1765

*Определение.* Последовательность $\{a_n\}$ называют **сходящейся**, если существует такое число $a$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \; \forall n > N \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

При этом $a$ называют её **пределом** и пишут $a = \lim a_n$ или $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. Зачастую приятнее писать равносильное высказывание

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \colon n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Иначе $\{a_n\}$ называют **расходящейся**.

*Примеры.* Последовательность $\{a_n\}$ с $a_n = 1/n$ стремится к нулю.

Последовательность $\{a_n\}$ с $a_n = (-1)^n$ расходится, предела нет.

**Упражнение.** *Разберитесь с тем, что формальная запись предела функции $a(x) = a_{\lfloor x \rfloor}$ приводит именно к данному определению.*

Часто полезна иная, равносильная формулировка: последовательность $\{a_n\}$ сходится к $a$, если снаружи любой заданной окрестности точки $a$ содержатся элементы $a_n$ лишь для конечного числа номеров $n$.

**Коридоры и хвосты.** Введём два удобных неформальных термина, сокращающих рассеивание внимания на скучных деталях.

Хотя последовательность можно изображать точками на числовой прямой, более информативна двумерная картинка с номерами по горизонтальной оси и значениями по вертикальной; это просто график последовательности как функции целых чисел. На ней $\varepsilon$-окрестность предела или даже подозрительной точки превращается в горизонтальную полосу, которую назовём $\varepsilon$-**коридором**.

рисунок

**Лемма.** *Всякие два неравных числа обладают непересекающимися коридорами.* □

Определение сходимости показывает, что никакой роли не играет поведение начальных элементов последовательности, даже любого конечного их числа. Сходящаяся последовательность выпрыгивает из любого заданного коридора вокруг её предела лишь конечное число раз. А то, что существенно и будет часто упоминаться, заслуживает особого термина.

Назовём **хвостом** последовательности её (конечно же бесконечную) часть, состоящую из всех элементов с номерами, начинающимися с произвольного фиксированного. Хвост это снова последовательность, но по сравнению со всей исходной он может иметь желанное дополнительное свойство. В этом удобство хвоста, как и в том, что уточнять номер его начала нередко бывает излишне. Итак, по необходимости последовательностям будем спокойно «отрубать голову».

Не упоминая хвосты, обычно говорят, что некоторое свойство элементов последовательности верно *для всех достаточно больших* $n$, или сокращённо $\forall n \gg 1$.

**Лемма.** *Всякая сходящаяся числовая последовательность имеет ровно один предел.*

*Доказательство.* Суть в том, что нельзя разорвать сходящийся хвост.

Если различные числа $a$ и $b$ являются пределами одной последовательности $\{x_n\}$, то выберем любое $\varepsilon < |a-b|/2$. Тогда $\varepsilon$-коридоры вокруг $a$ и $b$ не пересекаются; никакой хвост последовательности $\{x_n\}$ не может лежать ни в одном из них, ибо должен лежать в обоих. □

Иногда бывает полезно забыть о нумерации последовательности и о повторах в ней. Тогда элементы составят обычное множество.

**Лемма.** *Всякая сходящаяся числовая последовательность ограничена как числовое множество.*

*Доказательство.* Хвост лежит в ограниченном коридоре, а голова состоит из конечного числа элементов и потому ограничена сверху и снизу наибольшим из них по абсолютной величине. □

**Арифметические и порядковые свойства предела.** Арифметические операции на последовательностях определяются посредством тех же операций на элементах с соответствующими номерами. Например, если $a_n = 2^n$ и $b_n = 1$, то $\{a_n - b_n\} = \{1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63, \dots\}$.

**Теорема.** *Если* $a_n \to a$ *и* $b_n \to b$, *то*

(1) *из условия* $a < b$ *следует, что* $a_n < b_n$ *для всех* $n \gg 1$;

(2) *из условия* $a_n \leqslant b_n$ *для всех* $n \gg 1$ *следует, что* $a \leqslant b$.
(3) *из условия* $a_n < b_n$ *для всех* $n \gg 1$ *следует лишь, что* $a \leqslant b$.

*Доказательство.* (1) Непересекающиеся коридоры вокруг $a$ и $b$ содержат хвосты соответствующих последовательностей.

$(2, 3)$ В силу первого пункта, обратное неравенство $a > b$ повлекло бы обратное же неравенство на хвостах, противоречащее условию. □

*Пример.* Последнее неравенство в теореме в общем случае нестрогое. Действительно, возьмём $a_n = 1/n^2$ и $b_n = 1/n$. Тогда $a_n < b_n$ при $n > 1$, но обе последовательности, конечно, стремятся к нулю.

**Теорема.** *Если* $a_n \to a$ *и* $b_n \to b$, *то*

(1) $ca_n \to ca$ *для любой постоянной* $c$;
(2) $a_n \pm b_n \to a \pm b$;
(3) $a_n b_n \to ab$;
(4) *при* $b \neq 0$ *также* $1/b_n \to 1/b$ *и, следовательно,* $a_n/b_n \to a/b$.

*Доказательство.* Все утверждения нетрудно проверить на рисунках коридоров и хвостов. Стандартные формальные проверки находятся в книгах, но мало чему учат. Здесь мы их немного модифицируем, ибо полезно явно выразить точности доказываемых приближений через точности исходных.

Перейдём к хвостам $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, лежащим в $\varepsilon$-коридорах вокруг $a$ и $b$ соответственно:

$$|a_n - a| \approx \varepsilon, \qquad |b_n - b| \approx \varepsilon.$$

Совсем не хитры оценки

$$|ca_n - ca| \approx |c|\varepsilon, \qquad |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \approx 2\varepsilon.$$

Приближая площадь прямоугольника со сторонами $a$ и $b$, увидим

$$|a_n b_n - ab| \approx (|a| + |b|)\varepsilon.$$

Наконец,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b_n|} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b_n - b| \approx \frac{1}{b^2}\varepsilon.$$

Во всех случаях точность пропорциональна исходной. Поэтому, какая бы точность ни потребовалась для результата арифметической операции, она достижима увеличением точности операндов. □

**Бесконечные пределы.** Разумно устроить формальное определение бесконечного предела так, чтобы

$$\lim a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim 1/a_n = 0$$

хотя бы для последовательностей с положительными элементами. Значит, хвост $\{a_n\}$ должен удовлетворять условию $0 < 1/a_n < \varepsilon$, равносильному $a_n > 1/\varepsilon$. Обычно тут заменяют $\varepsilon$ на «большую» букву:

$$\begin{aligned}\lim a_n = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon n > N \Rightarrow a_n > 1/\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \forall M > 0\ \exists N = N(M)\colon n > N \Rightarrow a_n > M.\end{aligned}$$

В отрицательную сторону аналогично определяем

$$\lim a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\ \exists N = N(M)\colon n > N \Rightarrow a_n < -M.$$

Картинки с коридорами помогают и здесь. рисунок

К этим формулировкам ведёт и другой путь. Сперва видоизменим определение конечного предела. Какое множество точек определяется условием $|a_n - a| < \varepsilon$? Вспомните, что его называют $\varepsilon$-окрестностью точки $a$ и обозначают через $B_\varepsilon(a)$. Значит,

$$\lim a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon n > N \Rightarrow a_n \in B_\varepsilon(a).$$

В конце семестра, на новом уровне, такая запись уже может стать предпочтительней. А сейчас минимальный полёт фантазии подсказывает сыроватое определение бесконечного предела:

$$\lim a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon n > N \Rightarrow a_n \in B_\varepsilon(+\infty).$$

Остаётся вспомнить, что окрестностью бесконечности мы считаем любой бесконечный вправо промежуток, задать его неравенством, а также сменить малый параметр $\varepsilon$ на большой. Так мы и приходим к данному выше определению.

Таким же образом фрагмент $\exists N\colon n > N$ высказывания о существовании предела последовательности объясняется как наличие окрестности $B_N(+\infty) = (N, +\infty)$ бесконечности, и определение предела последовательности становится почти идентично определению предела функции на бесконечности.

**Теорема.** *Если $a_n \to +\infty$,*

(1) *а последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то $a_n \pm b_n \to +\infty$;*
(2) *а постоянная $c \neq 0$, то $ca_n \to \pm\infty$, смотря по знаку $c$.*

*Доказательство.* Коридорное упражнение. □

На основе теорем об арифметических свойствах пределов последовательностей решаются различные задачи на вычисление пределов. Однако эти теоремы покрывают не все возможные случаи. Не покрытые случаи, которые часто называют неопределённостями, оказываются самыми интересными и требуют более тонких и сильных средств. Особые разъяснения тут излишни, ибо в большинстве обычных примеров вопрос сразу сводят к пределу функции. Несколько примеров специального трюкачества мы рассмотрим в следующем разделе.

**Секвенциальный подход к пределу функции.** Это необычное прилагательное происходит от английского *sequence*, ныне значащего «последовательность» (и восходящего к латыни). Исходно так называли гимны — последовательности нот.

Интуитивное понимание стремления $f(x) \to A$ при $x \to p$ здесь заменяется кратким и строгим определением, опирающимся на предел последовательности. Такой подход явно использовал ещё Лейбниц, а формальное выражение его обычно связывают с Гейне.

*Определение.* Говорят, что при $x \to p$ функция $f(x)$ имеет предел $A$, или стремится к $A$, в смысле Гейне, если для всякой последовательности $\{x_n\}$ с $x_n \neq p$, сходящейся к $p$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $A$.

Это определение сразу же, без модификаций, охватывает бесконечные вариации. Для односторонних пределов нужно заменить условие $x_n \neq p$ на $x_n < p$ либо на $x_n > p$. Произвольную последовательность $x_n \to p$, взятую для проверки или применения предела функции, часто называют **пробной**.

**Лемма.** *Если для всех пробных $x_n \to p$ последовательности образов $\{f(x_n)\}$ сходятся, то пределы всех их совпадают.*

*Доказательство.* Чередованием двух пробных последовательностей $x_n \to p$ и $y_n \to p$ составим ещё одну: $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$. Образы её элементов сгущаются и к $\lim f(x_n)$, и к $\lim f(y_n)$, поэтому эти пределы обязаны совпадать. □

**Теорема.** *Определения предела функции по Коши и по Гейне равносильны.*

*Доказательство.* Обозначим высказывания Коши и Гейне о стремлении $f(x) \to A$ при $x \to p$ через $C$ и $H$. Мы должны установить истинность импликаций $C \Rightarrow H$ и $H \Rightarrow C$. Первое мы сделаем напрямую, а второе от противного, то есть установим, что $\neg C \Rightarrow \neg H$. Ограничимся случаем конечных значений $p$ и $A$.

($C \Rightarrow H$) Выберем пробную последовательность $x_n \to p$. Тогда

$$\forall \delta > 0\ \exists N = N(\delta)\colon 0 < |x_n - p| < \delta \text{ при } n > N.$$

Сопоставим это с высказыванием $C$: по произвольному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $0 < |x - p| < \delta$ влечёт $|f(x) - A| < \varepsilon$. Именно для этого $\delta$ найдём наше $N = N(\delta(\varepsilon))$, начиная с которого хвост $\{x_n\}$ не выпрыгивает из $\delta$-окрестности точки $p$. При истинности $C$ получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon |f(x_n) - A| < \varepsilon \text{ при } n > N,$$

что означает $f(x_n) \to A$ и даёт истинность $H$.

($H \Rightarrow C$) Если ложно $C$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta$ существует... Вот и возьмём $\delta = 1/n$ и такое $x_n$, что $0 < |x_n - p| < 1/n$, но $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ стремится к $p$, но $\{f(x_n)\}$ никак не может стремиться к $A$, так что ложно $H$. $\square$

**Упражнение.** *Проследите модификации, необходимые в односторонних и «бесконечных» случаях.*

**Упражнение.** *Переведите рассуждение на язык окрестностей.*

Из связи непрерывности с пределом моментально получаем секвенциальную версию непрерывности.

*Определение.* Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $p$ в смысле Гейне, если для всякой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к $p$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(p)$.

Секвенциальный подход даёт более простые доказательства многих свойств предела функции и непрерывности. Он легко обобщается на функции нескольких переменных.

**Упражнение.** *Используя секвенциальный подход, докажите:* гиперссылки

- *единственность предела функции;*
- *его порядковые и арифметические свойства;*
- *лемму об односторонних и двусторонних пределах;*
- *лемму о замене переменной в предельном переходе;*
- *критерий Коши существования предела.*

## 6.3. Зажатые и монотонные последовательности

**Зажатые последовательности.** Удобно доказывать существование предела последовательности $\{y_n\}$ и находить его, подбирая две более простые или известные последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ с общим пределом, зажимающие $\{y_n\}$, будто в тиски.

**Лемма.** *Если $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ для всех $n \gg 1$, то $x_n \to p$ и $z_n \to p$ влечёт $y_n \to p$, включая случаи $p = +\infty$ и $p = -\infty$.*

рисунок *Доказательство.* Коридорное упражнение: хвост $\{y_n\}$ зажат между хвостами $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$. □

Эту лемму часто называют *леммой о двух милиционерах* или *леммой о трёх собачках.*

**Следствие.** *Если $a \leqslant y_n \leqslant z_n$ для всех $n \gg 1$ и $z_n \to a$, то $y_n \to a$.*

**Монотонные последовательности.** Поведение числовой последовательности существенно проще изучить, когда в ней сохраняется один и тот же знак неравенства между всеми соседними элементами. Такие последовательности называют **монотонными**. Точнее, в зависимости от вида неравенства:

- если $a_n \geqslant a_{n+1}$ для всех $n$, то $\{a_n\}$ **невозрастающая**;
- если $a_n \leqslant a_{n+1}$ для всех $n$, то $\{a_n\}$ **неубывающая**;
- если $a_n > a_{n+1}$ для всех $n$, то $\{a_n\}$ **убывающая**;
- если $a_n < a_{n+1}$ для всех $n$, то $\{a_n\}$ **возрастающая**.

Часто бывает, что вся последовательность не монотонна, но имеет монотонный хвост; им тогда и пользуются в доказательствах.

**Лемма.** *Точная нижняя грань невозрастающей последовательности есть её предел. Точная верхняя грань неубывающей последовательности есть её предел.*

*Доказательство.* Для неубывающей последовательности $\{a_n\}$ положим $a = \sup\{a_n\}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ число $a - \varepsilon$ не является верхней гранью этой последовательности, а потому найдётся элемент $a_N > a - \varepsilon$. Из монотонного неубывания получаем $a - \varepsilon < a_n \leqslant a$ для всех $n \geqslant N$, и по определению предела $a = \lim a_n$.

Случай невозрастания вполне аналогичен (упражнение). □

**Теорема** (Вейерштрасс)**.** *Всякая (ограниченная) монотонная последовательность имеет (конечный) предел.*

*Доказательство.* Ввиду леммы дело сводится к существованию точных граней у любого числового множества. □

**Примеры трюков.** Теперь рассмотрим несколько примеров последовательностей, при том ограничивая себя в мощных средствах и прибегая к хитростям. но зачем?

*Пример.* Возьмём $x_n = a^n/n!$, где $a > 0$. Установим характер монотонности: $x_n/x_{n-1} = a/n < 1$ при $n > a$; значит, хвост монотонно убывает и предел существует: $x_n \to u$. В то же время, $x_n = x_{n-1}a/n \to u \cdot 0$, поэтому получаем ответ

$$a^n/n! \to 0 \quad \text{для всех } a > 0.$$

*Пример.* Возьмём $x_n = \sqrt[n]{a}$, где для начала $a > 1$. Тогда $\{x_n\}$ монотонно убывает, причём $x_n > 1$. По теореме Вейерштрасса, она имеет какой-то предел $p \geqslant 1$.

Найти значение $p$ можно несколькими способами. Например, трюк $\sqrt[n]{a} = (\sqrt[2n]{a})^2 \to p^2$ даёт $p^2 = p$, и мы находим $p = 1$ независимо от $a$.

Другой способ: начнём с догадки, что $p = 1$; чтобы подтвердить её, возьмём $\varepsilon > 0$ и проверим, что $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$. Пороговое значение $N(\varepsilon)$ обнаружится в ходе проверки: условие равносильно $a < (1+\varepsilon)^n$, а это гарантировано при $a < 1 + n\varepsilon$ ввиду неравенства Бернулли $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$; отсюда находим $N(\varepsilon) = \lceil \frac{a-1}{\varepsilon} \rceil$.

Для $0 < a < 1$ либо повторим рассуждение, либо перейдём к последовательности $\{1/x_n\}$. Придём к ответу:

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad \text{для всех } a > 0.$$

**Лемма** (Неравенство Бернулли)**.** *Для всех $x > -1$ верно неравенство* Barrow 1670 Bernoulli 168

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx,$$

*где $n$ натуральное. При $n > 1$ и $x \neq 0$ неравенство строгое.*

*Доказательство.* По индукции (упражнение). □

*Пример.* Возьмём $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Раскроем $n = (1 + x_n)^n$ по биному и выделим два слагаемых:

$$n = (1+x_n)^n = 1 + nx_n + \tfrac{1}{2}n(n-1)x_n^2 + \ldots \geqslant 1 + \tfrac{1}{2}n(n-1)x_n^2.$$

Знак неравенства верен, ибо отброшенные слагаемые неотрицательны. Значит, $x_n \leqslant y_n = \sqrt{2/n}$. Последовательность $\{y_n\}$ стремится к нулю, так что лемма о зажатой последовательности даёт $x_n \to 0$. Итак,

$$\sqrt[n]{n} \to 1.$$

*Пример.* Возьмём $x_n = \sqrt[n]{n!}$ и покажем, что последовательность $\{x_n\}$ не ограничена. Если бы она была ограничена, $x_n \leqslant c$, то получилось бы $n! \leqslant c^n$ для всех $n$; это невозможно, ибо, как мы уже знаем, $c^n/n! \to 0$.

**Упражнение.** *Дана последовательность $a_n \to a$. Найдите пределы последовательностей:*

(1) *средних арифметических $x_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$;*
(2) *средних геометрических $y_n = (a_1 \cdot a_2 \times \cdots \times a_n)^{1/n}$, если $a_n > 0$.*

**Упражнение.** *Дана положительная последовательность $a_n \to a$. Докажите, что $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim\bigl(a_{n+1}/a_n\bigr)$ как только второй предел существует.*

**Число $e$ как предел.** Важнейшее число $e$ долгое время оставалось в математике как бы за кадром, несмотря на исследования логарифмов, в том числе натуральных, то есть по основанию $e$. Явным образом оно впервые возникло из задачи о сложных процентах в банковском деле.

Bernoulli 1683
Leibniz 1690

Формула сложных процентов содержит

$$T_n = \bigl(1 + \tfrac{1}{n}\bigr)^n,$$

а предел при $n \to \infty$ соответствует так называемому непрерывному начислению процентов. Бернулли ввёл новое число как предел последовательности $\{T_n\}$, но вычислить его не смог, доказав лишь, с помощью бинома, что $2 < \lim T_n < 3$. Делая замену $x = 1/n$, видим, что этот предел должен быть равен пределу функции $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$. Значит, он равен основанию натуральных логарифмов (второй замечательный предел).

Euler 1731?

Вычислил это число Эйлер. Следуя Эйлеру, рассмотрим сумму

$$S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \tfrac{1}{k!} = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \ldots + \tfrac{1}{n!}.$$

Последовательность $\{S_n\}$ монотонно возрастает и потому сходится к своей точной верхней грани. Пользуясь неравенством $n! \geqslant 2^{n-1}$, строгим при $n > 2$, заменим слагаемые на бо́льшие:

$$S_n < 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \ldots + \tfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2 - \tfrac{1}{2^n} < 3.$$

Справа, помимо первой единицы, видим геометрическую прогрессию. Поскольку $\{S_n\}$ ограничена, её предел конечен. Это важнейшее число всегда обозначается через $e$.

Дополнительное преимущество последовательности $\{S_n\}$ в её быстрой сходимости благодаря росту факториалов, тогда как $\{T_n\}$ сходится столь медленно, что не пригодна для практического вычисления.

Проверим же, наконец, что $T_n \to e$. Для этого сперва введём вспомогательное обозначение

$$\theta_{n,k} = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 - \tfrac{k}{n}\right).$$

Тогда $0 < \theta_{n,k} < 1$ и при каждом фиксированном значении $k$ последовательность $\{\theta_{n,k}\}$ монотонно возрастает и стремится к 1.

Теперь раскроем $T_n$ по биному:

$$T_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = \cdots = 1 + 1 + \tfrac{1}{2!}\theta_{n,1} + \tfrac{1}{3!}\theta_{n,2} + \cdots + \tfrac{1}{n!}\theta_{n,n-1}.$$

Отсюда и из свойств чисел $\theta_{n,k}$ сразу получим оценку $T_n < S_n$ и монотонное возрастание последовательности $\{T_n\}$. Поэтому $\lim T_n \leqslant e$.

Далее, запишем такое же выражение для $m > n$ и отбросим «лишние» (положительные) слагаемые:

$$\begin{aligned} T_m &= 1 + 1 + \tfrac{1}{2!}\theta_{m,1} + \tfrac{1}{3!}\theta_{m,2} + \cdots + \tfrac{1}{n!}\theta_{m,n-1} + \cdots + \tfrac{1}{m!}\theta_{m,m-1} \\ &> 1 + 1 + \tfrac{1}{2!}\theta_{m,1} + \tfrac{1}{3!}\theta_{m,2} + \cdots + \tfrac{1}{n!}\theta_{m,n-1}. \end{aligned}$$

При $m \to \infty$ и фиксированном $n$ предел монотонно возрастающей правой части неравенства равен $S_n$. Поэтому $\lim T_m \geqslant S_n$ для всех $n$, но тогда $\lim T_m \geqslant \sup S_n = e$. Отсюда $\lim T_m = e$ ввиду зажатости.

**Упражнение.** *Модифицируйте рассуждение, чтобы представить функцию $e^x$ в виде суммы бесконечного ряда:*

$$e^x = \sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

**Теорема.** *Число $e$ иррационально.*

*Доказательство.* Допустим противное: $e = p/q$, где $p$ и $q$ целые. Тогда $q! \cdot S_{q+n}$ должно стремиться к целому числу $q! \cdot e = (q-1)! \cdot p$. Отделим первые слагаемые ввиду того, что они являются целыми числами: Euler 1737

$$\begin{aligned} q! \cdot S_{q+n} &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant q} \frac{q!}{k!} + \left(\frac{q!}{(q+1)!} + \cdots + \frac{q!}{(q+n)!}\right) \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant q} \frac{q!}{k!} + \left(\frac{1}{q+1} + \cdots + \frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}\right). \end{aligned}$$

Обозначим сумму в скобках через $R_n$. Это монотонно возрастающая последовательность, предел которой при $n \to \infty$ должен быть целым числом. Однако, заменяя слагаемые на бóльшие, дающие геометрическую прогрессию, можно ограничить $R_n$ сверху правильной дробью:

$$R_n < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(q+1)^n} = \cdots = \frac{1}{q} \cdot \left(1 - \frac{1}{(q+1)^n}\right) < \frac{1}{q}.$$

Поэтому $0 < \lim R_n < 1$ и мы пришли к противоречию. $\square$

## 6.4. Частичные пределы и компактность отрезка

лекция 21
14.11.16

**Точки сгущения и подпоследовательности.** Точку $p \in \overline{\mathbb{R}}$ называют **точкой сгущения** числовой последовательности $\{x_n\}$, если любая окрестность $p$ содержит элементы $x_n$ для бесконечного количества значений индексов $n$.

*Пример.* Возьмём $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$, или $\{x_n\} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots\}$. Имеется три очевидных точки сгущения: 1, 0, $-1$.

*Пример.* Возьмём $x_n = (-1)^n n$, или $\{x_n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$. Имеется две очевидных точки сгущения: $-\infty$ и $+\infty$.

*Пример.* Возьмём $x_n = 1/n$. Имеется единственная точка сгущения 0.

рисунки

*Пример.* В намного более хитром примере

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{6}, \tfrac{3}{6}, \tfrac{4}{6}, \tfrac{5}{6}, \dots$$

точек сгущения больше: они заполняют (упражнение) отрезок $[0, 1]$.

02.02.17

Отметим отличие от понятия точки сгущения числового множества $X$: в том определении любая выколотая окрестность точки $p$ должна содержать хотя бы одну точку множества $X$. В следующем важном на практике случае эта деталь исчезает и понятия совпадают.

**Лемма.** *Предположим, что числовая последовательность $\{x_n\}$ и точка $p \in \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяют двум условиям:*

(1) *$x_n \neq p$ ни для какого индекса $n$;*
(2) *всякая окрестность $p$ содержит хотя бы один элемент $x_n$.*

*Тогда $p$ является точкой сгущения этой последовательности.*

*Доказательство.* Возьмём произвольную первую окрестность $U_1 \ni p$. Требуется найти бесконечное количество значений индексов $n$. Сперва найдём такой индекс $n_1$, что $x_{n_1} \in U_1$, а затем уменьшим окрестность, взяв такую $U_2$, что $x_{n_1} \notin U_2$. Повторив эти два действия для $U_2$ вместо $U_1$, получим $x_{n_2} \notin U_3$. Так можно продолжать до бесконечности. $\square$

Бесконечное количество значений индексов образует возрастающую последовательность $\{n_k\} = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$ натуральных чисел. По каждой такой последовательности выберем из произвольной последовательности $\{x_n\}$ все элементы с индексами, входящими в $\{n_k\}$. Получится **подпоследовательность** исходной последовательности $\{x_n\}$, обозначаемая $\{x_{n_k}\}$. Правда, во избежание громоздких обозначений и несмотря на риск путаницы, часто ограничиваются словами *перейдём к подпоследовательности*, перенося затем на эту подпоследовательность обозначение исходной последовательности $\{x_n\}$.

примеры!

Цель перехода от исходной последовательности к её подпоследовательности та же самая, что и у перехода к хвосту: получить в распоряжение хорошее свойство, отсутствующее у исходной последовательности. При этом область применения отлична. Любой хвост является подпоследовательностью, но не любая подпоследовательность является хвостом: в подпоследовательности обычно есть «пропуски».

**Лемма.** *Всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.*

*Доказательство.* Коридорное упражнение. □

Ситуация гораздо интереснее для расходящихся последовательностей. Точку $p \in \overline{\mathbb{R}}$ называют **частичным пределом** числовой последовательности, если она имеет подпоследовательность, сходящуюся к $p$. Множество всех частичных пределов числовой последовательности является важнейшей её характеристикой.

**Упражнение.** *Сохраняется ли множество всех частичных пределов последовательности*

(1) *при переходе к хвосту (отрубании головы);*
(2) *при переходе к подпоследовательности?*

**Упражнение.** *Проверьте, что числовая последовательность не ограничена сверху тогда и только тогда, когда она сгущается на* $+\infty$.

**Лемма.** *Для всякой числовой последовательности точка сгущения является частичным пределом и наоборот.*

*Доказательство.* Возьмём частичный предел $p$ последовательности $\{x_n\}$. Раз некоторая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к точке $p$, по определению предела каждая окрестность этой точки содержит хвост $\{x_{n_k}\}$, а это всё элементы $\{x_n\}$ для бесконечного количества номеров. Поэтому $p$ является точкой сгущения.

Наоборот, по точке сгущения $p$ последовательности $\{x_n\}$ определим возрастающую последовательность номеров

$$n_k = \min\{n > n_{k-1} \mid x_n \in B_{1/k}(p)\}.$$

Начало тут не важно, так что можно взять $n_0 = 1$. В конечном случае

учесть $B_\varepsilon(\pm\infty)$

получим $|x_{n_k} - p| < 1/k$, а в бесконечном $|x_{n_k}| > k$. Значит, подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к $p$ при $k \to \infty$. □

Разница между понятиями точки сгущения и частичного предела лишь в областях приложения. Частичные пределы часто рассматривают только для последовательностей, а точки сгущения — для множеств разной природы.

**Теорема о точке сгущения.** Это утверждение иногда кладут в основу строгого построения анализа, а стандартный метод его доказательства делением отрезка пополам применим и во многих других ситуациях.

раньше!

**Лемма.** *Если последовательность вложенных отрезков имеет единственную общую точку, то всякая окрестность этой точки включает все отрезки с достаточно большими номерами.*

*Доказательство.* Упражнение. □

Bolzano 1817
Weierstrass 1867

**Теорема.** *Всякая (ограниченная) числовая последовательность имеет точку сгущения, или, иными словами, сходящуюся подпоследовательность.*

*Доказательство.* Традиционные формулировка и доказательство даются для ограниченных последовательностей, но при наших определениях ограниченность не является необходимой. Поскольку неограниченные числовые последовательности обязательно сгущаются на бесконечности, достаточно разобраться с ограниченными.

Возьмём любой отрезок $K_1$, включающий всю последовательность $\{x_n\}$, затем поделим его пополам. Хотя бы одна из половин содержит элементы $x_n$ для бесконечного количества номеров; одну такую половину обозначим через $K_2$. Поступив таким же образом с отрезком $K_2$, найдём отрезок $K_3$, и так далее. Получим бесконечную последовательность $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ вложенных отрезков. Их общую точку обозначим через $p$.

Всякая окрестность точки $p$ включает отрезок $K_N$ с достаточно большим $N$, а внутри него лежат элементы $x_n$ для бесконечного количества номеров. Поэтому $p$ является точкой сгущения. □

Вместо деления пополам можно делить на 10 равных частей, чтобы быть ближе к десятичным дробям и доказательствам других теорем, выражающих свойство полноты.

**Упражнение.** *Докажите, что всякое бесконечное числовое множество имеет точку сгущения.*

**Верхний и нижний пределы.** Только что мы доказали, что множество частичных пределов числовой последовательности всегда непусто, а теперь продолжим изучать его.

**Лемма.** *Множество частичных пределов числовой последовательности всегда содержит обе свои точные грани.*

*Доказательство.* Если число $p$ не является точкой сгущения последовательности $\{x_n\}$, то имеется такое $\varepsilon > 0$, что элементы $\{x_n\}$ лежат в окрестности $B_\varepsilon(p)$ в не более чем конечном количестве. Тогда не из чего составить подпоследовательность, имеющую предел где-либо в этой окрестности. Значит, точная грань множества частичных пределов не может лежать в $B_\varepsilon(p)$ и, в частности, равняться $p$. □

*Определение.* Наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называют её **верхним пределом** и обозначают через $\limsup x_n$ или $\overline{\lim}\, x_n$. Аналогично, наименьший частичный предел называют **нижним пределом** и обозначают через $\liminf x_n$ или $\underline{\lim}\, x_n$.

**Теорема.** *Всякая числовая последовательность имеет верхний и нижний пределы.*

*Доказательство.* Это доказано в лемме. □

**Теорема.** *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда её верхний и нижний пределы совпадают.*

Утверждение сформулировано как **критерий** $(A \Leftrightarrow B)$, поэтому требуется отдельно установить две импликации: $(A \Rightarrow B)$ и $(A \Leftarrow B)$. Одну из них обычно называют необходимостью, а другую достаточностью. В данном случае «желаемо» свойство $A$, для которого даётся проверяемое равносильное $B$, поэтому слова выбираются согласно схеме: $(A \Rightarrow B)$ *$B$ необходимо для $A$* и $(A \Leftarrow B)$ *$B$ достаточно для $A$.*

*Доказательство.* $(\Rightarrow)$ Если $x_n \to p$, то всякая подпоследовательность также сходится к $p$. Поэтому множество частичных пределов $\{x_n\}$ состоит из одной точки $p$.

$(\Leftarrow)$ Предположим, что единственная точка сгущения

$$p = \liminf x_n = \limsup x_n$$

не является пределом $\{x_n\}$. Отрицание высказывания в определении предела говорит, что найдётся коридор вокруг $p$, снаружи которого лежит некоторая (бесконечная) подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Нижний и верхний пределы $\{x_{n_k}\}$ являются частичными пределами самой $\{x_n\}$, но не равны $p$; это противоречие. Значит, предположение неверно и $\{x_n\}$ сходится к $p$. □

**Упражнение.** *Докажите необходимость от противного коридорным способом.*

**Следствие.** *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она имеет единственную точку сгущения.* □

**Упражнение.** *Докажите, что*

$$\liminf x_n = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid x > x_n \text{ для бесконечного количества } n\},$$
$$\limsup x_n = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x < x_n \text{ для бесконечного количества } n\}.$$

**Теорема о покрытии отрезка интервалами.** Язык и характер следующей теоремы резко отличаются от остального содержания этого раздела. Причины её появления тут — в схожести доказательства с теоремой о точке сгущения, а также схожести будущих применений. Обе теоремы выражают, применительно к простому случаю отрезка числовой прямой, чрезвычайно важное в высшем анализе и других областях математики свойство **компактности**.

**Покрытием** отрезка $K$ интервалами называют произвольное семейство интервалов, объединение которых включает весь $K$. Иными словами, каждая точка отрезка лежит хотя бы в одном из интервалов покрытия. Если выбрать из имеющегося семейства некоторые интервалы так, что уже их объединение включает весь $K$, то они составят **подпокрытие**.

Dirichlet 1862
Borel 1895

**Теорема.** *Из каждого покрытия отрезка интервалами можно извлечь конечное подпокрытие.*

*Доказательство.* Рассуждаем от противного.

Возьмём покрытие $\mathcal{U}$ отрезка $K_1$ интервалами, не содержащее конечного подпокрытия, затем поделим $K_1$ пополам. Обе половины не могут допускать конечных подпокрытий, поскольку тогда объединение оных было бы конечным подпокрытием в $\mathcal{U}$. Значит, хотя бы одна из половин (это отрезок), которую мы обозначим через $K_2$, не имеет конечного подпокрытия в $\mathcal{U}$.

Поступив таким же образом с $K_2$, найдём отрезок $K_3$, и так далее. Получим бесконечную последовательность $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ вложенных отрезков, каждый из которых покрыт семейством $\mathcal{U}$, но не допускает конечного подпокрытия.

рисунок

Однако общая точка этих отрезков лежит хотя бы в одном из интервалов покрытия $\mathcal{U}$, и этот интервал «в одиночку» покрывает отрезок $K_N$ для достаточно большого $N$. Получено противоречие. $\square$

**Новые доказательства старых теорем.** Теоремы этого раздела составляют самое ядро одномерного анализа. В серьёзном анализе их применяют столь часто, что они более известны как леммы, то есть, важные вспомогательные утверждения. Метод деления отрезка пополам, выбор сходящейся подпоследовательности, выбор конечного подпокрытия появились в результате выделения наиболее существенных шагов из различных доказательств основных теорем о непрерывных функциях. Полезно теперь вернуться к этим теоремам и дать новые, короткие доказательства.

**Теорема.** *Всякая непрерывная функция на отрезке ограничена и достигает своего минимума и своего максимума.*

*Второе доказательство.* Для непрерывной функции $f$ на отрезке $X$ положим

$$\beta = \sup\{f(x) \mid x \in X\}.$$

Возьмём такую последовательность $\{x_n\}$ точек $X$, что $f(x_n) \to \beta$, и извлечём из неё подпоследовательность $\{x'_n\}$, сходящуюся к некоторой точке $c \in X$. По непрерывности $f(x'_n) \to f(c)$. Поэтому $\beta = f(c)$ конечно и является максимальным значением функции $f$ на $X$. $\square$

Для интервала $X = (a, b)$ вместо отрезка возможна ситуация $c = a$, то есть $c \notin X$, и теорема не работает. 10.11.16

**Теорема.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для каждого числа $y$ между $f(a)$ и $f(b)$ на отрезке $[a, b]$ есть такая точка $c$, что $f(c) = y$.*

*Второе доказательство.* Из двух совершенно аналогичных вариантов неравенства разберём случай $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$. Поделим отрезок $[a, b]$ пополам. Выберем в качестве $[a_1, b_1]$ одну из половин, удовлетворяющую $f(a_1) \leqslant y \leqslant f(b_1)$. Продолжая делить пополам таким же образом, с повторением неравенства, получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, стягивающуюся к некоторой точке $c \in [a, b]$.

По непрерывности, $f(a_n) \to f(c)$ и $f(b_n) \to f(c)$. Тогда неравенства $f(a_n) \leqslant y \leqslant f(b_n)$ для всех $n$ влекут $f(c) = y$. $\square$

*Третье доказательство.* Заменим функцию $f(x)$ на $g(x) = f(x) - y$. Условие, что $y$ лежит между $f(a)$ и $f(b)$, выразится более кратко: $g(a)$ и $g(b)$ имеют разные знаки.

Предположим, что $g(x) \neq 0$ для всех $x \in [a, b]$. По непрерывности, у каждой точки отрезка можно найти окрестность, на которой $g(x)$ рисунок сохраняет знак. Составим из этих ~~окрестностей~~ интервалов покрытие отрезка и выберем из него конечное подпокрытие. Если «лишних» интервалов в подпокрытии не осталось, то они расположены цепочкой, соединяющей концы отрезка, ибо соседние интервалы обязательно перекрываются. Теперь видно, что $g(x)$ сохраняет знак на всём отрезке, что противоречит предположению. $\square$

Здесь локальное свойство, связанное с окрестностью отдельной точки, подлежит распространению на весь рассматриваемый промежуток. Именно в таких случаях применяют лемму о конечном подпокрытии. Получим другое важное её следствие.

**Теорема.** *Всякая непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна на нём.*

*Второе доказательство.* Для произвольного $\varepsilon > 0$ покроем отрезок окрестностями $B_{\delta(x,\varepsilon)}(x)$. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие. Наименьшая из полудлин выбранных окрестностей годна на роль $\delta(\varepsilon)$ во всех точках отрезка. $\square$

## 6.5. Фундаментальные последовательности

Определение предела последовательности $a_n \to a$ использует само значение $a$. Поэтому оно становится непроверяемым и, следовательно, бесполезным, когда нет даже идеи, чему предел может быть равен. Теперь мы, вслед за Коши, наметим обходной путь.

**Критерий Коши сходимости последовательности.** Числовую последовательность $\{a_n\}$ называют **фундаментальной**, реже сходящейся в себе, или последовательностью Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \colon n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Отличие этого высказывания от определения предела последовательности кажется совсем небольшим, но само значение предела тут не задействовано, так что условие в принципе проверяемо в терминах самой последовательности. Дальше интуиция говорит, что если колебания хвоста последовательности становятся сколь угодно малы, то происходит приближение к пределу.

**Лемма.** *Верхний и нижний пределы фундаментальной последовательности равны.*

*Доказательство.* Нельзя разорвать хвост! Положим $a = \liminf x_n$ и $b = \limsup x_n$. Если $a < b$, то какая-то подпоследовательность стремится к $a$, а какая-то другая — к $b$. Поэтому условие фундаментальности $\{x_n\}$ нарушено при любом положительном $\varepsilon < b - a$. □

**Теорема.** *Числовая последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Перейдём к хвосту, лежащему в $\varepsilon$-коридоре вокруг предела. Его элементы находятся не дальше $2\varepsilon$ друг от друга:

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon + \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Доказательство достаточности так или иначе упирается в свойство полноты. Встречается много непохожих и непростых способов вывода, использующих разные теоремы о полноте. Однако у нас есть очень короткий путь, благодаря уже проделанной работе. Применим лемму, а затем критерий сходимости из предыдущего раздела. □

*Второе доказательство достаточности.* ($\Leftarrow$) Вместо понятий нижнего и верхнего пределов, другой способ опирается на теорему о точке сгущения. Перейдём к хвосту фундаментальной последовательности, зажатому в $\varepsilon$-коридоре вокруг своего первого элемента. У него есть подпоследовательность $a_{n_k}$, сходящаяся к какому-то пределу $a$. Тогда весь хвост оказывается зажат в $3\varepsilon$-коридоре вокруг этого числа, ибо

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_1| + |a_1 - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,$$

которое поэтому является искомым пределом. □

**Сходимость и пополнение.** Десятичные дроби как модель вещественных чисел вполне достаточны на практике, однако пора теперь обратить внимание на связанную с ними логическую проблему и указать путь её разрешения.

Как мы определим, например, число $\sqrt{2}$? С любой заданной точностью можно вычислить его десятичное представление. Получается последовательность рациональных приближений, так что $\sqrt{2}$ возникает как её предел. Понятие вещественного числа и понятие предела опираются друг на друга в порочном круге.

Уже Больцано и Коши осознавали это, но туман витал ещё полвека. Что считать пределом фундаментальной последовательности рациональных чисел, если он не рационален? Подход Дедекинда с сечениями неудобен. Чуть позже последовал прорыв одновременно и независимо несколькими математиками. Их смелая идея заключается в том, чтобы *всю* фундаментальную последовательность рациональных чисел считать вещественным «числом».

Если больше ничего не сделать, то этих «чисел» окажется слишком много. Скажем, последовательности с элементами $1/n$ и $-1/n$ обе стремятся к нулю, то есть должны каким-то образом считаться ~~равными~~ эквивалентными. Точнее, две последовательности должны считаться эквивалентными тогда и только тогда, когда их пределы равны. Остаётся сформулировать это, избегая самих пределов.

Чтобы понимать происходящее, нужно владеть общей концепцией отношения эквивалентности на множестве. Она описана чуть ниже в специальном вспомогательном подразделе, а пока мы завершим этот, пользуясь вводимыми ниже терминами.

*Определение.* Рациональные фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называют **эквивалентными**, если

Heine 1872

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\colon n > N \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

Рефлексивность и симметричность этого отношения очевидны.

**Упражнение.** *Проверьте, что это отношение на множестве рациональных фундаментальных последовательностей транзитивно.*

Классы эквивалентности этого отношения и называют вещественными числами. Рациональные числа представляют классами, содержащими постоянные последовательности. Для формального завершения конструкции требуется много рутинных проверок нормальной работы арифметических операций, порядка, а также любой формы полноты. Не все математики были удовлетворены таким построением; в итоге Гильберт предложил ещё более абстрактный, аксиоматический подход к вещественным числам, которого мы касаться не будем.

Hilbert 1900

Процедура присоединения к рациональным числам пределов фундаментальных последовательностей называется **пополнением**. Позже в анализе она встретится уже на уровне функций, и с большим успехом.

**Произведение множеств.** Возьмём сначала множества

$$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \qquad Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Каждая пара, составленная из одной буквы из $X$ и одной цифры из $Y$, соответствует определённой клетке на шахматной доске. Конечно, можно говорить о множестве клеток и о множестве соответствующих пар. В математике пары пишут в виде $(e, 2)$.

Для любых множеств $X$ и $Y$ множество пар

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

называют **произведением** этих множеств. Часто уточняют термин прилагательными **прямое** или **декартово**, что излишне, ибо иных произведений множеств в нашем курсе попросту не будет.

Отметим, что $X \times Y$ и $Y \times X$ это разные множества при $X \neq Y$.

*Пример.* **Графиком** отображения $f\colon X \to Y$ называют

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Это согласуется со старым наглядным пониманием графика функции как множества точек на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Произведение $X \times X$ иногда обозначается через $X^2$, особенно для $X = \mathbb{R}$. Поэтому $\mathbb{R}^2$ соответствует точкам плоскости с выбранной системой декартовых координат. Произведение $[a, b] \times [c, d]$ двух отрезков изображается прямоугольником на этой плоскости. **рисунок**

Аналогично, $\mathbb{R}^3$ является множеством (упорядоченных) троек вещественных чисел и соответствует точкам пространства с выбранной системой декартовых координат. Далее таким же образом можно ввести $n$-мерное пространство $\mathbb{R}^n$.

**Отношения порядка и эквивалентности.** Произвольное подмножество $R \in X \times X$ называют (бинарным) **отношением** на $X$. У полезных отношений принадлежность пары отношению определяется выполнением для неё какого-нибудь разумного условия. Самые важные типы отношений: отношение порядка и отношение эквивалентности.

Отношением порядка, или просто **порядком** называют отношение, свойства которого аналогичны свойствам отношения $\leqslant$ на числовых множествах:

- рефлексивность $a \leqslant a$;
- антисимметричность $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant a) \Rightarrow (a = b)$;
- транзитивность $(a \leqslant b) \wedge (b \leqslant c) \Rightarrow (a \leqslant c)$.

Здесь опущены кванторы всеобщности на всех переменных. Требование сравнимости каждой пары элементов сюда не входит.

Вероятно, в этом курсе мы не столкнёмся с иными порядками, или просто не заметим их; главный для нас — знакомый порядок на вещественных числах. Порядков больше в алгебре.

*Пример.* Отношение делимости нацело является порядком на положительных целых числах.

*Пример.* Множество всех студентов ФФ разбито на подмножества: группы. Принадлежность двух студентов к одной группе является отношением эквивалентности. Каждая группа — класс эквивалентности.

рисунки

Отношением эквивалентности, или просто **эквивалентностью** называют любое отношение $\sim$, обладающее тремя свойствами:

- рефлексивность $a \sim a$;
- симметричность $(a \sim b) \Rightarrow (b \sim a)$;
- транзитивность $(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow (a \sim c)$.

Отношение эквивалентности на множестве разбивает его на **классы эквивалентности** — подмножества, состоящие из эквивалентных элементов. Множество всех этих классов называют **фактор-множеством**.

# Глава 7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

## 7.1. Несобственные интегралы

лекция 19
05.11.15

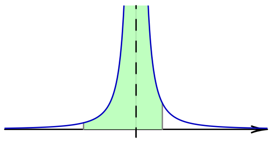
Как показывают несложные примеры, когда функция разрывна или промежуток не является отрезком, неосторожное обращение с интегралом может дать парадоксальные эффекты. Они и побудили математиков исследовать проблему существования определённого интеграла, выделить случай непрерывной функции на отрезке, который мы уже изучили, и найти способ ввести простейшие обобщения на другие классы функций и другие промежутки.

D'Alembert 1

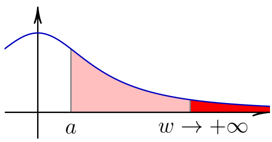
*Пример.* Рассмотрим интеграл от положительной функции:

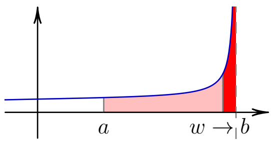
$$\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x^2},$$

где $0 < a < b$. Интерпретация интеграла как площади, а также интегральные суммы дают бесконечное значение. Вычисление посредством первообразной $-x^{-1}$ даёт отрицательное значение $-(a^{-1} + b^{-1})/2$.



**Одна особенность с краю.** Займёмся интегрированием непрерывной функции на полуинтервале $[a, b)$. Избегать точку $b$ приходится по двум разным причинам: когда $b = +\infty$; когда подынтегральная функция недостаточно хороша вблизи точки $b$ (не ограничена или, реже, не имеет предела слева). Тогда просто интегрировать на отрезке $[a, b]$ в прежнем смысле не удаётся и говорят об **особенности** в точке $b$.




Метод решения состоит в том, чтобы взять на $[a, b)$ произвольную точку $w$, проинтегрировать на отрезке $[a, w] \subset [a, b)$ и затем устремить $w$ к $b$.

*Определение.* Если существует предел

Cauchy 1823

$$\lim_{w\to b-0}\int_a^w f(x)\,dx,$$

то его значение называется **несобственным интегралом** и обозначается, как и прежде, через

$$\int_a^{b} f(x)\,dx.$$

Если предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**, а иначе — **расходится**. О расходимости говорят и в том случае, когда предел и соответствующий несобственный интеграл не существуют.

Двухшаговая конструкция несобственных интегралов сразу же говорит нам о том, что эти объекты могут быть значительно сложнее всех встречавшихся ранее в нашем курсе. Совсем оставлять их в стороне всё же нежелательно, а позволить себе их детальное изучение мы не можем. Поэтому наше рассмотрение весьма поверхностно и ориентировано на важнейшие примеры, а не на общие теоремы.

*Пример.* Вычислим простой и важный несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{w\to+\infty}\int_0^w e^{-x}\,dx = \lim_{w\to+\infty}(1-e^{-w}) = 1.$$

*Пример.* Несобственный интеграл

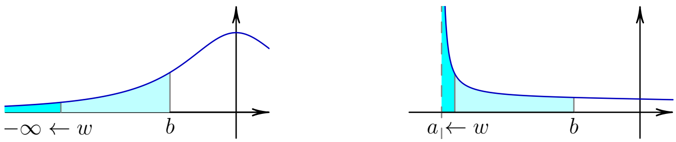
$$\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$$

не существует, потому что первообразная

$$F(w) = \int_0^w \sin x\,dx = 1-\cos w$$

не имеет предела при $w\to+\infty$.

Научившись чуток несобственным интегралам на полуинтервале $[a,b)$, мы легко справимся с полуинтервалом $(a,b]$, где следует прибегнуть к пределу при $w\to a+0$, и перейдём к составным типам.

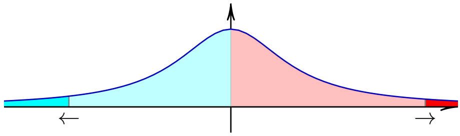


**Разделение особенностей.** Несобственный интеграл по интервалу $(a, b)$ при наличии особенностей на обоих его концах определим как сумму двух несобственных интегралов по $(a, c]$ и $[c, b)$, выбрав для этого любую точку $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Чтобы несобственный интеграл по $(a, b)$ сходился, необходима и достаточна сходимость обоих слагаемых правой части.

В частности, к этому типу относится важный на практике случай интегрирования по всей оси: $(a, b) = (-\infty, +\infty)$.

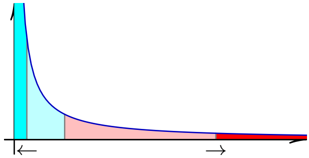


*Пример.* Вычислим простой несобственный интеграл по всей оси:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a\to-\infty} (0 - \operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - 0) \\ &= {}^{\pi}\!/_2 + {}^{\pi}\!/_2 = \pi.\end{aligned}$$

Можно также было заметить, что интегралы по двум полуосям равны ввиду чётности функции.

Нередко встречаются интегралы с двумя особенностями по разным причинам: например, интеграл по $(0, +\infty)$ в случае $f(x) \to +\infty$ при $x \to 0 + 0$. Два таких примера мы вскоре разберём детально.

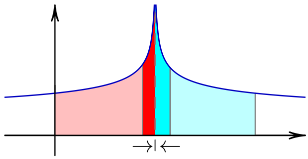


Если функция на отрезке $[a, b]$ имеет особенность в единственной его внутренней точке $c$, то определим несобственный интеграл по $[a, b]$

как сумму двух несобственных интегралов:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Для сходимости левой части опять же необходима сходимость обоих слагаемых правой части, исследуемых независимо друг от друга.



*Пример.* Возвращаясь к примеру Даламбера, получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -2\cdot\big(1 - \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\big) = +\infty.$$

Для нечётных степеней заключение хуже:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{dx}{x} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = \infty - \infty,$$

так что интеграл по $[-1,1]$ не существует.

**Общие свойства и формулы.** Все общие свойства несобственных интегралов — аддитивность, линейность и монотонность — повторяют аналогичные свойства обычных интегралов по отрезку. Их доказательства содержат дополнительный предельный переход в конце, опирающийся на известные арифметические и порядковые свойства предела, но сверх того ничего нового.

Формула Ньютона — Лейбница при наличии особенности в точке $b$ видоизменяется и включает предел:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b-0) - F(a), \qquad F(b-0) = \lim_{w\to b-0} F(w).$$

При особенности слева нужно заменить недостающее значение $F(a)$ на предел $F(a+0)$. Так мы и сделали в примере выше.

Формула интегрирования по частям также включает в правой части внеинтегральные слагаемые. Поэтому в несобственных случаях вместо прямой подстановки граничного значения пользуются пределом:

$$\int_{x=a}^{x\to b} u(x)\,dv(x) = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x\to b} - \int_{x=a}^{x\to b} v(x)\,du(x).$$

Однако в этой формуле несобственных интегралов два, а потому требуется существование обоих. Также необходима осторожность, если хотя бы один из интегралов расходится: другой может сходиться. При наличии конечного предела внеинтегрального слагаемого оба несобственных интеграла сходятся или расходятся одновременно.

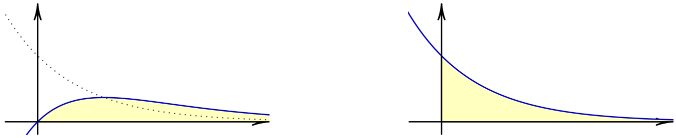
*Пример.* Вычислим несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx.$$

Неопределённый интеграл берётся по частям:

$$F(x) = \int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + C.$$

Искомый интеграл равен $F(+\infty) - F(0) = 1$.



Полезно вернуться на шаг и подставить пределы в формулу интегрирования по частям. Поскольку $xe^{-x} \to 0$ при $x \to +\infty$, получаем

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

**Упражнение.** *Для целого $n \geqslant 0$ вычислите несобственный интеграл*

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx.$$

Формула замены переменных не содержит ничего нового. Правда, иногда замены способны убрать особенность или ввести её.

*Пример.* Первый несобственный интеграл, посчитанный в этом разделе, сводится к собственному заменой $x = -\ln u$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -\int_1^0 du = 1.$$

*Пример.* Бывает и так, что замена избавляет от стремления функции к бесконечности:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -\int_1^0 \frac{2u\,du}{(1+u^2)|u|} = \int_0^1 \frac{2\,du}{1+u^2}.$$

Замену $x = 1 - u^2$ тут выбирают, чтобы победить квадратный корень.

**Сравнение и эквивалентность.** В определённых интегралах основной задачей является их вычисление, а в несобственных задачи две:

(1) установление сходимости;
(2) вычисление.

Весьма часто случается, что первая задача — имеет ли интеграл конечное значение — заметно важнее и, более того, проще второй.

Существование несобственного интеграла от функции $f(x)$ по полуинтервалу $[a, b)$ по определению равносильно существованию предела первообразной

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

при $x \to b - 0$. Поэтому признаки существования и сходимости несобственных интегралов получаем надлежащим перефразированием признаков существования и конечности предела функции. Детали тут чуть более громоздки, чем хотелось бы, так что ограничимся сперва лишь самым необходимым и только для базового типа особенности.

**Лемма** (Сравнение). *Для функций $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ на $[a, b)$ определим первообразные*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

*и несобственные интегралы $F^* = F(b-0)$ и $G^* = G(b-0)$. Тогда:*

- *если $G^*$ сходится, то $F^*$ сходится;*
- *если $F^*$ расходится, то $G^*$ расходится.*

*Доказательство.* Ввиду монотонности обычного интеграла, условие $f(x) \leqslant g(x)$ влечёт $F(x) \leqslant G(x)$ при $x > a$. Ввиду аддитивности обычного интеграла, первообразные неотрицательных функций монотонно не убывают, поэтому пределы $F^*$ и $G^*$ существуют. После предельного перехода видим $0 \leqslant F^* \leqslant G^*$. Отсюда в случае $G^* < +\infty$ получаем первое утверждение, а в случае $F^* = +\infty$ — второе. □

**Следствие** (Эквивалентность). *Если $f(x) \sim g(x) > 0$ при $x \to b$, то интегралы от $f$ и $g$ на $[a, b)$ сходятся или расходятся одновременно.*

*Доказательство.* Применим предыдущую лемму (упражнение). □

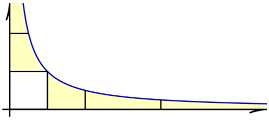
**Степенные особенности.** Чтобы применять сравнение и эквивалентность, требуется семейство простых несобственных интегралов с известным поведением. Естественно обратиться к степенным функциям, поэтому исследуем теперь сходимость несобственных интегралов

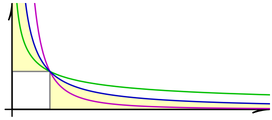
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Запишем определённые интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \text{ при } \lambda \neq 1; \quad \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a.$$

Переходя к соответствующим пределам, видим: интеграл по $(0, 1]$ сходится при $0 < \lambda < 1$, а иначе расходится; интеграл по $[1, +\infty)$ сходится при $\lambda > 1$, а иначе расходится. Значит, интеграл по $(0, +\infty)$ расходится при всех $\lambda$.





Расходимость также можно увидеть чисто геометрически. Сперва для $\lambda = 1$ вспомним равенства

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_2^4 \frac{dx}{x} = \int_4^8 \frac{dx}{x} = \int_8^{16} \frac{dx}{x} = \dots$$

и их интерпретацию как сохранение площади преобразованием плоскости по правилу $(x, y) \mapsto (2x, y/2)$, переводящим гиперболу $y = 1/x$ в себя. Отсюда сразу следует бесконечность площади подграфика на промежутке $[1, +\infty)$. По симметрии линии, также бесконечна площадь подграфика на промежутке $(0, 1]$. Расположение графиков функций $y = 1/x^\lambda$ затем влечёт остальные заключения о расходимости. Сходимость же из таких соображений не следует.

**Следствие.** *Если $f(x) \sim Ax^{-\lambda}$ для некоторых постоянных $A$ и $\lambda > 0$*

(1) *при $x \to 0$, то*

$$\int_0^a f(x)\,dx$$

*сходится $\Leftrightarrow 0 < \lambda < 1$;*

(2) *при $x \to +\infty$, то*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

*сходится* $\Leftrightarrow \lambda > 1$.

*Пример.* Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}$$

сходится, поскольку знаменатель эквивалентен $x^{1/2}$ при $x \to 0$ и $x^{3/2}$ при $x \to +\infty$.

логарифм?

Torricelli 1641 $\lambda = 1$

*Пример* (Парадокс маляра). Образуем фигуру вращения с осью $Ox$ из графика функции $f(x) = x^{-\lambda}$ на промежутке $[1, +\infty)$. Формулы для объёма тела вращения и площади его поверхности дают несобственные интегралы от функций $\pi x^{-2\lambda}$ и $2\pi x^{-\lambda}\sqrt{\ldots}$ соответственно, причём $\sqrt{\ldots} \to 1$ при $x \to +\infty$. Значит, интеграл для объёма сходится при $\lambda > 1/2$, а для площади — только при $\lambda > 1$.

рисунок?

Парадокс состоит в том, что, скажем, при $\lambda = 2/3$ маляр может покрасить бесконечную площадь поверхности раструба, залив в него конечный объём краски (гравитация направлена по оси $Ox$).

**Критерий Коши.** Из одноимённого признака существования конечного предела функции можно получить признак сходимости несобственных интегралов. Логика в том, что для сходимости интеграла вклад достаточно малой окрестности особенности в интеграл должен быть сколь угодно малым, а это оказывается равносильным сколь угодной малости вклада любого отрезка внутри неё.

рисунок?

Формальнее, чтобы первообразная $F(x)$ имела предел при $x \to b$ слева, необходимо и достаточно для любого $\varepsilon > 0$ существования такой (левосторонней и выколотой) окрестности $U(\varepsilon)$ точки $b$, что

$$|F(v) - F(u)| = \left| \int_u^v f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

для всех $u$, $v \in U$. Поскольку в случае конечной точки $b$ и в случае $b = +\infty$ расшифровки окрестности определяющими её неравенствами различны, обычно в учебниках критерий Коши сходимости несобственных интегралов формулируют отдельно для этих двух случаев: интеграл по $[a, b)$ сходится тогда и только тогда, когда

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon b - \delta < u < v < b \Rightarrow |\ldots| < \varepsilon$;
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon)\colon M < u < v \Rightarrow |\ldots| < \varepsilon$;

На деле, критерий Коши чаще используется для установления расходимости, а не сходимости.

**Главное значение по Коши.** Когда особенность функции находится внутри отрезка интегрирования, для некоторых применений полезно рассматривать интегралы слева и справа от особенности не по отдельности, а вместе.

*Определение.* Если существует предел

$$\lim_{\delta\to 0+0}\Big(\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\Big),$$

то его называют **главным значением** (по Коши) несобственного интеграла по отрезку $[a,b]$ и обозначают значком интеграла с различными специфическими украшениями:

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{p.v.}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad ⨍_a^b f(x)\,dx.$$

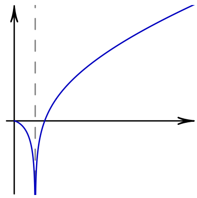
По свойствам предела функции, из определений следует, что если несобственный интеграл с особенностью внутри отрезка существует в обычном смысле, то существует и его главное значение, причём они равны. Однако конечным главным значением обладают и некоторые важные расходящиеся интегралы, например

$$⨍_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0}\Big(\Big[\ln|x|\Big]_{x=-1}^{x=-\delta} + \Big[\ln|x|\Big]_{x=\delta}^{x=1}\Big) = 0.$$

*Пример* (Интегральный логарифм). Так называют неэлементарную функцию

$$\operatorname{li} x = ⨍_0^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Когда $x \geqslant 1$, интеграл имеет особенность в точке $t=1$. Несобственный интеграл расходится, ибо $\ln t \sim t-1$ при $t\to 1$. В то же время, главное значение интеграла конечно когда $x>1$ и даёт полезную функцию.



Альтернативный подход — работать с функцией

$$\operatorname{Li} x = \operatorname{li} x - \operatorname{li} 2 = \int_2^x \frac{dt}{\ln t},$$

выражаемой обычным интегралом. Интегральный логарифм важен в теории чисел, поскольку $\operatorname{Li} x$ является хорошим приближением к количеству простых чисел, меньших $x$, а также входит в точную формулу.

Для интегралов по всей оси тоже определяют главное значение: это предел интеграла по отрезку $[-M, M]$ при $M \to +\infty$. Тогда

$$⨍_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0.$$

Если функция имеет особенность, то вокруг особой точки также нужно делать симметричный вырез. Например, так получается

$$⨍_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} = 0.$$

Этот интеграл определён как

$$\lim_{\delta\to 0+0}\Bigl(\int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^{1}\Bigr) + \lim_{M\to+\infty}\Bigl(\int_{-M}^{-1} + \int_{1}^{M}\Bigr),$$

и ввиду симметрии обе скобки зануляются до предельного перехода.

## 7.2. Бэта-функция и гамма-функция

лекция 20
09.11.15

В этом разделе мы кратко познакомимся с самой важной из неэлементарных функций. Далее $\Gamma(x)$ и связанная с ней функция двух переменных $\mathrm{B}(x, y)$ окажутся полезны для вычисления многих определённых интегралов. Особенно часто нужны их численные значения при целых и полуцелых положительных аргументах. Для $\mathrm{B}(x, y)$ их довольно просто получить, однако для $\Gamma(x)$ они требуют средств, в этом курсе недоступных. По этой причине здесь дадим несколько формул без доказательств; часть из них будет получена во втором семестре.

**Предыстория бэта-функции.** Функции $t^m(1-t)^n$ с натуральными параметрами $m$ и $n$ бесхитростно интегрируются. Для дальнейшего нам нужны их определённые интегралы по отрезку $[0, 1]$. При этом зануление внеинтегральных слагаемых резко упрощает процесс многократного интегрирования по частям. На первом шаге имеем

$$\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt = \frac{n}{m+1}\cdot\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{n-1}\,dt.$$

Далее смещение показателей степени даёт числовые множители, в итоге скапливающиеся в факториалы.

**Упражнение.** *Проследите все шаги и выпишите итоговую формулу для значения исходного интеграла.*

Полезно отметить, что проведённое вычисление использует лишь натуральность числа $n$: она нужна, чтобы множитель $1-t$ ушёл после $n$ шагов. Однако число $m$ может быть вещественным; при $m<0$ интеграл будет несобственным, но при $m>-1$ сходящимся.

Кроме того, замена переменной $s=1-t$ показывает, что значение интеграла сохранится при обмене местами параметров $m$ и $n$. Теперь легко придти к мысли сделать оба параметра вещественными! Такие интегралы возникают уже при изучении квадратуры круга, ибо из Wallis 1656

$$\frac{\pi}{2}=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

заменами переменной $t=x^2$ и $1+x=2u$ получаем

$$\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{1}t^{-1/2}(1-t)^{1/2}\,dt,\qquad \frac{\pi}{8}=\int_{0}^{1}u^{1/2}(1-u)^{1/2}\,du.$$

**Бэта-функция.** Итак, для любых $x,\ y>0$ полагают

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_{0}^{1}t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Обратите внимание на сдвиг показателей степени. При $x,\ y\geqslant 1$ здесь обычный определённый интеграл от непрерывной функции на отрезке. Иначе интеграл несобственный, но сходящийся при наложенных ограничениях $x,\ y>0$ на степенные особенности на концах промежутка.

**Упражнение.** *Проверьте, что* $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$.

**Упражнение.** *Для целых чисел* $m,\ n>0$ *выразите* $\mathrm{B}(m,n)$ *через подходящий биномиальный коэффициент.*

Умножая подынтегральную функцию на $1=t+(1-t)$, приходим к интересной формуле дробления бэта-функции:

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(x+1,y)+\mathrm{B}(x,y+1).$$

Несложно запомнить и пропорцию этого дробления, совпадающую с пропорцией дробления

$$1=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}.$$

Обычно вместо неё указывают правило понижения

$$\mathrm{B}(x,y+1)=\frac{y}{x+y}\mathrm{B}(x,y).$$

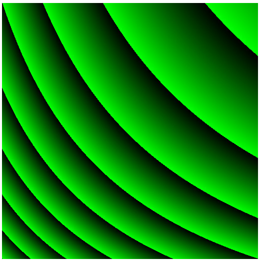
По симметрии, аналогично можно понижать значение $x$.

**Упражнение.** *Получите правило понижения интегрированием по частям.*

В результате, вся бэта-функция определяется своими значениями на единичном квадрате. Чтобы не заботиться об особенностях вдоль осей координат, возьмём квадрат $[1,2] \times [1,2]$. Вдоль его сторон функция упрощается до элементарных:

$$\mathrm{B}(x,1) = 1/x, \qquad \mathrm{B}(x,2) = 1/x(x+1).$$

Из квадратуры круга $\mathrm{B}(1/2, 3/2) = \pi/2$, откуда по правилу понижения находим $\mathrm{B}(3/2, 3/2) = \pi/8$, а также самое важное значение $\mathrm{B}(1/2, 1/2) = \pi$.




Ближайшие применения бэта-функции вызваны тем, что в различных задачах на интегрирование в полярных, цилиндрических или сферических координатах, актуальных со второго семестра, регулярно возникают интегралы

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx,$$

сводящиеся к бэта-функции и вычисляемые таким способом быстрее всего даже в простых случаях небольших натуральных показателей $\alpha$ и $\beta$. Эта задача помещена в задания. Подстановка одного случая в общую формулу, требуемую в задании, также даёт $\mathrm{B}(1/2, 1/2) = \pi$.

**Упражнение.** *Составьте табличку значений* $\mathrm{B}(x,y)$ *для небольших целых и полуцелых аргументов, применяя правило дробления к известным значениям при аргументах* $1/2$ *и* $1$.

**Упражнение.** *Пользуясь заменой* $t = \frac{s}{s+1}$, *получите формулу*

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^{+\infty} s^{x-1}(1+s)^{-x-y} \, ds.$$

**Определение гамма-функции.** Факториал является функцией натурального аргумента. Вслед за Валлисом, математиков начала XVIII века интересовала проблема распространения факториала на дробные числа, прежде всего $1/2$, а затем и на все вещественные.

Эйлер решил её в молодости, но всю жизнь сохранял интерес к функции $x!$, давая новые определения. Первым было бесконечное произведение элементов последовательности Euler 1729

$$a_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \Big/ \left(1+\frac{x}{n}\right).$$

Общепринятым впоследствии стало то, которое легко усмотреть из несобственного интеграла

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt.$$

Его значение находится по индукции, а шаг состоит в интегрировании по частям. Однако в самом определении целочисленность параметра $n$ никак не используется, поэтому его можно заменить на произвольное положительное число $x$. Обозначение $x!$ было вытеснено другим и, кроме того, прижился досадный сдвиг аргумента на единицу, который теперь крайне сложно исправить.

Итак, для $x > 0$ полагают Euler 1765

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

В частности, для неотрицательных целых $n$ получаем $\Gamma(n+1) = n!$.

**Лемма.** *Этот несобственный интеграл сходится при всех $x > 0$.*

*Доказательство.* При $t \to 0$ ввиду эквивалентности $e^{-t} \sim 1$ получаем $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$. При $t \to +\infty$ имеем $e^{-t} = o(t^{-(x+1)})$ для любого фиксированного $x > 0$, поэтому $t^{x-1}e^{-t} = o(t^{-2})$. Значит, следствие о степенных особенностях и признак сравнения дают сходимость на обоих концах промежутка. $\square$

**Упражнение.** *Заменяя переменную, проверьте при $x > 0$, что* Euler 1730

$$\Gamma(x+1) = \int_0^1 (-\ln t)^x\,dt.$$

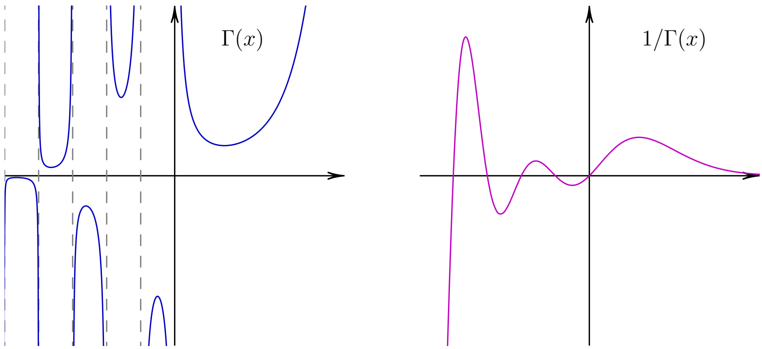
**Теорема** (Правило понижения)**.** $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *для всех $x > 0$.*

*Доказательство.* Интегрируем по частям:

$$\int_0^b t^x e^{-t}\,dt = \Big[-t^x e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=b} + x\int_0^b t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

В пределе при $b \to +\infty$ внеинтегральное слагаемое исчезает и остаётся требуемое равенство. □

Для $x < 0$ доопределяют $\Gamma(x)$, пользуясь правилом понижения в обратную сторону. При этом возникают знаменатели $x$, $x+1$, ..., так что неположительные целые числа исключены из области определения. На самом деле, более приятной функцией является $1/\Gamma$, определённая для всех вещественных аргументов (и даже комплексных).




Euler 1736?

Бэта-функция связана с гамма-функцией замечательной формулой

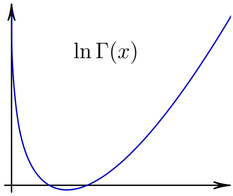
$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

которую мы установим во втором семестре с помощью двойных интегралов. Следовательно, поскольку гамма-функция распространяет факториал (со сдвигом) на нецелые аргументы, бэта-функция идейно распространяет биномиальные коэффициенты.

**Единственность гамма-функции.** Есть ли иные функции, продолжающие факториал на вещественные числа? Оказывается, что нет никаких других функций $f(x)$ на положительной полуоси, удовлетворяющих трём требованиям:

(1) значение $f(1) = 1$;
(2) правило понижения $f(x+1) = xf(x)$;
(3) выпуклость функции $\ln f(x)$.

Третье условие — ключевое для единственности, но мы не будем углубляться в него, ибо больше интересуемся приложениями. Опустим и вывод выпуклости функции $\ln\Gamma(x)$ ввиду его трудоёмкости, либо использования интегрального неравенства Гёльдера. При больших $x$ эта выпуклость не удивительна из поясняемого ниже приближения.




**Исследование гамма-функции.** Из эквивалентности $\Gamma(x+1)\sim 1$ при $x\to 0$ и правила понижения получаем $\Gamma(x)\sim 1/x$, причём с обеих сторон. При $x\to+\infty$ гамма-функция возрастает очень быстро; согласно формуле ~~де Муавра~~ Стирлинга

$$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\cdot x^x/e^x.$$

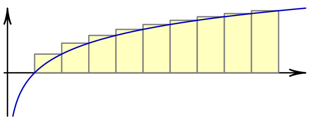
С точностью до редко необходимой постоянной $\sqrt{2\pi}$, эту формулу получить легко. Заметим сперва для натуральных аргументов, что $\ln n!$ является интегральной суммой:

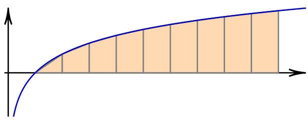
$$\ln n! = \sum_{1<k\leqslant n}\ln k \approx \int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - n + 1.$$

Значит, $x!\approx ex^x/e^x$. Множитель $\sqrt{x}$ появится, если приблизить интеграл по более точной формуле трапеций, учитывающей крайние слагаемые $\ln 1$ и $\ln n$ с коэффициентом $1/2$. Часто достаточно знать, что

de Moivre 17
Stirling 1730

$$\ln n! = n\ln n - n + O(\ln n).$$





**Упражнение.** *Докажите, что* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^y\cdot \mathrm{B}(x,y)=\Gamma(y)$.

Как найти производную

$$\Gamma'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt?$$

Требуется ворох обоснований, заниматься которыми мы сейчас не можем, но результат таков: в данном случае допустимо произвести дифференцирование до интегрирования, поэтому при $x > 0$ имеем

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(t^{x-1}e^{-t}\right) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t\, dt.$$

Аналогично получается

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^2\, dt.$$

Здесь подынтегральная функция неотрицательна, так что $\Gamma''(x) > 0$ при $x > 0$. Значит, $\Gamma(x)$ строго выпукла вниз при $x > 0$.

**Значения гамма-функции.** Отметим связь числа $\Gamma(1/2)$ с важнейшим интегралом теории вероятностей. В интеграле

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}\, dt$$

сделаем замену $x = t^{1/2}$ и получим

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Значение $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ удаётся вычислить либо отсюда, либо через связь с бэта-функцией, но оба пути идут через двойные интегралы. Затем по правилу понижения находятся значения гамма-функции для всех полуцелых аргументов. Они и являются наиболее важными на практике, хотя бы из-за упомянутых тригонометрических интегралов.

Значения $\Gamma(x)$ при прочих рациональных $x$ не выражаются в элементарных функциях и вообще весьма загадочны как числа. Однако имеется непростое правило дополнения или отражения,

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

которое в частности влечёт и значение $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

*Пример.* Определённый интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$$

можно вычислить, найдя сперва первообразную. Однако через бэта-функцию путь к ответу гораздо короче и быстрее:

$$\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\, dx = \mathrm{B}(3/2, 3/2) = \frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} = \cdots = \pi/8.$$

*Пример.* Несобственный интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4},$$

не поддавшийся усилиям Лейбница, заменой $s = x^4$ сводится к

$$\tfrac{1}{4}\int_0^{+\infty} s^{-3/4}(1+s)^{-1}\,ds = \tfrac{1}{4}\cdot \mathrm{B}(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}).$$

Далее через правило дополнения для гамма-функции приходим к ответу $I = \pi\sqrt{2}/4$.

## 7.3. Признаки сходимости числовых рядов

**Терминология.** Числовым **рядом** называют написанную формально, без вычисления, сумму (бесконечной) числовой последовательности: лекция 21 16.11.15

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Номер начального слагаемого может быть иным; часто $n \geqslant 0$.

С рядом связана последовательность его **частичных сумм** $\{S_k\}$,

$$S_k = \sum_{1\leqslant n\leqslant k} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k,$$

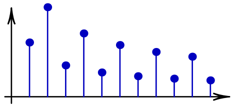
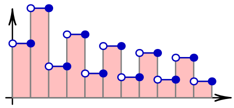
а также хвост, или **остаток**

$$R_k = \sum_{n>k} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots .$$

Голова ряда не влияет на сходимость, важен лишь бесконечный хвост. Наоборот, для приближённого вычисления суммы сходящегося ряда важно определить, когда частичная сумма достигла нужной точности, то есть, когда остаток становится достаточно малым.

В разных случаях $\{S_k\}$ может либо иметь конечный предел, либо иметь бесконечный предел, либо не иметь предела. Если $S_k \to S$ и $|S| < \infty$, то ряд $\sum a_n$ называют **сходящимся**, а число $S$ — его **суммой**. Иначе ряд называют **расходящимся**. Это устоявшиеся термины, хотя логичнее иметь разные на все три случая. Следует обратить внимание на несоответствие в терминологии в случае $S_k \to \pm\infty$: хотя последовательность частичных сумм сходится, ряд расходится. Для рядов случай бесконечной суммы удобнее записать в плохие.

Терминология здесь аналогична применяемой к несобственным интегралам. В действительности, у рядов и несобственных интегралов много общего. Немало утверждений имеют одну версию для рядов, а другую для несобственных интегралов. Причина этого в том, что всякий ряд $\sum a_n$ является несобственным интегралом по $[0, +\infty)$ от ступенчатой функции $f(x) = a_{\lceil x \rceil}$.

С другой стороны, ряды специфичны своим происхождением из последовательностей. Это даёт дополнительные возможности для исследования сходимости рядов, а иногда и точного вычисления их сумм.

**Простейшие примеры, признаки и явления.** Проверяя сходимость конкретного ряда, нужно прежде всего установить, выполнено ли необходимое условие сходимости.

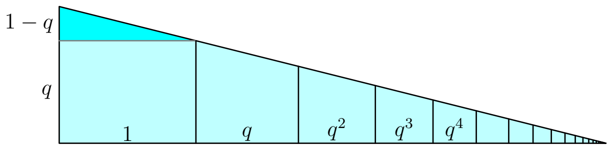
**Лемма** (Необходимый признак)**.** *Если ряд $\sum a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.*

*Доказательство.* Если частичные суммы $S_k$ имеют конечный предел $S$, то также $S_{k-1} \to S$. Значит, $a_k = S_k - S_{k-1} \to 0$. □

*Пример.* Ряд $\sum q^n$ называют геометрической прогрессией. Его частичные суммы вычисляются в школе:

$$S_k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \quad \text{при } q \neq 1.$$

рисунок при $q < 0$? Ряд сходится при $|q| < 1$ к сумме $\frac{1}{1-q}$, а иначе расходится: необходимое условие нарушено.

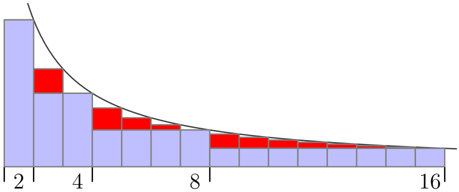



*Пример.* Бесконечная десятичная дробь $0.a_1 a_2 a_3 \dots$ есть сумма ряда $\sum a_n 10^{-n}$. Такой ряд всегда сходится: поскольку $0 \leqslant a_n \leqslant 9$, сумма не превосходит $9 \cdot \sum 10^{-n} = 1$.

Недостаточность необходимого условия — сюрприз Средневековья.

Oresme 1350 *Пример* (Гармонический ряд). Ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится. У всякого сходящегося ряда $S_k$ и $S_{2k}$ имеют один и тот же конечный предел, поэтому $S_{2k} - S_k \to 0$. Однако для гармонического ряда это невозможно, ибо

$$S_{2k} - S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}.$$




Последовательность $\{S_k\}$ оказалась не фундаментальна. Рисунок растянут по вертикали в 10 раз для наглядности.

**Лемма** (Критерий Коши). *Ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \colon m,\, n > N \Rightarrow |a_n + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Это всего лишь пересказ критерия Коши сходимости последовательности частичных сумм: $a_n + \cdots + a_m = S_m - S_{n-1}$ при $m > n$. Индекс сдвинут ради лаконичности формулировки. □

Основной задачей о числовых рядах является установление сходимости. Вычислить сумму сходящегося ряда элементарными средствами удаётся очень редко. Правда, иногда последовательность частичных сумм ряда имеет несложный вид, до которого можно догадаться.

*Пример* (Телескопический ряд). Слагаемые ряда

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

представляются в виде разностей, между которыми происходит сокращение, так что $S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$, и в пределе получаем сумму ряда, равную 1.

Такие преобразования нужно всегда делать на частичных суммах и только затем переходить к пределу. Операции с бесконечной суммой легко приводят к ошибкам:

$$0 = \sum 0 = \sum (1-1) = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots = 1 + \sum (-1+1) = 1.$$

Это «всего лишь» иная расстановка скобок, а перестановкой слагаемых Grandi 1703
достигаются ещё бо́льшие чудеса, как мы увидим ниже.

*Пример.* Легко установить сходимость ряда $\sum n^{-2}$, сравнивая его с Bernoulli 168
уже известным:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = 2.$$

Для вычисления суммы этого ряда, равной $\pi^2/6$, обычно применяют средства, нам пока не доступные. Своё первое решение Эйлер вывел в один шаг из представления $\sin x$ в виде бесконечного произведения, тогда ещё не вполне обоснованного. В узких кругах известно хитрое решение Коши, использующее только весьма элементарные средства.

*Пример.* Число $e$ можно определять как сумму ряда

$$e = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}.$$

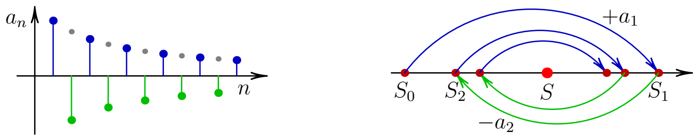
**Знакопеременные ряды.** Часто встречаются ряды, в которых положительные слагаемые строго чередуются с отрицательными:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} \pm \ldots.$$

Имеется очень простой признак сходимости таких рядов.

Leibniz 1682

**Теорема** (Признак Лейбница). *Если положительная последовательность $a_n$ монотонно убывает и стремится к нулю, то знакопеременный ряд $\sum(-1)^{n+1}a_n$ сходится.*




*Доказательство.* В силу монотонного убывания $a_n > 0$, каждая частичная сумма знакопеременного ряда лежит в интервале между двумя предыдущими суммами; значит, в нём также лежат все последующие частичные суммы. Поскольку

$$|S_k - S_{k-1}| = a_k \to 0,$$

длины этих интервалов становятся сколь угодно малы при $k \gg 1$, что гарантирует сходимость последовательности $\{S_k\}$. □

**Следствие.** *Остаток сходящегося знакопеременного ряда не превосходит первого отброшенного слагаемого:* $|R_k| = |S_k - S| \leqslant a_{k+1}$.

**Сравнение положительных рядов.** Изучим теперь важнейшие признаки сходимости числовых рядов с положительными (неотрицательными) слагаемыми. Последовательность частичных сумм неотрицательного ряда монотонно не убывает, поэтому всегда имеет предел, так что вопрос о сходимости лишь в том, конечен ли он.

**Лемма.** *Если $a_n \geqslant 0$, то ряд $\sum a_n$ сходится $\iff$ его частичные суммы ограничены сверху.* □

Пример применения признака сравнения к ряду $\sum n^{-2}$ дан выше. Идея в том, что сходимость бо́льшего ряда влечёт сходимость меньшего, а расходимость меньшего влечёт расходимость бо́льшего. Эта простая логика весьма универсальна.

**Теорема** (Базовый признак сравнения)**.** *При выполнении слагаемыми двух рядов условия $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ для всех $n$ можно заключить, что:*

- *если ряд $\sum y_n$ сходится, то ряд $\sum x_n$ сходится;*
- *если ряд $\sum x_n$ расходится, то ряд $\sum y_n$ расходится.*

*Доказательство.* Тут достаточно сказать, что сумма ряда является частным случаем несобственного интеграла, а их мы уже научились сравнивать. Можно вместо того пройти напрямую. Частичные суммы этих рядов образуют монотонно возрастающие последовательности $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ и удовлетворяют неравенству $X_k \leqslant Y_k$. Следовательно,

$$0 \leqslant \lim X_k = \sup X_k \leqslant \sup Y_k = \lim Y_k.$$

Значит, если $\lim Y_k$ конечен, то $\lim X_k$ также конечен; если же $\lim X_k$ бесконечен, то и $\lim Y_k$ также бесконечен. □

Поскольку «отрубание головы» не влияет на сходимость, в условии теоремы можно даже написать *для всех $n \gg 1$*.

**Теорема** (Второй признак сравнения)**.** *Те же выводы, что и в предыдущей теореме, можно делать при выполнении слагаемыми положительных рядов иных условий:*

(1) *$x_{n+1}/x_n \leqslant y_{n+1}/y_n$ для всех $n \gg 1$,*
(2) *$x_n/y_n \to K < \infty$.*

Эти более продвинутые способы сравнения иногда удобнее. Полезно также выделить случай, когда говорят об одновременной сходимости или расходимости.

**Следствие** (Эквивалентность)**.** *Если в теореме $K > 0$, то либо оба ряда сходятся, либо оба расходятся.*

*Доказательство.* (1) Перепишем условие как $x_n/y_n \leqslant x_{n-1}/y_{n-1}$. По цепочке получим $x_n/y_n \leqslant \ldots \leqslant x_1/y_1$, а отсюда $x_n \leqslant cy_n$, где $c = x_1/y_1$ не зависит от $n$. Далее применим базовый признак сравнения к рядам $\sum x_n$ и $\sum cy_n = c\sum y_n$.

(2) Поскольку тогда $x_n < (K+1)y_n$ для всех $n \gg 1$, опять применяем базовый признак сравнения. □

**Признаки Даламбера и Коши.** Подавляющее большинство реально возникающих задач на сходимость числовых рядов решаются сравнением с геометрической прогрессией. На эти случаи общий признак сравнения переработан в более практичные формы, избавляющие от необходимости подбирать знаменатель и по сути отыскивающие его.

Cauchy 1821

В самой простой форме по ряду $\sum a_n$ строится так называемая **варианта Даламбера** $D_n = a_{n+1}/a_n$, поведение которой характеризует сходимость ряда. Здесь требуется $a_n > 0$ для всех $n$.

**Теорема** (Признак Даламбера)**.** *Если $D_n$ для всех $n \gg 1$*

- *удовлетворяет условию $D_n \leqslant q < 1$, то ряд сходится;*
- *удовлетворяет условию $D_n \geqslant 1$, то ряд расходится.*

Здесь $q$ есть знаменатель модельной геометрической прогрессии; для сходимости важно, что это число не зависит от $n$.

*Доказательство.* При $D_n \leqslant q < 1$ возьмём $x_n = a_n$ и $y_n = q^n$ и получим сходимость по второму признаку сравнения. При $D_n \geqslant 1$ нет стремления $a_n$ к нулю, необходимого для сходимости. □

Часто удобнее пользоваться предельной версией признака.

**Следствие** (Признак Даламбера)**.** *Если $D_n \to q$, то*

- *при $q < 1$ ряд сходится;*
- *при $q > 1$ ряд расходится;*
- *при $q = 1$ силы этого признака недостаточно.*

*Доказательство.* В первых двух случаях выполняется соответствующее условие непредельной версии признака Даламбера. □

*Пример.* Для ряда $\sum \frac{x^n}{n!}$ получаем $D_n = \frac{x}{n+1} \to 0$ при всех $x$.

*Пример.* Для ряда $\sum nx^{n-1}$ получаем $D_n = x\frac{n+1}{n}$ и видим сходимость при $x < 1$. (Мы пока рассматриваем положительные ряды и $x > 0$.)

Cauchy 1821

Другой признак исследует **варианту Коши** $C_n = \sqrt[n]{a_n}$, а в остальном идентичен по формулировке. Здесь требуется $a_n \geqslant 0$ для всех $n$.

Вместо фамилий, лучше называть признаки по существу дела. Так и поступают в английском: признаки, основанные на вариантах $D_n$ и $C_n$, называют *ratio test* и *root test* от слов «отношение» и «корень». Даламбер никак не был причастен к названному его именем признаку.

tibhasa 1530??

В Европе оба признака появились у Коши, но почти за триста лет до него таинственным образом были известны учёным юга Индии.

**Теорема** (Признак Коши)**.** *Если* $C_n$ *для всех* $n \gg 1$

- *удовлетворяет условию* $C_n \leqslant q < 1$*, то ряд сходится;*
- *удовлетворяет условию* $C_n \geqslant 1$*, то ряд расходится.*

*Доказательство.* Требование $C_n \leqslant q$ равносильно $a_n \leqslant q^n$, поэтому при $q < 1$ работает второй признак сравнения. При $C_n \geqslant 1$ нет стремления $a_n$ к нулю, необходимого для сходимости. □

**Следствие** (Признак Коши)**.** *Если* $C_n \to q$*, то*

- *при* $q < 1$ *ряд сходится;*
- *при* $q > 1$ *ряд расходится;*
- *при* $q = 1$ *силы этого признака недостаточно.*

*Доказательство.* В первых двух случаях выполняется соответствующее условие непредельной версии признака Коши. □

*Пример.* Для ряда $\sum(\ln n)^{-n}$ получаем $C_n = \frac{1}{\ln n} \to 0$. Ряд сходится.

Признак Даламбера немного слабее признака Коши, но проще в употреблении. Обратим внимание, что при критическом значении $q = 1$ оба признака не дают никакого заключения. Сюда попадают, например, совсем базовые ряды $\sum n^{-s}$ при любом $s > 0$.

Имеются более сильные признаки сходимости аналогичной структуры, которые мы не будем рассматривать. Универсального признака сходимости не существует: для каждого признака можно придумать ряд, перед которым тот бессилен. гипергеом

**Упражнение.** *Докажите ещё одну, более общую и лаконичную версию признака Даламбера:*

- *при* $\limsup D_n < 1$ *ряд сходится;*
- *при* $\liminf D_n > 1$ *ряд расходится.*

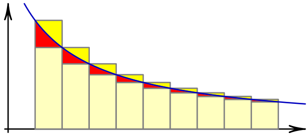
*Указание: возьмите любое* $q$*, удовлетворяющее* $\limsup D_n < q < 1$.

**Упражнение.** *Аналогичным образом обобщите признак Коши:*

- *при* $\limsup C_n < 1$ *ряд сходится;*
- *при* $\limsup C_n > 1$ *ряд расходится.*

*В отличие от предыдущего, здесь важен только верхний предел.*

**Интегральный признак.** Слагаемые ряда часто представляют собой значения хорошей функции $f(x)$, определённой не только для натуральных $x = n$, но и для вещественных. Этим можно воспользоваться при исследовании сходимости. лекция 22 19.11.15



Слагаемые ряда интерпретируются как площади прямоугольников, а частичные суммы приближённо равны значению интеграла. Если $f(x) > 0$ монотонно убывает, то сравнение площадей даёт

$$\sum_{1<n\leqslant k} f(n) < \int_1^k f(x)\,dx < \sum_{1\leqslant n<k} f(n).$$

Maclaurin 1742

Сходимость ряда определяется ограниченностью этих сумм. Значит, вместо сумм можно проверять ограниченность первообразной.

*Пример.* Чтобы установить сходимость ряда $\sum n^{-s}$, проинтегрируем функцию $f(x) = x^{-s}$. Первообразная ограничена лишь при $s > 1$, и лишь тогда ряд сходится. Выше мы разобрали случаи $s = 1$ и $s = 2$.

## 7.4. Абсолютная и условная сходимость

**Терминология, примеры и признаки.** Теперь отбросим предположение $a_n > 0$.

**Теорема.** *Если ряд $\sum|a_n|$ сходится, то ряд $\sum a_n$ тоже сходится и суммы этих рядов удовлетворяют неравенству $\left|\sum a_n\right| \leqslant \sum|a_n|$.*

*Доказательство.* Согласно критерию Коши, сходимость ряда $\sum|a_n|$ равносильна тому, что правая часть неравенства «многоугольника»

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leqslant |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|$$

становится сколь угодно малой при $n \gg 1$. Тогда это справедливо и для левой части, так что, опять по критерию Коши, ряд $\sum a_n$ сходится.

Чтобы получить требуемое неравенство, перейдём к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве многоугольника для частичной суммы $S_k$. □

Сходящийся ряд $\sum a_n$ называют сходящимся **абсолютно**, если также сходится ряд $\sum|a_n|$, а иначе — сходящимся **условно**. Всякий сходящийся положительный ряд сходится абсолютно.

*Пример.* Ряд $\sum(-1)^{n+1}/n$ сходится условно. Сходимость устанавливается по признаку Лейбница, а рядом из модулей является гармонический, расходимость которого нам уже известна.

рисунок

**Упражнение.** *Вычислите суммы рядов*

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} \pm \ldots,$$
$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} \pm \ldots,$$

*применяя подходящие, причём уже известные, разложения Тейлора.*

Для установления абсолютной сходимости ряда $\sum a_n$ часто пригодны признаки Даламбера и Коши с вариантами $D_n = |a_{n+1}|/|a_n|$ и $C_n = \sqrt[n]{|a_n|}$. Эти признаки устанавливают отсутствие абсолютной сходимости только тогда, когда $|a_n|$ не стремится к нулю; в таком случае, $a_n$ не может стремиться к нулю и условной сходимости тоже нет. Поскольку все проверки делаются для абсолютных величин, в такой форме оба признака применимы и к рядам комплексных чисел.

**Перестановка слагаемых ряда.** Существенное различие между новыми понятиями в том, что абсолютная сходимость ряда характеризует его поведение как хорошее, а условная — как странное.

*Пример.* Возьмём условно сходящийся ряд $\sum(-1)^{n+1}/n$. Группируя слагаемые попарно, видим, что сумма заведомо положительна:

$$\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}\right) + \cdots = \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \tfrac{1}{5\cdot 6} + \ldots;$$

мы даже встречали уже её значение.

Разобьём теперь все индексы на три группы: нечётные; чётные, но не делящиеся на 4; делящиеся на 4. Составим новый ряд, перестановку исходного, беря по одному слагаемому из каждой группы по порядку:

$$\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12}\right) + \left(\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16}\right) + \ldots.$$

Собрав вместе соседние слагаемые первых двух групп, получим ряд

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} \pm \ldots,$$

равный исходному, помноженному на $\frac{1}{2}$.

**Теорема** (Риман)**.** *Перестановкой слагаемых условно сходящегося вещественного ряда его сумму можно сделать равной любому числу.* Riemann 1853

**Теорема** (Дирихле)**.** *Перестановка слагаемых абсолютно сходящегося ряда сохраняет его сумму.* Dirichlet 1837

Сперва получим два нетрадиционных утверждения, выводящих на причину указанной Риманом странности.

**Лемма.** *Следующие условия на сходящийся вещественный ряд* $\sum a_n$ *равносильны:*

(1) *этот ряд сходится абсолютно;*
(2) *сходится ряд, составленный из всех положительных $a_n$;*
(3) *сходится ряд, составленный из всех отрицательных $a_n$.*

Теоремы Римана и Дирихле совместно показывают, что сохранение суммы ряда при его перестановках можно добавить четвёртым условием. Однако мотивация тут противоположная: лемма облегчает получение обеих теорем. Обозначим через $S_k^+$ и $S_k^-$ частичные суммы рядов, составленных отдельно из положительных и отрицательных $a_n$:

$$S_k^+ = \sum_{1 \leqslant n \leqslant k} \max\{a_n, 0\}, \qquad S_k^- = \sum_{1 \leqslant n \leqslant k} \min\{a_n, 0\}.$$

*Доказательство.* Частичные суммы рядов $\sum a_n$ и $\sum |a_n|$ равны соответственно $S_k^+ + S_k^-$ и $S_k^+ - S_k^-$. Требования существования и конечности пределов частичных сумм $S_k^+ - S_k^-$, $S_k^+$ и $S_k^-$ в трёх указанных условиях равносильны ввиду арифметических свойств предела, ибо каждый из трёх выражается через любой другой и предел $S_k^+ + S_k^-$, конечный по предположению. $\square$

**Лемма.** *Перестановка слагаемых положительного ряда сохраняет его сумму и в случае сходимости, и в случае расходимости.*

*Доказательство.* Последовательность $\{S_k\}$ частичных сумм исходного ряда монотонно возрастает к пределу $S$. Последовательность $\{T_k\}$ частичных сумм перестановки монотонно возрастает к пределу $T$. Покажем, что $S \leqslant T$. Исходный ряд — перестановка своей перестановки. Они равноправны, что сразу же даст нам $T \leqslant S$ и заключение леммы.

Предположив, что $S > T$, найдём порог $N$, при котором $S_N > T$. Обозначим через $M$ наибольший из номеров, получаемых в перестановке слагаемыми исходного ряда с номерами не больше $N$, то есть входящими в частичную сумму $S_N$. Все они также входят в частичную сумму $T_M$, поэтому $T_M \geqslant S_N > T$ и получено противоречие. $\square$

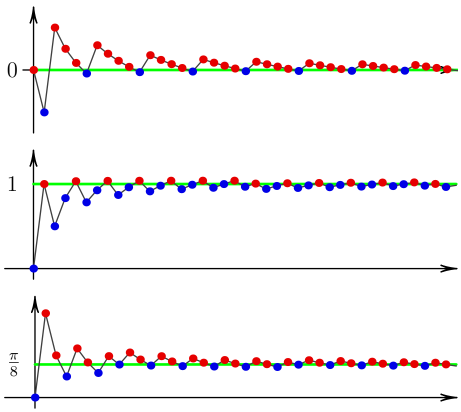
*Доказательство теоремы Дирихле.* По первой лемме, частичные суммы $S_k^+$ и $S_k^-$ имеют конечные пределы $S^+$ и $S^-$. По второй лемме, эти значения сохраняются при перестановке: $T_k^+ \to S^+$ и $T_k^- \to S^-$. Предел $T_k = T_k^+ + T_k^-$ равен их сумме по арифметическим свойствам предела; значит, он тоже сохраняется при перестановке. $\square$

*Доказательство теоремы Римана.* Такой любопытный эффект достигается благодаря сочетанию двух свойств: $a_n \to 0$ ввиду наличия сходимости; $S_k^\pm \to \pm\infty$ ввиду её условности. По сути, здесь обыгрывается неопределённость

$$S_k^+ + S_k^- \to \infty - \infty.$$

Как сделать сумму перестановки ряда равной числу $S$? Набираем по порядку положительные слагаемые, пока не превысим $S$; это возможно, поскольку в случае условной сходимости суммы $S_k^+$ не ограничены сверху. Затем набираем отрицательные, пока сумма не окажется меньше $S$. Затем опять положительные, и так далее. Для всякого $\varepsilon > 0$ хвост составляемой так последовательности частичных сумм перестановки остаётся в $\varepsilon$-коридоре вокруг $S$ после того, как израсходованы слагаемые $a_n$ с $|a_n| \geqslant \varepsilon$. $\square$

*Пример.* Вот первые 40 частичных сумм перестановок ряда Лейбница $\sum(-1)^{n+1}/n$, найденные для желаемой суммы $S$ по этому алгоритму.




**Упражнение.** *Можно ли перестановкой слагаемых условно сходящегося ряда получить ряд, расходящийся потому, что*

(1) *предел его частичных сумм бесконечен?*
(2) *предел его частичных сумм не существует?*

**Упражнение.** *Докажите, что сумма любого ряда сохраняется при перестановке, если изменения номеров всех слагаемых ограничены (конечной) общей постоянной.*

**Упражнение.** *А что скажет аналог теоремы Римана для рядов с комплексными слагаемыми?*

**Арифметические операции с рядами.** Из любых сходящихся рядов можно строить линейные комбинации естественным образом.

**Лемма.** *Сходящиеся ряды можно почленно складывать и умножать на величину, не зависящую от индекса; при этом*

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n, \qquad \sum c a_n = c \sum a_n.$$

*Доказательство.* Равенства верны для частичных сумм. Переходя к их пределу, применяем арифметические свойства предела. □

Ситуация с умножением гораздо хитрее. Начнём с формулы умножения полиномов:

$$\Big(\sum_i a_i x^i\Big)\Big(\sum_j b_j x^j\Big) = \sum_k \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big) x^k.$$

Здесь намеренно не указаны степени полиномов, по сути не играющие никакой роли. Естественно, что при стремлении степеней к бесконечности отсюда получается формула умножения рядов. От зависимости от переменной $x$ избавимся, положив $x = 1$. Итак,

$$\Big(\sum_i a_i\Big)\Big(\sum_j b_j\Big) = \sum_k c_k, \quad \text{где } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

но при условии, что ряд $\sum c_k$ сходится. А это не всегда так; здесь опять проявляется разница между абсолютной и условной сходимостью.

*Пример.* Знакопеременный ряд

$$1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{\sqrt{4}} + \tfrac{1}{\sqrt{5}} - \tfrac{1}{\sqrt{6}} \pm \dots$$

Cauchy 1821 сходится по признаку Лейбница, причём условно. Ряд $\sum c_k$, полученный его умножением на себя, расходится:

$$|c_k| = \sum_{i+j=k} \frac{1}{\sqrt{i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{j}} \geqslant \sum_{i+j=k} \frac{2}{i+j} = (k-1) \cdot \frac{2}{k} \to 2 \neq 0.$$

Здесь для оценки каждого слагаемого применено известное неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим.

Само определение произведения условно сходящихся рядов выглядит не вполне корректно, ибо не видно гарантий, что $\sum c_k$ не зависит от порядка слагаемых уже внутри $c_k$.

Cauchy 1821 **Теорема.** *Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, причём их суммы равны $A$ и $B$, то ряд $\sum c_n$, определённый как их произведение, также абсолютно сходится, причём его сумма равна $AB$.*

*Доказательство.* Введём $A^* = \sum|a_n|$ и аналогично для остальных рядов, а также их частичных сумм:

$$A^*_k = \sum_{1\leqslant n\leqslant k} |a_n|, \quad A_k = \sum_{1\leqslant n\leqslant k} a_n.$$

Искомая абсолютная сходимость обеспечена ограниченностью монотонно неубывающих частичных сумм

рисунок

$$C^*_k = \sum_{1\leqslant n\leqslant k} |c_n| \trianglelefteqslant \sum_{1\leqslant i+j\leqslant k} |a_i|\cdot|b_j| \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant k} |a_i|\cdot|b_j| = A^*_k B^*_k \leqslant A^* B^*.$$

Теперь посмотрим внимательно на слагаемые разности $C_{2k} - A_k B_k$. Сократив сперва все $a_i b_j$, входящие в раскрытие произведения $A_k B_k$, применим опять неравенство «многоугольника»:

рисунок

$$|C_{2k} - A_k B_k| \trianglelefteqslant A^*_k\Big(\sum_{k<n\leqslant 2k} |b_n|\Big) + B^*_k\Big(\sum_{k<n\leqslant 2k} |a_n|\Big).$$

По критерию Коши сходимости рядов $\sum|a_n|$ и $\sum|b_n|$, для $k = k(\varepsilon) \gg 1$ суммы в скобках становятся меньше произвольного $\varepsilon > 0$ и вся правая часть не превосходит $A^*\varepsilon + B^*\varepsilon$. Значит, $C_k \to AB$. □

**Упражнение.** *Проверьте равенство $e^{x+y} = e^x e^y$, всюду заменив экспоненту её рядом Тейлора*

$$e^x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!},$$

*затем раскрывая биномы с одной стороны равенства и перемножая ряды с другой.*

**Суммирование расходящихся рядов.** Этот подраздел следует читать с особой осторожностью и не поддаваться панике. Чудеса условно сходящихся рядов меркнут в сравнении с парадоксами расходящихся.

*Пример* (Ряд Гранди). Возьмём сумму геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \pm \dots = \sum_{n\geqslant 0}(-x)^n.$$

Подстановка сюда $x = 1$ даёт презабавное «равенство»

рисунок

$$\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots.$$

При этом ряд $\sum(-1)^n$, стоящий в правой части, расходится. Легаль-

Leibniz 1674
Bernoulli 169
Grandi 1703

ность подстановки, то есть сохранение равенства при ней, в конце XVII века не вызывала серьёзных подозрений.

Есть иная причина полагать «сумму» этого ряда равной $\frac{1}{2}$. По последовательности его частичных сумм $\{S_n\} = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$ составим последовательность их средних арифметических

$$\bar{S}_n = \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \dots + S_n),$$

сразу записав их в удобном виде:

$$\{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{10}, \tfrac{1}{2}, \dots\}.$$

рисунок Тут видно, что $\bar{S}_n \to \frac{1}{2}$.

Различные обстоятельства не позволяют полностью игнорировать подобные примеры. Долгое время они были предметом ожесточённых споров математиков. Ещё Эйлер указывал преобразования, превращающие как расходящиеся ряды в сходящиеся, так и наоборот.

Как примирить «ересь» знаменитого примера Гранди с определением суммы ряда как предела частичных сумм, который в этом примере явно не существует? Решение в том, что общепринятый способ суммирования рядов — лишь самый простой. Для расходящихся рядов изобретены более хитрые предельные процессы. Среди них полезны прежде всего методы, называемые регулярными; для сходящихся рядов они дают ожидаемые результаты, а именно, их обычные суммы. Самые известные из регулярных методов как раз и показаны выше на примере ряда Гранди: первый называют суммированием по Абелю, а второй — суммированием по Чезаро.

**Упражнение.** *Докажите, что усреднённые по Чезаро частичные суммы $\bar{S}_n$ сходящегося ряда сходятся к его обычной сумме. Указание: найдите нужный трюк в разделе о зажатых последовательностях.*

Трудности придания значений суммам расходящихся рядов и расходящимся несобственным интегралам оказались серьёзными препятствиями на переднем крае фундаментальной теоретической физики (квантовой теории поля) с последней трети XX века.

## 7.5. Гипергеометрические функции

бонус

**Биномиальный ряд.** В качестве подготовительного этапа рассмотрим биномиальный ряд, получающийся разложением функции $u(x) = (1-x)^{-a}$ при $|x| < 1$ и произвольном $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-a} &= 1 + \frac{-a}{1} \cdot (-x) + \frac{(-a)(-a-1)}{1 \cdot 2} \cdot (-x)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{a}{1} \cdot x + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots .\end{aligned}$$

Выразив произведения через гамма-функцию, мы можем переписать ряд компактнее как

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a) \cdot n!}\, x^n = \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \sum_{n \geqslant 0} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(1+n)}\, x^n,$$

но приходится налагать лишнее условие $a \neq 0, -1, -2, -3, \dots$, или кратко $a \notin \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$. Этого ограничения избегают, применяя обозначение

$$(a)_n = \prod_{0 \leqslant k < n} (a+k) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

В частности, $(1)_n = n!$. Получаем тогда

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(a)_n}{(1)_n}\, x^n.$$

Варианта Даламбера для этого ряда

$$\mathcal{D}_n = \frac{a+n}{1+n} \cdot x \to x \text{ при } n \to +\infty$$

показывает, что он сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Для исследования сходимости при $x = 1$ нужен более сильный признак, например, признак Раабе. Опустим выкладки, результат которых предсказуем: ряд сходится при $a < 0$ и расходится при $a > 0$.

Несложно проверить, что исходная функция $u(x) = (1-x)^{-a}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x)u' = au$, но попробуем получить его, исходя только из биномиального ряда. Для этого введём оператор Эйлера $D = x\frac{d}{dx}$, действующий на (хорошие) функции по правилу $f(x) \mapsto xf'(x)$ и заметим, что $D(x^n) = nx^n$. Тогда $(a+D)x^n = (a+n)x^n$. Сравнивая соответствующие коэффициенты, убедимся в равенстве $(a+D)u = u'$, из которого перегруппировкой получим приведённое выше дифференциальное уравнение. Кроме того, тождество $(xf)' = f + xf'$ даёт $u' = (1+D)\frac{u}{x}$, поэтому

$$(a+D)u = (1+D)\frac{u}{x}.$$

Здесь следует сравнить операторы слева и справа с числителем и знаменателем варианты Даламбера.

**Гипергеометрические ряды.** Степенной ряд $\sum a_n x^n$, для которого варианта Даламбера является отношением полиномов $A(n)/B(n)$, умноженным на $x$, называют **гипергеометрическим**. У биномиального ряда оба полинома линейные, так что он является одним из простых случаев, но не простейшим. Разложение в ряд функции $e^x$ даёт варианту Даламбера $\mathcal{D}_n = \frac{x}{1+n}$. Этот пример и считают простейшим, чтобы в коэффициентах ряда всегда выделять множитель $\frac{1}{n!}$.

Два следующих по сложности случая, дающие варианты

$$\mathcal{D}_n = \frac{a+n}{(b+n)(1+n)} \cdot x \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_n = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)} \cdot x,$$

это ряд Куммера

$${}_1F_1(a;b;x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(a)_n}{(b)_n(1)_n}\, x^n$$

и ряд Гаусса

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}\, x^n.$$

По признаку Даламбера, ряд Куммера сходится при всех $x$, а ряд Гаусса сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Для исследования сходимости ряда Гаусса при $x = 1$ нужен более сильный признак. Метод самого Гаусса затем и стали называть признаком Гаусса. Ещё более тонкое рассуждение требуется при $x = -1$. Выкладки есть, например, в разных местах учебника Фихтенгольца. Мы их опустим, имея совсем другие интересы.

**Гипергеометрическое уравнение.** Мы начали изучать разложения функций в главе 3, а в самом её конце есть примеры отыскания решений дифференциальных уравнений в виде рядов. Это ведёт к мысли, что можно вводить новые функции как суммы рядов, а ещё лучше, когда исходным источником является дифференциальное уравнение. Поэтому построим уравнение, одним из решений которого является гипергеометрический ряд Гаусса.

По аналогии с биномиальным рядом, можно предположить, что функция $u(x) = {}_2F_1(a, b; c; x)$ удовлетворяет уравнению

$$(a + D)(b + D)u = (c + D)(1 + D)\frac{u}{x}.$$

Это действительно так, но проверку оставим в качестве упражнения. Полученное уравнение перепишем как

$$x(1 - x)u'' + \big(c - (a + b + 1)x\big)u' - abu = 0.$$

**Упражнение.** *Проверьте, что функция*

$${}_2F_1(a, b; 1 + a + b - c; 1 - x)$$

*также является решением этого уравнения.*

Со временем курс математических методов физики познакомит вас с некоторыми замечательными свойствами этого уравнения. Изучение его решений обогатило математику множеством новых красивых явлений и идей, касаться которых сейчас слишком рано.

С другой стороны, частные случаи гипергеометрического уравнения возникают в различных задачах физики. Поэтому значительная часть элементарных и специальных функций, а также важных семейств полиномов, с которыми постоянно приходится сталкиваться физикам и инженерам, получаются из гипергеометрической функции Гаусса надлежащим выбором параметров.

**Упражнение.** *Проверьте, что*

$$\ln(1 + x) = x \cdot {}_2F_1(1, 1; 2; -x), \quad \arcsin x = x \cdot {}_2F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}; x^2).$$

Превращение в более простую функцию также может идти посредством функции Куммера ${}_1F_1$ и включать предельный переход, ибо

$${}_1F_1(b; c; x) = \lim_{a \to +\infty} {}_2F_1(a, b; c; x/a).$$

Этот предел опирается на пределы всех слагаемых ряда, где играет

$$\left(\tfrac{x}{a}\right)^n \cdot \prod_{0 \leqslant k < n} (a + k) = x^n \cdot \prod_{0 \leqslant k < n} \left(1 + \tfrac{k}{a}\right) \to x^n,$$

хотя возможность предельного перехода в бесконечном ряду требует дополнительных обоснований, которые мы наработаем только во втором семестре.

**Интегрирование дифференциальных биномов.** Разберём пример, в котором гипергеометрическая функция возникает при интегрировании элементарной. Дифференциальным биномом называют выражение вида $x^a(1+x^b)^c\,dx$ с произвольными показателями степеней. Числовые коэффициенты в скобке, приводимые в учебниках, устраняются простой заменой, поэтому не будем отвлекаться на них.

Обычно задаются вопросом, когда интеграл от дифференциального бинома выражается в элементарных функциях, так что сразу же ограничиваются рациональными показателями, для которых исторически вопрос и появился. Различными подстановками находят три элементарных случая и далее просто пишут, что остальные неэлементарные. Однако имеющему достаточный опыт это может подсказать, что тут за кадром работает гипергеометрическая функция. Сейчас мы увидим её, опять же пренебрегая обоснованиями некоторых операций.

Сначала степенной заменой превратим бином в $t^\alpha(1+t)^\beta\,dt$. Затем разложим бином в ряд и проинтегрируем каждое слагаемое:

$$\begin{aligned}\int_0^x t^\alpha(1+t)^\beta\,dt &= \int_0^x \sum_{n\geqslant 0}\binom{\beta}{n} t^{\alpha+n}\,dt \\ &\overset{!}{=} \sum_{n\geqslant 0}\binom{\beta}{n}\int_0^x t^{\alpha+n}\,dt = \sum_{n\geqslant 0}\binom{\beta}{n}\frac{x^{\alpha+n+1}}{\alpha+n+1}.\end{aligned}$$

Найдём для этого ряда варианту Даламбера. Выражая обобщённые биномиальные коэффициенты через гамма-функцию и упрощая их отношение, придём к

$$\mathcal{D}_n = \frac{\alpha+n+1}{\alpha+n+2}\cdot\frac{\beta-n}{1+n}\cdot x = \frac{\alpha+n+1}{\alpha+n+2}\cdot\frac{-\beta+n}{1+n}\cdot(-x).$$

Подогнав ещё первое слагаемое ряда, окончательно получим

$$\int_0^x t^\alpha(1+t)^\beta\,dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot {}_2F_1(-\beta,\alpha+1;\alpha+2;-x).$$

**Упражнение.** *Выразите бэта-функцию через гипергеометрическую:*

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha}\cdot {}_2F_1(1-\beta,\alpha;\alpha+1;1).$$

**Интегральное представление Эйлера.** Гаусс значительно продвинул понимание функции ${}_2F_1$, но изучали её и раньше. А именно, Эйлер рассматривал интеграл

$$I(z) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}\,dx.$$

Для сходимости нужно накладывать ограничения $|z| < 1$ и $c > b > 0$. При $a = 0$ остаётся интеграл Эйлера, определяющий бэта-функцию.

Разложим бином $(1 - zx)^{-a}$ в ряд. Коэффициенты биномиального ряда дают значения гамма-функции, зависящие от $a$, а интегралы становятся значениями бэта-функции:

$$I(z) \overset{!}{=} \sum_{n \geqslant 0} \binom{-a}{n} (-z)^n \cdot \int_0^1 x^{b+n-1}(1-x)^{c-b-1}\, dx$$
$$= \sum_{n \geqslant 0} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a) \cdot n!} z^n \cdot \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)}.$$

Перегруппировав сомножители до

$$I(z) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \cdot \sum_{n \geqslant 0} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{z^n}{n!},$$

видим, что ряд сворачивается в

$$I(z) = \mathrm{B}(b, c-b) \cdot {}_2F_1(a, b; c; z).$$

**Упражнение.** *Получите без обоснований формулу Гаусса*

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

**Преобразования Пфаффа и Эйлера.** Известно умопомрачительное количество тождеств с участием гипергеометрической функции. Выведем для примера два из числа наиболее простых.

В только что разобранном интегральном представлении гипергеометрической функции сделаем замену $x = 1 - t$. Далее, преобразуя

$$1 - zx = 1 - z(1-t) = (1-z)\bigl(1 - \frac{z}{z-1}t\bigr),$$

получим

$$I(z) = (1-z)^{-a} \int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}\bigl(1 - \frac{z}{z-1}t\bigr)^{-a}\, dt.$$

Ввиду симметричности бэта-функции, это даёт тождество Пфаффа

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} \cdot {}_2F_1(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}).$$

Теперь воспользуемся симметричностью функции Гаусса по первым двум параметрам, затем применим тождество Пфаффа ещё раз и получим тождество Эйлера

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} \cdot {}_2F_1(c-a, c-b; c; z).$$

Пора вспомнить, что до сих пор на аргумент функции Гаусса накладывалось условие $|z| < 1$. При этом в тождестве Пфаффа в качестве аргумента с одной стороны фигурирует $\frac{z}{z-1}$, а требование $|\frac{z}{z-1}| < 1$ нарушается, скажем, при $z = 2/3$. Можно также подметить аргумент $1 - z$ в одном из упражнений выше.

Всё это говорит о том, что функция Гаусса определена не только при $|z| < 1$, а тождество Пфаффа даёт одну из формул для её значений при аргументах вне области сходимости гипергеометрического ряда. Такие формулы называют формулами аналитического продолжения. Это термин из комплексного анализа; именно в комплексной области открывается истинная красота гипергеометрической функции.

# Содержание