

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

А. П. УЛЬЯНОВ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ФИЗИКОВ

Часть 5. Векторный анализ

Учебно-методическое пособие
по курсу основ математического анализа

Новосибирск
~~2013~~ 2018

УДК: 510

ББК: В14я73-1 + В151.54я73-1

У 517

Ульянов А. П. Основы математического анализа для студентов-физиков. Часть 5. Векторный анализ. Учеб.-метод. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013.

ISBN 978-5-94356-571-7

Пособие содержит конспект лекций, прочитанных автором для студентов 1-го курса физического и геолого-геофизического факультетов НГУ. Ввиду большого объёма курса и разнообразия материала пособие разделено на несколько частей. Часть 5 содержит основы векторного анализа и включает следующие темы: работа и поток; зависимость интеграла от пути; дивергенция и ротор; классические интегральные формулы; классы векторных полей; дифференциальные формы.

Пособие предназначено для студентов первого курса физического и геолого-геофизического факультетов НГУ.

Рецензент

проф. В.А. Александров

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009-2018 гг.

Версия от 21 ноября 2018 г.

© Ульянов А. П., 2013

© Новосибирский государственный университет, 2013

Глава 14. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ НА ПЛОСКОСТИ

14.1. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Мы сначала рассмотрим плоские векторные поля ($n = 2$), а затем пространственные ($n = 3$). Пространственный случай важнее для физики, но изучение плоского, а значит, более простого, позволяет увидеть многие основные черты предмета. Однако в этом разделе мы иногда легко выходим в пространство.

Определения и примеры. Говорят, что на области $D \subset \mathbb{R}^n$ задано **векторное поле** $\mathbf{f}$, если к каждой точке $p \in D$ приложен вектор $\mathbf{f}(p)$. Здесь очень важно, что векторы одного поля в разных точках разные; параллельный перенос вектора из одной точки в другую и сравнение векторов, приложенных в удалённых точках, за небольшими исключениями бессмысленны и запрещены.

В целях удобства, часто вместо $\mathbf{f}(p)$ будем указывать зависимость $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ или $\mathbf{f}(x, y, z)$ векторного поля от радиус-вектора или координат точки приложения. В координатах будем писать $\mathbf{f} = (P, Q, R)$, где каждая из компонент есть функция от $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Примеры. Самые наглядные векторные поля в физике — поля скоростей точек движущегося тела, а в особенности жидкости или газа. Второй важнейший класс — силовые поля: гравитационное, электрическое, магнитное. (Изменяющихся во времени полей мы сейчас не касаемся, либо изучаем их «мгновенно».)

В векторном анализе часто прибегают к физическим аналогиям, даже заимствуя из физики терминологию. Исходная причина в том, что предмет создан, в середине XIX века, в большей степени физиками.

Физические поля обычно непрерывные или даже достаточно гладкие, за исключением отдельных особых точек, линий, либо поверхностей. Поэтому нас тоже будут интересовать достаточно хорошие векторные поля. Поскольку фактически векторное поле определено как отображение $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, его непрерывность или гладкость равносильны этим же свойствам его компонент P , Q и R как функций от координат точки приложения.

Также говорят, что на области $D \in \mathbb{R}^n$ задано **скалярное поле** u , если в каждой точке $p \in D$ определено число $u(p)$. Этот объект ничем не отличается от числовой функции на области. Для векторных полей в ходу альтернативное название: вектор-функции.

Пример. Градиент ∇u гладкого скалярного поля есть векторное поле.

Примеры. Простейшие векторные поля на плоскости:

однородное	$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \text{const}$
центральное	$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (x, y) \cdot f(r)/r \parallel \mathbf{r}$
вращательное	$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (-y, x) \cdot f(r)/r \perp \mathbf{r}$

Однородное поле — пример воистину простейший: тут векторы поля одинаковы во всех точках. Центральное и вращательное поля это основные примеры здесь; на них особенно ясно проступают важнейшие идеи этой главы. Формулы в таблице записаны так, чтобы получить $|\mathbf{f}(\mathbf{r})| = f(r)$; при этом $|\mathbf{r}| = r$.

Примеры. Простейшие векторные поля в пространстве аналогичны. Поле тяготения точечной массы и электрическое поле точечного заряда центральны с $f(r) = kr^{-2}$. Поле скоростей $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}}$ вращающегося твёрдого тела — вращательное с $f(r) = \omega r$. Конечно, при вращении появляется ещё направление оси, и $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

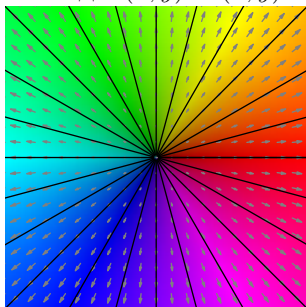
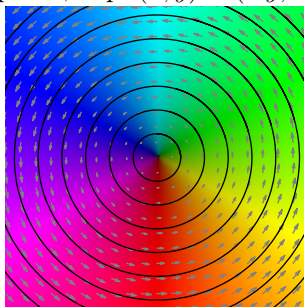
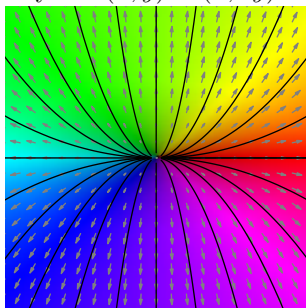
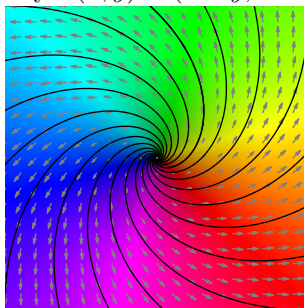
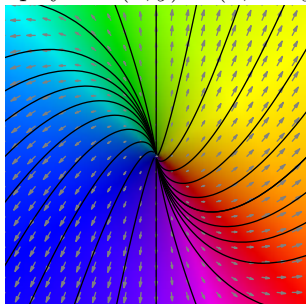
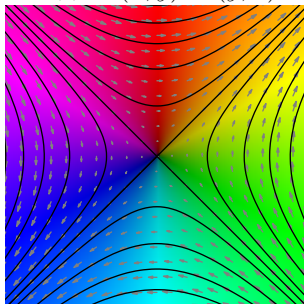
Фазовые портреты на плоскости. Когда наше векторное поле есть поле скоростей, мы имеем дело с векторным дифференциальным уравнением $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$. Оно равносильно системе скалярных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Рисунок векторного поля и называют фазовым портретом системы. После несложного видоизменения он показывает траектории; в одних терминах это линии, по которым происходит движение, а в других — решения системы уравнений. Между ними есть разница, но мы не будем останавливаться на этом.

Такие системы подробно изучают в курсе дифференциальных уравнений, но совсем немного полезно сказать уже сейчас. Особенно важно поведение системы вблизи стационарных точек, где $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, ибо гладкое векторное поле может радикально менять своё направление, лишь проходя через нуль. Оказывается, что вблизи стационарной точки возможно несколько типов портретов. Некоторые из них, отвечающие линейным системам, мы и рассмотрим в числе простых примеров векторных полей. Попозже они ещё пригодятся для вычислений.

Примеры. Всего есть шесть типов портретов двумерных линейных систем с единственной особой точкой, и такие точки имеют свои устойчи-

звезда: $(\dot{x}, \dot{y}) = (x, y)$ ротоцентр: $(\dot{x}, \dot{y}) = (-y, x)$ узел: $(\dot{x}, \dot{y}) = (x, 2y)$ фокус: $(\dot{x}, \dot{y}) = (x - y, x + y)$ выр. узел: $(\dot{x}, \dot{y}) = (x, x + y)$ седло: $(\dot{x}, \dot{y}) = (y, x)$ 

шиеся названия. Нарисуем их представителей вместе с траекториями. Радужный фон всего лишь кодирует направление движения и совсем не обязателен.

Звезда, или звёздный узел, это центральное поле с $f(r) = r$; траектории прямолинейны (лучи). Ротоцентр — центр вращения, поле вра-

щательное. Терминология из разных областей здесь не согласована! Траектории являются окружностями, либо эллипсами после линейной замены переменных.

В случае фокуса поле равно сумме полей из первых двух примеров, а траектории тут являются спиралями. Взяв вместо суммы разность, тоже получим фокус, но спирали закрутятся в другую сторону.

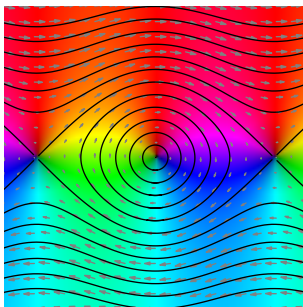
У седла четыре луча, остальные траектории похожи на гиперболы, а на рисунке в точности являются ими. У обычного узла также четыре луча, остальные траектории похожи на параболы, а на рисунке в точности являются ими. У вырожденного узла только два луча.

В четырёх системах из шести приведённых все траектории удаляются от особой точки в начале координат. Заменив в них поле $\mathbf{f}$ на $-\mathbf{f}$, получим системы с траекториями, приближающимися к особой точке, называемой тогда асимптотически устойчивой. Ротоцентр и седло в этом отличаются: ротоцентр устойчив, а седло неустойчиво всегда, ибо при смене направления всё равно остаются удаляющиеся траектории. Седло особенно интересно тем, что две траектории, сперва приближающиеся к седлу бок о бок, но по разные стороны от луча, затем удаляются в противоположные стороны. Ротоцентр может потерять свою устойчивость при добавлении в уравнение даже малых нелинейных слагаемых.

Пример (физический маятник). В идеале тело, подвешенное на нити, колеблется по закону $\ddot{x} + \sin x = 0$, где мы опустим физические константы. Вводя переменную $y = \dot{x}$ для скорости, переходят от уравнения второго порядка к системе первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

Термин «фазовый портрет» происходит именно от такого перехода.



Точки с координатами $(\pi k, 0)$ для всех целых k тут особые. При чётных k это ротоцентры, а при нечётных сёдла. Чтобы определить это, нужно заменить синус вблизи его нуля на линейную функцию.

Операции с векторными полями. С ними можно работать и как с векторами, и как с функциями. Все векторные операции совершаются поточечно, а функциональные — покомпонентно.

Когда даны векторные поля $\mathbf{f}_i$ и скалярные поля α_i , линейная комбинация $\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2$ есть векторное поле, значение которого в каждой точке равно соответствующей линейной комбинации:

$$(\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2)(p) = \alpha_1(p) \mathbf{f}_1(p) + \alpha_2(p) \mathbf{f}_2(p).$$

Также определяются скалярное и векторное произведения двух векторных полей. Это соответственно скалярное и векторное поля:

$$(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2)(p) = \mathbf{f}_1(p) \cdot \mathbf{f}_2(p), \quad (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2)(p) = \mathbf{f}_1(p) \times \mathbf{f}_2(p).$$

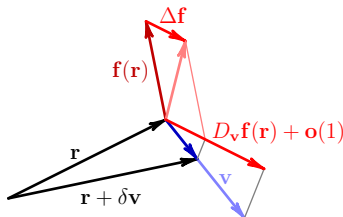
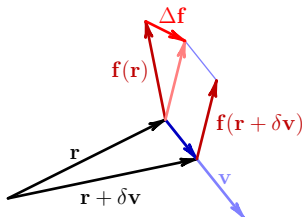
Частная производная $\mathbf{f}_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$ векторного поля $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ находится покомпонентно:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x} \right), \quad \text{или кратко} \quad \mathbf{f}_x = (P_x, Q_x, R_x),$$

в каждой точке. Производная векторного поля $\mathbf{f}$ по вектору $\mathbf{v}$ в точке $\mathbf{r}$ — ~~радиус-вектор~~ $\mathbf{r}$ есть вектор, определяемый как

$$(D_{\mathbf{v}} \mathbf{f})(\mathbf{r}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{r})}{\delta}.$$

Это определение бескоординатно, но при наличии координат производная по вектору также вычисляется покомпонентно.



Упражнение. Выпишите матричную формулу для вычисления компонент $D_{\mathbf{v}} \mathbf{f}$ по компонентам $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Что, если $\mathbf{v}$ зависит от точки, то есть также является полем?

В следующей главе мы изучим две важнейших операции над векторными полями в пространстве, возникшие при построении теории

электродинамики: дивергенцию и ротор. В декартовых координатах они выражаются красивыми комбинациями частных производных.

Интегрирование векторных полей встречается в различных видах, отражающих специфику различных физических величин. Изучение их занимает значительную часть этой главы и следующей. Несколько обособленный от остальных способ заключается в интегрировании каждой компоненты отдельно, просто как функции на линии, поверхности, или трёхмерной области. Результаты такого интегрирования являются компонентами вектора. С главного примера применения этого способа мы и начнём.

Силовое поле протяжённого источника. Поместим две массы m_i в точки $\mathbf{r}_i$ и запишем их влияние на точку $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i$. Сила притяжения единичной массы в точке $\mathbf{r}$ к каждой из размещённых масс равна

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = -Gm_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}.$$

Суммарная сила равна $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{r})$. Это пример векторного поля, полученного сложением двух (говорят ещё о суперпозиции полей).

убрать тильду
с рисунка



Теперь распределим массу по замкнутой области T . Как записать её поле тяготения? Теперь вместо суммы нужен интеграл, а вместо $\mathbf{r}_i$ новая буква. В таких случаях традиционно используют $\mathbf{r}'$, но мы возьмём $\check{\mathbf{r}}$, боясь путаницы с производными. Проинтегрируем по всей области поле тяготения элемента массы $dm(\check{\mathbf{r}}) = \varrho(\check{\mathbf{r}}) dV$, находящегося в точке $\check{\mathbf{r}} \in T$. При $\mathbf{r} \notin T$ получаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \int_T \varrho(\check{\mathbf{r}}) \frac{\mathbf{r} - \check{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \check{\mathbf{r}}|^3} d^3\check{\mathbf{r}},$$

используя тут «физическое» обозначение $d^3\check{\mathbf{r}}$ для элемента объёма, удобное тем, что в отличие от dV оно указывает, по какому радиус-вектору подразумевается интегрирование, а попутно и размерность. В декартовых координатах **первая** компонента выглядит как

$$P(x, y, z) = -G \iiint_T \frac{(x - \check{x})\varrho(\check{x}, \check{y}, \check{z}) d\check{x} d\check{y} d\check{z}}{((x - \check{x})^2 + (y - \check{y})^2 + (z - \check{z})^2)^{3/2}},$$

а остальные отличаются лишь заменой выделенного множителя.

18.04.17
 $\mathbf{r} \mapsto \check{\mathbf{r}}$
 $\check{\mathbf{r}} \mapsto \mathbf{r}$

Аналогично выражается электрическое поле распределённого заряда; отличие от гравитации лишь в названиях констант и общем минусе, ввиду отталкивания зарядов одного знака. Для заряда q в точке $\mathbf{r}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = kq \frac{\mathbf{r} - \check{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \check{\mathbf{r}}|^3},$$

а для распределённого заряда пишется интеграл. При распределении по трёхмерной области нужен тройной интеграл, как и выше. Однако в электродинамике характерны заряды, распределённые по поверхностям или линиям. Тогда вместо $dq = \varrho dV$ соответственно берут $dq = \sigma dS$ или $dq = \lambda ds$, а интеграл применяют поверхностный или криволинейный (первого рода). Это, конечно, математическая идеализация для упрощения вычислений на макроскопическом уровне.

Поскольку такие интегралы редко удачно считаются, поля различных систем зарядов стараются найти иными путями. Позже мы рассмотрим несколько примеров.

14.2. РАБОТА И ПОТОК НА ПЛОСКОСТИ

Сперва сосредоточимся на двумерном случае. Естественно, он проще трёхмерного, но многие главные черты предмета уже проступают явно. При этом он не лишён и прямого практического значения; например, изучение явлений в жидкости, не зависящих от одной из пространственных координат, есть отдельная область гидродинамики.

Подвижный базис вдоль линии. В плоской области D возьмём гладкую линию γ . Параметризуем γ , взяв для простоты длину дуги, считая от фиксированной точки, за параметр: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Тогда касательный вектор $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$ имеет единичную длину. Выберем также единичный вектор нормали $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$; обычно это делают так, чтобы базис $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle$ был положителен.



Двигаться вдоль линии можно либо в одну, либо в другую сторону. Возникает два варианта подвижного базиса, отличающиеся изменением направления обоих базисных векторов в каждой точке на противоположное. Поэтому всем вычислениям с использованием подвижного базиса должен предшествовать выбор направления прохождения линии. Его называют выбором **ориентации** линии. Для многих примене-

ний более естественно выбирать ориентацию, руководствуясь нужным направлением нормали.

Упражнение. Для линии γ и векторного поля $\mathbf{f}$ в плоскости $z = 0$ трёхмерного пространства докажите, что

$$\mathbf{f} \times \mathbf{t} = (0, 0, \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}), \quad \mathbf{f} \times \mathbf{n} = (0, 0, -\mathbf{f} \cdot \mathbf{t}).$$

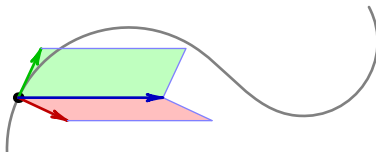
Элементы работы и потока. Теперь возьмём на области D векторное поле $\mathbf{f}$. В каждой точке линии разложим $\mathbf{f}$ по базису $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle$, применяя формулу проектирования из геометрии:

$$\mathbf{f} = \text{pr}_{\mathbf{n}} \mathbf{f} + \text{pr}_{\mathbf{t}} \mathbf{f} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}.$$

Общая формула проектирования содержит ещё знаменатели, но здесь они пропадают, поскольку базисные векторы единичны.

Оба слагаемых разложения имеют отдельный физический смысл. Когда частица движется по траектории γ в силовом поле $\mathbf{f}$, **работа** поля на перемещении $d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds$ определяется как $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds$.

Второе слагаемое наиболее знакомо в гидродинамических терминах, когда в роли $\mathbf{f}$ выступает поле скоростей. **Поток** поля сквозь участок $\mathbf{t} ds$ воображаемой мембраны γ определяется как площадь параллелограмма на векторах $\mathbf{f}$ и $\mathbf{t} ds$. Результат последнего упражнения позволяет переписать её как $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds$, а также указать аналогичный бесконечно тонкий параллелограмм для элемента работы.



Итак, проецирование поля на касательную и нормаль выделяет его работающую и протекающую составляющие. Смена ориентации линии вызывает смену знака элементов **работы** и **потока**.

В декартовых координатах $d\mathbf{r} = (dx, dy)$. При движении вдоль параметризованной линии это равно $\mathbf{t} ds$, а поскольку $\mathbf{n} \perp \mathbf{t}$ и оба вектора единичны, с учётом ориентации получаем $\mathbf{n} ds = (dy, -dx)$. Плоское векторное поле есть пара функций: $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}))$. Поэтому элементы работы и потока поля становятся соответственно

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds = P dx + Q dy, \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = P dy - Q dx.$$

В этом виде их называют **формами** работы и потока. Для теории они удобны тем, что соответствуют исключительно самому векторному полю (P, Q) и не требуют присутствия определённой линии. Есть в них

метки?

рисунок?

и смысл более глубокий, чем просто удобная запись; его мы коснёмся попозже.

Криволинейные интегралы второго рода. Чтобы найти работу поля на перемещении вдоль всей линии, нужно проинтегрировать элемент работы:

$$W(\mathbf{f}, \gamma) = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} \, ds.$$

Аналогичный интеграл даёт поток поля через всю линию:

$$\Phi(\mathbf{f}, \gamma) = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Важный частный случай доставляют замкнутые линии, или **контуры**. Знак интеграла по контуру нередко снабжают дополнительным кружком. Вместо работы тогда говорят о **циркуляции**

$$\oint_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

От вычисляющих массу криволинейных интегралов

$$m = \int_{\gamma} \varrho |d\mathbf{r}|$$

первого рода вычисляющие работу, циркуляцию и поток криволинейные интегралы **второго рода** отличаются тем, что умножаются на -1 при **смене направления** движения по линии на противоположное:

$$\int_{-\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot (-\mathbf{n}) \, ds = - \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Иными словами, интеграл второго рода зависит от ориентации линии.



Почему при первоначальном изучении интегрирования на отрезке не возникло различия между интегралами первого и второго рода? Возникло, но тогда оно просто замалчивалось как отвлекающее от основного изложения. Числовая ось уже ориентирована; под интегралом по отрезку $[a, b]$ подразумевают интеграл «от a до b », а теперь видно, что это интеграл второго рода: хотя бы переставьте a и b в формуле Ньютона — Лейбница. При вычислении же размазанной массы интегралом первого рода по отрезку следовало бы писать $|dx|$ вместо dx , но этого не делают, решив автоматически, что $dx > 0$. Различие видно

и на уровне интегральных сумм Римана и Дарбу, где модуль или есть (длина приращения), или его нет (само приращение).

Несложные примеры вычислений. Основная задача здесь — научиться вычислять интегралы от конкретных форм по заданным линиям. Формулировка бывает как непосредственно в формах, особенно в задачниках по анализу, так и в терминах векторного поля.

Интегралы форм по γ вычисляются отдельно для каждого слагаемого как обычные интегралы по отрезкам, дающим разбиение линии на элементарные куски. Такое сведение требует лишь правильной подстановки параметризации $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ каждого куска линии:

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{t_0}^{t_1} (P\dot{x} + Q\dot{y}) dt.$$

Пример. Для векторного поля $\mathbf{f}(x, y) = (x, y)$ имеем $P = x$ и $Q = y$. Форма работы равна $x dx + y dy$, а форма потока равна $x dy - y dx$.

Вычислим работу и поток этого поля для отрезка прямой от точки $(1, 0)$ до точки $(0, 1)$. Для работы просто подставляем изменение x от 1 до 0 в первое слагаемое и изменение y от 0 до 1 во второе слагаемое:

$$W = \int_{\gamma} (x dx + y dy) = \int_{\gamma} x dx + \int_{\gamma} y dy = \int_1^0 x dx + \int_0^1 y dy.$$

Значения вычисляемых интегралов противоположны, поэтому $W = 0$.

Интеграл для потока также разобьём на слагаемые с разными дифференциалами. Дальше в каждом из них нужно выразить одну переменную через другую. Для этого используем связь переменных, наложенную в уравнении линии: прямой $x + y = 1$. Получим

$$\Phi = \int_{\gamma} x dy - \int_{\gamma} y dx = \int_0^1 (1 - y) dy - \int_1^0 (1 - x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Примеры. Возьмём в качестве контура γ окружность радиуса r с центром в начале координат, проходимую против часовой стрелки. Посчитаем циркуляцию и поток простейших полей из таблицы.

Для однородного поля как циркуляция, так и поток равны нулю уже из соображений симметрии.

Центральное поле коллинеарно нормали к окружности и поэтому не работает: циркуляция равна нулю. Поскольку $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = f(r)$ постоянно на окружности, поток равен $2\pi r f(r)$.

Наоборот, вращательное поле коллинеарно касательной и не протекает: поток равен нулю. Поскольку $\mathbf{f} \cdot \mathbf{t} = f(r)$ постоянно на окружности, циркуляция равна $2\pi r f(r)$.

рисунок

рисунок

Циркуляция и поток седлового поля $\mathbf{f}(x, y) = (y, x)$ также нулевые вследствие симметрии, но мы посчитаем их для $r = 1$. Параметризуем окружность обычным образом, затем найдём касательную и нормаль:

рисунок

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\varphi) &= (\cos \varphi, \sin \varphi) = (x, y), \\ \mathbf{t}(\varphi) &= (-\sin \varphi, \cos \varphi) = (-y, x), \\ \mathbf{n}(\varphi) &= (\cos \varphi, \sin \varphi) = (x, y).\end{aligned}$$

Поэтому циркуляция и поток сводятся к

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} \, ds &= \oint_{\gamma} y \, dx + x \, dy = \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \, d\varphi, \\ \oint_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \oint_{\gamma} y \, dy - x \, dx = \int_0^{2\pi} 2 \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi,\end{aligned}$$

и оба интеграла, конечно же, равны нулю. Запись криволинейных интегралов через формы здесь для вычисления не нужна и приведена ради наведения красоты и внушения задумчивости.

Спиральное поле $\mathbf{f}(x, y) = (x - y, x + y)$ является суммой центрального поля (x, y) и вращательного поля $(-y, x)$. Циркуляция и поток соответственно складываются, и в результате $W = \Phi = 2\pi r^2$.

рисунок

14.3. ОРИЕНТИРОВАННАЯ ПЛОЩАДЬ И ФОРМУЛА ГРИНА

В этом разделе мы рассматриваем приличную плоскую область D , а именно, компакт с кусочно-гладким граничным контуром $\gamma = \partial D$ без самопересечений. При этом граничный контур обходится так, что область всегда «слева», а нормаль к ∂D направлена «вправо», то есть наружу области.

рисунок?

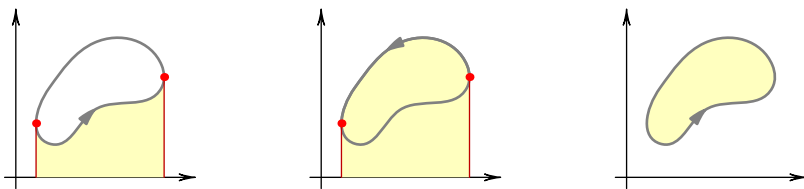
Как γ , так и D могут быть несвязными; на практике первое встречается довольно часто, а второе очень редко. Отсутствие самопересечений контура требуется лишь для простоты, ибо их изучение уводит в другие предметы и не входит в наши планы.

рисунки

Выражение площади криволинейными интегралами. Для простоты пусть сначала γ состоит из двух графиков неотрицательных функций y_i на отрезке Δ . Криволинейный интеграл

$$\int_{\gamma_i} y \, dx$$

отличается от площади подграфика y_i на Δ лишь знаком.



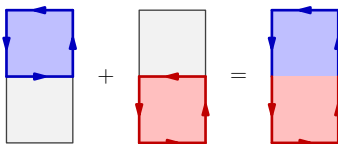
Разность этих двух интегралов равна интегралу по γ , а в разности подграфиков остаётся как раз сама область D . Поэтому

$$S(D) = - \oint_{\partial D} y \, dx.$$

Теорема. Эта же формула верна для любой приличной области D .

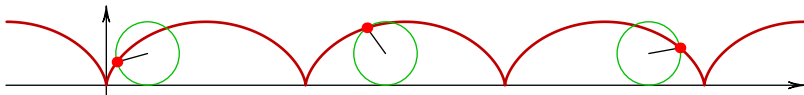
Доказательство. Если D является криволинейной трапецией, то дополнительно к первому разобранному случаю появляются два вертикальных участка. Однако их вклад в интеграл нулевой, ибо там $dx = 0$.

Более сложную (но приличную) область всегда можно разбить на конечное число криволинейных трапеций, пользуясь аддитивностью интеграла. При разбиении появляются новые границы, однако каждый новый участок границ проходится дважды, причём в противоположных направлениях, что ведёт к попарному сокращению слагаемых. $\square$



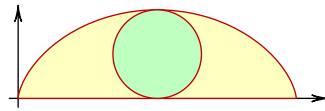
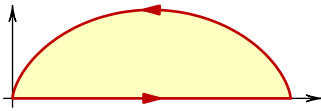
Пример (циклоида). Когда колесо радиуса 1 катится по прямой без проскальзывания, точка на его ободе (фонарик или отражатель) описывает линию

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$



Найдём площадь под одной аркой циклоиды интегрированием по контуру, состоящему из этой арки, проходимой навстречу, и её проекции на ось Ox . Интеграл по проекции нулевой, так что площадь равна

$$- \int_{\gamma} y \, dx = - \int_{2\pi}^0 (1 - \cos t)^2 \, dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, dt = 3\pi.$$



Упражнение. Решите задачу про циклоиду без интегрирования.

Упражнение. Выведите формулы

$$S(D) = \oint_{\partial D} x dy, \quad S(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx.$$

Пример (лист Декарта). Найдём площадь области, ограниченной петлёй линии $x^3 + y^3 = 3xy$. Вся хитрость тут в том, что мы ищем параметризацию листа в виде $y = tx$. Дальше идёт техника.

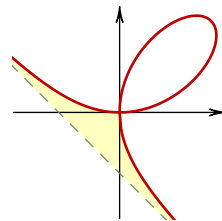
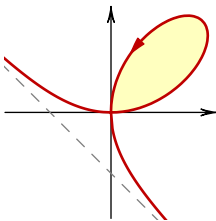
рисунок

Подстановка в уравнение даёт

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3},$$

причём петле соответствует промежуток $0 \leq t < \infty$, поэтому выражение искомой площади любой из трёх выписанных формул в декартовых координатах после параметризации превращается в несобственный интеграл от рациональной функции. Самый простой интеграл получается из третьей формулы, ибо $x dy - y dx = x^2 dt$. Значит,

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx = \frac{9}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{3}{2}.$$



Любопытно, что площадь бесконечной фигуры между этой линией и её асимптотой $x + y + 1 = 0$ также равна $\frac{3}{2}$.

Упражнение. Для полярных координат (ρ, φ) выведите равенство $x dy - y dx = \rho^2 d\varphi$. Следовательно,

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} \rho^2 d\varphi.$$

Ориентация области. Однако мы уже умеем выражать площадь двойным интегралом. Сопоставляя, видим любопытное «равенство»

$$\oint_{\partial D} x \, dy = \iint_D dx \, dy.$$

Теперь обойдём ∂D в противоположном направлении. Значение контурного интеграла слева поменяет знак. Значение двойного интеграла справа? Оно тоже должно поменять знак.

Причина: вынужденная смена ориентации области, с которой должна быть согласована ориентация её границы. Положительность подвижного базиса $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle$ вдоль ∂D равносильна тому, что положительно ориентированная область остаётся слева при обходе своей границы, а нормаль $\mathbf{n}$ направлена наружу D . Отрицательно ориентированная область, наоборот, остаётся справа, а нормаль направлена внутрь неё.



Раньше мы этого избегали, но на самом деле бывают необходимы **ориентированные** элементы площади. Для них нужно новое обозначение. В декартовых координатах двум возможным ориентациям всей плоскости соответствуют ориентированные элементы $dx \wedge dy$ и $dy \wedge dx$, где особый значок призван напоминать о том, что

$$dy \wedge dx = -dx \wedge dy.$$

Обе части исправленного равенства

$$\oint_{\partial D} x \, dy = \iint_D dx \wedge dy$$

являются интегралами второго рода, зависящими от ориентации области D . Справа интеграл поверхностный, хотя поверхность плоская.

Формула Грина. Теперь попробуем обобщить замеченную связь криволинейного и поверхностного интегралов, оставаясь пока в плоскости. Подставим сперва в неё вместо x гладкую функцию $g(x)$ и напомним желаемую формулу:

$$\oint_{\partial D} g(x) \, dy = \iint_{(D)} dg \wedge dy = \iint_D \frac{dg}{dx} dx \wedge dy.$$

Возьмём для простоты криволинейную трапецию

$$D = \{(x, y) \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), \ c \leq y \leq d\}.$$

Двойной интеграл, с учётом ориентации, сведём к повторному, а затем ко внутреннему интегралу применим фундаментальную теорему анализа (формулу Ньютона — Лейбница):

$$\iint_D g'(x) dx \wedge dy = \int_c^d dy \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} g'(x) dx \right) = \int_c^d (g(\beta(y)) - g(\alpha(y))) dy.$$

К этому же выражению сводится контурный интеграл

$$\oint_{\partial D} g(x) dy = \int_c^d g(\beta(y)) dy - \int_c^d g(\alpha(y)) dy,$$

состоящий только из вкладов на криволинейных сторонах трапеции.



Желаемая формула обоснована. Так ли существенно, что g не зависит от y ? По рассуждению видно, что вовсе нет. На самом деле мы вывели формулу

$$\oint_{\partial D} g(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy$$

для любой гладкой функции $g(x, y)$.

Лемма. Эта формула верна для любой приличной области.

Доказательство. Разрезание приличной области. □

Аналогично получаем парную формулу

$$-\oint_{\partial D} f(x, y) dx = \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy.$$

Из двух элементов этой пары составляют две линейные комбинации, которые исключительно важны в приложениях и имеют ясный физический смысл. В них мы сменим обозначения для функций, чтобы поскорее увидеть связь с материалом предыдущего раздела.

Теорема. Для любой пары гладких функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ на приличной области D с кусочно-гладкой границей верна формула Грина

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx \wedge dy.$$

Слева мы счастливо наблюдаем форму работы плоского векторного поля (P, Q) . Для формы его потока аналогично последует

$$\oint_{\partial D} P dy - Q dx = \iint_D (P_x + Q_y) dx \wedge dy,$$

примеры?

ибо это просто формула Грина для ортогонального поля $(-Q, P)$.

Эти две версии формулы Грина показывают связь работы и потока поля через границу области с чем-то, находящимся внутри области. Обнаруженные так величины весьма важны, что мы увидим ещё не раз. Подынтегральные функции правых частей этих формул выражают их количественно в плоском случае.

Содержание этой теоремы полностью перекрыто трёхмерными версиями с именами других учёных, к которым мы придём в следующей главе. С другой стороны, формулами Грина часто называют некоторые специальные случаи.

Ориентированная площадь в криволинейных координатах. Вернёмся ещё раз к замене переменных при вычислении площади двойным интегралом, но теперь будем учитывать ориентацию.

переписать!

Теорема. Если диффеоморфизм связных ограниченных областей

$$\Delta \rightarrow D, \quad (\xi, \eta) \mapsto (x, y)$$

с кусочно-гладкими границами имеет ограниченный якобиан, то

$$\iint_D dx \wedge dy = \iint_{\Delta} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi \wedge d\eta.$$

Доказательство. Выразим ориентированную площадь контурным интегралом, подставим новые переменные и применим формулу Грина:

лемма?

$$\oint_{\partial D} x dy = \oint_{\partial \Delta} \textcolor{blue}{xy}_{\xi} d\xi + \textcolor{green}{xy}_{\eta} d\eta = \iint_{\Delta} ((\textcolor{green}{xy}_{\eta})_{\xi} - (\textcolor{blue}{xy}_{\xi})_{\eta}) d\xi \wedge d\eta.$$

Теперь присмотримся к подынтегральной функции

$$(xy_{\eta})_{\xi} - (xy_{\xi})_{\eta} = \textcolor{red}{xy}_{\eta\xi} + x_{\xi}y_{\eta} - \textcolor{red}{xy}_{\xi\eta} - x_{\eta}y_{\xi}.$$

Второе и четвёртое слагаемые дают искомый якобиан. Первое и третье слагаемые сокращаются, если считать $y(\xi, \eta)$ дважды гладкой. Иначе доказательство усложняется, но мы в него не вдаёмся, ибо на практике замены ещё более гладкие. $\square$

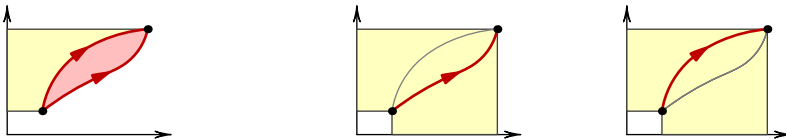
Ввиду обратимости диффеоморфизма его якобиан J всюду ненулевой, поэтому на связной области он сохраняет знак. Возникает два случая: $J > 0$ и $J < 0$. Для любого контура в Δ с положительным обходом его образ в D обходится положительно либо отрицательно согласно знаку J . Полезно отметить, что в доказанной формуле якобиан поглощает минусы, появляющиеся от перестановок $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ и $d\xi \wedge d\eta = -d\eta \wedge d\xi$, выражающих смену ориентации в D и Δ .

рисунок?

14.4. ЗАВИСИМОСТЬ ИНТЕГРАЛА ОТ ПУТИ

Консервативные поля и формула Ньютона — Лейбница. Примеры показывают, что значение криволинейного интеграла зависит от пути, а не только от его крайних точек, хотя бывают и исключения. Вместе с тем, в приложениях эти исключения особенно важны.

Пример. Интеграл от $x dy$, вычисляющий площадь, зависит от пути. Интеграл от $x dy + y dx$ зависит не от пути, а только от его концов.



Теорема. Для всякого непрерывного векторного поля $\mathbf{f}$ в области D равносильны утверждения:

- (1) циркуляция $\mathbf{f}$ по любому кусочно-гладкому контуру нулевая;
- (2) работа $\mathbf{f}$ зависит не от пути, а лишь от его крайних точек;
- (3) найдётся такое гладкое скалярное поле u , что $\mathbf{f} = \nabla u$.

Определение. Векторное поле с этими свойствами называют **консервативным** либо **потенциальным** в D , а функцию u — его (скалярным) **потенциалом**. Физики могут предпочесть $-u$ в роли потенциала.

Green 1828

Абсолютно всё сказанное в этом подразделе дословно приложимо и к пространственным полям.

Пример (работа ньютонова поля). Легко проверить, что центральное поле $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = kr^{-3}\mathbf{r}$ имеет потенциал $u(\mathbf{r}) = -kr^{-1}$. Поэтому

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds = \frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2}$$

независимо от траектории движения от $\mathbf{r}_1$ к $\mathbf{r}_2$.

Упражнение. Две гладкие функции u_i являются потенциалами векторного поля $\mathbf{f}$ в связной области D . Докажите, что $u_2 - u_1 = \text{const}$.

Упражнение. Какие центральные поля потенциальны?

Доказательство теоремы. ($1 \Leftrightarrow 2$) Двумя точками контур разбивается на две линии, затем на одной меняется ориентация:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

И этот процесс обратим: из двух путей с одинаковыми крайними точками играючи составляется замкнутый контур.



($3 \Rightarrow 2$) Когда на области D определена гладкая функция u , её градиент $\nabla u = \text{grad } u$ даёт там же непрерывное векторное поле. Вдоль линии γ с параметризацией $\mathbf{r}(s)$ и крайними точками $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ имеем

$$du = \nabla u \cdot d\mathbf{r} = \nabla u \cdot \mathbf{t} ds = (D_{\mathbf{t}}u) ds.$$

Интегрируя по линии, получаем формулу

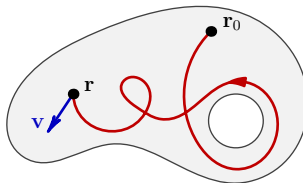
$$\int_{\gamma} \nabla u \cdot \mathbf{t} ds = \int_{\gamma} du = u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1),$$

аналогичную формуле Ньютона — Лейбница для обычных интегралов.

($2 \Rightarrow 3$) Ввиду независимости интеграла от пути, станем помечать знак интеграла его крайними точками вместо самого пути. Выберем начальную точку $\mathbf{r}_0 \in D$ и произвольное значение для $u(\mathbf{r}_0)$. Тогда

$$u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

однозначно задаёт какую-то функцию $u(\mathbf{r})$ на D .



Возьмём теперь любую точку $\mathbf{r}$ внутри D и любой вектор $\mathbf{v}$. Проинтегрируем $\mathbf{f}$ по отрезку прямой между близкими точками:

$$u(\mathbf{r} + \delta\mathbf{v}) - u(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}+\delta\mathbf{v}} - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\delta\mathbf{v}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

На этой прямой $d\mathbf{r} = \mathbf{v} ds$. Интеграл вычисляем приближённо: векторное поле $\mathbf{f}$ непрерывно, а потому во всех точках маленького отрезка интегрирования его значение есть $\mathbf{f}(\mathbf{r}) + o(1)$. Значит,

$$u(\mathbf{r} + \delta\mathbf{v}) - u(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \delta + o(\delta).$$

Поделим на δ и затем в пределе при $\delta \rightarrow 0$ получим просто $\mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}$. Судя же по левой части, этот предел по определению равен производной u по вектору $\mathbf{v}$, так что $\nabla u(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}$. Точка $\mathbf{r}$ и вектор $\mathbf{v}$ изначально выбраны произвольно; следовательно, $\nabla u = \mathbf{f}$ на D . $\square$

Условия потенциальности. Естественно спросить: как узнать по виду векторного поля, потенциально ли оно? Речь пока о плоских полях. Как узнать, когда форма $P dx + Q dy$ является точным дифференциалом, то есть существует такая функция u , что $P dx + Q dy = du$? Для краткости в таком случае говорят просто, что форма **точна**.

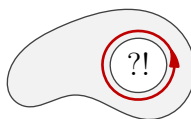
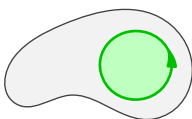
Теорема (необходимое условие). *Если гладкая форма $P dx + Q dy$ точна, то $P_y = Q_x$.*

Такую форму, удовлетворяющую $P_y = Q_x$, называют **замкнутой**.

Доказательство. При наличии потенциала u обе эти частные производные равны смешанной второй частной производной u_{xy} . $\square$

Связный контур без самопересечений называют **простым**. Простой контур всегда гомеоморфен окружности.

Определение. Связная плоская область, внутри которой каждый простой контур является границей подобласти, называется **односвязной**. Односвязность означает отсутствие «дыр».



Теорема (достаточное условие). *На односвязной области всякая замкнутая гладкая форма точна.*

Доказательство. Возьмём любой простой контур γ в односвязной области D . На подобласти с границей γ работает формула Грина. Для замкнутой формы $\omega = P dx + Q dy$ получаем в двойном интеграле $Q_x - P_y = 0$ тождественно, поэтому интеграл от ω по контуру γ всегда нулевой, так что поле (P, Q) консервативно и имеет потенциал u . Тогда $\omega = du$. $\square$

Итак, если функции P и Q гладкие в плоской области D без дыр и $P_y = Q_x$, то значение интеграла

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy$$

по любому пути γ внутри D зависит лишь от крайних точек пути, а для замкнутых контуров равно нулю.

14.5. НЕСКОЛЬКО ДОПОЛНЕНИЙ

Приращение угла и интеграл Гаусса. Значение интеграла

$$\oint_{\gamma} d\varphi = \oint_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

поделенное на 2π , равно количеству оборотов контура γ вокруг начала координат, то есть зависит от пути вот таким интересным образом.



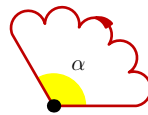
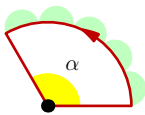
Хотя $P_y = Q_x$ вне начала, форма $P dx + Q dy = d\varphi$ не точна ни на какой области, обхватывающей начало, например, кольцо $1 \leq \rho \leq 2$. Формула $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ верна лишь на открытой правой полуплоскости.

Теперь возьмём в качестве контура границу единичного полукруга $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$. Интеграл по полуокружности равен приращению угла, а именно π . На горизонтальном отрезке $y = 0$ и $dy = 0$, так что вся форма там зануляется (вне начала, где она не определена). Поэтому π и есть значение интеграла.



Заменив полукруг на сектор раствора $\alpha < 2\pi$, аналогично придём к ответу α , ибо на прямой $y = x \tg \alpha$ полярный угол также не прирастает, $x dy - y dx = 0$.

Далее, дугу окружности можно заменить на любой кусочно-гладкий контур, не проходящий через начало и не обходящий вокруг него. По формуле Грина, такая замена не скажется на значении интеграла.



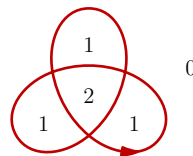
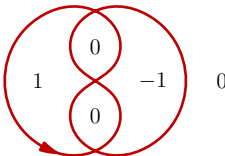
Обсуждаемая форма также является формой потока центрального поля $\mathbf{f} = r^{-2}\mathbf{r} = (x, y)/(x^2 + y^2)$. Вообразим, что единственный источник в начале координат «излучает» одинаково по всем направлениям. Если источник находится на границе области D , то доля «излучения», попадающая в D , равна углу, под которым D видна из источника. В гладких точках границы это всегда π .

Отметим ещё один способ записи всё того же интеграла Гаусса, встречающийся в учебниках:

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos \angle(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds.$$

Здесь фигурирует косинус угла между радиус-вектором точки на контуре и единичной нормалью к контуру. Знаменатель $r = |\mathbf{r}|$ отвечает убыванию видимого угла при удалении объекта. Выражая косинус через скалярное произведение, получим подынтегральную функцию $r^{-2}\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$, как и выше.

Контур не обязан быть простым. Это не так важно для физики, но интересно в математике. Количество оборотов фиксированного контура γ вокруг точки — целочисленная функция этой точки, постоянная на каждой связной открытой области, из которых состоит дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$.



Упражнение. Найдите условия на комплексную функцию $w(z) = u(z) + iv(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$, при которых

$$\oint_{\gamma} w(z) dz = 0$$

для всякого контура γ .

Упражнение. Изучите зависимость комплексного интеграла

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

от контура γ . Предложите «первообразную» для подынтегральной функции $1/z$.

Циркуляция вокруг дыр и периоды. Если связная область не односвязна, значит, в ней есть дырка. Может, и не одна. Для одной дырки, куда мы и поместим начало координат, только что рассмотренный пример поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (-y, x)/r^2$ доставляет замкнутую форму, которая не точна. Отсюда следует наличие такого же примера для плоской области с любым количеством дырок.

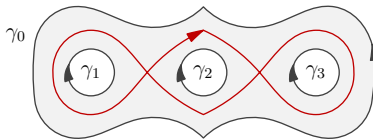
Для области D с m дырками запишем границу ∂D как

$$\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m,$$

где γ_0 есть внешняя граница, а каждая из остальных компонент окружает одну дырку. Возьмём в D векторное поле $\mathbf{f}$ с замкнутой формой работы и для $i > 0$ положим $\omega_i = W(\mathbf{f}, \gamma_i)$. Это **периоды** поля $\mathbf{f}$ относительно каждой дырки.

Теорема. Циркуляция поля $\mathbf{f}$ по любому контуру в D равна $\sum n_i \omega_i$, где все коэффициенты n_i целые.

Упражнение. Докажите теорему и опишите числа n_i — **индексы** контура относительно дырок.



Потенциал скорости и функция тока. Рассмотрим несжимаемую жидкость (плотность $\rho = \text{const}$), движущуюся на плоскости с полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}))$. По закону сохранения массы, поток через любой замкнутый контур вдали от источников и стоков должен равняться нулю: сколько втекло, столько и вытекло.

Формула Грина для потока показывает, что функция $P_x + Q_y$ имеет смысл плотности источников, а также стоков как отрицательных источников. По аналогии, формула Грина для циркуляции придаёт функции $Q_x - P_y$ смысл плотности «завихрений».

Соответственно, в односвязной области вдали от источников и завихрений $P_x + Q_y = 0$ и $Q_x - P_y = 0$. Тогда по достаточному условию, формы работы и потока точны:

$$P dx + Q dy = d\phi, \quad P dy - Q dx = -d\psi,$$

для некоторых дважды гладких функций ϕ и ψ , называемых соответственно **потенциал скорости** и **функция тока**. Тогда

$$\phi_x = -\psi_y, \quad \phi_y = \psi_x.$$

Это уравнения Коши — Римана, основные соотношения комплексного анализа, означающие, что комплексная функция $\psi + i\phi$ является **голоморфной** (очень «хорошей») функцией комплексной переменной $x + iy$. Поэтому не удивительно, что методы комплексного анализа широко применяются в двумерной гидро- и аэродинамике.

d'Alembert 1

Наконец, подставляя в условия отсутствия источников и завихрений выражения P и Q как частных производных от ϕ и ψ , приходим к условиям **гармоничности**

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0.$$

Итак, и потенциал скорости, и функция тока удовлетворяют одному из важнейших дифференциальных уравнений в частных производных — двумерному **уравнению Лапласа**.

Тождества Грина. Формула Грина даёт серию специальных следствий, полезных в различных областях математики и физики, причём известных в том числе под тем же общим наименованием.

08.01.18

Первый шаг в этом направлении переключается с предыдущим пунктом: считаем наши функции двумя производными одного потенциала, $P = v_x$ и $Q = v_y$. Тогда $P_x + Q_y = v_{xx} + v_{yy}$, что принято обозначать через Δv . Форму в криволинейном интеграле перепишем векторно

$$P dy - Q dx = v_x dy - v_y dx = (v_x, v_y) \cdot (dy, -dx)$$

и распознаем сомножители. Первый есть градиент ∇v , а для второго вспомним представление $(dy, -dx) = \mathbf{n} ds$ с единичной нормалью и естественным параметром границы области. Значит, скалярное произведение даёт производную по вектору нормали: $\nabla v \cdot \mathbf{n} = D_{\mathbf{n}} v = v_{\mathbf{n}}$. Получаем тождество, связывающее интеграл от лапласиана дважды гладкой функции по области с интегралом от нормальной производной этой функции по границе области:

$$\oint_{\partial D} v_{\mathbf{n}} ds = \iint_D \Delta v dx \wedge dy.$$

На втором шаге введём новую гладкую функцию u и рассмотрим более гибкую ситуацию: $P = uv_x$, $Q = uv_y$. С одной стороны

$$P dy - Q dx = uv_{\mathbf{n}} ds,$$

а с другой стороны появляется дополнительное слагаемое, ибо

$$\begin{aligned} P_x + Q_y &= (uv_x)_x + (uv_y)_y \\ &= u_x v_x + u v_{xx} + u_y v_y + u v_{yy} = u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v. \end{aligned}$$

Подставляя в интегралы, получаем тождество

$$\oint_{\partial D} uv_{\mathbf{n}} ds = \iint_D (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx \wedge dy.$$

На третьем шаге заметим, что слагаемое с градиентами, в отличие от остальных, симметрично относительно входящих дважды гладких функций. Поэтому поменяем функции местами и образуем разность:

$$\oint_{\partial D} (uv_{\mathbf{n}} - vu_{\mathbf{n}}) ds = \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx \wedge dy.$$

В ряде приложений используется именно это тождество Грина. Для красоты можно свернуть разности в определителе:

$$\oint_{\partial D} \begin{vmatrix} u & u_{\mathbf{n}} \\ v & v_{\mathbf{n}} \end{vmatrix} ds = \iint_D \begin{vmatrix} u & \Delta u \\ v & \Delta v \end{vmatrix} dx \wedge dy.$$

Глава 15. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ

15.1. ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Как известно из геометрии, все базисы в пространстве группируются в два класса, условно правый и левый. Напомним, что ориентацией пространства называют выбор, какой из двух классов базисов считать положительным. Этот выбор влияет на направление векторного произведения пары неизменных векторов, ибо тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ всегда должна быть положительной. Однако наблюдаемые в механике и электродинамике физические величины, в том числе напрямую связанные с векторными произведениями, от наших выборов не зависят. Поэтому обычно стремятся работать в правом базисе, считая именно таковые положительными.

В свою очередь, векторный анализ оперирует над различного вида интегралами, учитывающими ориентацию: по линиям, по поверхностям, по областям. Это несколько иной выбор: ориентация присваивается множеству, по которому ведётся интегрирование, а её смена обращает знак интеграла. Во избежание путаницы следует понять, как отслеживать ориентацию в обозначениях и как согласовывать ориентацию множества и его границы. Эти вопросы уже возникали в связи с контурными интегралами на плоскости и формулой Грина.

Принципы выбора ориентации. Говоря впредь о граничных точках куска поверхности или линии M , будем подразумевать лишь те, у которых в любой окрестности есть точки как из ограничиваемого куска, так и извне его, причём именно точки M , а не объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$. Альтернативный термин без конфликтующего прежнего смысла — **край** линии, поверхности, области, многообразия. Компактную линию или поверхность без края называют **замкнутой**.

Перечислим принципы выбора ориентации.

- (1) *Параметризация*: гладкое отображение $\Delta \rightarrow D$ переносит ориентацию с Δ на D , причём если якобиан отрицателен, то ориентация меняется на противоположную.
- (2) *Индукция*: ориентация множества определяет ориентацию его границы (края).
- (3) *Склейка*: когда область, поверхность, или линия составлена из нескольких кусков, любые два куска индуцируют противоположные ориентации на общей границе.

лекция 15+
03.04.17

гиперссылка

рисунок

рисунки

Ориентация гладкой линии задаётся непрерывным выбором единичного касательного вектора, а ориентация гладкой поверхности — непрерывным выбором единичного вектора нормали (что не всегда возможно, но в интересующих нас случаях проблем нет). Принято говорить о непрерывном касательном или нормальном поле.

Незамкнутый кусок линии или поверхности обычно ориентируют заданием на нём параметризации: линия γ получает единичное касательное поле $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$, а поверхность Σ — единичное нормальное поле $\mathbf{n}$, сонаправленное с $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. Выходит, ориентация на линию переносится с промежутка, а на поверхность — с плоской области изменения параметров.

Принцип склейки гарантирует соблюдение универсального требования аддитивности интеграла для интегралов второго рода, зависящих от ориентации.

Ориентируемость линии. Две точки, ограничивающие незамкнутую ориентированную линию, всегда получают от неё противоположные ориентации. С учётом этого соглашения формулу Ньютона — Лейбница для криволинейного интеграла потенциального поля можно переписать в безумно красивом виде

$$\int_{\gamma} du = \int_{\partial\gamma} u.$$

Справа, очень непривычным образом, интеграл «нулькратный»: просто сумма по двум точкам, причём конец пути с плюсом, а начало с минусом, в соответствии с их ориентациями.

Для ориентированной поверхности Σ правило согласования ориентации её границы $\partial\Sigma$ показано на рисунке. Если же линия не замкнута или не является границей поверхности, то можно выбрать одно из направлений; неориентируемых линий не бывает.

Ориентируемость поверхности. Как правило, трёхмерной области T придают положительную ориентацию, ведь делать иначе смысла нет. Тогда индуцированной, или согласованной, ориентацией её границы ∂T считается выбор нормалей, внешних к T .

Если же поверхность Σ не является границей трёхмерной области, хоть в принципе, хоть в силу ненужности рассмотрения оной, то ни внешней, ни внутренней стороны у Σ нет. Случается, что поверхность вообще **неориентируема**, поскольку имеет всего одну сторону. Но когда сторон две, то можно выбирать любую и направлять нормаль туда.

рисунок

Пример. Лист Мёбиуса, или она же его лента, это простейшая неориентируемая поверхность с краем.

Работа вдоль линии. Теперь мы начинаем изучать гладкое векторное поле $\mathbf{f} \doteq (P, Q, R)$ на области $T \subset \mathbb{R}^3$.

Гладкую линию $\gamma \subset T$ параметризуем длиной дуги $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Работа поля $\mathbf{f}$ на перемещении $d\mathbf{r}$ определяется как $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{r}} ds$. Тогда работу на перемещении вдоль линии γ вычисляет криволинейный интеграл второго рода

$$W(\mathbf{f}, \gamma) = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Подынтегральное выражение справа называется формой работы. Форма сама по себе является линейной функцией не названного явно вектора. В криволинейном интеграле в качестве аргумента формы подразумевается касательный векторный элемент $\mathbf{t} ds$.

Итак, существенных отличий от плоского случая здесь пока нет. Вопрос потенциальности векторного поля в пространстве сложнее; мы изучим его под конец главы.

Заготовка элемента потока. Отличия сосредоточились в потоке, где и появляется поверхностный интеграл *второго рода*.

Посмотрим предварительно на происходящее вблизи одной точки. Возьмём маленький ориентированный параллелепипед со сторонами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Поток поля $\mathbf{f}$ через него равен ориентированному объёму параллелепипеда, то есть смешанному произведению $(\mathbf{f}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{f} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Напомним, что векторное произведение направлено по нормали к параллелепипеду и численно равно его площади.

Теперь возьмём гладкую поверхность $\Sigma \subset T$. На её куске с параметризацией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ неориентированный элемент площади равен

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

Изучая поверхностные интегралы первого рода, мы уже видели, что зависимость dS от параметризации лишь кажущаяся. Ориентация поверхности задаётся полем единичных нормалей $\mathbf{n}$, направление которого в каждой точке её параметризованного куска совпадает с направлением вектора $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. Значит,

$$\mathbf{n} dS = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v du dv.$$

Смена порядка u и v обращает ориентацию.

лекция 16
06.04.17

рисунок

??

рисунок

рисунок

Поток через поверхность. Поток поля $\mathbf{f}$ через очень малый участок поверхности площади dS , или элемент потока, определяется через скалярное произведение как $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS$, а поток через всю ориентированную поверхность как

$$\Phi(\mathbf{f}, \Sigma) = \iint_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS.$$

На куске поверхности с параметризацией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ элемент потока переписывают через смешанное произведение как $(\mathbf{f}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) du dv$. Его координатная запись даёт формулу

$$\Phi(\mathbf{f}, \Sigma) = \iint_D \begin{vmatrix} P & x_u & x_v \\ Q & y_u & y_v \\ R & z_u & z_v \end{vmatrix} du dv,$$

сводящую вычисление потока через кусок поверхности, параметризованный отображением $D \rightarrow \Sigma$, $(u, v) \mapsto (x, y, z)$, к двойному интегралу по плоской области D .

Для самых распространённых поверхностей со стандартными параметризациями полезно отдельно вычислить $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. Тогда в задачах, вместо определителей, останутся менее трудоёмкие вычисления его скалярного произведения с различными векторными полями $\mathbf{f}$.

Пример. Рассмотрим интегралы

$$\oiint_{\Sigma} z dx dy, \quad \oiint_{\Sigma} z^2 dx dy$$

по единичной сфере. По аналогии с контурами, кружок указывает на замкнутость поверхности (край пуст, сама сфера — край шара).

Если речь об интеграле первого рода, то первый равен нулю в силу симметрии сферы и антисимметрии подынтегральной функции относительно плоскости Oxy , а второй положителен, ибо $z^2 \geq 0$.

Если речь об интеграле второго рода, то нужно указать ориентацию сферы, а также исправить $dx dy$ на $dx \wedge dy$. Выберем внешние нормали. Здесь симметрия работает с точностью до наоборот: векторное поле $z^2 \mathbf{k}$ втекает через нижнюю полусферу и вытекает через верхнюю и второй интеграл равен нулю; а поле $z \mathbf{k}$ вытекает через обе полусферы и первый интеграл положителен (он равен объёму шара, $4\pi/3$).

Пример. Вычислим поток поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \doteq (x, y, z)$ через кусок параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ в положительном октанте ниже плоскости $z = 1$, ориентированном наружу чаши.

В цилиндрических координатах на поверхности $z = \rho^2$ видим

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \doteq (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho^2).$$

Вычисляем определитель под интегралом:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\varphi) = \begin{vmatrix} \rho \cos \varphi & \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \rho \sin \varphi & \sin \varphi & \rho \cos \varphi \\ \rho^2 & 2\rho & 0 \end{vmatrix} = \dots = -\rho^3.$$

Нормаль $\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\varphi$ направлена внутрь чаши, поскольку её z -компонента (равная ρ) неотрицательна. Она всегда неотрицательна для кусков поверхностей с явным заданием $z = z(x, y)$ или $z = z(\rho, \varphi)$. В этих случаях легко запомнить, что если по условию ориентирующие нормали наклонены книзу, то перед интегралом нужен знак минус. Вот и здесь по условию задачи нормаль должна быть направлена наружу, поэтому вычисление в выбранной параметризации снабжаем [знаком минус](#).

Установив пределы интегрирования $0 \leq \rho \leq 1$ и $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, сводим всё к двойному интегралу, а его — к произведению обычных:

$$\Phi = - \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^1 (-\rho^3) d\rho = \dots = \frac{\pi}{8}.$$

Никакие якобианы тут не нужны! Искажение площади уже учтено в вычисленном определителе или векторном произведении $\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\varphi$.

Пример. [Электрическое поле точечного заряда](#) (гиперссылка).

2-форма потока. В малом поток определяется векторным полем и ориентированным параллелограммом, который фактически есть упорядоченная пара векторов. Для фиксированного векторного поля $\mathbf{f}$ форма потока есть объект, сконцентрировавший зависимость от этой пары векторов. Можно сказать, что это смешанное произведение, в котором одно место занято полем $\mathbf{f}$, а в два оставшихся свободными будут подставляться направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллелограмма.

В декартовых координатах рассмотрим поток одной компоненты поля $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, например третьей. Тогда в силу свойств смешанного произведения, компоненты a_3 и b_3 не играют роли, а зависимость потока от остальных выражается через определитель:

$$R \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Появилась площадь ориентированного параллелограмма в плоскости Oxy , полученного проецированием исходного. Ранее на плоскости мы

рисунок

обозначали форму ориентированной площади через $dx \wedge dy$. Поэтому форма потока поля $\mathbf{Rk}$ есть $R dx \wedge dy$.

Две другие компоненты поля $\mathbf{f}$ вносят аналогичные слагаемые, соответствующие проекциям на плоскости Ozx и Oyz ; надо лишь не перепутать ориентацию. Итак, форма потока в пространстве есть

$$P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

Упражнение. Преобразуйте элемент потока $(\mathbf{f}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) du \wedge dv$ через параметризованную поверхность к этой же форме потока.

Пример. Вычислим интеграл от формы $y dy \wedge dz - x dz \wedge dx$ по куску стандартного геликоида, ориентированному наклонёнными вверх нормальями. Эта поверхность, а точнее, её половина, имеет замечательное уравнение $z = \varphi$ в цилиндрических координатах.

рисунок

Поэтому берём параметры полярной системы и пишем

$$\mathbf{r} \doteq (x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \varphi).$$

Вычисляем $\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\varphi \doteq (\sin \varphi, -\cos \varphi, \rho)$.

В данной форме опознаём форму потока поля $\mathbf{f} \doteq (y, -x, 0)$. Вычисляем $\mathbf{f} \cdot (\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\varphi) = \rho$. Через кусок геликоида с параметрами $0 \leq \rho \leq 1$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ получим поток

$$\Phi = \iint \rho d\rho d\varphi = \pi.$$

Упражнение. Вторая половина имеет уравнение $z = \varphi + \pi$. Как считать поток через часть геликоида, лежащую на обеих половинах?

Пример. **Телесный угол и магнитостатика** (гиперссылка).

Пример. **Телесный угол и зацепления** (гиперссылка).

3-форма объёма. Дополним сказанное о формах работы и потока в пространстве ещё одной формой, зависящей от трёх векторов. Векторное поле туда не входит. Форма объёма $dx \wedge dy \wedge dz$ сопоставляет заданной упорядоченной тройке векторов их смешанное произведение. Интеграл от формы объёма даёт ориентированный объём тела:

$$\iiint_T dx \wedge dy \wedge dz.$$

Если в неориентированном элементе объёма $dx dy dz$ можно свободно менять порядок дифференциалов переменных, то в форме объёма этого делать нельзя. В правила обращения с такими формами встроен

учёт ориентации. Если в правом репере поменять местами пару векторов, то получим левый репер. Подобно тому, в формах пишем

$$dx \wedge dy \wedge dz = -dy \wedge dx \wedge dz = dy \wedge dz \wedge dx = -dz \wedge dy \wedge dx.$$

Не выписанными остались ещё две перестановки.

15.2. ДИВЕРГЕНЦИЯ И ФОРМУЛА ГАУССА — ОСТРОГРАДСКОГО

Операторы дивергенции и ротора формализуют замечание о смысле правых частей двух версий формулы Грина как плотностей источников и вихрей поля, но уже в трёхмерной ситуации. Каждая из них обобщается интегральной теоремой, по сути равносильной самому определению соответствующего оператора.

лекция 17
10.04.17

Интегральная формула в координатах. В исходном виде

$$\oint_{\partial T} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_T (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz$$

формула Гаусса — Остроградского была известна и до них; Лагранж применял её для перехода от поверхностного интеграла к тройному. Тогда ещё не могло быть и речи о векторном анализе. Векторная формулировка появится позже.

Lagrange 176

Теорема. Формула верна для любых гладких функций P , Q и R на приличной пространственной области T .

Доказательство. Установим это тем же путём, что и формулу Грина. Ввиду линейности и симметрии, достаточно проверить, что

$$\oint_{\partial T} R dx \wedge dy = \iiint_T R_z dx \wedge dy \wedge dz.$$

Упростим область (тело) по аналогии с разрезанием плоской области на криволинейные трапеции. Разрезая тело при необходимости, можем считать, что

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

для некоторой плоской области D и гладких функций α и β на D . Тогда граница ∂T состоит из двух оснований Σ^- и Σ^+ , заданных уравнениями $z = \alpha(x, y)$ и $z = \beta(x, y)$, и соединяющих их вертикальных боковых стенок. Для остальных слагаемых искомой формулы разрезать тело лучше в соответствующих им направлениях.

рисунок

Сведём обе части доказываемой формулы к интегралу по D от

$$g(x, y) = \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} R_z(x, y, z) dz = R(x, y, \beta(x, y)) - R(x, y, \alpha(x, y)).$$

Для тройного интеграла, после учёта ориентации, то есть замены формы объёма элементом объёма, эта процедура уже знакомая.

В наш поверхностный интеграл стенки границы ничего не вносят: векторное поле $R\mathbf{k}$ параллельно им и протекает только через основания. При сведении поверхностных интегралов по $\Sigma^\pm$ к двойным интегралам по D учёт ориентации даёт те же знаки, что и в $g(x, y)$. $\square$

Заготовка дивергенции. В левой части формулы мы распознаём поток векторного поля $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Подынтегральную функцию в правой части через сотню лет стали называть его **дивергенцией**:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = P_x + Q_y + R_z.$$

Восходящий к латыни английский термин означает «расходимость». Для практической работы в физике и многих прикладных и инженерных областях совершенно необходимо знать эту простую координатную формулу для дивергенции.

Упражнение. Найдите дивергенцию симметричного центрального поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = f(r)r^{-1}\mathbf{r}$ и кулоновского поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = kr^{-3}\mathbf{r}$, где $k = \text{const}$.

Важность этой комбинации частных производных понятна уже из того, что именно она возникла из интегральной теоремы. Однако её резко усиливает другое обстоятельство: дивергенция зависит лишь от самого вектора, а не от его компонент. Компоненты появляются только после нашего выбора системы координат, а физическая величина не может знать о нём. Дивергенция — физическая величина. Поэтому мы не будем брать её выражение в декартовых координатах в качестве её определения, а придём к бескоординатному.

Упражнение. Проверьте прямым вычислением, что дивергенция не изменяется при поворотах системы координат.

Перепишем формулу Гаусса — Остроградского в векторном виде.

Теорема. Поток гладкого векторного поля $\mathbf{f}$ через границу приличной пространственной области T равен интегралу от $\operatorname{div} \mathbf{f}$ по T :

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial T} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{f} dV.$$

Здесь, конечно, подразумевается согласование ориентаций: положительно ориентированное тело индуцирует ориентацию своей границы полем внешних нормалей.

Определение дивергенции. Чтобы получить из интегральной формулы дифференциальную, нужно перейти от большого тела к маленькому. Дивергенция — локальное понятие; её значение вычисляется в точке. Поэтому определяется оно также в точке как некий предел. Какой именно? Это почти написано в интегральной теореме: если векторное поле достаточно хорошее, а тело маленькое, то значение дивергенции на нём должно меняться слабо. Вынеся почти постоянную из-под тройного интеграла, мы увидим в оставшемся интеграле объём.

Теперь мы готовы к определению. Внутри области T возьмём точку p и окружающий её маленький шарик $B_\varepsilon(p)$ радиуса ε .

Определение. **Дивергенцией** гладкого векторного поля $\mathbf{f}$ в точке p называют предел отношения потока через границу шарика к его объёму:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{f}, \partial B_\varepsilon)}{V(B_\varepsilon)}.$$

Дивергенция обозначается через $\operatorname{div} \mathbf{f}$ и является скалярным полем.

Лемма. Когда указанный предел существует, его значение не меняется, если вместо каждого шарика B_ε брать любую лежащую в нём окрестность точки p .

Доказательство. Для самостоятельного размышления. □

В силу линейности вычисляющего поток поверхностного интеграла и арифметических свойств предела, оператор дивергенции, делающий из векторного поля скалярное, линеен:

$$\operatorname{div}(c_1 \mathbf{f}_1 + c_2 \mathbf{f}_2) = c_1 \operatorname{div} \mathbf{f}_1 + c_2 \operatorname{div} \mathbf{f}_2$$

для любых гладких векторных полей $\mathbf{f}_i$ и скалярных констант c_i .

Покажем, как бескоординатное определение дивергенции влечёт её выражение в декартовых координатах. Позже, адаптируя это вычисление, мы получим выражения и в криволинейных координатах.

Теорема. В декартовых координатах для поля $\mathbf{f} \doteq (P, Q, R)$ имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = P_x + Q_y + R_z.$$

Доказательство. При всех внешних отличиях, это вычисление по сути очень похоже на доказательство формулы Гаусса — Остроградского. Здесь мы точно так же оставим одну компоненту поля, а тело возьмём ещё более простое.

Посчитаем поток Φ_ε вертикального поля $(0, 0, R)$ через границу кубика C_ε с центром в точке $p \doteq (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ и сторонами 2ε . При $R > 0$ поле втекает в кубик через нижнюю грань Σ^- и вытекает через верхнюю грань Σ^+ . Учитывая ориентацию, получаем

$$\Phi_\varepsilon = \iint_{\Sigma} (R(x, y, \tilde{z} + \varepsilon) - R(x, y, \tilde{z} - \varepsilon)) dx dy,$$

где Σ есть проекция кубика на плоскость Oxy . Представим приращение функции R по z как интеграл от её производной R_z . Тогда

$$\Phi_\varepsilon = \iiint_{C_\varepsilon} R_z(x, y, z) dx dy dz.$$

При достаточной гладкости поля, R_z отличается от своего значения в центре кубика на бесконечно малую по сравнению с ε . Поэтому

$$\Phi_\varepsilon = V_\varepsilon \cdot (R_z(p) + o(1))$$

и $\Phi_\varepsilon/V_\varepsilon \rightarrow R_z$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Аналогично находятся потоки полей, параллельных другим осям координат. Для произвольного гладкого поля, через его разложение

$$(P, Q, R) = (P, 0, 0) + (0, Q, 0) + (0, 0, R),$$

формула получается с помощью линейности дивергенции. □

Пример. [Электростатическая теорема Гаусса](#) (гиперссылка).

Пример. [Дивергенция и законы сохранения](#) (гиперссылка).

15.3. РОТОР И ФОРМУЛА СТОКСА

Интегральная формула в координатах. В исходном виде

$$\oint_{\partial\Sigma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} (R_y - Q_z) dy \wedge dz + (P_z - R_x) dz \wedge dx + (Q_x - P_y) dx \wedge dy$$

формула, обычно связываемая с именем Стокса, была известна ранее Амперу и Грину. Когда Томсон, будущий лорд Кельвин, открыл работы Грина, она приобрела популярность в Англии. Однажды Стокс

рисунок

Ampère 1825
Green 1828

включил её как задачу в традиционный конкурсный экзамен в Кембридже; победителем той олимпиады был Максвелл.

Теорема. Формула верна для любых гладких функций P , Q и R на окрестности кусочно-гладкой поверхности Σ .

Доказательство. Рассуждение опирается на формулу Грина. Ввиду линейности интегралов, достаточно проверить, что

$$\oint_{\partial\Sigma} R dz = \iint_{\Sigma} R_y dy \wedge dz - R_x dz \wedge dx.$$

Разобьём Σ на элементарные куски Σ_i и докажем равенство отдельно на каждом куске. Потом при сшивке «швы» проходятся дважды и работа на них сокращается, в точности как для формулы Грина.

Элементарный кусок Σ_i имеет гладкую параметризацию $\Delta_i \rightarrow \Sigma_i$, $(\xi, \eta) \mapsto (x, y, z)$. Она сводит задачу к плоской. Дальше поступаем, как при выводе формулы для площади в криволинейных координатах:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Sigma_i} R dz &= \oint_{\partial\Delta_i} R z_{\xi} d\xi + R z_{\eta} d\eta = \iint_{\Delta_i} ((R z_{\eta})_{\xi} - (R z_{\xi})_{\eta}) d\xi \wedge d\eta \\ &= \iint_{\Delta_i} (R_{\xi} z_{\eta} - R_{\eta} z_{\xi}) d\xi \wedge d\eta. \end{aligned}$$

На последнем шаге использовано равенство $z_{\xi\eta} = z_{\eta\xi}$, верное для дважды гладкой параметризации. При однократной гладкости искомая формула также справедлива, но доказательство значительно сложнее.

Производные R_{ξ} и R_{η} выразим по правилу дифференцирования сложной функции и перегруппируем:

$$\begin{aligned} R_{\xi} z_{\eta} - R_{\eta} z_{\xi} &= (R_x x_{\xi} + R_y y_{\xi} + R_z z_{\xi}) z_{\eta} - (R_x x_{\eta} + R_y y_{\eta} + R_z z_{\eta}) z_{\xi} \\ &= R_x (x_{\xi} z_{\eta} - x_{\eta} z_{\xi}) + R_y (y_{\xi} z_{\eta} - y_{\eta} z_{\xi}). \end{aligned}$$

Осталось вспомнить, что

$$(x_{\xi} z_{\eta} - x_{\eta} z_{\xi}) d\xi \wedge d\eta = dx \wedge dz = -dz \wedge dx,$$

и аналогично для y вместо x , только без последней перестановки. $\square$

Мнемоника ротора. Аналогично предыдущему разделу, следующий этап — связать обе части формулы Стокса с векторным полем $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Левую часть сразу интерпретируем как циркуляцию $\mathbf{f}$ по краю поверхности. Длинная правая часть, судя по её виду, должна быть формой потока другого поля; компоненты его последовательно считываются. Это поле и есть **ротор** исходного:

$$\text{rot } \mathbf{f} = (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}.$$

рисунок

гиперссылка

Хотя эта формула посложнее, чем для дивергенции, её тоже совершенно необходимо знать для практической работы в физике и технике. Поэтому найдём простой способ запомнить её.

Структура этого выражения напоминает формулу раскрытия векторного произведения, которое иногда записывается символическим определителем. Вот и тут есть мнемоническое правило

$$\operatorname{rot}(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \partial_x & P \\ \mathbf{j} & \partial_y & Q \\ \mathbf{k} & \partial_z & R \end{vmatrix}.$$

С этим «определителем» нужно быть осторожным: столбцы не переставлять; раскрывать только по первому столбцу.

Перепишем теперь формулу Стокса в векторном виде.

Теорема. *Циркуляция гладкого векторного поля $\mathbf{f}$ на области T по границе любой приличной ориентированной поверхности $\Sigma \subset T$ равна потоку его ротора через Σ :*

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} \, ds = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Завихренность. Ротор векторного поля является векторным полем и не может зависеть от выбора системы координат. Как и дивергенция, ротор — понятие локальное; его значение вычисляется в точке. Бескоординатное определение мы также получим из интегральной формулы на маленькой поверхности предельным переходом, устремив размер к нулю. Однако, в отличие от дивергенции, тут мы должны в каждой точке области определить вектор, а формула позволяет найти лишь его проекцию ($\operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{n}$) на произвольный единичный вектор $\mathbf{n}$. В итоге, на этих проекциях и основывают определение ротора.

Пример. Рассмотрим поле скоростей $\mathbf{v}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ твёрдого тела, вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}$ вокруг начала.

Найдём циркуляцию $\mathbf{v}$ по трём окружностям радиуса ε в координатных плоскостях и с центром в O . В плоскостях $Oyz \perp \mathbf{i}$ и $Ozx \perp \mathbf{j}$ получим нули, ибо поле им ортогонально, а в плоскости $Oxy \perp \mathbf{k}$ по формуле Грина $2\pi\varepsilon^2$. Разделим найденные значения на площади $\pi\varepsilon^2$ этих кружочков и составим из частных вектор $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}$.

Мы разобрали вычисление ротора для простого поля. Произвольное вращение твёрдого тела описывается (псевдо)вектором мгновенной угловой скорости. В жидкости же малые области могут «вращаться» с разными «угловыми скоростями». Эти-то скорости и находит ротор.

Итак, внутри области T возьмём точку p . Через p проведём плоскость с нормалью $\mathbf{n}$ и возьмём в ней маленький кружок C_ε с центром p . Вектор $\mathbf{n}$ задаёт ориентацию кружка и его границы.

Определение. **Завихренностью** гладкого векторного поля $\mathbf{f}$ в точке p вокруг направления $\mathbf{n}$ называют предел отношения циркуляции по границе кружка к его площади:

09.04.17

$$w_p(\mathbf{f}, \mathbf{n}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{W(\mathbf{f}, \partial C_\varepsilon)}{S(C_\varepsilon)}.$$

Обозначение для завихренности временное — пока нет ротора.

Лемма. Для всякого гладкого векторного поля:

- (1) указанный предел существует;
- (2) его значение не меняется, если вместо каждого кружка C_ε брать его пересечение с любой окрестностью точки p .

Направляющие косинусы. Обозначим через α_i угол между направлением $\mathbf{n}$ и направлением $\mathbf{e}_i$ соответствующей оси декартовой системы координат: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = \cos \alpha_i$. Эти три величины однозначно определяют направление $\mathbf{n}$, поскольку $\mathbf{n} = \sum (\cos \alpha_i) \mathbf{e}_i$. Их часто называют **направляющими косинусами** для $\mathbf{n}$.

Лемма. В каждой точке завихренность гладкого векторного поля вокруг любого направления выражается через завихренности вокруг осей координат и направляющие косинусы:

$$\mathbf{n} = \sum (\cos \alpha_i) \mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad w_p(\mathbf{f}, \mathbf{n}) = \sum (\cos \alpha_i) w_p(\mathbf{f}, \mathbf{e}_i).$$

Доказательство. Построим вблизи точки p маленькую треугольную пирамидку характерного размера ε : три её грани C_i параллельны координатным плоскостям, а четвёртая грань C проходит через p , имея нормаль $\mathbf{n}$. Вектор $\mathbf{n}$ задаёт ориентацию грани C , а остальные мы ориентируем по принципу склейки, причём противоположно C . Тогда

рисунок

$$W(\mathbf{f}, \partial C) = \sum W(\mathbf{f}, \partial C_i).$$

Здесь в правой части три ребра пирамидки, не являющиеся частью ∂C , пробегаются дважды в противоположных направлениях, поэтому их вклады сокращаются. Площади граней связаны соотношениями $S(C) = S(C_i) / \cos \alpha_i$. Подставим всё в определение завихренности:

$$\frac{W(\mathbf{f}, \partial C)}{S(C)} = \sum (\cos \alpha_i) \frac{W(\mathbf{f}, \partial C_i)}{S(C_i)}.$$

Сжимая пирамидку пропорционально $\varepsilon \rightarrow 0$, получим требуемое. $\square$

Упражнение. Адаптируйте построение на случай зануления одного из направляющих косинусов.

Определение ротора. Вспомним теперь о линейности производной по направлению,

$$\mathbf{n} = \sum (\cos \alpha_i) \mathbf{e}_i \Rightarrow D_{\mathbf{n}} u = \sum (\cos \alpha_i) D_{\mathbf{e}_i} u,$$

и её связи с градиентом, $D_{\mathbf{n}} u = \nabla u \cdot \mathbf{n}$. В каждой точке направление и величина градиента совпадают с направлением и скоростью быстрого роста функции, а производная по любому направлению равна проекции градиента на это направление. Такая же связь имеется между завихренностью и ротором.

Определение. **Ротором** гладкого векторного поля $\mathbf{f}$ в точке p называют вектор, проекция которого на любое направление $\mathbf{n}$ равна завихренности поля $\mathbf{f}$ в точке p вокруг $\mathbf{n}$.

Ротор обозначается через $\text{rot } \mathbf{f}$ и является векторным полем. В каждой точке направление и величина ротора совпадают с направлением и величиной наибольшей завихренности.

В силу линейности криволинейного интеграла, вычисляющего циркуляцию, оператор ротора линеен:

$$\text{rot}(c_1 \mathbf{f}_1 + c_2 \mathbf{f}_2) = c_1 \text{rot } \mathbf{f}_1 + c_2 \text{rot } \mathbf{f}_2$$

для любых гладких векторных полей $\mathbf{f}_i$ и скалярных констант c_i .

Теорема. В декартовых координатах для $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ имеем

$$\text{rot } \mathbf{f} = (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}.$$

Доказательство. Найдём только третью компоненту ротора, поскольку остальные получаются из неё циклической заменой букв

$$x \mapsto y \mapsto z \mapsto x, \quad P \mapsto Q \mapsto R \mapsto P, \quad \mathbf{i} \mapsto \mathbf{j} \mapsto \mathbf{k} \mapsto \mathbf{i}.$$

Вычислим циркуляцию $\mathbf{f}$ по маленькому кружочку C_ε вокруг точки $p = (x, y, z)$ в плоскости $p + Oxy$. Ортогональную этой плоскости компоненту $R\mathbf{k}$ можно отбросить, всё равно она не работает. Осталось гладкое плоское векторное поле $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, циркуляция которого по окружности ∂C_ε по формуле Грина равна

$$W_\varepsilon = (Q_x(x, y, z) - P_y(x, y, z) + o(1)) \cdot S_\varepsilon.$$

В пределе $W_\varepsilon/S_\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем значение $Q_x - P_y$ в точке p . $\square$

Пример. Трубки тока и вихревые трубки (гиперссылка).

15.4. НАБЛА И ОПЕРАТОРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ротор градиента и дивергенция ротора. Обозначим множества достаточно гладких скалярных и векторных полей на области $T \subseteq \mathbb{R}^3$ через $\text{Func}(T)$ и $\text{Vect}(T)$. Мы уже познакомились с тремя основными дифференциальными операторами векторного анализа: градиентом, ротором и дивергенцией. Их действия изобразим схемой

$$\text{Func}(T) \xrightarrow{\text{grad}} \text{Vect}(T) \xrightarrow{\text{rot}} \text{Vect}(T) \xrightarrow{\text{div}} \text{Func}(T).$$

Напомним их выражения в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi &= \phi_x \mathbf{i} + \phi_y \mathbf{j} + \phi_z \mathbf{k}; \\ \text{rot}(\mathbf{P}\mathbf{i} + \mathbf{Q}\mathbf{j} + \mathbf{R}\mathbf{k}) &= (R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}; \\ \text{div}(\mathbf{P}\mathbf{i} + \mathbf{Q}\mathbf{j} + \mathbf{R}\mathbf{k}) &= P_x + Q_y + R_z. \end{aligned}$$

Зачастую удобнее иные обозначения — с индексами x, y и z , то есть $\mathbf{e}_x = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_y = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$, а также $\mathbf{f} = f^x \mathbf{e}_x + f^y \mathbf{e}_y + f^z \mathbf{e}_z$ для векторных полей. Тогда

13.04.17

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi &= \phi_x \mathbf{e}_x + \phi_y \mathbf{e}_y + \phi_z \mathbf{e}_z; \\ \text{rot}(f^x \mathbf{e}_x + f^y \mathbf{e}_y + f^z \mathbf{e}_z) &= (f_y^z - f_z^y) \mathbf{e}_x + (f_z^x - f_x^z) \mathbf{e}_y + (f_x^y - f_y^x) \mathbf{e}_z; \\ \text{div}(f^x \mathbf{e}_x + f^y \mathbf{e}_y + f^z \mathbf{e}_z) &= f_x^x + f_y^y + f_z^z. \end{aligned}$$

Символов здесь больше, зато проще расстановка индексов. При этом следует помнить, что нижние индексы на функциях обозначают их частные производные.

Схема полей и операторов неспроста нарисована так, а чтобы выделить два способа последовательного применения двух операторов.

Теорема. Тождество $\text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$ выполнено для всякого дважды гладкого скалярного поля ϕ .

Теорема. Тождество $\text{div rot } \mathbf{f} = 0$ выполнено для всякого дважды гладкого векторного поля $\mathbf{f}$.

Доказательство обеих теорем. Непосредственная проверка в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \text{rot grad } \phi &= \text{rot}(\phi_x \mathbf{e}_x + \phi_y \mathbf{e}_y + \phi_z \mathbf{e}_z) \\ &= (\phi_{zy} - \phi_{yz}) \mathbf{e}_x + (\phi_{xz} - \phi_{zx}) \mathbf{e}_y + (\phi_{yx} - \phi_{xy}) \mathbf{e}_z = \mathbf{0}; \\ \text{div rot } \mathbf{f} &= \text{div}(\text{rot}(f^x \mathbf{e}_x + f^y \mathbf{e}_y + f^z \mathbf{e}_z)) \\ &= \text{div}((f_y^z - f_z^y) \mathbf{e}_x + (f_z^x - f_x^z) \mathbf{e}_y + (f_x^y - f_y^x) \mathbf{e}_z) \\ &= (f_y^z - f_z^y)_x + (f_z^x - f_x^z)_y + (f_x^y - f_y^x)_z = 0. \end{aligned}$$

Все сокращения случились всего лишь по свойству смешанных вторых частных производных. $\square$

Оператор Гамильтона. Для сокращения сложных выражений векторного анализа Гамильтон и Максвелл ввели символический оператор

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z,$$

ведущий себя во многом как вектор, хотя и не во всём. Первое и самое главное:

$$\operatorname{grad} \phi = \nabla \phi, \quad \operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f},$$

напрямую из явных выражений всех задействованных операторов.

Находясь в сложной формуле, оператор ∇ обычно действует на то, что справа от него; в случае возможной путаницы, для ясности пользуются скобками. Например, только что мы получили тождества

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0.$$

Перепишем их ещё раз, подставляя ∇ в формальный определитель для вычисления векторных произведений:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \partial_x & \partial_x \phi \\ \mathbf{e}_y & \partial_y & \partial_y \phi \\ \mathbf{e}_z & \partial_z & \partial_z \phi \end{vmatrix} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_x & f^x \\ \partial_y & \partial_y & f^y \\ \partial_z & \partial_z & f^z \end{vmatrix} = 0.$$

Во втором определителе два одинаковых столбца. Это же будет в первом определителе, если вынести из него функцию ϕ вправо.

Действие на произведения. Обсуждаемые здесь формулы местами полезны в электродинамике. Все они проверяются непосредственными вычислениями с компонентами в декартовых координатах.

Упражнение. Проверьте удачные формулы для произведений

$$\begin{aligned} \nabla(\phi\psi) &= (\nabla\phi)\psi + \phi(\nabla\psi); \\ \nabla \times (\phi\mathbf{f}) &= (\nabla\phi) \times \mathbf{f} + \phi(\nabla \times \mathbf{f}); \\ \nabla \cdot (\phi\mathbf{f}) &= (\nabla\phi) \cdot \mathbf{f} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{f}). \end{aligned}$$

В каких слагаемых можно опустить скобки без риска путаницы?

Символические правила для дифференцирования скалярного и векторного произведений сложнее и не имеют аналогов ни в обычной векторной алгебре, ни в «обычном» скалярном анализе.

Упражнение. Проверьте формулу

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}).$$

Ещё только два подобных выражения осмысленны, однако каждое бескоординатно разворачивается аж в четыре слагаемых, причём половина этих адских слагаемых требуют дополнительного пояснения. А именно, введём формальное скалярное произведение

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \nabla &= (a^x \mathbf{e}_x + a^y \mathbf{e}_y + a^z \mathbf{e}_z) \cdot (\partial_x \mathbf{e}_x + \partial_y \mathbf{e}_y + \partial_z \mathbf{e}_z) \\ &= a^x \partial_x + a^y \partial_y + a^z \partial_z.\end{aligned}$$

Тогда для скалярного поля ϕ получим

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \phi = (a^x \partial_x + a^y \partial_y + a^z \partial_z) \phi = a^x \phi_x + a^y \phi_y + a^z \phi_z,$$

то есть его производную по вектору $\mathbf{a}$. Тот факт, что $\mathbf{a}$ является полем и может меняться **от точки к точке**, не играет существенной роли в определении производной по нему:

$$((\mathbf{a} \cdot \nabla) \phi)(\mathbf{r}) = D_{\mathbf{a}} \phi(\mathbf{r}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{r} + \delta \mathbf{a}(\mathbf{r})) - \phi(\mathbf{r})}{\delta}.$$

Однако в этом определении можно без проблем заменить скалярное поле ϕ векторным полем $\mathbf{f}$:

$$((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{f})(\mathbf{r}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{a}(\mathbf{r})) - \mathbf{f}(\mathbf{r})}{\delta}.$$

Поэтому можно написать

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{f} = (a^x \partial_x + a^y \partial_y + a^z \partial_z) \mathbf{f} = a^x \mathbf{f}_x + a^y \mathbf{f}_y + a^z \mathbf{f}_z.$$

Теперь мы наконец готовы увидеть две оставшиеся формулы.

Упражнение. *Дотошным раскрытием проверьте формулы*

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f}, \\ \nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g}.\end{aligned}$$

Оператор Лапласа. Возвращаясь к схеме в начале раздела, заметим ещё три возможности двукратного применения операторов: $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{f}$, $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{f}$.

Важнейшей среди них является первая. Мы уже встретили мимоходом её аналог в плоском случае: её называют **оператором Лапласа**, а результат её применения — **лапласианом** функции ϕ и обозначают его через $\Delta \phi$ или $\nabla^2 \phi$. В декартовых координатах получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi &= \nabla \cdot (\phi_x \mathbf{e}_x + \phi_y \mathbf{e}_y + \phi_z \mathbf{e}_z) \\ &= \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}) \phi.\end{aligned}$$

Выражение в скобках и есть запись оператора Лапласа Δ в декартовых координатах. Символически можно писать $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, однако

при этом следует различать лапласиан $(\nabla \cdot \nabla)\phi$ и скалярный квадрат градиента $\nabla\phi \cdot \nabla\phi$.

Лапласиан входит во многие важные для физики уравнения в частных производных. Если в случае одной пространственной координаты уравнение содержит вторую производную по ней, как обычно и бывает, то в многомерии вторая производная заменяется на лапласиан.

волновое уравнение	$\Delta u = u_{tt}$
уравнение теплопроводности	$\Delta u = u_t$
уравнение Лапласа	$\Delta u = 0$
уравнение Пуассона	$\Delta u = g$
уравнение Гельмгольца	$\Delta u = -k^2 u$

08.01.18

Упражнение. Выведите тождество Грина

$$\oint_{\partial T} \begin{vmatrix} u & u_{\mathbf{n}} \\ v & v_{\mathbf{n}} \end{vmatrix} dS = \iiint_T \begin{vmatrix} u & \Delta u \\ v & \Delta v \end{vmatrix} dV.$$

Индекс $\mathbf{n}$ обозначает производные по вектору единичной внешней нормали к телу T . Указание: плоский аналог разобран в конце предыдущей главы.

Две оставшихся операции второго порядка связаны с лапласианом векторного поля и полезны для его вычисления в криволинейных координатах. Там нельзя запросто пройти покомпонентно, в отличие от декартовых, где базисные векторы постоянны:

$$\Delta(f^x \mathbf{e}_x + f^y \mathbf{e}_y + f^z \mathbf{e}_z) = \Delta(f^x) \mathbf{e}_x + \Delta(f^y) \mathbf{e}_y + \Delta(f^z) \mathbf{e}_z.$$

Упражнение. Выразите векторный лапласиан

$$\nabla^2 \mathbf{f} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})$$

в декартовых координатах и упростите.

Пример. Уравнения Максвелла (гиперссылка).

15.5. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Мы пользовались криволинейными координатами, делая замены переменных при вычислении интегралов. Теперь познакомимся с соответствующими выражениями дифференциальных операторов векторного анализа.

Ортогональные координаты и параметры Ламе. Радиус-вектор точки зависит от трёх координат, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$, что равносильно выражению декартовых координат через криволинейные:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3). \end{cases}$$

Фиксируя две из трёх координат, получаем движение по линии, например $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)$. Его скорость есть частная производная $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$. В каждой точке $\mathbf{r}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)$ получаем три таких вектора.

Первое предположение, необходимое для полезности конкретной системы криволинейных координат: в каждой точке области эти векторы скоростей линейно независимы. Их независимость алгебраически выражается отличием от нуля якобиана

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q_1, q_2, q_3)}.$$

Вычислительную работу упрощает более сильное предположение.

Определение. Система координат $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ на области $T \subseteq \mathbb{R}^3$ называется **ортогональной**, если в каждой точке T векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$ попарно ортогональны.

Тогда, отнормировав их — разделив каждый на его длину, — мы получим ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, меняющийся от точки к точке и потому называемый **подвижным**. Итак,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i \mathbf{e}_i, \quad \text{где } H_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}.$$

Функции H_i называются **параметрами Ламе** используемой системы координат. При этом $H_1 H_2 H_3 = J$.

Упражнение. Установите равенство $H_1 H_2 H_3 = J$ алгебраически и объясните его геометрически.

Примеры. Для исходной декартовой системы $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$, поэтому все три параметра Ламе единичны.

Для цилиндрической системы $(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \varphi, z)$ находим

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1.$$

Для сферической системы $(q_1, q_2, q_3) = (r, \varphi, \theta)$ сперва вспоминаем, как договорились отсчитывать углы. При «географическом» выборе,

когда $z = r \sin \theta$, находим

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r \cos \theta, \quad H_\theta = r.$$

При отсчёте θ от северного полюса меняются местами синус и косинус, а также θ считается второй координатой, меняясь с φ , поскольку иначе базис левый.

Основные геометрические величины в малом выражаются через параметры Ламе. Возьмём параллелепипед со сторонами dq_i , так что координаты его вершин равны q_i и $q_i + dq_i$. Тогда длины сторон равны $H_i dq_i$, площади граней равны их произведениям $H_i H_j dq_i dq_j$, а объём равен $H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$. Далее, длина большой диагонали равна

$$ds = \sqrt{H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2}.$$

Подобные формулы мы уже видели, вычисляя элемент длины дуги в стандартных системах; к ним отсюда придём, считая $q_i = q_i(t)$.

ещё системы!

Смена системы координат. В физических задачах приходится выражать векторные поля в криволинейных координатах,

подраздел
07.04.17

$$\mathbf{a} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3,$$

и переводить их из одной системы в другую. Для этого нужна связь между подвижными базисами разных систем. Чаще всего одна из систем декартова, а когда это не так, можно делать искомым переход в два шага, проходя через декартову систему.

Пример. Выразим подвижный базис $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi\}$ полярной системы через базис $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ декартовой системы. Единичный вектор $\mathbf{e}_\rho$ сонаправлен с радиус-вектором $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$, поэтому

$$\mathbf{e}_\rho = (\cos \varphi) \mathbf{e}_x + (\sin \varphi) \mathbf{e}_y.$$

Второй единичный вектор $\mathbf{e}_\varphi$ ортогонален первому, поэтому

$$\mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi) \mathbf{e}_x + (\cos \varphi) \mathbf{e}_y.$$

Здесь нужно только правильно выбрать знаки, помня, что $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi\}$ является правым базисом. Ответ можно записать в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Пример. Теперь для цилиндрической системы сразу получается

$$[\mathbf{e}_\rho \ \mathbf{e}_\varphi \ \mathbf{e}_z] = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример. Рассмотрим ещё и сферическую систему (r, θ, φ) , связанную с декартовой формулами

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Как и для полярной системы выше, вектор $\mathbf{e}_r$ направлен по радиус-вектору, поэтому его разложение по базису $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ находится непосредственно: делением правых частей формул замены на r . Вектор $\mathbf{e}_\theta$ касается меридианов, а вектор $\mathbf{e}_\varphi$ касается параллелей. Позанимаясь элементарной геометрией, отсюда можно найти ответ:

$$[\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_\theta \ \mathbf{e}_\varphi] = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}.$$

Это был метод физиков.

А что же делать в других системах координат? Придётся теперь по методу математиков получить общую формулу. Сюрприз! Вывод её несколько не сложнее, и даже проще: требуется всего лишь применить правило цепочки для производных композиции:

$$H_i \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \mathbf{e}_z.$$

Переписывая это в матричном виде, увидим матрицу Якоби:

$$[H_1 \mathbf{e}_1 \ H_2 \mathbf{e}_2 \ H_3 \mathbf{e}_3] = [\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z] \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)}.$$

Упражнение. Примените эту формулу для сферических координат и пронаблюдайте сокращение параметров Ламе.

Градиент. Найдём выражение градиента скалярного поля u в ортогональных криволинейных координатах:

$$\nabla u = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3.$$

Сдвигаясь от фиксированной точки на dq_i , поделим приращение du на расстояние $H_i dq_i$ и получим производную u по направлению $\mathbf{e}_i$. Она

же есть скалярное произведение $\nabla u \cdot \mathbf{e}_i$, что ввиду ортонормированности базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ даёт A_i . Поэтому $A_i = H_i^{-1} \frac{\partial u}{\partial q_i}$.

Пример. В декартовых координатах

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}.$$

В цилиндрических координатах

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

Упражнение. Выразите градиент в сферических координатах.

Упражнение. Найдите такую функцию u , что $\nabla u = kr^{-3} \mathbf{r}$.

Дивергенция. Найдём выражение дивергенции векторного поля в ортогональных криволинейных координатах, повторяя вывод в декартовых координатах с необходимыми изменениями.

Возьмём точку $p = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)$ и маленький почти параллелепипед с вершинами $(\tilde{q}_1 \pm \varepsilon, \tilde{q}_2 \pm \varepsilon, \tilde{q}_3 \pm \varepsilon)$. Длины сторон равны $2\varepsilon H_i$, а объём

$$V_\varepsilon = 2\varepsilon H_1 \cdot 2\varepsilon H_2 \cdot 2\varepsilon H_3 = 8\varepsilon^3 J.$$

Считаем для начала, что поле имеет лишь одну компоненту: $\mathbf{f} = A_3 \mathbf{e}_3$. Тогда ненулевой поток возможен только через две противоположные грани $\Sigma^\pm$. Элементы площади на них слегка различны:

$$dS^\pm = H_1(q_1, q_2, \tilde{q}_3 \pm \varepsilon) dq_1 \cdot H_2(q_1, q_2, \tilde{q}_3 \pm \varepsilon) dq_2.$$

Получаем поток

$$\Phi_\varepsilon = \iint_{\Sigma} (a^+ - a^-) dq_1 dq_2,$$

где $a^\pm$ есть значения функции $a = H_1 H_2 A_3$ в точках $(q_1, q_2, \tilde{q}_3 \pm \varepsilon)$. Эта функция теперь заменяет функцию R из вывода представления дивергенции в декартовых координатах. Представим её приращение как интеграл от $\frac{\partial a}{\partial q_3}$ по dq_3 , и тогда весь интеграл станет тройным:

$$\Phi_\varepsilon = \iiint_{P_\varepsilon} \frac{\partial a}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Допуская бесконечно малую ошибку, вынесем из интеграла значение подынтегральной функции в центре p параллелепипеда P_ε . Приращение каждой координаты q_i равно 2ε , поэтому

$$\Phi_\varepsilon = 8\varepsilon^3 \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial q_3}(p) + o(1) \right).$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ предел $\Phi_\varepsilon/V_\varepsilon$ даёт искомую дивергенцию

$$J^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 A_3) = J^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{J A_3}{H_3} \right).$$

Смысл последнего перехода: оставить лишь одно значение индекса.

Дивергенции двух других компонент общего поля $A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$ получаются заменой индексов. Ввиду линейности оператора, в итоге

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) \\ = J^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{J A_1}{H_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{J A_2}{H_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{J A_3}{H_3} \right) \right). \end{aligned}$$

При желании отсюда можно совсем исключить параметры Ламе:

$$\operatorname{div} \left(\sum F_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = J^{-1} \sum \frac{\partial}{\partial q_i} (J F_i).$$

Для этого вспоминаем, что $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i \mathbf{e}_i$ и полагаем $F_i = A_i/H_i$.

Упражнение. Выразите дивергенцию в цилиндрических и сферических координатах.

Лапласиан. Подставляя в дивергенцию выражение градиента скалярного поля, получаем выражение его лапласиана в ортогональных криволинейных координатах:

$$\Delta u = J^{-1} \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(J H_i^{-2} \frac{\partial u}{\partial q_i} \right).$$

Упражнение. Выразите лапласиан в цилиндрических и сферических координатах.

Ротор. Аналогичным образом найдём выражение ротора векторного поля в ортогональных криволинейных координатах:

$$\mathbf{f} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 \implies \operatorname{rot} \mathbf{f} = B_1 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2 + B_3 \mathbf{e}_3,$$

где нужно определить функции B_i .

Рассмотрим для начала $\mathbf{f} = A_3 \mathbf{e}_3$. При том же параллелепипеде, что и в вычислении дивергенции, ненулевая работа на рёбрах возможна лишь на четырёх вертикальных рёбрах с элементами длины $H_3 dq_3$. Грань, на которой $q_1 = \tilde{q}_1 + \varepsilon$, имеет площадь $S_\varepsilon = 4\varepsilon^2 H_2 H_3$, а циркуляция вокруг неё равна

$$W_\varepsilon = \int (a^+ - a^-) dq_3,$$

где $a^\pm$ есть значения функции $a = H_3 A_3$ в точках $(\tilde{q}_1 + \varepsilon, \tilde{q}_2 \pm \varepsilon, q_3)$. Приращение под интегралом представимо в виде $2\varepsilon \frac{\partial a}{\partial q_2}(p) + o(\varepsilon)$, а q_3 вдоль ребра параллелепипеда прирастает на 2ε . Поэтому

$$W_\varepsilon = 2\varepsilon \cdot 2\varepsilon \left(\frac{\partial a}{\partial q_2}(p) + o(1) \right),$$

и в пределе $W_\varepsilon/S_\varepsilon$ получаем первую компоненту искомого ротора:

$$B_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 A_3).$$

Аналогично, циркуляция вокруг грани с $q_2 = \tilde{q}_2 + \varepsilon$ равна

$$W_\varepsilon = \int (a^- - a^+) dq_3,$$

где $a^\pm$ есть значения функции $a = H_3 A_3$ в точках $(\tilde{q}_1 \pm \varepsilon, \tilde{q}_2 + \varepsilon, q_3)$. Отличие знака разности под интегралом от прежнего вызвано правилом индуцирования ориентации. Этот минус выживет при дальнейших шагах, дающих вторую компоненту искомого ротора. Значит,

$$\text{rot}(A_3 \mathbf{e}_3) = \frac{1}{H_2 H_3} \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 A_3) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{H_1 H_3} \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 A_3) \mathbf{e}_2.$$

Ротаторы полей $A_1 \mathbf{e}_1$ и $A_2 \mathbf{e}_2$ находятся таким же образом, либо просто циклической заменой индексов $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$. Складывая результаты, получим $\text{rot}(A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3)$ с шестью слагаемыми. Поскольку известное нам мнемоническое выражение ротора в декартовых координатах содержит формальный определитель, в криволинейном случае следует ожидать чего-то подобного, только с новыми и уже заметными «украшениями». Действительно, и здесь эти шесть слагаемых составляют раскрытие формального определителя

$$\text{rot}(A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) = J^{-1} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{e}_1 & \partial/\partial q_1 & H_1 A_1 \\ H_2 \mathbf{e}_2 & \partial/\partial q_2 & H_2 A_2 \\ H_3 \mathbf{e}_3 & \partial/\partial q_3 & H_3 A_3 \end{vmatrix}.$$

Упражнение. Выразите ротор в цилиндрических и сферических координатах.

Упражнение. Пронаблюдайте согласованность «украшений» Ламе в формулах для градиента, ротора и дивергенции при надуманной проверке известных равенств $\text{rot}(\text{grad } u) = \mathbf{0}$ и $\text{div}(\text{rot } \mathbf{f}) = 0$.

15.6. ВАЖНЕЙШИЕ КЛАССЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Здесь кажется удобным чуть забежать вперёд. Изучая в плоском случае зависимость работы и потока от контура, мы видели важность наличия или отсутствия в области дыр. В пространстве нам также никуда от них не деться. Более того, необходимо отметить, что дыры в пространственных областях бывают разных сортов. Одни можно условно назвать пузырями, а другие туннелями. Есть и более сложные.

рисунок

Потенциальные и безвихревые поля. Напомним, что потенциальным называют векторное поле $\mathbf{f} = \nabla\phi$. Точнее, следует говорить о потенциальности в конкретной области.

Определение. Векторное поле $\mathbf{f}$ называют **безвихревым**, если $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Следствие. Каждое потенциальное поле является безвихревым.

Доказательство. Мы уже доказывали соотношение $\text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$. $\square$

Пример (вихревой шнур). Не каждое безвихревое поле является потенциальным. Рассмотрим поле $\mathbf{f} \doteq (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$. По сути, это плоское поле из примера о приращении угла, распространённое на пространство параллельным переносом вдоль оси Oz . В цилиндрических координатах $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\varphi/\rho$. Видим, что $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ вне оси Oz . Однако циркуляция по контуру, охватывающему эту ось, равна числу оборотов контура вокруг оси, умноженному на 2π . Поэтому на всей своей дырявой области определения $\mathbf{f}$ не потенциально. Ось Oz образует туннель.

рисунок
гиперссылка

Конечно же, ответ на вопрос, когда в заданной области D каждое безвихревое поле потенциально, а когда нет, следует искать в свойствах самой области. В плоском случае ответ уже был найден, и он положителен тогда и только тогда, когда область односвязна. В пространственном случае ответ такой же, но нужно заменить наивное определение односвязности настоящим.

Определение. Контур в области D называют **стягиваемым**, если непрерывной деформацией его можно стянуть в точку, не покидая D .

рисунок

Стягиваемость можно выразить и формально. Простой контур γ является образом окружности при непрерывном отображении в D . Возьмём эту окружность в плоскости; там она ограничивает круг K . Если найдётся непрерывное отображение $K \rightarrow D$, отправляющее ∂K в γ , то контур стягиваем.

Определение. Область называется **односвязной**, если любой контур в ней стягиваем.

Теорема. В односвязной области каждое безвихревое поле потенциально.

Доказательство. По теореме, характеризующей потенциальные поля, достаточно показать, что при таких условиях циркуляция по любому контуру нулевая. При стягивании в точку контура γ внутри области заматается поверхность Σ с краем γ , на которой применима формула Стокса. Тогда $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ влечёт $W(\mathbf{f}, \gamma) = 0$. $\square$

Упражнение. Односвязна ли область, ограниченная двумя концентрическими шарами?

Пример. Энергия безвихревого движения (гиперссылка).

Соленоидальные и бездивергентные поля. Здесь ситуация во многом аналогична рассмотренной выше, но сложнее.

Теорема. Для всякого непрерывного векторного поля $\mathbf{f}$ в области D равносильны утверждения:

- (1) поток $\mathbf{f}$ через любую приличную замкнутую поверхность равен нулю;
- (2) поток $\mathbf{f}$ через незамкнутую поверхность зависит не от самой поверхности, а лишь от её края;
- (3) найдётся такое векторное поле $\mathbf{a}$, что $\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{a}$.

Определение. Векторное поле $\mathbf{f}$ с такими свойствами называют **соленоидальным** в D . При этом $\mathbf{a}$ называют **векторным потенциалом** поля $\mathbf{f}$.

Доказательство. $(1 \Leftrightarrow 2)$ Возьмём две поверхности Σ_i с общим краем. Поверхность $\Sigma_1 - \Sigma_2 = \Sigma_1 \cup (-\Sigma_2)$ замкнута, а аддитивность

$$\Phi(\mathbf{f}, \Sigma_1 - \Sigma_2) = \Phi(\mathbf{f}, \Sigma_1) - \Phi(\mathbf{f}, \Sigma_2)$$

потока (интеграла второго рода) немедленно влечёт требуемое.

$(3 \Rightarrow 2)$ Поток $\Phi(\text{rot } \mathbf{a}, \Sigma)$ равен циркуляции $W(\mathbf{a}, \partial\Sigma)$ по формуле Стокса.

$(1 \Rightarrow 3)$ Построим векторный потенциал ниже. $\square$

Определение. Векторное поле $\mathbf{f}$ в области D называют **бездивергентным**, если $\text{div } \mathbf{f} = 0$.

Следствие. Каждое соленоидальное поле бездивергентно.

Доказательство. Мы уже доказывали соотношение $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$.

Иначе: поток через маленькую замкнутую поверхность участвует в определении дивергенции, поэтому равенство таких потоков нулю влечёт $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$. $\square$

Пример. Не каждое бездивергентное поле соленоидально. Кулоновское поле $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = kqr^{-3}\mathbf{r}$ бездивергентно, но его поток через сферу вокруг начала равен $4\pi kq$. Проблема в том, что в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ есть нестягиваемые поверхности (хотя нестягиваемых контуров нет), а всё из-за точечной дыры-пузыря в начале.

Теорема. Если в области D каждая поверхность стягиваема, то всякое бездивергентное поле в D соленоидально.

Доказательство. Обычно пытаются стягивать простейшие замкнутые поверхности, которые гомеоморфны сфере, или, говоря проще, сферы. При стягивании в точку сферы Σ внутри области замечается гомеоморфная шару подобласть B с границей Σ , на которой применима формула Гаусса — Остроградского. Тогда $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ влечёт $\Phi(\mathbf{f}, \Sigma) = 0$. Тем самым, поле $\mathbf{f}$ обладает свойствами из предыдущей теоремы, но векторный потенциал мы ещё не построили. $\square$

Бездивергентность поля $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ означает $P_x + Q_y + R_z = 0$. Методом угадывания обнаруживаем равенство

$$\operatorname{rot}(Q\mathbf{i} - P\mathbf{j}) = P_z\mathbf{i} + Q_z\mathbf{j} - (P_x + Q_y)\mathbf{k} = P_z\mathbf{i} + Q_z\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} = \mathbf{f}_z,$$

которое остаётся проинтегрировать. Далее можно проверить, что

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{i} \int_{z_0}^z Q(x, y, t) dt - \mathbf{j} \int_{z_0}^z P(x, y, t) dt$$

локально является искомым векторным потенциалом. Если граница области мешает интегрировать по z , можно аналогично двигаться в другом направлении, интегрируя соответственно $P\mathbf{k} - R\mathbf{i}$ или $R\mathbf{j} - Q\mathbf{k}$.

Когда в области нет нестягиваемых поверхностей, нет и проблем при распространении построения на всю область, но иначе при обходе дыры может возникнуть неоднозначность векторного потенциала. Во многих учебниках не заботятся о стягиваемости, предпочитая допускать многозначные потенциалы. Как следствие, соленоидальностью иногда называют бездивергентность. Аналогичное замечание можно сделать о потенциальных и безвихревых полях.

пример?

Упражнение (калибровочная свобода). Два векторных поля $\mathbf{a}_i$ являются векторными потенциалами векторного поля $\mathbf{f}$ в области D . Что можно сказать о поле $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$?

Разложение Гельмгольца. Дивергенция и ротор векторного поля выражают плотность его источников и завихрений. Потенциальное поле не имеет завихрений, а соленоидальное — источников. Возникает вопрос: можно ли выделить из данного поля $\mathbf{f}$ компоненту, имеющую только источники, и компоненту, имеющую только завихрения?

Теорема. В стягиваемой области всякое дважды гладкое векторное поле представимо суммой потенциального и соленоидального полей.

Потенциальную и соленоидальную составляющие поля часто называют соответственно **продольной** и **поперечной**.

Идея доказательства. Если заданное поле $\mathbf{f}$ представлено в искомом пока виде $\mathbf{f} = -\operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \mathbf{a}$, где вставлен минус, обычный в электродинамике, то

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi + \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = -\Delta \phi.$$

Поскольку $g = -\operatorname{div} \mathbf{f}$ известна, отыскание неизвестных полей ϕ и $\mathbf{a}$ свелось к решению уравнения Пуассона $\Delta \phi = g$ и последующему построению векторного потенциала для поля $\mathbf{f} + \operatorname{grad} \phi$. $\square$

Сравним два разложения Гельмгольца $\mathbf{p}_1 + \mathbf{s}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{s}_2$ с потенциальными $\mathbf{p}_i$ и соленоидальными $\mathbf{s}_i$. Поле $\mathbf{h} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$ одновременно потенциально и соленоидально: $\mathbf{h} = -\operatorname{grad} \phi = \operatorname{rot} \mathbf{a}$. Следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{h} = -\Delta \phi = 0$. Поскольку потенциал поля $\mathbf{h}$ является гармонической функцией, это поле также называют **гармоническим**.

Итак, разложение Гельмгольца данного векторного поля определено с точностью до гармонических слагаемых, которые можно свободно переносить между продольной и поперечной составляющими.

Упражнение. Опишите все гармонические центральные поля.

Формулы для разложения Гельмгольца ([гиперссылка](#)).

15.7. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ

Электрическое поле точечного заряда. Согласно закону Кулона, электрический заряд q , помещённый в начало координат, создаёт электрическое поле напряжённостью $\mathbf{E} = kqr^{-3}\mathbf{r}$. Постоянная k зависит от среды, а также, даже в вакууме, от выбора системы единиц.

Окружим заряд сферой Σ радиуса r и посчитаем поток. Поскольку единичная внешняя нормаль $\mathbf{n}$ к сфере равна $\mathbf{r}/r$, да и площадь сферы известна, необходимости возиться с параметризацией нет:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{E}, \Sigma) &= \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Sigma} kqr^{-3} \mathbf{r} \cdot r^{-1} \mathbf{r} dS \\ &= kqr^{-2} \oint_{\Sigma} dS = 4\pi kq.\end{aligned}$$

Оказалось, что поток не зависит от радиуса сферы.

Далее, поток $\mathbf{E}$ через полусферу равен $2\pi kq$. Поток через любую область в любой плоскости, проходящей через начало, равен нулю, ибо там $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$. С тем же успехом можно рассмотреть и сферический сектор, получая в ответе телесный угол. Применимы все те же соображения, что раньше в плоской ситуации, только мы пока не умеем свободно заменять сферу на произвольную поверхность.

Электростатическая теорема Гаусса. Дивергенция электрического поля $\mathbf{E} = kqr^{-3}\mathbf{r}$ точечного заряда равна нулю вне заряда. По формуле Гаусса — Остроградского, его поток $\Phi(\mathbf{E}, \partial T)$ через границу любого тела, не содержащего заряда, равен нулю.

лекция 17+

Теорема (Гаусс). Поток напряжённости электрического поля произвольной системы зарядов через границу любого тела, на которой нет зарядов, равен полному заряду внутри тела, умноженному на $4\pi k$.

Доказательство. Достаточно установить равенство для одного заряда, ибо потом эти равенства можно сложить ввиду принципа суперпозиции полей.

Для шара B , окружающего одиночный заряд q , мы уже вычислили $\Phi(\mathbf{E}, \partial B) = 4\pi kq$ независимо от радиуса. Вырежем из тела T маленький шар B вокруг заряда. Тогда $T \setminus B$ не содержит заряда, поэтому $\Phi(\mathbf{E}, \partial T) = \Phi(\mathbf{E}, \partial B)$ по формуле Гаусса — Остроградского. $\square$

Пример. Поле равномерно заряженного шара радиуса R должно быть центральным в силу симметрии: $\mathbf{E} = E(r)r^{-1}\mathbf{r}$; начало координат естественно взять в центре шара. Найдём функцию $E(r)$.

Возьмём сферу Σ любого радиуса $r > R$. Поскольку

$$\Phi(\mathbf{E}, \Sigma) = \oint_{\Sigma} E(r)r^{-1}\mathbf{r} \cdot r^{-1}\mathbf{r} dS = E(r)S(\Sigma) = 4\pi r^2 E(r),$$

по теореме Гаусса находим $E(r) = kQr^{-2}$, где Q есть полный заряд шара. Поэтому поле шара снаружи его не отличимо от поля точечного заряда той же величины, находящегося в центре.

рисунок

На поле внутри шара его внешние слои не сказываются. Сфера радиуса $r < R$ окружает заряд $Q(r/R)^3$, что даёт $E(r) = kQR^{-3}r$.

Упражнение. Найдите электрические поля:

- (1) равномерно заряженной бесконечной прямой нити;
- (2) равномерно заряженной бесконечной плоскости.

Из соображений симметрии поймите общий вид полей; затем выберите цилиндры в качестве поверхностей для вычисления потока; наконец, из теоремы определите неизвестные скалярные функции.

Дивергенция и законы сохранения. Среди многочисленных приложений дивергенции в физике — разнообразные уравнения непрерывности или неразрывности, выражающие законы сохранения массы, энергии, импульса, заряда и даже (в квантовой механике) вероятности. Например, в гидродинамике сохранение массы в элементе объёма представляется дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0.$$

У несжимаемой жидкости плотность постоянна, поэтому уравнение упрощается до $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Аналогично в электродинамике сохранение заряда представляется уравнением, связывающим плотность заряда и плотность тока:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0.$$

Следует также упомянуть уравнение теплопроводности и уравнение движения идеальной жидкости.

лекция 16+

Телесный угол, магнитостатика и зацепления. Любопытные вещи связаны с интегралом Гаусса для телесного угла, под которым кусок поверхности Σ виден из некоторой точки. Едва заметное отличие от похожего интеграла для плоского угла заключается в иной степени убывания телесного угла: интеграл

$$\Omega = \iint_{\Sigma} \frac{\cos \angle(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = \iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS$$

вычисляет телесный угол, видимый из начала координат.

Подставив $\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}$ вместо $\mathbf{r}$, получим представление телесного угла поверхности как функции точки наблюдения $\tilde{\mathbf{r}}$:

$$\Omega(\tilde{\mathbf{r}}) = \iint_{\Sigma} \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} dS.$$

Найдём изменение $\Omega(\tilde{\mathbf{r}})$ от точки $\tilde{\mathbf{r}}$ к близкой точке $\tilde{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{v}$.

С тем же успехом можно следить из точки $\tilde{\mathbf{r}}$ за поверхностью, сдвигающейся на вектор $-\delta\mathbf{v}$. При этом край поверхности замечает узкую ленту, телесный угол которой и даёт приращение $\Omega(\tilde{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{v}) - \Omega(\tilde{\mathbf{r}})$. Вектором нормали на этой ленте является $\delta\mathbf{v} \times \mathbf{t}$, где $\mathbf{t}$ есть касательный вектор к (пространственному) контуру $\partial\Sigma$. Хотя тут легко ошибиться знаком, лучше это проигнорировать, чтобы не рассеивать внимание. В пределе при $\delta \rightarrow 0$ лента сузится в контур и искомая производная телесного угла по вектору $\mathbf{v}$ выразится контурным интегралом:

$$D_{\mathbf{v}}\Omega(\tilde{\mathbf{r}}) = \nabla\Omega(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{v} = \oint_{\partial\Sigma} \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{t})}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} ds.$$

Смешанное произведение в числителе перепишем как $(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}) \times \mathbf{t}$, умноженное скалярно на $\mathbf{v}$. Поскольку вектор $\mathbf{v}$ произволен, выделим отсюда представление градиента телесного угла:

$$\nabla\Omega(\tilde{\mathbf{r}}) = \oint_{\partial\Sigma} \frac{(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}) \times \mathbf{t}}{|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|^3} ds.$$

С точностью до умножения на константы эта формула совпадает с законом Био-Савара, выражающим магнитное поле контура $\partial\Sigma$ с постоянным током.

Чрезвычайно интересен интеграл от $\nabla\Omega(\tilde{\mathbf{r}})$ по контуру γ_2 , не пересекающему $\gamma_1 = \partial\Sigma$. Поменяем тут буквы: $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}_1$ и $\tilde{\mathbf{r}} \mapsto \mathbf{r}_2$, а также $\mathbf{t} ds \mapsto d\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{v} \mapsto d\mathbf{r}_2$. Подставляя первый контурный интеграл во второй, получаем

$$K(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Здесь $\mathbf{r}_i$ есть радиус-вектор точки, пробегающей контур γ_i .

Это число зависит только от неупорядоченной пары ориентированных контуров. Однако чтобы понять, что это за величина, мы пока будем помнить о поверхности Σ и приращении телесного угла.

Поведение числа K имеет много общего с поведением интеграла Гаусса на плоскости, вычисляющего приращение обычного угла. Функция $\Omega(\tilde{\mathbf{r}})$ непрерывна вне поверхности Σ , но при приближении к ней с противоположных сторон имеет пределы $\pm 2\pi$ разных знаков. Иными

рисунок

Gauss 1833

словами, при пересечении поверхности она делает постоянный скачок 4π . Значит, число K показывает, сколько раз контур γ_2 протыкает (любую приличную) поверхность, натянутую на контур γ_1 , учитывая направления проколов.

Это всегда *целое* число! Оно не меняется при небольших шевелениях контуров, не нарушающих запрет на их пересечение. Горячо любящие топологи называют его **коэффициентом зацепления** двух контуров.

Трубки тока и вихревые трубки. Основное векторное поле здесь представляем себе как поле скоростей жидкости и обозначаем через $\mathbf{v}$.

Определение. Линию, касательная к которой в каждой её точке коллинеарна полю $\mathbf{v}$, называют **линией тока**. Поверхность, состоящую из линий тока, называют **поверхностью тока**. Цилиндрическую поверхность тока, ограниченную парой простых контуров, называют **трубкой тока**.

Лемма. Производная по времени от циркуляции скорости по жидкому контуру равна циркуляции ускорения по этому же контуру.

Доказательство. Циркуляция скорости по движущемуся контуру $\gamma(t)$ равна

$$W(\mathbf{v}, \gamma(t)) = \oint_{\gamma(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_s ds.$$

Беря производную по времени, вносим дифференцирование под знак интеграла, благо краёв у контура нет. Теперь под интегралом

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_s)_t = \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{r}_s + \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_{st}.$$

Интеграл от первого слагаемого есть искомая циркуляция ускорения $W(\mathbf{v}_t, \gamma(t))$. Учитывая, что $\mathbf{v} = \mathbf{r}_t$, преобразуем второе слагаемое к производной по параметру контура s от скаляра $\frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$; значит, интеграл от него нулевой. $\square$

Томсон, будущий лорд Кельвин, изучал движение жидкости при естественных дополнительных предположениях: отсутствие вязкости, потенциальность внешних сил, зависимость плотности только от давления. Это влечёт потенциальность поля ускорений жидкости: $\mathbf{v}_t = \text{grad } U$. Получается теорема Кельвина о циркуляции.

Теорема. Циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру постоянна во времени.

Следствие. Если в рассматриваемой массе жидкости нет вихрей в определённый момент, то их там всегда нет.

helmholtz 1858
рисунок?

Определение. Линию, поверхность, или трубку, соответствующую полю $\text{rot } \mathbf{v}$, называют **вихревой**.

С помощью формулы Стокса и теоремы Кельвина о циркуляции докажем две теоремы Гельмгольца о сохранении вихревых трубок.

Теорема. Частицы жидкости, однажды образующие вихревую линию, и во всё время движения образуют вихревую линию.

Доказательство. На вихревой поверхности возьмём часть Σ , ограниченную любым маленьким контуром. Поле $\text{rot } \mathbf{v}$ касательно и поэтому имеет нулевой поток. По формуле Стокса

$$W(\mathbf{v}, \partial\Sigma) = \Phi(\text{rot } \mathbf{v}, \Sigma) = 0.$$

Когда в момент t поверхность Σ перейдёт в Σ' , по теореме Кельвина нулевая циркуляция скорости сохранится:

$$W(\mathbf{v}, \partial\Sigma') = W(\mathbf{v}, \partial\Sigma) = 0.$$

Ввиду произвольности маленького контура, по определению ротора это означает, что проекция $\text{rot } \mathbf{v}$ на нормаль к Σ' равна нулю, так что сдвинувшаяся вихревая поверхность остаётся вихревой.

Пересечение двух вихревых поверхностей есть вихревая линия, поэтому заключение верно и для линий. $\square$

Теорема. Поток ротора через сечение вихревой трубки постоянен во времени.

Доказательство. Упражнение. $\square$

Этот поток называют **интенсивностью** трубки.

Следствие. Вихревой шнур не имеет концов в жидкости; он либо замыкается в вихревой контур, либо выходит на границу области.

рисунок

Энергия безвихревого движения. Рассмотрим снова движение несжимаемой жидкости в односвязной области D . Возьмём безвихревое поле $\mathbf{v}$ и вихревую добавку $\mathbf{u}$, равную нулю на границе ∂D . Сравним кинетические энергии безвихревого движения с полем скоростей $\mathbf{v}$ и вихревого движения с полем скоростей $\mathbf{v} + \mathbf{u}$, соответственно равные

$$T(\mathbf{v}) = \frac{\rho}{2} \iiint_D \mathbf{v}^2 dV$$

и аналогично с $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ вместо $\mathbf{v}$.

Теорема (первая теорема Кельвина). $T(\mathbf{v} + \mathbf{u}) > T(\mathbf{v})$ при $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Доказательство. Перепишем в $\Delta T = T(\mathbf{v} + \mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$ подынтегральную функцию: $(\mathbf{v} + \mathbf{u})^2 - \mathbf{v}^2 = \mathbf{u}^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$. Поскольку интеграл от $\mathbf{u}^2$ положителен, достаточно показать, что интеграл от $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ нулевой.

Безвихревое движение в односвязной области потенциально, так что $\mathbf{v} = \nabla \phi$. Подставим и преобразуем к дивергенции:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \nabla \phi \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) - \phi \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Во втором слагаемом $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ в силу уравнения неразрывности при постоянной плотности. Интеграл от второго слагаемого по формуле Гаусса — Остроградского равен потоку $\Phi(\phi \mathbf{u}, \partial D)$, то есть нулю, ибо $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ на ∂D . $\square$

Уравнения Максвелла. Основные законы электричества и магнетизма, выведенные из опытов в первой половине XIX века, указывали на единство этих явлений. Законы Гаусса для электричества и для магнетизма, закон индукции Фарадея и закон Ампера выражаются математически как уравнения на электрическое поле $\mathbf{E}$ и магнитное поле $\mathbf{B}$. Все они появлялись в теоретических работах Максвелла, хотя не тесной группой и в сложной (кватернионной) форме.

Широко известная их запись с дивергенцией и ротором, а также объединение в группу появились спустя 20 лет у инженера Хевисайда:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \mathbf{B}_t, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \varrho, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} (\mathbf{E}_t + 4\pi \mathbf{J}). \end{aligned}$$

Плотность электрических зарядов обозначена через ϱ , а плотность электрических токов через $\mathbf{J}$. Магнитные заряды и токи не наблюдаются. Под буквой c скрыта комбинация двух измеряемых величин, выражающих электрические и магнитные свойства среды. Иногда для упрощения выбирают систему единиц, в которой $c = 1$ для вакуума.

Вдали от электрических зарядов и токов $\varrho = 0$ и $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, поэтому система становится симметричнее. Получим из неё впечатляющий вывод, сделанный Максвеллом. Используем тождество

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla^2 \mathbf{f}.$$

Лапласиан векторного поля, записанный в правой части, вычисляют в декартовых координатах отдельно для каждой компоненты поля как лапласиан функции.

В левой же части $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ как для $\mathbf{f} = \mathbf{E}$, так и для $\mathbf{f} = \mathbf{B}$. Далее, в оставшемся слева слагаемом с двойным ротором $\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{B}_t/c$. Взятие (второго) ротора, составленного из частных производных по

пространственным координатам, в случае дважды гладкого поля $\mathbf{B}$ перестановочно с дифференцированием по времени: $\nabla \times \mathbf{B}_t = (\nabla \times \mathbf{B})_t$. Теперь подставим выражение этого ротора из ещё одного уравнения и получим $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mathbf{E}_{tt}/c^2$. Аналогично поступим для $\mathbf{f} = \mathbf{B}$.

В результате оба поля удовлетворяют волновому уравнению

$$c^{-2}\mathbf{f}_{tt} - \mathbf{f}_{xx} - \mathbf{f}_{yy} - \mathbf{f}_{zz} = \mathbf{0}.$$

Решения его уже были известны: это волны, распространяющиеся со скоростью c . Замеренные чуть ранее в экспериментах числа дали значение c , совпадающее со скоростью света. Поэтому Максвелл и догадался, что свет является электромагнитной волной.

Потенциалы в электродинамике. Сферически симметричное поле зависит только от радиуса: $u(\mathbf{r}) = u(r)$, поэтому $\nabla u(\mathbf{r}) \parallel \mathbf{r}$. Каков же коэффициент пропорциональности, зависящий только от r ? Возьмём сперва $u = r$ и увидим

$$\nabla r = \mathbf{e}_r = r^{-1}\mathbf{r}.$$

Затем применим правило цепочки, собирая декартовы компоненты вида $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$ в градиенты $\nabla u(r) = u'(r)\nabla r$. Выделим наиболее важный случай, уже встречавшийся:

$$\nabla(r^{-1}) = -r^{-3}\mathbf{r}.$$

Потенциал электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, создаваемого зарядом q , находящимся в начале координат, равен q/r .

Переместим заряд в точку $\check{\mathbf{r}}$ и найдём потенциал в точке $\mathbf{r}$:

$$\phi(\mathbf{r}) = q/|\mathbf{r} - \check{\mathbf{r}}|.$$

У этой функции, зависящей на самом деле от двух переменных, случается брать градиенты по обоим, поэтому отметим связь между ними и особый значок: $\check{\nabla}\phi = -\nabla\phi$, где слева градиент как функции от $\check{\mathbf{r}}$, а справа как функции от $\mathbf{r}$.

Теперь распределим заряд с плотностью $\varrho(\check{\mathbf{r}})$ по области T в пространстве. Потенциал, определённый вне T , выразится интегралом

$$\phi(\mathbf{r}) = \iiint_T \frac{\varrho(\check{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r} - \check{\mathbf{r}}|} d^3\check{\mathbf{r}}.$$

Также применяются интегралы (первого рода) по линиям и поверхностям, соответственно распределению зарядов.

Для магнитного поля ищут векторный потенциал: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Неоднозначность его велика, а выбор подходящего варианта обусловлен

обычно дополнительными физическими соображениями. Они же позволяют получить явную формулу для $\mathbf{A}$. Для этого исходим из закона Био — Савара

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \iiint_T \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}}) \times (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} d^3\tilde{\mathbf{r}}$$

для магнитного поля $\mathbf{B}$ постоянного тока $\mathbf{J}$. Область T должна содержать все токи. Преобразуем по правилу

$$\nabla \times (\phi \mathbf{J}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{J} + \phi (\nabla \times \mathbf{J}),$$

учитывая, что $\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{0}$, ибо $\mathbf{J}$ зависит не от $\mathbf{r}$, а от $\tilde{\mathbf{r}}$:

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}}) \times \frac{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} = \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}}) \times \nabla \left(-\frac{1}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|} \right) = \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|} \right) \times \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}}) = \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|}.$$

Отсюда видим, что можно взять

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \iiint_T \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|} d^3\tilde{\mathbf{r}}.$$

Заметьте чудное сходство с интегральной формулой для скалярного потенциала $\phi(\mathbf{r})$ поля $\mathbf{E}$.

Упражнение. Для этого векторного потенциала $\mathbf{A}$ найдите дивергенцию $\nabla \cdot \mathbf{A}$ и выразите векторный лапласиан $\Delta \mathbf{A}$ через токи.

Формулы для разложения Гельмгольца. Ответ в задаче о разложении Гельмгольца представим явными формулами. Их можно тут выписать, не вводя новых понятий, но сложно обосновать. Для этой записи полезно вспомогательное векторное поле

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r})}{|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|},$$

зависящее от точки $\tilde{\mathbf{r}}$, которую считаем параметром в последующих интегралах, где переменной интегрирования будет $\mathbf{r}$. Оказывается, что

неверно?

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{\mathbf{r}}) &= \int_D \nabla \cdot \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) dV - \int_{\partial D} \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS, \\ \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{r}}) &= \int_D \nabla \times \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) dV + \int_{\partial D} \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) \times \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

удовлетворяют условию $\mathbf{f} = -\nabla \phi + \nabla \times \mathbf{a}$.

15.8. ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРИ СМЕНЕ БАЗИСА

Этот раздел относится скорее к линейной алгебре. Здесь некоторые из основных её понятий и методов применяются к объектам векторного анализа. Вторая половина раздела, хотя и примыкает сюда довольно естественным образом, выходит за рамки стандартных курсов.

Смена ортонормированного базиса. Чаще всего работают с декартовой системой координат. Таковая определяется выбором начала координат и ортонормированного базиса: трёх базисных векторов, имеющих единичную длину и ортогональных друг другу. Переход от одной системе к другой сочетает сдвиг начала с ортогональным преобразованием базиса, являющимся поворотом или сочетающим поворот с отражением. Сдвиг начала не меняет координаты векторов, а потому не столь интересен. Значит, считаем начало фиксированным и меняем только базис.

Смена базиса от старого $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ к новому $\langle \tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle$ идёт по правилу, выражаемому формальным матричным произведением

$$[\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}]^\top = C \cdot [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]^\top, \quad \text{или} \quad [\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}] = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \cdot C^\top,$$

с ортогональной матрицей перехода C . Равенство $C^\top C = E$ возьмём в качестве определяющего свойства ортогональной матрицы. Столбцы, составленные из трёх величин, пусть даже в данном случае векторных, пишем в строку со значком транспонирования $^\top$.

Теорема. *Координаты каждого вектора преобразуются по такому же закону*

$$[\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]^\top = C \cdot [x, y, z]^\top.$$

Это верно только для ортогональных матриц перехода, а в общем случае линейной замены закон отличается — там матрица $(C^{-1})^\top$.

Доказательство. Перепишем равенство

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \tilde{x}\tilde{\mathbf{i}} + \tilde{y}\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{z}\tilde{\mathbf{k}}$$

через произведения формальной строки из базисных векторов на столбец координат:

$$\mathbf{r} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \cdot [x, y, z]^\top = [\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}] \cdot [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]^\top.$$

Вставив в середине $E = C^\top C$, видим

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \cdot [x, y, z]^\top = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \cdot C^\top C \cdot [x, y, z]^\top.$$

Синие сомножители дают $[\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}]$, а зелёные обязаны дать $[\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]^\top$. $\square$

Инвариантность дивергенции. Запишем теперь векторное поле $\mathbf{f}$ в двух системах координат:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \cdot [P, Q, R]^\top = [\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}] \cdot [\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}]^\top.$$

Тем же сине-зелёным способом получаем закон преобразования

$$[\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}]^\top = C \cdot [P, Q, R]^\top.$$

Найдём связь между матрицами Якоби

$$J = \frac{D(P, Q, R)}{D(x, y, z)} \quad \text{и} \quad \tilde{J} = \frac{D(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})}{D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}.$$

По правилу дифференцирования композиции

$$\frac{D(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})}{D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} = \frac{D(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})}{D(P, Q, R)} \cdot \frac{D(P, Q, R)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}.$$

Закон преобразования компонент сразу даёт

$$\frac{D(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})}{D(P, Q, R)} = \frac{D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{D(x, y, z)} = C,$$

поэтому с учётом равенства $C^{-1} = C^\top$ получаем

$$\tilde{J} = CJC^\top.$$

Заметим, что выражение $P_x + Q_y + R_z$ дивергенции поля $\mathbf{f}$ в декартовых координатах по определению совпадает со следом матрицы J . Свойство следа $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ известно из алгебры, да и легко проверяется непосредственно. Отсюда $\text{tr } J = \text{tr } \tilde{J}$. Следовательно, дивергенция выражается одинаково во всех декартовых системах координат.

Псевдовекторы. Прежде чем заняться ротором, изучим закон преобразования векторного произведения векторов, исходя из вычисляющего его формального определителя

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & u_1 & v_1 \\ \mathbf{j} & u_2 & v_2 \\ \mathbf{k} & u_3 & v_3 \end{vmatrix}.$$

При смене базиса каждый столбец умножается на матрицу перехода C , конечно же слева. Новый определитель можно связать со старым по правилу умножения определителей:

$$\begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{i}} & \tilde{u}_1 & \tilde{v}_1 \\ \tilde{\mathbf{j}} & \tilde{u}_2 & \tilde{v}_2 \\ \tilde{\mathbf{k}} & \tilde{u}_3 & \tilde{v}_3 \end{vmatrix} = \det C \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & u_1 & v_1 \\ \mathbf{j} & u_2 & v_2 \\ \mathbf{k} & u_3 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Для поворотов $\det C = 1$, а для инверсии и отражений $\det C = -1$.

Если, например, перейти от базиса $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ к базису $\langle -\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k} \rangle$, то координаты каждого истинного вектора умножатся на -1 . Это преобразование часто называют **инверсией**. Однако координаты векторного произведения истинных векторов при инверсии останутся прежними! Само векторное произведение поменяет направление на противоположное. Вы же помните, что геометрическое определение векторного произведения требует работы в правом базисе? А инверсия делает из правого базиса левый (в пространстве нечётной размерности).

Вывод: векторное произведение векторов является не вектором, а объектом немного иной природы, сохраняющимся при поворотах, но меняющим направление на противоположное при инверсиях, а также отражениях. Такие объекты называют **псевдовекторами** или **аксиальными векторами**. Чтобы подчеркнуть отличие векторов от псевдовекторов, физики используют термины **истинный**, или **полярный вектор**.

Примеры. Полярные векторы в физике: перемещение, скорость, импульс, ускорение, сила, напряжённость электрического поля.

Примеры. Аксиальные векторы в физике: угловая скорость, момент импульса, момент сил, индукция магнитного поля.

Путь в Зазеркалье должен быть обратим. Поэтому в физике встречаются векторные произведения истинного вектора на псевдовектор. Формулы для вычисления в координатах такие же, а результатом этой операции является истинный вектор.

Пример. Вектор скорости при вращении выражается через псевдовектор угловой скорости: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Пример. Вектор силы Лоренца при движении заряда в электромагнитном поле выражается через вектор напряжённости электрического поля и псевдовектор индукции магнитного поля: $\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Инвариантность ротора. Для преобразования ротора будем исходить из формального определителя

$$\text{rot}(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \partial_x & P \\ \mathbf{j} & \partial_y & Q \\ \mathbf{k} & \partial_z & R \end{vmatrix}.$$

Мы уже знаем законы преобразования первого и третьего столбцов, причём они одинаковые. Совершенно такой же закон

$$[\partial_{\bar{x}}, \partial_{\bar{y}}, \partial_{\bar{z}}]^\top = C \cdot [\partial_x, \partial_y, \partial_z]^\top$$

для второго столбца следует из правила

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}}, \frac{\partial u}{\partial \tilde{z}} \right] = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right] \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}$$

дифференцирования композиции, когда мы сотрём функцию u , опознаем матрицу перехода и транспонируем.

Итак, несмотря на различную их природу, три столбца формально-ного определителя, вычисляющего ротор, преобразуются одинаково: они умножаются на матрицу перехода C . Новый определитель находится по правилу умножения определителей; получаем

$$\text{rot}(\tilde{P}\tilde{\mathbf{i}} + \tilde{Q}\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{R}\tilde{\mathbf{k}}) = \det C \cdot \text{rot}(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}).$$

Следовательно, ротор векторного поля является псевдовекторным полем! А ротор псевдовекторного поля является векторным полем.

Девикторы на плоскости. Двинемся теперь в необычный материал.

Начнём с плоской ситуации, где мы изучили для векторного поля $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ две версии формулы Грина: для работы и для потока. В двойных интегралах там стоят выражения $Q_x - P_y$ и $P_x + Q_y$, представляющие собой плотности завихрений и источников — плоские версии ротора и дивергенции. Эти две комбинации производных важны, ибо не зависят от системы координат, то есть являются физическими величинами. Есть ли рядом чем-то похожие величины, которых мы до сих пор не разглядели?

Напишем матрицу Якоби функций P и Q по переменным x и y ,

$$\begin{bmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{bmatrix},$$

и задумаемся о линейном пространстве 2×2 матриц. Оно имеет размерность 4 и простейшие базисные элементы — матричные единицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Появившимся инвариантным комбинациям сопоставим две матрицы:

$$P_x + Q_y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_x - P_y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Чем они примечательны? Здесь нужны сведения из алгебры.

Во-первых, каждая квадратная матрица представима суммой симметричной и кососимметричной матриц. Для матриц, выражающих физические величины (операторы), мы знаем, что такое разложение одинаково во всех декартовых системах координат. Иными словами,

симметричная и кососимметричная компоненты тоже «физичны». При этом пространство кососимметричных 2×2 матриц одномерно, а все такие пропорциональны второй матрице в последней паре выше.

Во-вторых, вспомним понятие следа матрицы, равного сумме её диагональных элементов. След тоже физичен, ибо сохраняется при смене базиса. Это даёт разложение каждой матрицы в сумму скалярной и бесследовой компонент. Все скалярные матрицы пропорциональны первой матрице в последней паре выше.

Тем самым, у нас есть четырёхмерное пространство матриц, в котором мы связали два измерения с важными операциями векторного анализа на плоскости. Можем ли мы найти смысл двух оставшихся измерений? Запишем две простейшие бесследовые симметричные матрицы и соответствующие комбинации производных:

$$P_x - Q_y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q_x + P_y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

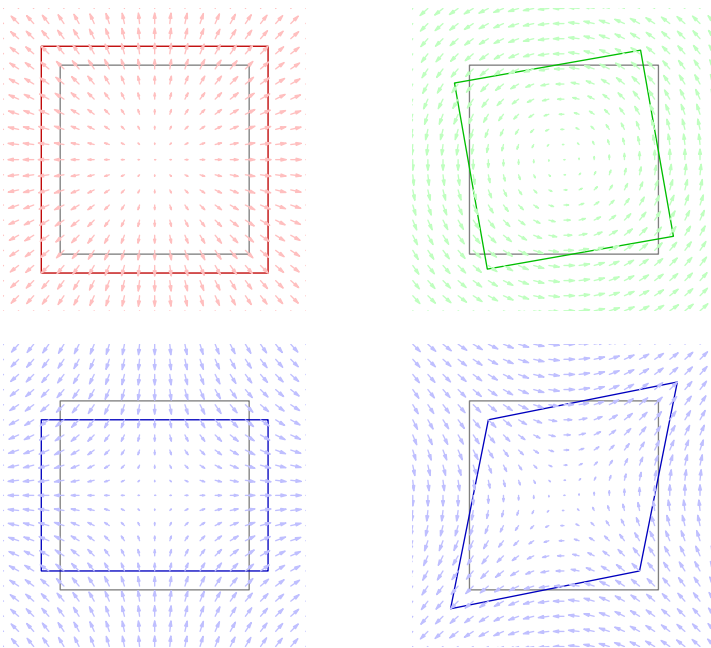
Для решения задачи привлечём связь векторных полей и систем дифференциальных уравнений, отмеченную в самом начале изучения векторного анализа, но далее едва ли упоминавшуюся. Тут мы имеем четыре системы вида $(\dot{x}, \dot{y})^\top = A(x, y)^\top$ с матрицами, выписанными выше; раскрыв эти произведения матриц на столбец, получим

$$\begin{aligned} P_x + Q_y &\leftrightarrow (\dot{x}, \dot{y}) = (x, y); & Q_x - P_y &\leftrightarrow (\dot{x}, \dot{y}) = (-y, x); \\ P_x - Q_y &\leftrightarrow (\dot{x}, \dot{y}) = (x, -y); & Q_x + P_y &\leftrightarrow (\dot{x}, \dot{y}) = (y, x). \end{aligned}$$

Для краткости, все векторы записаны строками.

Три из этих систем использовались для иллюстрации типов особых точек плоского векторного поля, а две первых менее явно и далее, ведь это центральное и вращательное поля — источник и завихрение постоянных плотностей, равных 2 в каждой точке. Третья и четвёртая системы обладают седловыми точками, отличаясь расположением входящих и выходящих лучей; оба поля гармоничны.

Поместим единичный квадрат в эти четыре поля скоростей. Живя в первой системе, он расширяется. Во второй системе он вращается. В третьей системе квадрат, растягиваясь по одной оси и сжимаясь по другой, деформируется в прямоугольник. В четвёртой системе квадрат тоже деформируется, но растяжение и сжатие, всегда идущие по собственным векторам матрицы A , направлены по диагоналям, так что квадрат превращается в ромб. Можно установить, что обе деформации сохраняют площадь, за что их иногда называют чистыми.



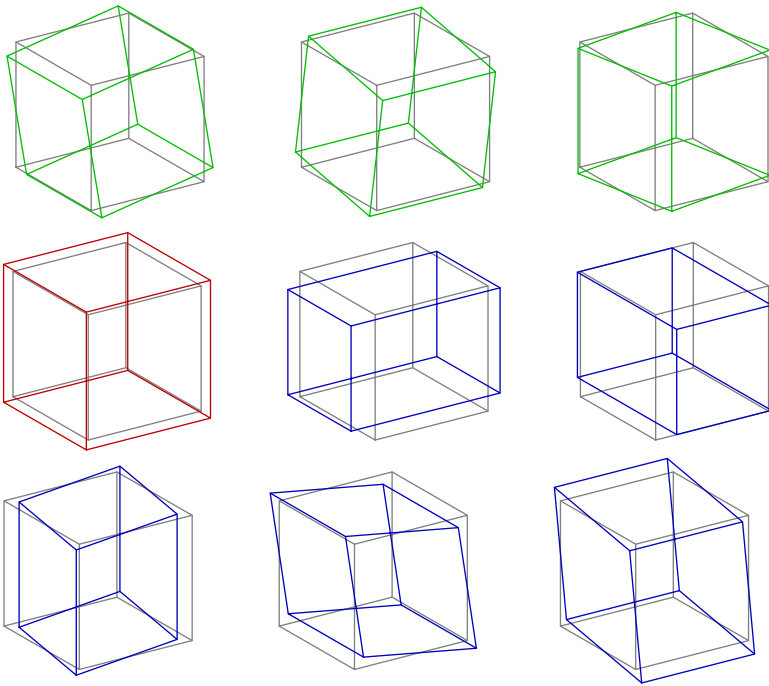
Итак, в плоском случае величины $P_x - Q_y$ и $Q_x + P_y$ являются компонентами объекта, отвечающего чистым деформациям. Если задаться целью найти употребляемый для него термин, то ответом будет слово **девиатор**. Однако это не вектор! Его координатные выражения преобразуются по более сложному тензорному закону. Всякий девиатор на плоскости является линейной комбинацией этих двух компонент.

Девиаторы в пространстве. Повторим теперь наше маленькое исследование в трёхмерном пространстве, но быстрее.

Производные трёх компонент P , Q и R векторного поля по трём координатам x , y и z составляют 3×3 матрицу. В векторном анализе мы активно используем четыре комбинации: дивергенцию и три компоненты ротора. Соответствующие базисные матрицы есть

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дивергенции соответствует скалярная матрица, а компонентам ротора — косимметричные. Пять оставшихся измерений — бесследовые симметричные матрицы, соответствующие компонентам девиатора.



Простейший базис этого пятимерного пространства составляют матрицы двух типов, полученные окаймлением нулями базисных плоских девиаторов. Деформации с матрицами

$$P_x - Q_y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_x + P_y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

не затрагивают направление по оси z . Меняя роли осей, получим ещё по две матрицы каждого типа, однако три матрицы первого типа в сумме дают нулевую матрицу; линейно независимых девиаторов именно пять, а не шесть. Разделение их на два типа — искусственная и вынужденная мера, обусловленная выбором системы координат. Например, поворот вокруг оси z на 45 градусов перемешивает типы:

$$P_x - Q_y \mapsto Q_x + P_y, \quad Q_x + P_y \mapsto Q_y - P_x,$$

а остальные три при этом переходят в комбинации тех же трёх.

Рисовать векторные поля в пространстве можно, но воспринимать такие картинки затруднительно. Поэтому нарисуем лишь исходный

единичный куб вместе с параллелепипедами, в которые он переходит при каждом из девяти преобразований. Красным — изотропное расширение, соответствующее дивергенции; зелёным — малые вращения вокруг осей координат, соответствующие компонентам ротора; синим — малые деформации, соответствующие компонентам девиатора.

Девиаторы возникают в теории упругости. Сюжет весьма необычен для вводного курса анализа, но столь же красив и при этом полезен связями с другими разделами математики. Алгебраическая сторона истории о разложении

$$3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5$$

значительно глубже, чем представлено здесь, но именно по этой причине вынужденно остаётся за кадром.

15.9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

лекция 16+
06.04.17

Понятие дифференциальной формы возникло в результате размышлений математиков над основными теоремами векторного анализа и попыток сделать его изложение проще и доступнее для обобщений, в том числе для аналогичных построений в пространствах большей размерности и на гладких многообразиях. К сожалению, проникновение этого мощнейшего языка в образование физиков ещё не повсеместно.

Базисные формы. Дифференциальная форма есть геометрическая функция специального вида от нескольких векторов или векторных полей, зависящая также от точки в пространстве. Простейшие формы, которые от точки не зависят, назовём **базисными**.

Дифференциальные формы вообще, и базисные в частности, различаются прежде всего количеством своих векторных аргументов. Это количество называют **степенью** формы. Формы степени k называют также k -формами.

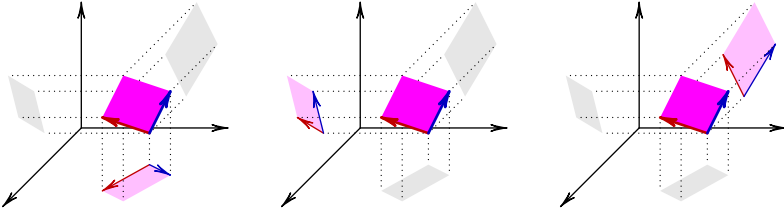
Формы степени 0 не зависят от векторов, а базисная 0-форма не зависит и от точки — значит, это обычное число, и логично объявить базисным число 1.

Базисные 1-формы на трёхмерном пространстве с выбранной декартовой системой координат (правой для определённости) обозначают через dx , dy , dz . По определению значение каждой из них на векторе $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ равно его соответствующей координате:

$$dx(\mathbf{v}) = v_1, \quad dy(\mathbf{v}) = v_2, \quad dz(\mathbf{v}) = v_3.$$

Можно считать каждую координату проекцией $\mathbf{v}$ на ось.

Базисные 2-формы обозначают через $dx \wedge dy$, $dz \wedge dx$, $dy \wedge dz$. По опре-



делению значение каждой из них на паре векторов $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ равно ориентированной площади проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ на соответствующую координатную плоскость. Получаются вычислительные формулы

$$dx \wedge dy(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix},$$

$$dz \wedge dx(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix},$$

$$dy \wedge dz(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Алгебраически аналогично можно было бы ввести ещё шесть форм, но ввиду свойства кососимметричности определителей они оказываются излишними из-за шести равенств вида

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy,$$

да и выбор координатных плоскостей уже исчерпан. Эти тождества называют **антикоммутативностью** или **кососимметричностью**.

Базисная 3-форма на трёхмерном пространстве всего одна: это форма объёма $dx \wedge dy \wedge dz$. Её значение на тройке векторов равно ориентированному объёму параллелепипеда на них:

$$dx \wedge dy \wedge dz(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Линейные операции. Умножая форму любой степени на функцию, получим форму той же степени, например $f(x, y, z) dx \wedge dz$. Зависимость от точки $\mathbf{r} = (x, y, z)$ здесь идёт через функцию, а от пары векторов — через базисную форму.

Формы одинаковых степеней складывают, как и обычные функции, складывая их значения, например:

$$(dx \wedge dy + dy \wedge dz)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = dx \wedge dy(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + dy \wedge dz(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Упражнение. Дан единичный вектор $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Докажите:

- (1) форма $a dx + b dy + c dz$ вычисляет ориентированную проекцию своего векторного аргумента на $\mathbf{n}$;
- (2) форма $a dy \wedge dz + b dz \wedge dx + c dx \wedge dy$ вычисляет ориентированную проекцию параллелограмма на паре своих векторных аргументов на плоскость с нормалью $\mathbf{n}$.

Тут нередко берут $(a, b, c) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Линейными комбинациями, сочетающими сложение с умножением на функции (в отличие от линейной алгебры, где коэффициенты комбинаций как правило числовые), исчерпываем все дифференциальные формы. Согласно предполагаемому порядку гладкости функциональных коэффициентов говорят о гладкости формы.

Итак, перечислим все дифференциальные формы на $\mathbb{R}^3$:

k	общий вид k -форм
0	$\omega^0 = F(x, y, z)$
1	$\omega^1 = P dx + Q dy + R dz$
2	$\omega^2 = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$
3	$\omega^3 = F(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$

Здесь F , P , Q и R — любые гладкие функции на $\mathbb{R}^3$.

Упражнение. Что происходит со значением произвольной k -формы при перестановке её векторных аргументов?

Если коэффициенты дифференциальной формы имеют смысл или рассматриваются лишь на области $D \subset \mathbb{R}^3$, то естественно говорить о форме на D .

Внешнее умножение. Эта операция нам здесь не очень нужна, ибо всё можно сделать через базисные формы, но для полноты картины следует упомянуть и о ней. Внешнее произведение двух дифференциальных 1-форм ω_i обозначается через $\omega_1 \wedge \omega_2$. Это 2-форма, значения которой вычисляются по правилу

$$\omega_1 \wedge \omega_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(\mathbf{v}_1) & \omega_1(\mathbf{v}_2) \\ \omega_2(\mathbf{v}_1) & \omega_2(\mathbf{v}_2) \end{vmatrix}.$$

Когда ω_i являются базисными 1-формами, это правило приводит к определению базисных 2-форм, данному выше.

Упражнение. Наоборот, выведите это правило из определения базисных 2-форм вкупе с требованием дистрибутивности

$$\omega \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \omega \wedge \omega_1 + \omega \wedge \omega_2.$$

Упражнение. Выпишите определитель для вычисления внешнего произведения $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$ трёх произвольных 1-форм.

Упражнение. Выведите правило для вычисления внешнего произведения 1-формы и 2-формы:

$$\omega^1 = A dx + B dy + C dz,$$

$$\omega^2 = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy;$$

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = (AP + BQ + CR) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Упражнение. Что происходит с внешним произведением при перестановке сомножителей?

Упражнение. Докажите, что внешнее произведение $m > 3$ любых 1-форм есть функция m векторов, тождественно равная нулю.

Упражнение. А что изменится в предыдущем упражнении, если вместо $\mathbb{R}^3$ рассматривать дифференциальные 1-формы на $\mathbb{R}^n$?

Внешнее дифференцирование. Теперь введём на дифференциальных формах операцию, обобщающую дифференцирование функций. Функции при этом мыслим как формы степени 0.

Определим дифференциал 1-формы $P dx$ правилом

$$d(P dx) = dP \wedge dx$$

и аналогично с другими буквами. Руководствуясь далее требованием, что дифференциал суммы 1-форм всегда должен равняться сумме их дифференциалов, вычислим дифференциал произвольной 1-формы. На первом шаге

$$dP = P_x dx + P_y dy + P_z dz$$

и аналогично для Q и R , то есть всего девять слагаемых. Три из них нулевые по антикоммутативности, а оставшиеся шесть группируются в пары с помощью тех же тождеств:

$$\begin{aligned} d(P dx + Q dy + R dz) &= \dots \\ &= (R_y - Q_z) dy \wedge dz + (P_z - R_x) dz \wedge dx + (Q_x - P_y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Таким же путём определим дифференциал 2-формы,

$$d(P dy \wedge dz) = dP \wedge dy \wedge dz$$

и аналогично с другими буквами, а затем вычислим

$$\begin{aligned} d(P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) &= \dots \\ &= (P_x + Q_y + R_z) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Здесь из девяти слагаемых шесть сразу нулевых, а в двух из оставшихся трёх приводим дифференциалы к стандартному порядку, применяя антикоммутативность дважды.

Связь дифференциальных форм и векторных полей. Связь эта, как уже упоминалось, основана на скалярном произведении:

- поле $\mathbf{f} \leftrightarrow$ форма работы $\omega_{\mathbf{f}}^1$ по правилу $\omega_{\mathbf{f}}^1(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$;
- поле $\mathbf{f} \leftrightarrow$ форма потока $\omega_{\mathbf{f}}^2$ по правилу $\omega_{\mathbf{f}}^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

Как показывают вычисления выше, внешнее дифференцирование форм соответствует трём основным дифференциальным операторам над векторными и скалярными полями:

$$\begin{aligned} u &= \omega^0 \mapsto d\omega^0 = \omega_{\mathbf{g}}^1 \mapsto \mathbf{g} = \nabla u = \text{grad } u; \\ \mathbf{f} &\mapsto \omega_{\mathbf{f}}^1 \mapsto d\omega_{\mathbf{f}}^1 = \omega_{\mathbf{c}}^2 \mapsto \mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{f}; \\ \mathbf{f} &\mapsto \omega_{\mathbf{f}}^2 \mapsto d\omega_{\mathbf{f}}^2 = \omega_a^3 \mapsto a = \nabla \cdot \mathbf{f} = \text{div } \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Упражнение. Вычислите второй внешний дифференциал от произвольной k -формы для $k = 0, 1, 2, 3$. Каким уже известным теоремам о полях соответствуют наиболее интересные случаи $k = 0, 1$?

Общая теорема Стокса & Со. Из тех же вычислений мы теперь можем, на уровне догадок, увидеть самое удивительное. Основные интегральные формулы векторного анализа, а именно, формула Ньютона — Лейбница, формула Грина, формула Кельвина — Стокса и формула Гаусса — Остроградского, на которые опирается немалая часть классической физики, все они являются всего лишь частными случаями более глубокой и красивой геометрической истины:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Здесь M должно быть кусочно-гладким k -мерным многообразием в $\mathbb{R}^n$ для любого $n \geq k$ с кусочно-гладким краем, а ω — гладкой дифференциальной формой на (окрестности) M .

Уравнения Максвелла. С помощью дифференциальных форм на пространстве Минковского можно упростить уравнения Максвелла.

Координаты пишем (t, x, y, z) , то есть считаем скорость света $c = 1$.

Произвольная дифференциальная 2-форма на 4-мерном пространстве имеет $\binom{4}{2} = 6$ компонент. В данном случае, из них три соответствуют электрическому полю и три магнитному. Сразу «угадаем» расстановку компонент $E^x, E^y, E^z, B^x, B^y, B^z$:

$$F = B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy \\ - E^x dt \wedge dx - E^y dt \wedge dy - E^z dt \wedge dz.$$

Здесь верхние индексы указывают компоненты, а ниже появятся ещё и нижние индексы, указывающие частные производные этих компонент.

Внешние формы это тензоры специального типа — антисимметричные. В конкретной системе координат коэффициенты любого тензора записывают в виде массива. Поэтому функциональные коэффициенты 2-формы всегда можно представить в матричном виде; матрица кососимметрична. Для нашей формы

$$F = \sum_{\alpha, \beta} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & B^z & -B^y \\ E^y & -B^z & 0 & B^x \\ E^z & B^y & -B^x & 0 \end{bmatrix},$$

хотя здесь мы обходимся без применения индексной записи.

Вычисляем внешний дифференциал:

$$dF = (B_x^x + B_y^y + B_z^z) dx \wedge dy \wedge dz \\ + (B_t^x + E_y^z - E_z^y) dt \wedge dy \wedge dz \\ + (B_t^y + E_z^x - E_x^z) dt \wedge dx \wedge dz \\ + (B_t^z + E_x^y - E_y^x) dt \wedge dx \wedge dy.$$

Значит, уравнение $dF = 0$ равносильно двум из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{B}_t.$$

Другая пара уравнений Максвелла в вакууме

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{E}_t + 4\pi\mathbf{J}$$

объединяется в уравнение $d^*F = J$ при помощи 2-формы

$$^*F = E^x dy \wedge dz + E^y dz \wedge dx + E^z dx \wedge dy \\ + B^x dt \wedge dx + B^y dt \wedge dy + B^z dt \wedge dz.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} d^*F &= (E_x^x + E_y^y + E_z^z) dx \wedge dy \wedge dz \\ &+ (E_t^x - B_y^z + B_z^y) dt \wedge dy \wedge dz \\ &+ (E_t^y - B_z^x + B_x^z) dt \wedge dx \wedge dz \\ &+ (E_t^z - B_x^y + B_y^x) dt \wedge dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Коэффициенты 3-формы тока J равны $\varrho, -J^x, -J^y, -J^z$ умноженным на 4π . Будучи точным дифференциалом, она автоматически замкнута: $dJ = 0$, что есть уравнение непрерывности $\varrho_t + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$.

Асимметрия со знаками в отображении $F \mapsto {}^*F$ (звезда Ходжа) связана со знакопеременностью метрики Минковского

$$dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

но пояснение деталей этого требует тензорного языка.

Наконец, тензорная формулировка уравнений Максвелла

$$dF = 0, \quad d^*F = J$$

пригодна и в присутствии материи, которая, согласно общей теории относительности, искажает метрику и, посредством её, форму *F .

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 14. Векторный анализ на плоскости

14.1 Векторные поля	3
14.2 Работа и поток на плоскости	9
14.3 Ориентированная площадь и формула Грина	13
14.4 Зависимость интеграла от пути	19
14.5 Несколько дополнений	22

Глава 15. Векторный анализ в пространстве

15.1 Интегралы второго рода	27
15.2 Дивергенция и формула Гаусса — Остроградского	33
15.3 Ротор и формула Стокса	36
15.4 Набла и операторы второго порядка	41
15.5 Ортогональные криволинейные координаты	44
15.6 Важнейшие классы векторных полей	51
15.7 Некоторые приложения и дополнения	54
15.8 Инвариантность при смене базиса	63
15.9 Дифференциальные формы	70