МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

А. П. Ульянов

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ФИЗИКОВ

Часть 6. Функциональные ряды и теория Лебега

Учебное пособие
по курсу основ математического анализа

Новосибирск
~~2013~~ 2018

УДК: 510
ББК: В14я73-1 + В151.54я73-1
У 517

Ульянов А. П. Основы математического анализа для студентов-физиков. Часть 6. Функциональные ряды и теория Лебега. Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013.

ISBN 978-5-94356-571-7

Пособие содержит конспект лекций, прочитанных автором для студентов 1-го курса физического и геолого-геофизического факультетов НГУ. Ввиду большого объёма курса и разнообразия материала пособие разделено на несколько частей. Часть 6 включает темы, необходимые для последующих курсов комплексного и особенно функционального анализа: равномерная сходимость; степенные ряды; дельта-функция; обзор теории интеграла Лебега.

Пособие предназначено для студентов первого курса физического и геолого-геофизического факультетов НГУ.

Рецензент
проф. В.А. Александров

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009-2018 гг.

Версия от 1 апреля 2018 г.

Глава 16. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

16.1. Равномерная сходимость

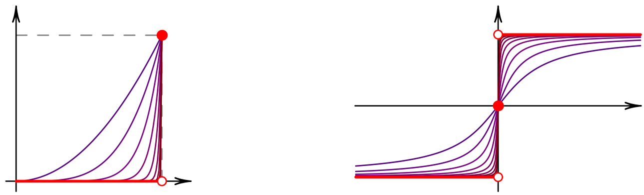
лекция 22
27.04.17

История и мотивация. В своём знаменитом учебнике анализа Коши написал, что сумма ряда из непрерывных функций непрерывна. Через пять лет Абель указал на ошибку, дав пример из рядов Фурье. Лишь через ещё 15 лет Вейерштрасс докопался до причин; ему-то и принадлежат главные определения и теоремы этого раздела.

Пример. Возьмём последовательность функций $f_n(x) = x^n$ на отрезке $[0,1]$. Для каждого значения x получаем сходящуюся числовую последовательность. Их пределы составляют предельную функцию: рисунок

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ 1 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Предельная функция разрывна, хотя все $f_n(x)$ непрерывны. Вблизи точки скачка сходимость очень медленная; на рисунках показаны только $f_n(x)$ для $n = 2^k$, $1 \leqslant k \leqslant 9$, а также $f(x)$.



Пример. Аналогично поведение последовательности рисунок

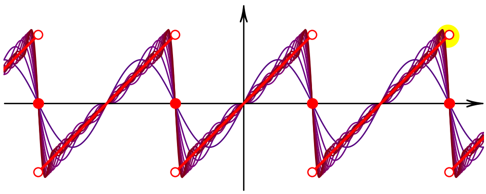
$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx \to f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

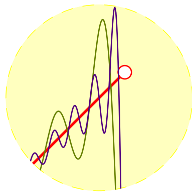
Пример (контрпример Абеля). Возьмём типичный ряд Фурье Abel 1826

$$2 \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

Его слагаемые непрерывны на всей оси, а потому непрерывны и частичные суммы. Однако сумма ряда разрывна: это 2π-периодическая функция со скачками — пила, зуб которой на интервале $(-\pi, \pi)$ совпадает с функцией $f(x) = x$. рисунок

На хорошей компьютерной картинке можно заметить также явление Гиббса — неожиданное и универсальное поведение частичных сумм тригонометрического ряда вблизи скачка его суммы.





Определение равномерной сходимости. Выше в примерах рассматриваются **поточечные** пределы. Они становятся недостаточными для нужд анализа, когда предельная функция подвергается другим его операциям. Поэтому вводят новое понятие.

Согласно базовому определению предела последовательности, поточечная сходимость $f_n(x) \to f(x)$ на множестве X означает, что

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(x, \varepsilon) \ (n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Зависимость N от ε характеризует скорость сходимости; при поточечной сходимости эта скорость может существенно зависеть и от точки x. Отличие равномерной сходимости от поточечной в том, что скорость сходимости фактически не зависит от точки.

Определение. Последовательность функций $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ **равномерно сходится** на X к функции f, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall x \in X \ (n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Равномерная сходимость обозначается через $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Природа множества X здесь никакой роли не играет. Можно считать, что $X \subseteq \mathbb{R}^k$. Дальше потребуется иногда, чтобы X было компактно и реже измеримо (по Жордану). При необходимости уменьшить затрудняющий продвижение дискомфорт, первоначально полезно думать, что X является просто отрезком числовой оси.

Попытка избавить $N(x, \varepsilon)$ от зависимости от x, взяв в качестве порогового номера для равномерной сходимости $\sup\{N(x, \varepsilon) \mid x \in X\}$, проваливается, когда значение супремума оказывается бесконечным. Конечное значение соответствует наличию равномерной сходимости, а бесконечное — её отсутствию.

Ёмкое и удобное выражение равномерной сходимости дают с помощью следующего понятия, тесно связанного с одним из способов введения расстояния между функциями.

Определение. **Равномерной нормой** числовой функции f на множестве X называют

$$\|f\|_X = \sup_{x\in X}|f(x)|.$$

Когда X ясно из контекста, в обозначении о нём можно умолчать.

Отметим, что $A \subseteq X$ влечёт $\|f\|_A \leqslant \|f\|_X$.

Упражнение. *Проверьте две версии неравенства треугольника:*

$$\|f+g\|_X \leqslant \|f\|_X + \|g\|_X,$$
$$\|f-h\|_X \leqslant \|f-g\|_X + \|g-h\|_X.$$

Равномерная сходимость последовательности функций равносильна обычной сходимости числовой последовательности равномерных норм их разностей:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ (n > N \Rightarrow \|f_n - f\|_X < \varepsilon).$$

Или предельно кратко:

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } X \quad\iff\quad \|f_n - f\|_X \to 0.$$

Теорема (Критерий Коши)**.** *Равносильны следующие условия на последовательность функций f_n:*

(1) $f_n \rightrightarrows f$ *на* X;
(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ (m, n > N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_X < \varepsilon)$.

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$ По неравенству треугольника

$$\|f_n - f_m\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f_m - f\|,$$

и оба слагаемых правой части стремятся к нулю при m, $n > N \to \infty$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Для каждого $x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна, и по обычному критерию Коши для числовых последовательностей она имеет поточечный предел $f(x)$. Остаётся убедиться, что сходимость $f_n \to f$ на самом деле равномерная. Действительно, при $m \to \infty$ и фиксированном n получаем $|f_n(x) - f_m(x)| \to |f_n(x) - f(x)|$ для всех $x \in X$, а тогда $\|f_n - f_m\| \to \|f_n - f\|$. Когда первая норма меньше ε, вторая тоже (может быть и равна, но это не проблема). □

Говорить о ряде или о последовательности — вопрос удобства, ибо эти понятия равносильны по существу; от ряда переходят к последовательности его частичных сумм и, наоборот, элементы последовательности $\{x_n\}$ представляют как частичные суммы ряда разностей $\sum(x_n - x_{n-1})$. Эта же схема спокойно применяется к функциональным последовательностям и рядам.

Определение. Функциональный ряд $\sum \varphi_n$ **сходится** на множестве X, если последовательность его частичных сумм

$$f_n(x) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \varphi_k(x)$$

сходится в каждой точке X. При этом предельная функция $f(x)$ называется **суммой** ряда.

Если $f_n \rightrightarrows f$ на X, то ряд $\sum \varphi_n$ сходится **равномерно** на X.

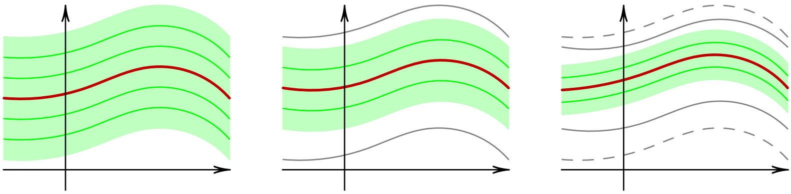
Упражнение. *Данное определение равносильно условию, что хвост $\sum_{k>n} \varphi_k$ этого ряда равномерно сходится к нулю на X.*

Мажорантный признак Вейерштрасса. Важнейший метод установления равномерности сходимости функционального ряда сводит вопрос к отысканию подходящего числового ряда.

Теорема. *Если для функций φ_n найдутся такие неотрицательные числа γ_n, что $\|\varphi_n\|_X \leqslant \gamma_n$ и числовой ряд $\sum \gamma_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum \varphi_n$ сходится равномерно на X.*

Логика здесь должна стать интуитивно ясной: остаток мажорирующего числового ряда зажимает остаток функционального ряда.

лучше 3D



Доказательство. Для каждого $x \in X$ все конечные суммы

$$\sum_{k \leqslant n} |\varphi_k(x)| \leqslant \sum_{k \leqslant n} \gamma_k$$

ограничены сверху суммой ряда $\sum \gamma_n$, поэтому ряд $\sum \varphi_n(x)$ абсолютно сходится. Обозначим его частичные суммы $\sum_{k \leqslant n} \varphi_k(x)$ через $f_n(x)$ и его сумму через $f(x)$. Тогда его хвост оценивается как

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k>n} \varphi_k(x) \right| \leqslant \sum_{k>n} |\varphi_k(x)| \leqslant \sum_{k>n} \gamma_k = c_n.$$

Это верно для всех $x \in X$, откуда заключаем, что $\|f - f_n\| \leqslant c_n \to 0$, то есть $f_n \rightrightarrows f$. □

Пример. Ряд $\sum(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится, поскольку ввиду $|\sin nx| \leqslant 1$ мажорируется сходящимся рядом $\sum n^{-2}$.

Пример. В примере Абеля сумма ряда $\sum(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ разрывна. Сходимость не равномерная, но и мажорирующий ряд $\sum n^{-1}$ расходится.

Пример. Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то ряды $\sum a_n \cos nx$ и $\sum a_n \sin nx$ сходятся равномерно на любом промежутке.

Сохранение непрерывности. Основное утверждение о равномерной сходимости заключается в том, что не появляются разрывы.

Теорема (Вейерштрасс)**.** *Если последовательность непрерывных функций сходится равномерно, то предельная функция непрерывна.*

Доказательство. Приведём стандартное доказательство для функций на компакте X, часто просто отрезке (как у Вейерштрасса).

Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Поскольку $f_n - f \rightrightarrows 0$ на X, найдём такое n, что $\|f_n - f\|_X < \varepsilon$. Поскольку f_n непрерывна, найдём такое δ, что для всех x, $y \in X$ верно

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Оценим требуемую разность через три уже оценённые:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(x) - f(x)| + |f_n(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Итак, по произвольному $\varepsilon > 0$ мы нашли такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Помня маленькие хитрости неравенств, видим, что f непрерывна на X.

Отметим, что δ не зависит от x. Здесь и нужна компактность X: тогда непрерывные функции f_n равномерно непрерывны и рассуждение даёт равномерную же непрерывность предельной функции f. Однако предположение компактности легко отбросить, чуть изменив доказательство: тогда $x \in X$ изначально фиксируется, а δ зависит от x. $\square$

Следствие. *Если на множестве X функции φ_n непрерывны и ряд $\sum \varphi_n$ сходится равномерно, то его сумма непрерывна.*

Пример. Ряд $\sum x^n/n!$ сходится не равномерно на всей оси, однако равномерно на каждом отрезке. Для мажорирования на отрезке $[-b, b]$ можно использовать оценку $|x^n| \leqslant b^n$ и сходимость ряда в точке $x = b$. Отсюда следует непрерывность его суммы e^x в каждой точке, то есть на всей оси.

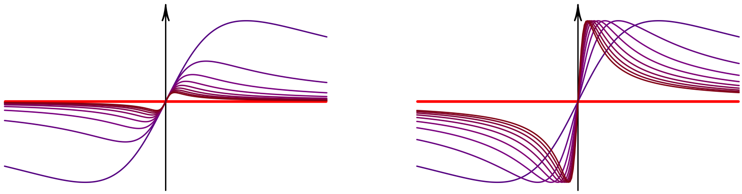
В заключении примера мало новизны, однако важно то, что этот же подход применим к другим рядам: здесь открывается путь к введению в науку новых хороших функций как сумм хороших рядов.

Пример (Движущийся горб). Две похожих последовательности

$$f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}, \qquad g_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2},$$

рисунок

поточечно сходятся к нулю на всей оси. При этом $\|f_n\| = 1/n \to 0$ и $\|g_n\| = 1$. Поэтому $f_n \rightrightarrows 0$, но $g_n \to 0$ неравномерно.



Этот пример показывает, что равномерность сходимости не является необходимой для сохранения непрерывности. Однако в специальном случае, когда сходимость в каждой точке монотонна, она оказывается равномерной. Монотонность сходимости $f_n \to f$ означает, что в каждой точке $f_n(x) \to f(x)$ монотонно.

Теорема (Дини). *Если монотонная последовательность непрерывных функций на компакте сходится к непрерывной функции поточечно, то она сходится равномерно.*

Доказательство. Для последовательности функций $f_n \to f$ на компакте X, удовлетворяющей предположениям, возьмём любое $\varepsilon > 0$ и определим множества

$$E_n = E_n(\varepsilon) = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\},$$

составляющие последовательность. Каков её смысл? Для каждой точки $x \in X$ имеется пороговый номер $N(x, \varepsilon)$: начиная с него, все значения $f_n(x)$, ввиду монотонности, отстоят от $f(x)$ не дальше, чем на ε. Во множество E_n входят в точности все те точки x, для которых пороговый номер уже позади, то есть $n \geqslant N(x, \varepsilon)$. Поэтому $m \geqslant n$ влечёт $E_m \supseteq E_n$.

Будучи прообразом ε-окрестности нуля при непрерывном отображении $f_n - f$, каждое E_n открыто. Сходимость $f_n(x) \to f(x)$ для всех $x \in X$ даёт $X = \bigcup E_n$, так что образовалось открытое покрытие компакта. Извлечём из него конечное покрытие.

Множество E_N с наибольшим среди выбранных номером $N = N(\varepsilon)$ включает все остальные выбранные и в одиночку покрывает X. Тогда $X = E_n$ для всех $n \geqslant N$. Это по определению означает

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ (n \geqslant N \Rightarrow \|f_n - f\|_X < \varepsilon),$$

то есть $f_n \rightrightarrows f$ на X. □

Приведённое рассуждение иллюстрирует интересный и полезный общий приём доказательства, когда покрытие монотонно растущим семейством множеств приводит к покрытию в одиночку.

Упражнение. *Сформулируйте и докажите как следствие версию теоремы Дини для рядов.*

16.2. Равномерная сходимость и операции

Перестановка пределов. Вспоминая тесную связь непрерывности с пределом функции, видим, что равномерная сходимость, вкупе с исходной непрерывностью, делает возможной перестановку пределов:

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Нередко равномерная сходимость предстаёт в ином облике: вместо дискретного (натурального) параметра $n \to \infty$ имеется непрерывный (вещественный) параметр $y \to b$. В этом случае аналогично указывается достаточное условие для перестановки предельных переходов при $x \to a$ и $y \to b$: это равномерное стремление $f(x, y)$ на некоторой окрестности предельной точки (a, b) хотя бы по одной из букв:

$$f(x, y) \rightrightarrows f(x, b) \quad \text{либо} \quad f(x, y) \rightrightarrows f(a, y).$$

При этом первая сходимость означает

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon)\ \forall x \in X\ (|y - b| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x, b)| < \varepsilon).$$

Это условие всегда выполнено для непрерывных функций f двух переменных, так что примеры легко найти. Бывает и наоборот: вместо предельного перехода при $y \to b$ выбирают последовательность значений $y_n \to b$ и рассматривают последовательность $f_n(x) = f(x, y_n)$.

Перестановка двух пределов по дискретным параметрам тоже встречается, но более удалена от практики.

Проблема перестановки пределов является причиной многих тонких моментов в анализе, внешне выглядящих далёкими друг от друга. Мы уже немного обсуждали это в разделе об интегралах, зависящих от параметра. Понятие равномерной сходимости было намеренно утаено, хотя оно там естественно. Теперь мы вернёмся к этому вопросу.

лекция 23
04.05.17

Интегрирование и дифференцирование. Эти операции анализа основаны на предельных переходах. Поэтому равномерная сходимость функциональной последовательности существенна для интегрирования и дифференцирования предельной функции.

Теорема. *Если на отрезке X последовательность интегрируемых функций f_n сходится равномерно, то предельная функция f интегрируема на X и*

$$\int_X f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,dx.$$

Ввиду сложности доказательства, отложим его на конец раздела. Как и в теореме Вейерштрасса о сохранении непрерывности, природа множества X не столь существенна, однако тут одно условие есть.

Теорема. *Предыдущая теорема работает на любом измеримом множестве X конечной меры.*

Теорема. *Если на промежутке Δ функции f_n гладкие, $f_n \to f$ и $f_n' \rightrightarrows g$, то f гладкая и $f' = g$.*

Доказательство. Возьмём $a \in \Delta$. По формуле Ньютона — Лейбница,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

для всех $x \in \Delta$. Перейдём к пределу при $n \to \infty$:

$$f(x) = f(a) + \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Дальше нужно внести предельный переход под интеграл, пользуясь равномерной сходимостью $f_n' \rightrightarrows g$ и предыдущей теоремой. Получим

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt,$$

причём g непрерывна на Δ как равномерный предел непрерывных функций. Дифференцируя правую часть, получим $f' = g$. □

Для функций нескольких переменных верна аналогичная теорема с производной по вектору. Она сводится к только что доказанной одномерной введением вспомогательных функций $f_n(x + tv)$ одной переменной t (лемма об одномерном сечении из первого семестра).

Следствия для рядов. Два следствия касаются **почленного** интегрирования и дифференцирования функциональных рядов. В обоих случаях частичные суммы ряда удовлетворяют условию соответствующей теоремы для функциональных последовательностей.

Следствие. *Если на измеримом множестве X конечной меры функции φ_n интегрируемы и $\sum \varphi_n \rightrightarrows f$, то*

$$\int_X f\,dx = \sum \int_X \varphi_n\,dx.$$

Следствие. *Если на промежутке Δ функции φ_n гладкие, $\sum \varphi_n \to f$ и $\sum \varphi_n' \rightrightarrows g$, то f гладкая и $f' = g$.*

Мы применим эти следствия к важнейшему типу функциональных рядов в следующем разделе, а здесь упомянем два примера — любопытных и своеобразных, но (поэтому) далеко не самых простых.

Пример. Ещё Бернулли открыл прекрасное равенство

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n\geqslant 1} n^{-n},$$

остающееся малоизвестным ввиду недостатка применений.

Чтобы установить его, запишем разложение

$$x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}.$$

Интеграл от каждого слагаемого этого ряда вычисляют либо по частям (рекурсией с понижением степени $\ln x$), либо заменами сводят к гамма-функции. Это и даёт слагаемые n^{-n} со сдвигом индекса на 1.

Чтобы обосновать почленное интегрирование функционального ряда, убедимся в его равномерной сходимости: мажорирующим сходящимся числовым рядом служит $\sum M^n/n!$, где

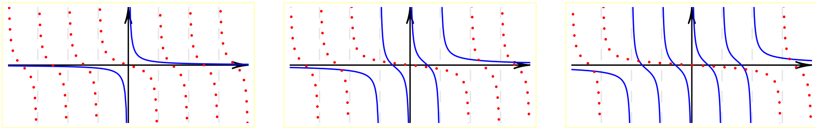
$$M \geqslant \sup\{-x\ln x \mid x \in (0,1]\} = \cdots = 1/e.$$

Особенность при $x \to 0$ устранимая, $x\ln x \to 0$, поэтому полуинтервал смело заменяем отрезком $[0,1]$.

Пример. Другое очень красивое равенство

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi}\right)$$

можно запомнить как разложение котангенса на простые дроби.



Оно выводится из разложения $\sin x$ в бесконечное произведение, которое мы не доказывали, логарифмированием и почленным дифференцированием. Логарифмирование превращает произведение в сумму:

$$\ln|\sin x| = \ln|x| + \sum_{n\geqslant 1} \ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

Чтобы обосновать почленное дифференцирование, убедимся в равномерной сходимости ряда из производных на любом отрезке. Каждая точка разрыва $x = k\pi$ появляется у частичной суммы ряда и не мешает сходимости его хвоста. При $|x| \leqslant k\pi$ и $n > k$ заметим оценку

$$\left|\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}\right| = \left|\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\right| \leqslant \frac{2k}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 - k^2}.$$

Ряд из этих чисел сходится, будучи сравним с рядом $\sum n^{-2}$, и служит мажорантой.

К сожалению, приходится бороться с желанием переписать разложение ещё более красиво,

$$\operatorname{ctg} x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{x - n\pi},$$

поскольку в этом виде теряется абсолютная сходимость.

Отложенное доказательство. Докажем теперь теорему о предельном переходе под знаком интеграла. Установить интегрируемость предельной функции труднее, чем итоговое равенство, так что сперва сделаем второе, предполагая первое.

Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и по определению равномерной сходимости найдём такое $N = N(\varepsilon)$, что $n > N$ влечёт $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X$. Оценим разность интегралов

$$R_n = \left|\int_X f_n\,dx - \int_X f\,dx\right| = \left|\int_X \big(f_n - f\big)\,dx\right| \trianglelefteq \int_X |f_n - f|\,dx,$$

применив интегральную версию неравенства треугольника. Функция под интегралом ограничена числом ε, поэтому на множестве X конечной меры M получим $R_n < M\varepsilon \to 0$. Значит, последовательность интегралов от f_n сходится к интегралу от f.

Чтобы доказать интегрируемость f, вспомним понятие колебания функции на множестве: это точная верхняя грань разности двух её значений. Оценим колебание f на любом $A \subseteq X$, используя и усложняя приём недавнего доказательства сохранения непрерывности при равномерных пределах. Как и там, разобьём разность значений предельной функции на три слагаемых,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(x) - f(x)| + |f_n(y) - f(y)|,$$

а затем перейдём к точным верхним граням по x, $y \in A$. При этом функция f_n совершенно самостоятельна: индекс n здесь изменяться не будет, и при желании вполне можно заменить f_n одной буквой, отличной от f. Выделим полученное самостоятельное свойство.

Лемма. *Колебания любой пары функций f, g на любом множестве A связаны неравенством*

$$\omega(f, A) \leqslant \omega(g, A) + 2 \cdot \|f - g\|_A.$$

Хотя для пущей красоты можно перенести $\omega(g, A)$ в левую часть, нам удобнее применить именно написанную форму с функцией $g = f_n$, выбранной выше так, что $\|f - g\|_X < \varepsilon$. Поэтому

$$\omega(f, A) \leqslant \omega(f_n, A) + 2\varepsilon.$$

Умножим это неравенство для каждой части A некоторого разбиения множества X на меру A, затем просуммируем по всему разбиению. Меры частей в сумме дают меру $\mu(X) = M$, а колебания дают разности между верхними и нижними суммами Дарбу:

$$U(f) - L(f) \leqslant \big(U(f_n)) - L(f_n)\big) + 2M\varepsilon.$$

Ввиду интегрируемости f_n, при измельчении разбиения скобка в правой части станет меньше ε. В итоге $U(f) - L(f) \leqslant (2M + 1)\varepsilon \to 0$, а это и есть интегрируемость предельной функции f. □

Пример. Теорема не работает при $\mu(X) = \infty$. Действительно, возьмём $f_1(x) = e^{-x}$ для $x \geqslant 0$ и определим $f_n(x) = \frac{1}{n} f_1(\frac{x}{n})$. Тогда $\|f_n\| = \frac{1}{n}$ и последовательность функций f_n равномерно сходится к нулю на $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, но их интегралы равны 1, а не сходятся к интегралу от нуля.

Вместо экспоненты на роль f_1 годится любая ограниченная функция с конечным и ненулевым интегралом по положительной полуоси или всей оси.

Упражнение. *Представьте не интегрируемую по Риману функцию Дирихле как предел интегрируемых функций (можно на отрезке).*

01.01.18 **Следствия для несобственных интегралов.** Очень широко применяются функции, заданные несобственными интегралами, зависящими от параметра. Выпишем базовый случай одной особенности:

$$F(b,y)=\int_a^b f(x,y)\,dx=\lim_{w\to b-0}F(w,y)=\lim_{w\to b-0}\int_a^w f(x,y)\,dx.$$

Здесь подразумевается, что при всех значениях параметра $y\in Y$, во-первых, функция $f(x,y)$ интегрируема в обычном смысле (по Риману) на каждом отрезке $[a,w]$, и во-вторых, указанный предел существует и конечен. Такой интеграл называют **сходящимся на множестве** Y.

Характер сходимости $F(w,y)\to F(b,y)$ определяет, как и повсюду в этом разделе, свойства предельной функции, то есть несобственного интеграла. Если сходимость равномерная, то верны теоремы о непрерывности, интегрировании и дифференцировании по параметру, аналогичные полученным ранее для обычных интегралов с параметром на отрезке. Также имеются многомерные обобщения.

Определение. Сходящийся на множестве Y несобственный интеграл называют **равномерно сходящимся** на Y, если $F(w,y)\rightrightarrows F(b,y)$.

Это требование можно переписать как

$$\sup_{y\in Y}\bigl|F(w,y)-F(b,y)\bigr|\to 0 \text{ при } w\to b-0.$$

Разность является интегралом по $[w,b)$, и можно развёрнуто написать условие равномерного убывания хвоста:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists u=u(\varepsilon)\ \forall y\in Y\ \left(w\in[u,b)\Rightarrow\ \left|\int_w^b f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon\right).$$

Пример. На $Y=[0,+\infty)$ рассмотрим функцию

$$\vartheta(y)=\int_0^{+\infty}ye^{-xy}\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } y=0,\\ 1 & \text{при } y>0.\end{cases}$$

При $y<0$ интеграл расходится, и эта полуось сразу выброшена. При $y>0$ интеграл легко вычислить.

Разрыв $\vartheta(y)$ в нуле свидетельствует об отсутствии равномерной сходимости на всём Y; она имеется только с отступом от нуля: на $[c,+\infty)$ для любого $c>0$. Действительно, посмотрим на хвост при $w\to+\infty$:

$$\sup_{y\geqslant c}\left|\int_w^{+\infty}ye^{-xy}\,dx\right|=\sup_{y\geqslant c}e^{-wy}=e^{-wc}\to\begin{cases}1 & \text{если } c=0,\\ 0 & \text{если } c>0.\end{cases}$$

Упражнение. *Выпишите критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла.*

Отметим версию мажорантного признака Вейерштрасса.

Теорема. *Если существует такая функция $g(x)$, что $|f(x,y)| \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a,b)$ и $y \in Y$, причём несобственный интеграл*

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

сходится, то несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на Y.

Обычно в формулировках мажорантных признаков явно включают требование $g(x) \geqslant 0$, однако оно автоматически следует из сравнения с модулем другой функции.

Доказательство. По признаку сравнения, для всех $y \in Y$ искомый несобственный интеграл (абсолютно) сходится. Далее для любого $\varepsilon > 0$ найдём такое $u(\varepsilon) > 0$, что

$$\int_u^b g(x)\,dx < \varepsilon,$$

и тогда, ввиду $g(x) \geqslant 0$, это тем более верно для $w \in [u,b)$ вместо u. Получаем

$$\left|\int_w^b f(x,y)\,dx\right| \trianglelefteq \int_w^b |f(x,y)|\,dx \leqslant \int_w^b g(x)\,dx < \varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

Иногда для исследования несобственного интеграла полезно перейти к какому-нибудь тесно связанному с ним ряду, как мы давно делали при знакомстве с интегралом Дирихле. Выбрав возрастающую числовую последовательность $x_n \to b$ с $x_0 = a$, положим

$$a_n(y) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)\,dx.$$

Тогда

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

причём левая и правая части сходятся или расходятся одновременно; сходимость будет равномерной также одновременно. В частности, этот приём позволяет быстро установить теоремы о непрерывности, интегрировании и дифференцировании по параметру равномерно сходящихся интегралов, сводя их к аналогичным утверждениям о рядах, полученным в этом разделе.

16.3. Круг сходимости степенного ряда

Первый важный тип функционального ряда — это **степенной ряд**

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(x-x_0)^n$$

с постоянными числовыми коэффициентами a_n. Обычно удобно перейти к новой переменной, избавляясь от x_0. Ряды Тейлора являются примерами степенных рядов.

Круговая теорема Абеля. Вещественные степенные ряды имеют различные области сходимости.

Пример. Ряд $\sum x^n/n!$ сходится на всей оси к e^x.

Пример. Ряд $\sum x^n$ сходится только при $|x|<1$.

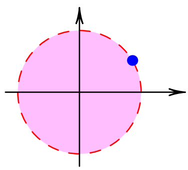
Пример. Ряд $\sum n!\,x^n$ сходится лишь в одной точке $x=0$.

Оказывается естественным рассматривать степенные ряды не с вещественной переменной, а с комплексной. Они играют ключевую роль
давно!
в комплексном анализе. Поэтому в дальнейшем будем изучать ряды $\sum a_n z^n$, позволяя также комплексные коэффициенты a_n.

ссылка?

Теорема (Абель). *Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится при $z=z_*$, причём $z_*\neq 0$, то он абсолютно сходится в круге $|z|<|z_*|$.*

рисунок



Доказательство. Слагаемые сходящегося ряда ограничены: существует такое $c>0$, что $|a_n z_*^n|<c$ для всех n. Для любого значения z в указанном круге имеем

$$|a_n z^n| = |a_n z_*^n (z/z_*)^n| < cq^n, \quad \text{где} \quad q=|z/z_*|<1.$$

Тогда геометрическая прогрессия $\sum cq^n$ сходится, и по признаку сравнения ряд $\sum a_n z^n$ абсолютно сходится. □

Определение. **Радиусом сходимости** степенного ряда $\sum a_n z^n$ называется

$$R = \sup\{|z|\colon \text{ряд } \sum a_n z^n \text{ сходится}\}.$$

При этом $0 \leqslant R \leqslant +\infty$.

Следствие. *С этим определением имеем:*

(1) *при $|z| < R$ ряд абсолютно сходится;*
(2) *при $|z| = R$ требуется дополнительное исследование;*
(3) *при $|z| > R$ ряд расходится.*

Доказательство. (1) Найдётся такое z_*, что $|z| < |z_*| < R$.

(3) Сходимость при таком z противоречит определению точной верхней грани. □

Пример. Без выхода в комплексную область загадочно выглядит уже давно знакомый ряд для арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x = \sum (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1),$$

сходящийся только при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, хотя у функции $\operatorname{arctg} x$ точки $x = \pm 1$ ничем не примечательны.

Проблемные точки в действительности находятся в $z = \pm i$, откуда $R = 1$. Разложение в степенной ряд функции

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

эвристически получено интегрированием разложения рациональной функции, знаменатель которой имеет корни $\pm i$. Почленное интегрирование ряда и сохранение круга сходимости при нём обоснованы ниже. Для определения комплексной функции $\operatorname{arctg} z$ годится тот же интеграл, становящийся криволинейным, но при обходе особых точек $\pm i$ возникает неоднозначность.

Теорема (Вейерштрасс)**.** *Для каждого $r < R$ степенной ряд сходится равномерно на круге $|z| \leqslant r$.*

Доказательство. В точке $z_* = r$ ряд сходится абсолютно, а при $|z| \leqslant r$ имеем $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$. Сходящийся ряд $\sum |a_n| r^n$ является мажорантой, так что утверждение о равномерной сходимости следует из признака Вейерштрасса. □

Говорят также, что степенной ряд сходится равномерно на любом компакте внутри своего (открытого) круга сходимости.

Следствие (Абель). *Сумма степенного ряда непрерывна внутри своего круга сходимости.*

Гаусс и Коши считали это утверждение очевидным, но дотошный Абель поднял общий уровень строгости, его доказывая.

лекция 24
08.05.17

Формулы Даламбера и Коши — Адамара. Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по двум формулам, основанным на простейших признаках сходимости числовых рядов.

Теорема. *Если $a_n \neq 0$ и существует*

$$L = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|,$$

то радиус сходимости ряда $\sum a_n z^n$ равен $1/L$.

Доказательство. Находим

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}z^{n+1}/a_n z^n| = L|z|.$$

По признаку Даламбера сходимости числовых рядов, при $|z| < 1/L$ получаем сходимость, а при $|z| > 1/L$ — расходимость. □

Формула Даламбера наиболее проста, поэтому к конкретному ряду следует сперва пытаться применить её. Формула Коши — Адамара универсальна.

Теорема. *Радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n z^n$ равен $1/L$, где*

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Теоретическое преимущество верхнего предела над обычным в том, что верхним пределом обладает всякая последовательность.

осень

Доказательство. Находим

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = L|z|.$$

Далее применяем признак Коши, и опять сходимость определяется видом знака неравенства в $|z| < 1/L$.

Отметим, что при $L = \infty$ нет точек $z \neq 0$, для которых можно установить сходимость, а при $L = 0$ нет точек, для которых можно установить расходимость. □

Пример. Возьмём ряд Тейлора для $\sin x$:

$$\sum (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!.$$

Верхний предел в формуле Коши — Адамара равен пределу последовательности $1/\sqrt[m]{m!} \to 0$. Значит, $R = \infty$.

рисунок?

Придти к этому выводу «в духе» формулы Даламбера тоже можно, но приходится схитрить, чтобы обойти предположение об отсутствии нулевых коэффициентов: $a_{2n+1}/a_{2n-1} = 1/2n(2n+1) \to 0$. Конечно, можно использовать и комплексную экспоненту.

Интегрирование и дифференцирование. Обоснуем теперь некоторые операции с рядами, ввиду важности их приложений использованные с вещественной переменной ещё в самом начале курса.

Лемма. *Радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n z^n$ сохраняется при следующих преобразованиях ряда:*

(1) *умножении либо делении на z;*
(2) *умножении либо делении всех коэффициентов a_n на n.*

Доказательство. Хотя тут в обоих случаях следует оговорить, что деление не затрагивает слагаемые с $n = 0$, одно слагаемое не влияет на сходимость ряда.

(1) Для наугад взятого z_* числовые ряды $\sum a_n z_*^n$ и $z_* \sum a_n z_*^n$ либо оба сходятся, либо оба расходятся. Так и радиусы должны совпасть.

(2) Найдём радиус сходимости R ряда $\sum n a_n z^n$:

$$1/R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|}.$$

Можно перейти от верхнего предела произведения к произведению

$$(\lim \sqrt[n]{n})(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}),$$

ибо первый предел равен 1. Второй же предел равен обратной величине радиуса сходимости исходного ряда $\sum a_n z^n$. □

Теорема. *Интегрирование и дифференцирование суммы степенного ряда выполняются почленно и это сохраняет круг сходимости.*

Поскольку мы не вводили интегрирование и дифференцирование по комплексной переменной, можно считать, что здесь говорится о вещественной переменной и интервале сходимости, а не круге. Получаемые в результате операционные правила работают и в комплексной области, а недостающие детали обоснования даются в курсе комплексного анализа (теории функций комплексной переменной).

Значит, ряд для производной находится как

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \quad \Longrightarrow \quad f'(z) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1},$$

Соответственно, ряд для первообразной находится как

$$F(z) = F(0) + \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

с произвольной константой $F(0)$, ведь тогда $F'(z) = f(z)$.

Доказательство. Не считая постоянной интегрирования $F(0)$, оба ряда получаются из ряда для $f(z)$ двумя преобразованиями из леммы: умножением на значение индекса и делением на z; умножением на z и делением на значение (нового, сдвинутого) индекса. Поэтому все три ряда имеют одинаковый круг сходимости, на замкнутых кругах внутри которого они сходятся равномерно. Применимы общие теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании рядов. □

Следствие. *Сумма всякого степенного ряда с положительным радиусом сходимости является бесконечно гладкой функцией внутри круга сходимости.*

Доказательство. Применяя теорему шаг за шагом к производным всё более высоких порядков, на каждом шагу получаем непрерывную производную внутри круга. □

Следствие (ряд Тейлора). *Если $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ в круге сходимости положительного радиуса с центром z_0, то $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.*

Доказательство. Продифференцируем исходный ряд n раз — уйдут все младшие слагаемые. Затем подставим $z = z_0$ и уйдут старшие. □

Поведение на границе круга. Степенные ряды с радиусом сходимости R могут вести себя по-разному на окружности $|z| = R$.

Пример. Ряд $\sum z^n$ расходится во всех точках окружности $|z| = 1$, ибо слагаемые не стремятся к нулю.

Пример. Ряд $\sum z^n/n$ расходится при $z = 1$, но условно сходится при $z = -1$ по признаку Лейбница.

Пример. Ряд $\sum z^n/n^2$ абсолютно сходится на окружности $|z| = 1$, поскольку сходится ряд $\sum n^{-2}$.

Немного видоизменяя эти примеры, легко убедиться, что интегрирование и дифференцирование степенного ряда способны сказаться на его поведении на граничной окружности. Интегрирование может улучшить сходимость, а дифференцирование ухудшить.

Когда сумма степенного ряда в круге сходимости известна, найти сумму в тех точках границы, где ряд сходится, позволяет радиальная теорема Абеля: она сводит дело к вычислению предела функции.

Теорема (Абель)**.** *Если степенной ряд* $\sum c_n z^n$ *сходится при* $z = z_*$, *то его сумма непрерывна на радиальном отрезке от* 0 *до* z_*.

Новизна здесь лишь в случае точки z_*, лежащей на границе круга сходимости, ведь там непрерывность не гарантирована круговой теоремой. Кроме того, радиальная теорема стала малоинтересна при наличии абсолютной сходимости ряда при $z = z_*$, поскольку тогда её заключение о непрерывности суммы следует, посредством равномерной сходимости, из мажорантного признака Вейерштрасса, причём сразу на всей окружности $|z| = |z_*|$. Выходит, радиальная теорема существенным образом применима именно в более хитром случае условной сходимости в некоторой точке и нацелена на более тонкие вопросы.

Пример. Ряд Тейлора функции $\ln(1+z)$ сходится в каждой точке открытого единичного круга. В граничной точке $z = 1$ сходимость условная. Радиальная теорема строго обосновывает значение суммы ряда

$$\ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} \pm \dots .$$

Аналогична ситуация с рядом Тейлора для $\operatorname{arctg} z$ при $z = \pm 1$.

Докажем радиальную теорему двумя способами, полагая в обоих $b_k = c_k z_*^k$. Теперь нас интересует комплексная функция $\psi(t) = \sum b_n t^n$ вещественного аргумента $0 \leqslant t \leqslant 1$, особенно при $t \to 1 - 0$.

Первое доказательство. По критерию Коши для числовых рядов, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что

$$S_{n,m}(1) = \Big| \sum_{n \leqslant k \leqslant m} b_k \Big| < \varepsilon \quad \text{при } m, n > N.$$

Когда нам удастся показать для $t \in [0, 1]$, что

$$S_{n,m}(t) = \Big| \sum_{n \leqslant k \leqslant m} b_k t^k \Big| < \varepsilon \quad \text{при } m, n > N,$$

равномерный критерий Коши позволит заключить, что ряд $\sum b_n t^n$ сходится равномерно по t на отрезке $[0,1]$. Поскольку слагаемые (везде) непрерывны, сумма $\psi(t)$ также непрерывна при $t \to 1-0$.

Остаётся вывести второе неравенство из первого. Наивная оценка сверху левой части второго левой частью первого ошибочна, хотя и верна в случае положительных вещественных b_k. Искомая оценка

$$S_{n,m}(t) \leqslant t^n S_{n,m}(1) < t^n \varepsilon \leqslant \varepsilon$$

следует из леммы Абеля, доказанной в следующем разделе. □

Второе доказательство. Удобно сразу подвинуть b_0 так, чтобы частичные суммы $B_n = b_0 + \dots + b_n$ стремились к нулю при $n \to \infty$, и проверять, что предел $\psi(1-0)$ равен $\psi(1) = 0$.

Установим для $0 \leqslant t < 1$ ключевую формулу

$$\psi(t) = (1-t) \sum_{n \geqslant 0} B_n t^n.$$

Для этого разделим обе её части на $1-t$ и перемножим абсолютно сходящиеся ряды $\psi(t) = \sum b_n t^n$ и $(1-t)^{-1} = \sum t^n$. Поэтому

$$|\psi(t)| \trianglelefteq (1-t) \sum_{n \geqslant 0} |B_n| \, t^n.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ есть такое $N = N(\varepsilon)$, что $|B_n| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Этим порогом разобьём полученный неотрицательный ряд на голову и хвост, которые стремятся к нулю при $t \to 1$ каждый по своей причине. Хвост меньше геометрической прогрессии

$$(1-t) \sum_{n \geqslant N} \varepsilon \, t^n = t^N \varepsilon < \varepsilon,$$

а в голове множитель $1-t$ подавляет конечную сумму ограниченных слагаемых $|B_0| + \dots + |B_{N-1}|$. □

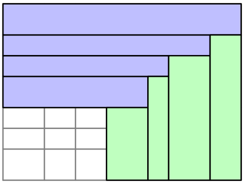
Вопрос о поведении степенного ряда на границе круга сходимости тесно связан со вторым важнейшим типом функциональных рядов. Для простоты считаем $R = 1$, чего добиваются заменой переменной. Параметризуя точки единичной окружности аргументом, подставим $z = e^{i\varphi}$ в степенной ряд $\sum c_n z^n$. Увидим тригонометрические ряды

$$\sum c_n e^{in\varphi} \stackrel{?}{=} \sum c_n \cos n\varphi + i \sum c_n \sin n\varphi.$$

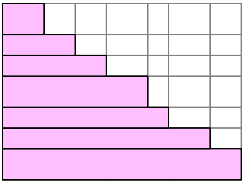
16.4. Суммирование по частям

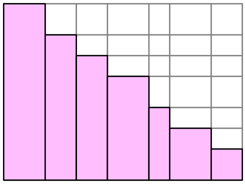
Суть приёма. Преобразование Абеля, или суммирование по частям, несложно по сути, но сильно загромождено деталями, обозначениями и даже деталями обозначений (приходится следить за индексами). Увидеть же самое главное в нём можно безо всяких обозначений, подсчитывая некоторые площади.

Первый вариант: выделенная площадь равна сумме площадей со- рисунок
ставляющих прямоугольников; площади частей двух разных цветов связаны простым соотношением.



Второй вариант: выделенная площадь выражается двумя способами рисунок
через разные разбиения на прямоугольники.





Наглядное представление площадями, в любом варианте, иллюстрирует нехитрую комбинаторику преобразования для случая положительных слагаемых. Та же самая комбинаторика, на уровне смены расстановки скобок, остаётся и для слагаемых другой природы.

Формальности, первый вариант. Возьмём два конечных или бесконечных списка $\{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ и $\{B_0, B_1, B_2, \dots\}$ чисел или функций. Положим $a_k = \Delta A_k = A_k - A_{k-1}$. Следовательно,

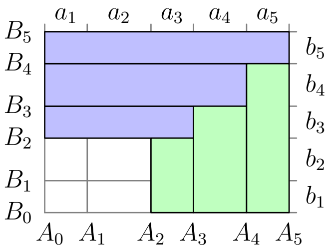
$$A_k - A_0 = a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

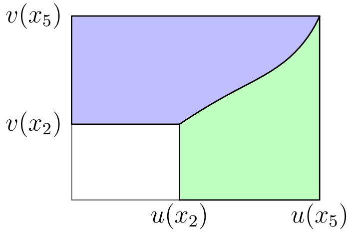
Так же поступим со вторым списком. Очевидно,

$$A_1 B_1 - A_0 B_0 = A_1(B_1 - B_0) + (A_1 - A_0)B_0$$

и аналогично с любым разумным сдвигом индексов. Тогда рисунок

$$A_m B_m - A_n B_n = \sum_{n<k\leqslant m} A_k \cdot \Delta B_k + \sum_{n<k\leqslant m} \Delta A_k \cdot B_{k-1}.$$





Эту формулу можно назвать суммированием по частям, ибо она является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям

$$(uv)\Big|_{x=x_n}^{x=x_m} = \int_{v(x_n)}^{v(x_m)} u\,dv + \int_{u(x_n)}^{u(x_m)} du\,v.$$

Интегрирование по частям позволяет перейти от одного из интегралов к другому. Суммирование по частям применяется для перехода

$$A_{n+1}b_{n+1} + \dots + A_m b_m = (A_m B_m - A_n B_n) - (a_{n+1}B_n + \dots + a_m B_{m-1}),$$

нередко в замаскированном виде, и называется также **преобразованием Абеля**. В частности, с его помощью устанавливается серия признаков сходимости знакопеременных рядов и несобственных интегралов.

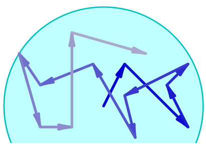
Формальности, второй вариант. Роль прежних A_k тут играет a_k; так ближе к последующему приложению.

Лемма. *Даны два конечных набора чисел: $a_n, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ с условием $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \dots \geqslant a_m \geqslant 0$ и произвольные $b_n, \dots, b_m \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$|a_n b_n + \dots + a_m b_m| \leqslant a_n \cdot \max_{n \leqslant k \leqslant m} |b_n + b_{n+1} + \dots + b_k|.$$

Представим все b_k векторами на комплексной плоскости и составим из них ломаную, сохраняя порядок пронумерованных звеньев. Тогда максимум в правой части равен радиусу наименьшего круга с центром в начале ломаной (лучше всего нуле), содержащего её всю целиком.

рисунок



Чтобы применить лемму в данной формулировке к доказательству радиальной теоремы Абеля, нужно взять $a_k = t^k$ и $b_k = c_k z_*^k$.

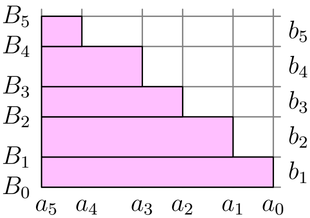
Доказательство. Обозначим через B_k сумму в правой части. Введём ещё $B_{n-1} = 0$ и $a_{m+1} = 0$. Преобразуем сумму в левой части по Абелю: рисунок

$$\begin{aligned} S &= a_n b_n + \dots + a_m b_m \\ &= a_n(B_n - B_{n-1}) + a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + \dots + a_m(B_m - B_{m-1}) \\ &= (a_n - a_{n+1})B_n + \dots + (a_{m-1} - a_m)B_{m-1} + (a_m - a_{m+1})B_m. \end{aligned}$$

Значит,

$$|S| = \Big|\sum_{n\leqslant k\leqslant m} (a_k - a_{k+1})B_k\Big| \leqslant \sum_{n\leqslant k\leqslant m} |a_k - a_{k+1}|\cdot|B_k| \leqslant M \sum_{n\leqslant k\leqslant m} |a_k - a_{k+1}|,$$

где $M = \max|B_k|$. Поскольку $a_k \geqslant a_{k+1}$ для всех k, все оставшиеся знаки модуля можно снять, что превратит сумму в a_n. $\square$



лекция 25 11.05.17

Признаки сходимости Дирихле и Абеля. Если в лемме Абеля вместо конечных наборов взять бесконечные последовательности, то получается признак сходимости для числовых рядов вида $\sum a_k b_k$.

Теорема (признак Дирихле). *Если последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ удовлетворяют условиям*

(1) *$\{a_k\}$ не возрастает и стремится к нулю,*
(2) *последовательность частичных сумм $B_n = \sum_{k\leqslant n} b_k$ ограничена,*

то ряд $\sum a_k b_k$ сходится.

Доказательство. К любым конечным отрезкам таких последовательностей применима лемма Абеля. Если $M = \sup|B_n|$, то

$$|B_m - B_n| \leqslant |B_m| + |B_n| \leqslant 2M$$

для всех m и n, так что максимум в лемме также не превосходит $2M$. Лемма даёт

$$\Big|\sum_{n<k\leqslant m} a_k b_k\Big| \leqslant 2M a_{n+1},$$

что стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому ряд $\sum a_k b_k$ сходится по критерию Коши. $\square$

В другом похожем признаке сходимости ослаблено предположение о первой последовательности и усилено предположение о второй.

Теорема (признак Абеля). *Если последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ удовлетворяют условиям*

(1) $\{a_k\}$ *монотонна и ограничена,*
(2) *ряд $\sum b_k$ сходится,*

то ряд $\sum a_k b_k$ сходится.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса $\{a_k\}$ имеет конечный предел a. Вычитая его, сведём утверждение к признаку Дирихле. Точнее, для частичных сумм запишем чисто алгебраическое равенство

$$\sum_{k\leqslant n} a_k b_k = \sum_{k\leqslant n} (a_k - a) b_k + a \sum_{k\leqslant n} b_k,$$

а затем устремим $n \to \infty$. Справа вторая сумма сходится по предположению, а первая по признаку Дирихле, хотя в случае $a_k < a$ нужно сперва ещё вынести минус из суммы. $\square$

Следствие (признак Лейбница). *Если последовательность $\{a_k\}$ не возрастает и стремится к нулю, то ряд $\sum(-1)^k a_k$ сходится.*

Доказательство. Для $b_k = (-1)^k$ в признаке Дирихле $|B_n| \leqslant 1$. $\square$

Это простое и давно знакомое утверждение является частным случаем $z = -1$ более мощного следующего.

Следствие. *Если последовательность $\{a_k\}$ вещественных чисел монотонно стремится к нулю и радиус сходимости ряда $\sum a_k z^k$ удовлетворяет $0 < R < \infty$, то ряд сходится на всей граничной окружности, кроме точки $z = R$.*

Доказательство. Линейной заменой переменной можно добиться равенства $R = 1$, что мы и будем считать сделанным. Признак Дирихле приме́ним к ряду $\sum a_k e^{ik\varphi}$ в тех точках единичной окружности, где ограничены частичные суммы экспонент. Вычисление и оценку этих выражений оставим как упражнение, да и они уже знакомы. $\square$

Простых и естественных примеров на признаки Абеля и Дирихле для числовых рядов мало. Подобные задачи искусственны, ибо сами признаки появились при изучении функциональных рядов.

Несложная адаптация проведённых рассуждений даёт аналогичные признаки равномерной сходимости функциональных рядов вида $\sum a_k(x)b_k(x)$. Для этого в обоих признаках предполагаемая сходимость также должна быть равномерной: последовательности $\{a_k(x)\}$ в признаке Дирихле; ряда $\sum b_k(x)$ в признаке Абеля. Мы не будем здесь останавливаться и уточнять формулировки.

Часто одна из перемножаемых функциональных последовательностей на самом деле является числовой, как в предыдущем следствии, намекающем на наиболее важные приложения — ряды Фурье. Благодаря этому равномерность сходимости иногда бывает «бесплатной».

Пример. Если последовательность $\{a_k\}$ вещественных чисел монотонно стремится к нулю, то ряды $\sum a_k \cos kx$ и $\sum a_k \sin kx$ сходятся равномерно на любом отрезке, не содержащем целых кратных числа 2π. Это получают небольшой модификацией последнего следствия.

Пример (ряды Дирихле). Функции $a_k(x) = k^{-x}$ неотрицательного аргумента x образуют монотонную и ограниченную последовательность:

$$a_k(x) \geqslant a_{k+1}(x), \qquad |a_k(x)| \leqslant 1.$$

Значит, если числовой ряд $\sum b_k$ сходится, то функциональный ряд $\sum a_k b_k = \sum b_k k^{-x}$ сходится по признаку Абеля при всех $x \geqslant 0$, причём равномерно. Поэтому сумма исходного ряда задаёт непрерывную функцию на $[0, \infty)$.

Такие ряды широко используются в теории чисел.

Другим развитием этих идей являются аналогичные признаки сходимости несобственных интегралов, которые мы тем более опустим.

16.5. Дельта-функция

Популярность дельта-функции принёс знаменитый физик Дирак, чьим именем её часто и называют, в первой книге по квантовой механике. Её эквиваленты использовали многие ведущие математики и математические физики XIX века, начиная с Фурье и Коши.

книга Зельдовича

Зарождение. Недавно в курсе было упомянуто явление расплывания функции (плотности) по всей оси с сохранением значения интеграла (массы). При этом начинают с ограниченной интегрируемой функции $\varrho(x)$ и определяют последовательность функций $\varrho_n(x) = \frac{1}{n}\varrho(\frac{x}{n})$.

Гораздо интереснее обратное явление: концентрация плотности в одной точке. При этом обычно нормируют полную массу, требуя

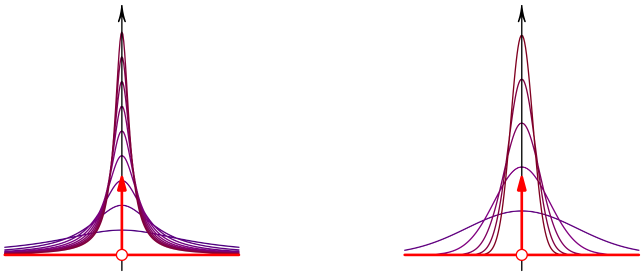
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x)\,dx = 1,$$

и рассматривают последовательность $\varrho_n(x) = n\varrho(nx)$ при $n \to \infty$, или же переходят к малому непрерывному параметру $\varepsilon \to 0$ и семейству функций $\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varrho(\frac{x}{\varepsilon})$. Для сходимости интеграла необходимо достаточно быстрое убывание плотности при удалении в бесконечность. Естественно также условие, что максимум плотности достигается в

рисунок точке концентрации $x = 0$. Например,

$$\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}, \qquad \varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2/\varepsilon^2}.$$

Числовые множители обеспечивают нормировку полной массы.



В пределе получается функция $\delta(x)$, характеризуемая тем, что

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ \infty & \text{при } x = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

Замечательно, что конкретный выбор исходной функции $\varrho(x)$, при соблюдении условий, оказывается несущественным для применений.

Предельный переход при зарождении дельта-функции — идеализация, чрезвычайно удобная во многих ситуациях в физике и технике. Однако эта «функция» невозможна в рамках классического анализа: равенство функции нулю на всей оси кроме единственной точки сразу же влечёт равенство нулю её интеграла. Для выхода из этого затруднения математики обычно ссылаются на теорию обобщённых функций (распределений) или на теорию меры, но эти предметы чересчур сложны или далеки для многих из тех, кому приходится манипулировать дельта-функцией, просто привыкнув к её необыкновенным свойствам.

Точечные массы, заряды, импульсы. Физики представляют их дельта-функцией, уже тем самым достигая упрощения записи различных соотношений.

Пример (грузики на стержне). Возьмём длинный тонкий стержень с несколькими грузиками, массы которых сопоставимы с массой стержня. Тогда при подсчёте механических величин нужно отдельно учитывать массу, распределённую по стержню (это интеграл), и массы, сосредоточенные в грузиках (это сумма). При помощи дельта-функций, сосредоточенных в точках c_i расположения грузиков с массами m_i, можно записать общую линейную плотность

$$\sigma(x) = \sigma_0(x) + \sum m_i \delta(x - c_i).$$

Тогда масса любого участка $[a, b]$ стержня с грузиками выражается единообразно: интегралом

$$\int_a^b \sigma(x)\, dx.$$

Пример (электрический заряд). Ближе всего к дельта-функции в этом курсе мы находились, рассматривая электрическое поле точечного заряда. Дивергенция этого поля равна нулю вне заряда, но её интеграл по любому шару, содержащему заряд, нулю не равен. Дело в том, что дивергенция, имеющая смысл плотности источников поля, представляется дельта-функцией: с точностью до умножения на константу она равна $\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z-c)$ для заряда в точке (a, b, c).

Конечно, не обойтись без дельта-функции и при рассмотрении сложных систем зарядов.

Пример (удар). Представим грузик на нити. Сначала покоившийся, грузик получает удар со стороны и начинает колебаться. Время соударения пренебрежимо мало по сравнению с общим временем наблюдения за системой. Импульс, сообщённый грузику при ударе, передаётся большой силой за короткое время. Удар идеализируется дельта-функцией от времени.

Фильтрующее свойство. Характеризующие дельта-функцию свойства равносильны основному на практике соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

для любой хорошей функции $f(x)$. Сходным фильтрующим свойством при суммировании обладает символ Кронекера:

$$\sum_i \delta_{ij} f_i = f_j.$$

Именно из-за сходства с ним Дирак ввёл обозначение $\delta(x)$.

Действительно, ввиду зануления $\delta(x)$ промежуток интегрирования можно ужать до малой окрестности нуля, на которой $f(x) \approx f(0)$ с любой желаемой точностью. Поэтому $f(0)$ выносится из-под интеграла, а в нём остаётся лишь $\delta(x)$. Наоборот, условие нормировки получается подстановкой $f(x) = 1$ в фильтрующее свойство; зануление $\delta(x)$ вне нуля следует из того, что результат интегрирования не зависит от значений $f(x)$ при $x \neq 0$, а значит, их вес в интеграле нулевой.

Как уже отмечено выше, чтобы передвинуть концентрацию дельта-функции в точку $x = a$, нужно взять $\delta(x - a)$. Отсюда получаем обобщение фильтрующего свойства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\, dx = f(a)$$

для любой хорошей функции $f(x)$.

Может быть несколько неожиданно поначалу, другая простейшая подстановка изменяет сконцентрированную величину:

$$\delta(cx) = \delta(x)/|c|.$$

Чтобы это увидеть, нужно проверить, заменяя переменную интегрирования, что $|c|\delta(cx)$ обладает характеризующими свойствами $\delta(x)$, либо фильтрующим.

Производные функций, имеющих скачки. Интеграл от $\delta(x)$ с переменным верхним пределом имеет вид единичной ступеньки,

$$\vartheta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

называемой функцией Хевисайда. Значение определяется лишь тем, попадает ли концентрация дельта-функции в область интегрирования. Непосредственно в точке скачка значение в общем-то безразлично, хотя в разных приложениях бывает удобно полагать $\vartheta(0) = 0$.

Соответственно, $\vartheta'(x) = \delta(x)$. Дальнейший переход к иным функциям со скачками (разрывами первого рода) уже несложен. Дельта-функция позволяет их дифференцировать, а её появление в формуле для производной автоматически указывает не только на наличие скачка, но также на его расположение и величину.

Через функцию Хевисайда выражается знакомая нам функция

$$\operatorname{sgn} x = \vartheta(x) - \vartheta(-x).$$

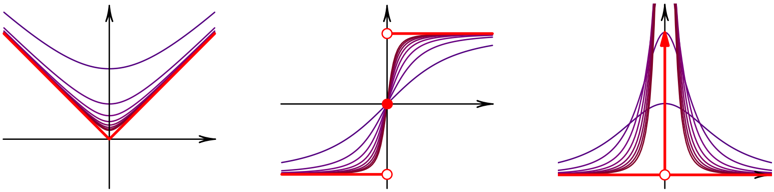
Вспоминая про функцию $|x|$, приходим к важному соотношению

$$|x|'' = 2\delta(x).$$

Чтобы прочувствовать его, обратимся к связи второй производной с кривизной линии. Скруглим излом графика, заменяя $|x|$ на функцию $y_\varepsilon(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$. Вычислив вторую производную

$$y_\varepsilon''(x) = \varepsilon^2 (x^2 + \varepsilon^2)^{-3/2},$$

получим зарождающуюся дельта-функцию, помноженную на 2.



Дифференциальные уравнения. На фильтрующем свойстве дельта-функции основан общий метод решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в том числе уравнений в частных производных, среди которых важнейшие уравнения классической математической физики.

Например, если известно решение $y = f(t)$ уравнения $\ddot{y} + y = \delta(t)$, то для того же уравнения с правой частью, заменённой на любую хорошую функцию $g(t)$, строится решение

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) g(x)\, dx.$$

Конкретный вид дифференциального оператора из левой части уравнения на этом шаге ни при чём. Его структура используется для отыскания фундаментального решения, каковым и оказывается решение для правой части $\delta(t)$. Эта проблема вылилась в теорию собственных чисел и состояний (векторов, функций), азы которой рассказывают в курсе линейной алгебры.

Примеры зарождающихся дельта-функций. Первые два примера функций этого типа, которые и указаны в начале раздела, возникли при решении уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности. Это подробно изучается в курсе математических методов физики.

Из волнового уравнения появилось много других приближений, интересных в частности своей знакопеременностью. Они выражаются через специальные функции (Эйри, Бесселя), но есть и элементарные:

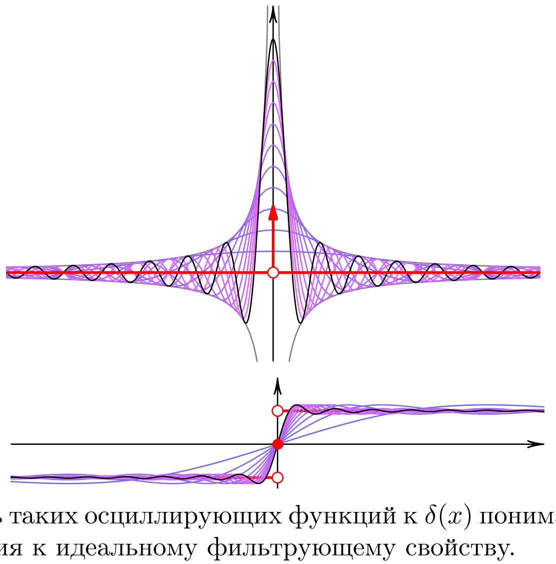
рисунок

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin nx}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \cos tx \, dt.$$

Осцилляции усложняют наивные представления о дельта-функции. В данном случае $\varrho_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ лишь в точках $x = \pi k$ с целым k. Однако последовательность первообразных сходится к $\frac{1}{2} \operatorname{sgn} x$, первообразной для $\delta(x)$. Это следует из значения интеграла Дирихле

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn} \alpha.$$

Мы его вычислили для $\alpha = 1$, а общий ответ затем легко получить заменой переменной $u = \alpha x$.



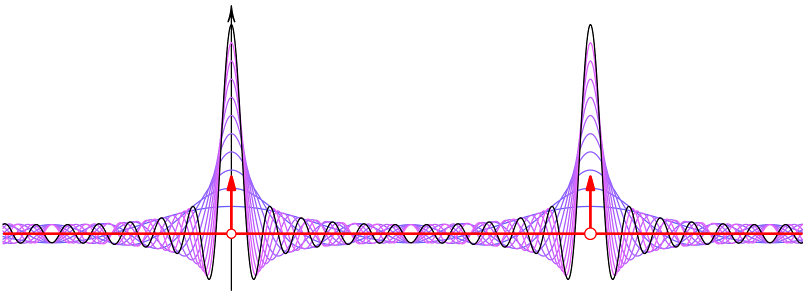
Сходимость таких осциллирующих функций к $\delta(x)$ понимают в смысле приближения к идеальному фильтрующему свойству.

Есть и дискретная версия:

рисунок

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-n \leqslant k \leqslant n} \cos kx.$$

Для любого целого n это периодическая функция с периодом 2π.



При $n \to \infty$ она приближается не к $\delta(x)$, а к периодической функции

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi n).$$

Эти функции очень важны в цифровой обработке сигналов и связи.

Гладкость зарождающихся дельта-функций $\varrho_\varepsilon(x)$ полезна тем, что в этом случае интегралы

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_\varepsilon(x - t) f(t)\, dt$$

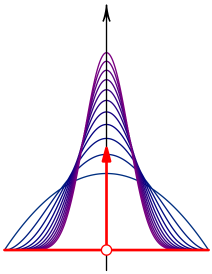
дают гладкие функции, приближающиеся при $\varepsilon \to 0$ к возможно не столь хорошей функции $f(x)$, то есть сглаживают её. Однако негладкие $\varrho_\varepsilon(x)$ тоже находят применения в разных областях. Чаще всего это самые простые формы: прямоугольник или треугольник.

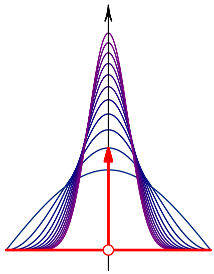
Стремление к $\delta(x)$ может происходить не только за счёт линейного сжатия графика по горизонтали и линейного растяжения по вертикали. Укажем для примера ещё две последовательности функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$ и продолженных нулём на всю ось: рисунок

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\mu_n} \cdot (1 - x^2)^n, \qquad \varrho_n(x) = \frac{1}{\nu_n} \cdot \cos^n(\pi x/2),$$

где нормировки μ_n и ν_n уточняются элементарным интегрированием (упражнение). Сосредоточение в окрестности нуля здесь достигается возведением малых чисел в высокие степени. Эти функции применяются в следующем разделе.

Производные дельта-функции. Дифференцируя зарождающуюся дельта-функцию, мы получим последовательность $\varrho'_\varepsilon(x)$, аналогичным образом приближающуюся к производной $\delta'(x)$. Эта функция имеет ещё более «острую» особенность, причём принимает значения обоих знаков. Обычно $\varrho_\varepsilon(x)$ чётная функция, а тогда её производная нечётна.





В электродинамике $\delta'(x)$ представляет плотность одноточечного диполя в начале координат. Обычный диполь в близких точках $\pm a$ имеет плотность $\delta(x+a) - \delta(x-a)$. Одноточечный диполь получается в пределе при сближении точек так, что дипольный момент $2a$ сохраняется за счёт пропорционального увеличения зарядов. С математической стороны (наивной) получается симметризованный предел из классического определения производной:

$$\delta'(x) = \lim_{a\to 0} \frac{\delta(x+a) - \delta(x-a)}{2a}.$$

Таким же образом высшие производные представляют квадруполь (4), октуполь (8), и так далее.

16.6. Приближение непрерывных функций полиномами

Теорема Вейерштрасса. Вернёмся к равномерной сходимости и дополним набор теорем Вейерштрасса ещё одним знаменитым и чрезвычайно полезным утверждением.

Weierstraß 1885

Теорема. *Всякая непрерывная функция на отрезке является пределом равномерно сходящейся последовательности полиномов.*

Иными словами, любую такую функцию можно приблизить полиномами сколь угодно точно: если функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой полином $p(x)$, что $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [a,b]$. Утверждение, конечно, допускает обобщения, но мы ограничимся исходной простейшей версией.

Эта теорема привлекала многих математиков, поэтому различных доказательств придумано много. Ключевую роль в приводимом ниже сыграет зарождающаяся дельта-функция, а именно, последовательность функций, заданных на отрезке $[-1,1]$ полиномами $(1-x^2)^n$, отнормированных и продолженных нулём на всю ось. Значит, с ростом n всё бóльшая часть единичной массы с плотностью распределения $\varrho_n(x)$

сосредотачивается вблизи точки $x = 0$. Выразим это формально так: для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon, \delta)$, что $n > N$ влечёт

$$1 - \varepsilon < \int_{-\delta}^{\delta} \varrho_n(x)\,dx \leqslant 1, \qquad \int_{-1}^{-\delta} \varrho_n(x)\,dx + \int_{\delta}^{1} \varrho_n(x)\,dx < \varepsilon.$$

Символ δ здесь имеет привычный ранее маленький смысл и никак не связан с дельта-функцией.

Построение. Прежде всего линейной заменой переменной добьёмся выполнения условия $0 < a < b < 1$. Детали замены не важны. Затем продолжим функцию с отрезка $[a, b]$ на отрезок $[0, 1]$ любым образом, дающим непрерывную функцию. Положим

$$p_n(t) = \int_0^1 f(x)\varrho_n(x - t)\,dx$$

Раскрывая определение ϱ_n и собирая степени t, получим под интегралом полином от t степени $2n$ с коэффициентами, зависящими от x. После интегрирования останется полином от t с постоянными коэффициентами. $\square$

Если вместо функций $(1 - x^2)^n$ использовать $\cos^n(\pi x/2)$, то результатом построения будут тригонометрические полиномы, приближающие исходную функцию $f(x)$.

Доказательство. Теперь проверим, что $p_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$. Поточечная сходимость интуитивно ясна, ибо ϱ_n стремится к дельта-функции, а потому обладает приближённым фильтрующим свойством.

Формальная проверка, помимо одной догадки, идейно практически повторяет доказательство теоремы, как ни странно, Вейерштрасса о сохранении непрерывности равномерными пределами. Зафиксируем точку $t \in [a, b]$ и оценим отклонение от цели по неравенству треугольника. Для этого найдём две величины, находящиеся «между» $p_n(t)$ и $f(t)$ и разбивающие отклонение на три более простых по схеме

$$|X_K - T_K| \trianglelefteq |X_K - X_B| + |X_B - T_B| + |T_B - T_K|.$$

Поскольку $X_K = p_n(t)$ и $T_K = f(t)$, можно догадаться до остальных:

$$X_K = \int_K f(x)\varrho_n(x - t)\,dx, \qquad X_B = \int_B f(x)\varrho_n(x - t)\,dx,$$

$$T_B = \int_B f(t)\varrho_n(x - t)\,dx, \qquad T_K = \int_K f(t)\varrho_n(x - t)\,dx.$$

рисунок Здесь $K = [0, 1]$ и $B = B_\delta(t)$, где значение δ предстоит уточнить.

Пользуясь (равномерной) непрерывностью функции f на отрезке K, выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, что $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ при $|x - t| < \delta$. Тогда

$$|X_B - T_B| = \left|\int_B (f(x) - f(t))\,\varrho_n(x - t)\,dx\right| \\ \leqslant \int_B |f(x) - f(t)|\,\varrho_n(x - t)\,dx < \varepsilon \int_B \varrho_n(x - t)\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Две оставшиеся разности перепишем как интегралы по $K \setminus B$, ведь подынтегральные функции в них одинаковы. Для $n \gg 1$ имеем

$$\int_{K \setminus B} \varrho_n(x - t)\,dx < \varepsilon,$$

поэтому $|X_B - X_K|$ и $|T_K - T_B|$ не больше $M\varepsilon$, где $M = \sup_{x \in K}|f(x)|$. Суммарное отклонение $|X_K - T_K|$ меньше $(2M + 1)\varepsilon \to 0$.

Существенно, что a и b находятся строго внутри отрезка $K = [0, 1]$, а потому, уменьшая δ, всегда можно считать, что $B \subset K$. Сходимость $p_n(x) \to f(x)$ в точках $x = 0$ и $x = 1$ не гарантирована. $\square$

Полиномы Бернштейна. Познакомимся теперь с замечательным семейством полиномов, дающим возможность явно и просто выписать полиномиальное приближение любой заданной непрерывной функции на отрезке. Вдобавок, они очень легко вычисляются. Поэтому приближения на их основе, под названием кривых Безье и сплайнов, повсеместно применяются в математическом моделировании и в компьютерной графике, включая дизайн шрифтов. Итак, ныне они всегда у нас перед глазами, хотя и не видимы.

Базисные полиномы Бернштейна степени n определяют по формуле

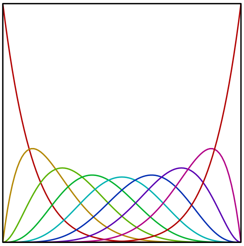
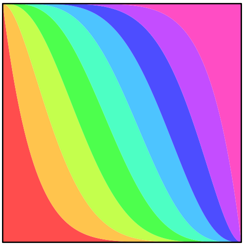
$$b_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \quad \text{для } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

При каждом фиксированном n они составляют **разбиение единицы** в том смысле, что

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} b_{k,n}(x) = 1.$$

Это моментально следует из раскрытия бинома $(x + (1 - x))^n$. Более того, на отрезке $[0, 1]$, а лишь он интересен для приложений, все слагаемые этого разбиения неотрицательны и одинаково «массивны». При увеличении индекса k от 0 до n концентрация массы в $b_{k,n}(x)$ плавно движется от левого конца отрезка к правому.

рисунок

Упражнение. *Проверьте, что*

$$\int_0^1 b_{k,n}(x)\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

Упражнение. *Проверьте, что $b_{k,n}(x)$ на отрезке $[0,1]$ имеет единственный максимум в точке $x = k/n$.*

Теорема (Бернштейн)**.** *Для всякой непрерывной функции f на отрезке $[0,1]$ полиномы*

$$B_n f(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} f(k/n)\, b_{k,n}(x)$$

образуют последовательность, равномерно сходящуюся к f.

Доказательство этой теоремы, одновременно служащее конструктивным доказательством теоремы Вейерштрасса о приближении полиномами, весьма красиво, но использует недоступные в этом курсе средства теории вероятностей. Собственно, оттуда же произошли и сами базисные полиномы Бернштейна. Ввиду сказанного выше об областях их применения, тут наблюдается прекрасный пример единства и пользы математики.

Упражнение. *Базисные полиномы Бернштейна степени n образуют базис линейного пространства полиномов степени не выше n.*

16.7. Ортогональные ряды

В этом разделе мы очень бегло обозреем начальные идеи огромной самостоятельной области анализа. Ею занята значительная часть курса «Основы функционального анализа». лекция 24 16.05.16

??

Ортогональные системы. Для пары «хороших» функций f, g на отрезке Δ положим

$$(f,g) = \int_\Delta \overline{f(x)} g(x)\, dx.$$

Черта тут означает комплексное сопряжение; когда функции вещественнозначные, она пропадает сама собой.

Ввиду линейности и монотонности интеграла, эта операция обладает всеми свойствами **скалярного произведения** на линейном пространстве хороших функций (например, непрерывных), вследствие чего там появляется геометрия. Скалярному произведению подчинена норма $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$. Можно говорить об **ортогональных системах** функций, обычно последовательностях: система функций $\{\varphi_k\}$ ортогональна, когда $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$ при $m \neq n$.

Пример. Тригонометрическая система функций $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ с целыми $n \geqslant 1$ ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Пример. На отрезке $[-1, 1]$ возьмём систему степенных функций $\{x^n\}$ с целыми $n \geqslant 0$. Они не ортогональны. Применяя метод ортогонализации Грама — Шмидта (сохраняя при том порядок функций), получим важную систему **полиномов Лежандра**.

Разложения функций. Пространства функций обычно бесконечномерны, так что нельзя представить любую функцию конечной линейной комбинацией заранее выбранного конечного набора функций. Однако можно надеяться представить широкий класс функций суммами функциональных рядов с простыми слагаемыми. Наиболее плодотворно эта идея работает для разложений по ортогональной системе.

Предположим, что на некотором отрезке Δ имеется ортонормированная система функций $\{\varphi_k\}$ и нужно разложение $f(x) = \sum c_k \varphi_k(x)$. Чтобы найти константы c_k, умножим это равенство скалярно на φ_n:

$$(\varphi_n, f) \stackrel{?}{=} \sum_k c_k (\varphi_n, \varphi_k) = c_n (\varphi_n, \varphi_n) = c_n.$$

Ввиду ортогональности системы остаётся лишь одно слагаемое с $k = n$, так что константа определяется.

Строго говоря, нужно заботиться о законности перестановки операций суммы ряда и скалярного произведения (интеграл ведь!), но тут мы игнорируем эти вопросы, оставляя их для второго курса.

Пример. Разложим функцию $f(x) = x$ по тригонометрической системе на отрезке $[-\pi, \pi]$. Смысл превращения простенькой функции во что-то менее понятное поясним ниже.

Сразу же заметим, что по соображениям чётности искомый ряд содержит только синусы. Нормы функций $\cos nx$ и $\sin nx$ равны, а сумма их квадратов равна длине отрезка. Интегрированием по частям находим коэффициенты

$$c_n = \frac{(\sin nx, x)}{\|\sin nx\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \dots$$
$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1}.$$

Получился ряд $2\sum(-1)^{n+1}n^{-1}\sin nx$ из примера Абеля в самом начале этой главы.

Решение уравнений. Допустим, например, нужно решить уравнение колебаний $\ddot{y} + y = f(t)$, причём вынуждающая функция $f(t)$ имеет период 2π, но не входит в тот очень короткий список функций, для которых можно написать решение явно (тригонометрические полиномы). Разложение $f(t)$ по тригонометрической системе называется её **рядом Фурье**. Оно позволяет решить уравнение отдельно для каждой вынуждающей гармоники и таким образом получить ряд Фурье для решения исходного уравнения.

Указанный подход широко применяется и для более сложных уравнений. Многие из них возникают при решении классических уравнений математической физики с оператором Лапласа. Для наиболее распространённых типов симметрии возникают различные уравнения; их простейшие решения образуют важнейшие ортогональные системы, по которым раскладывают решения исходного уравнения. Например, свойства этих систем ответственны за структуру электронных оболочек в атомах. Различные аспекты этих вопросов подробно освещены в нескольких курсах: основах функционального анализа, квантовой механике, математических методах физики.

Равенство Парсеваля. На плоскости разложению по ортогональному базису соответствует теорема Пифагора (известная в Китае и Вавилоне за тысячу лет до Пифагора). Аналогичное утверждение верно для разложения функции по ортогональной системе:

$$(f, f) \overset{?}{=} \sum \overline{c_m}(\varphi_m, f) \overset{?}{=} \sum\sum \overline{c_m}c_n(\varphi_m, \varphi_n) = \sum |c_n|^2(\varphi_n, \varphi_n).$$

Равенство Парсеваля для конкретных функций позволяет вычислить суммы многих важных числовых рядов.

Пример. Для функции $f(x) = x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ найдём простым интегрированием $\|x\|^2 = \frac{2}{3}\pi^3$. Учитывая, что $\|\varphi_n\|^2 = \pi$, в силу найденного выше разложения этой функции приходим к формуле

$$\sum_{n\geqslant 1} n^{-2} = \pi^2/6.$$

Вычисление этой суммы было проблемой почти сто лет, а её решение прославило Эйлера (его оригинальный метод был другим).

Аналогичным образом можно найти значения

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$$

для чётных $s > 0$. Значения для нечётных $s > 1$ весьма таинственны как числа, о чём, правда, не догадываются большинство физиков, встретивших в термодинамике число $\zeta(3)$ и вполне удовлетворившихся его приближённым значением.

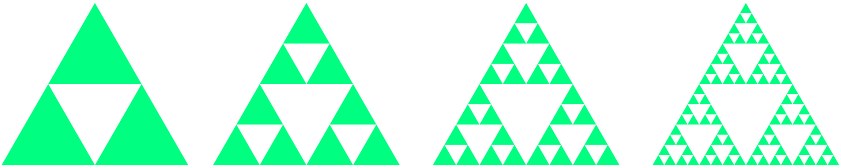
Дзета-функция Римана расширяется почти на всю комплексную плоскость и в таком виде является одной из величайших загадок в математике. Она управляет распределением простых чисел.

16.8. Немного фракталов

В этом разделе собраны различные примеры множеств и функций. Большинство из них были придуманы в эпоху формализации классического анализа школой Вейерштрасса, или несколько позже, в качестве контрпримеров к каким-то утверждениям, считавшимся интуитивно очевидными или даже доказанными. Необычность структуры, присущая всем им, вместе с контринтуитивным поведением, казавшимся от того противоестественным, вызвала ответную реакцию, и эти примеры стали называть «патологическими».

Однако подобные вещи стимулируют новые исследования, ведущие к новым теориям и результатам, к более точной и сильной математике. Эффект похож на открытие иррациональных чисел в древности. Анализ XX века и многие его применения развились благодаря этим примерам в том числе.

Общей чертой всех фракталов является самоподобие: сколь угодно маленькие фрагменты фрактала при соответствующем увеличении



масштаба очень похожи на его весь. Мы рассмотрим только некоторые примеры, простые в построении. Тут характерно повторение элементарной операции до бесконечности на уменьшающихся масштабах. После конечного числа шагов мы имеем дело лишь с очередным приближением, вовсе не патологическим.

Треугольные образы. Замечательных приближений к фракталам хватает в природе: деревья, облака, горы, береговые линии. Не вполне ясно, какой фрактал отметился в математике первым. По-видимому, легче всего их устроить на основе простейших двумерных образов.

Построение **треугольника Серпинского** начинается с замкнутого равностороннего треугольника. На первом шаге выбрасываем открытый треугольник, образованный серединами сторон исходного. Остаётся три замкнутых треугольника. Вот и повторяем выбрасывание для каждого наличного треугольника. Некоторое приближение к треугольнику Серпинского присутствует в виде итальянской мозаики XIII века.

Дискретные формы, напоминающие последовательные приближения к треугольнику Серпинского, появляются в треугольнике Паскаля, составленном из биномиальных коэффициентов, если заинтересоваться их чётностью. Относительно недавно это же явление отмечено в теории конечных автоматов.

Снежинка Коха появилась чуть позже большинства фракталов, приводимых в этом разделе, но в нашем курсе первым был повод указать именно на неё: эта ограниченная непрерывная линия не имеет длины (не спрямляемая). Также она не имеет касательной ни в одной точке; иными словами, её координаты дают другие примеры функций обсуждаемого ниже типа — нигде не дифференцируемых.

Построение опять же основано на равносторонних треугольниках, хотя после первого шага появляется шестиугольная симметрия.

Каждая итерация даёт ломаную линию, то есть график непрерывного отображения отрезка в плоскость. Дальнейшие итерации вносят коррекции на всё более мелких масштабах и получается равномерная сходимость, которую несложно ввести для отображений покомпонентно (как и ранее поточечную). добавить старое

Фрактальная размерность. Единичный квадрат можно покрыть одним единичным кругом (радиус 1, а диаметр 2). Но если покрывать тот же квадрат кругами малого радиуса r, то сколько их потребуется? Ответ $N(r) \propto r^2$, где значок указывает на эквивалентность функций с точностью до умножения на константу.

В аналогичной задаче для трёхмерного куба потребуется $N(r) \propto r^3$ шариков радиуса r. В обоих случаях $\ln N(r)/\ln r$ при $r \to 0$ стремится к целому числу, равному размерности покрываемого множества. Вместо шариков можно брать кубики или другие окрестности.

Для треугольника Серпинского такой предел равен $\ln 3/\ln 2 \approx 1.58$. Дробные значения получаются и для других фракталов. Само их название образовали от латинского корня, значащего «дробный».

Упражнение. *Вычислите фрактальную размерность снежинки Коха. То, что она строго больше единицы, влечёт неспрямляемость.*

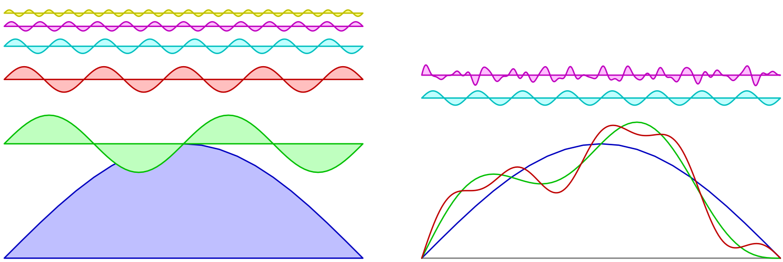
Нигде не дифференцируемые функции. Гаусс, Коши и их современники, располагая только наивным определением предела, считали, что всякая непрерывная функция дифференцируема почти на всей области определения, то есть исключительных точек «мало».

Вероятно, первый пример непрерывной функции, не дифференцируемой нигде, построил Больцано, но другие математики не знали о нём почти сто лет, да и сейчас мало кто знает. В его примере функция является равномерным пределом ломаных. На этой же идее основано большинство более поздних примеров.

рисунок Риман предложил рассмотреть сумму ряда

$$f(x) = \sum n^{-2} \sin n^2 x.$$

Почленное дифференцирование даёт расходящийся ряд. Эта функция оказалась не имеющей производной в большинстве точек, но не везде, причём последнее настолько неочевидно, что доказать дифференцируемость в отдельных точках смогли лишь более чем через сто лет.



Борясь с функцией Римана, Вейерштрасс придумал первый немедленно успешный и влиятельный пример искомого сорта. Его функция является суммой ряда

$$\sum b^{-n} \cos a^n x$$

при подходящих параметрах a и b. Например, годятся $a = b = 2$.

Изучим подробнее аналогичную функцию Такаги (пудинг)

$$f(x) = \sum 2^{-n} z(2^n x),$$

в которой косинус заменён на зигзагообразную 1-периодическую функцию $z(x)$, вычисляющую расстояние до ближайшего целого числа: рисунок

$$z(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 1 - x & \text{при } 1 \geqslant x \geqslant 1/2, \\ z(x \pm 1) & \text{при } x < 0 \text{ или } x > 1. \end{cases}$$

Поэтому графики частичных сумм этого ряда — ломаные.

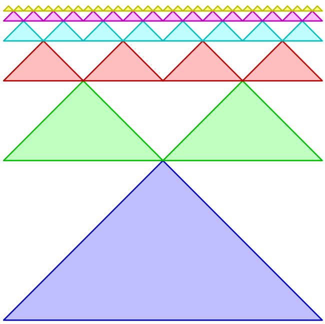
Теорема. *Функция Такаги не дифференцируема ни в одной точке.*

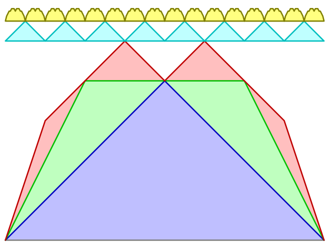
Доказательство. Поищем противоречие с её дифференцируемостью в произвольной точке $c \in [0, 1]$. Для этого построим сперва последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, содержащих c и полученных делением пополам, начиная с отрезка $[a_0, b_0] = [0, 1]$. Тогда рисунок

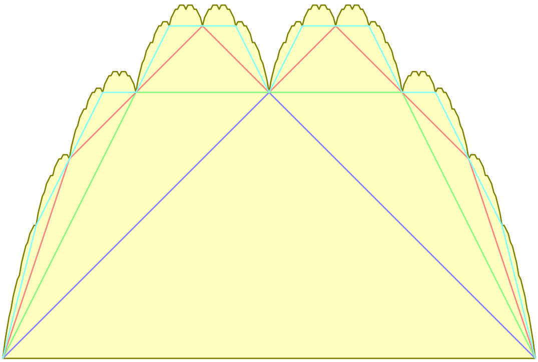
$$[a_n, b_n] = [k_n/2^n, (k_n + 1)/2^n]$$

для некоторой целочисленной последовательности $\{k_n\}$, совершенно не важной далее. Введём угол наклона стягивающей график хорды:

$$r_n = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}.$$







Фокус в том, что ряды, определяющие $f(a_n)$ и $f(b_n)$, в таких точках конечны и на каждом шаге прирастают одним слагаемым. Отсюда можно убедиться, что последовательность $\{r_n\}$ скачет на ± 1 на каждом шаге. Поэтому она не может сходиться, хотя $a_n \to c$ и $b_n \to c$.

Однако для функции, дифференцируемой в точке c, такая последовательность обязана сходиться к $f'(c)$ практически по определению. То обстоятельство, что тут обе точки движутся, а в определении производной как предела одна из них сразу совпадает с c, не является затруднительным, ибо ликвидируется преобразованием дроби:

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \frac{b_n-c}{b_n-a_n}\cdot\frac{f(b_n)-f(c)}{b_n-c} + \frac{a_n-c}{a_n-b_n}\cdot\frac{f(a_n)-f(c)}{a_n-c}.$$

При этом сумма выделенных коэффициентов равна единице. □

Называть подобные функции патологическими сейчас уже странно. Они характерны для броуновского движения и стохастических процессов любой природы, поэтому используются в широком спектре дисциплин, от финансовой математики (биржевые курсы) до компьютерных технологий (сжатие информации через вейвлет-преобразование).

Канторово множество и друзья. Процесс начинается с отрезка $C_{(0)} = K = [0,1]$. Поделим его на три равные части и выбросим среднюю (открытую). Осталось замкнутое множество

$$C_{(1)} = K_0 \cup K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

На втором шаге поступим таким же образом с отрезками K_0 и K_1: поделим каждый на три равные части и выбросим среднюю. Осталось

$$C_{(2)} = K_{00} \cup K_{01} \cup K_{10} \cup K_{11}.$$

После третьего шага остаётся объединение 2^3 отрезков длины $1/3^3$. Продолжая до бесконечности, получим последовательность уменьшающихся замкнутых множеств $\{C_{(n)}\}$. рисунок

Пересечение всех их и есть стандартное **канторово множество** C. Оно замкнуто, будучи пересечением замкнутых. Оно не включает ни одного отрезка, поскольку каждый отрезок на каком-то шаге будет либо выброшен полностью, либо разделён. Оно пренебрежимо, ибо

$$\mu(C_{(n)}) = (2/3)^n \to 0.$$

Наконец, оно несчётно (точки не могут быть перенумерованы): по построению оно находится во взаимно однозначном соответствии со множеством бесконечных двоичных дробей. Вернее, если вместо цифры 1 в дроби всегда писать 2 и считать дроби троичными, то каждой точке соответствует именно то вещественное число в троичной записи, которое задаёт её положение на исходном отрезке числовой прямой.

За несколько лет до немца Кантора, основателя теории множеств, названное впоследствии его именем множество независимо узрели британец, француз и итальянец. Смит и Дюбуа-Реймон интересовались интегрированием разрывных функций, Кантор на тот момент — множествами, на которых расходятся тригонометрические ряды. Вольтерра использовал свою версию для построения функции, производная которой на отрезке существует везде, ограничена, но не интегрируема (по Риману, иного ещё не знали).

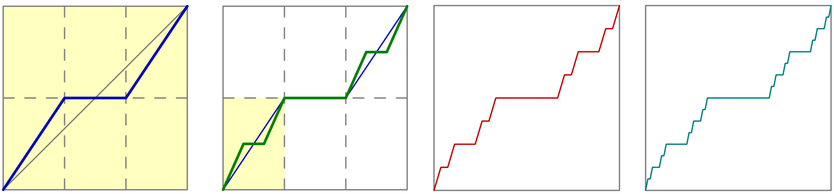
Чтобы достичь неинтегрируемости, пренебрежимое множество не годилось, поэтому Вольтерра выбрасывал меньшие интервалы: на первом шаге один длиной $1/4$, на втором — два длиной $1/4^2$ каждый, на n-ом — 2^{n-1} интервалов длиной $1/4^n$ каждый. Таким образом, всего он выкинул интервалов суммарной длиной $1/2$. То, что осталось, теперь называют **толстым** канторовым множеством. По сказанному, его внешняя мера Жордана равна $1/2$, а внутренняя, как и у стандартного худого аналога, равна 0, ибо оно не содержит ни одного отрезка. Получился пример компактного множества, не измеримого по Жордану.

На выкинутых интервалах Вольтерра вклеивал чуть подрезанный график функции $x^2 \sin \frac{1}{x}$, сдвигая интересную точку к краям интервала. Эта вспомогательная функция везде дифференцируема, но вблизи нуля её производная не имеет предела. Поэтому производная функции Вольтерра разрывна на непренебрежимом множестве, что ей обеспечивает неинтегрируемость (общая теорема доказана Лебегом позже).

С канторовым множеством связана интересная функция. Её построение на отрезке $[0,1]$ начинается с тождественной функции $f_0(x) = x$. На первом шаге строится непрерывная кусочно-линейная функция f_1 со значениями

$$f_1(0) = 0, \quad f_1(1/3) = f_1(2/3) = 1/2, \quad f_1(1) = 1.$$

рисунок Затем f_2 определяется заменой обоих участков, где f_1 не постоянна, на зигзаги — уменьшенные копии построенного на первом шаге. Продолжая до бесконечности, получим равномерно сходящуюся последовательность непрерывных (кусочно-линейных) функций $\{f_n\}$.



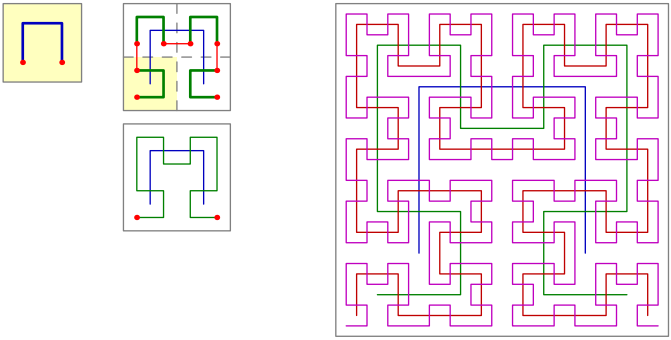
Предельную функцию $f(x)$ называют **канторовой лестницей**, иногда по-красочнее — чёртовой лестницей. Она непрерывна. Она постоянна на каждом интервале, не содержащем точек канторова множества; поэтому она почти всюду дифференцируема и имеет нулевую производную. Функции такого типа называют **сингулярными**; их изучают в теории меры и теории вероятностей. Они нашли приложения не только в физике, но добрались даже до медицины.

Налицо нарушение фундаментальной теоремы анализа:

$$f(1) - f(0) \neq \int_{[0,1]} f'.$$

При этом f' не содержит дельта-функцию, ведь это дало бы разрыв самой функции f. Разумеется, фундаментальная теорема остаётся верной для хороших функций, но сингулярные указывают на необходимость уточнения её формулировки. Это мы обсудим в последней главе.

Кривые Пеано. Всего несколько лет прошло после появления идеи о вещественных числах как пополнении рациональных, когда Кантор,

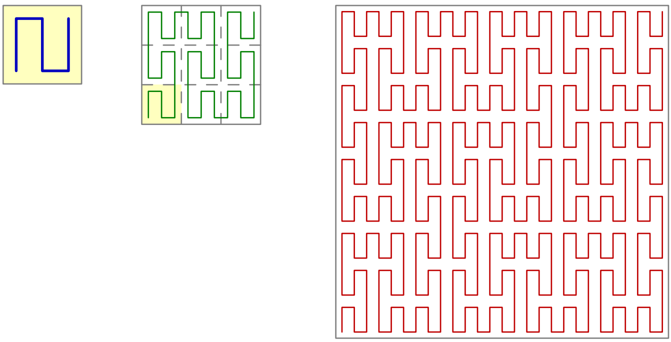


создавая свою теорию множеств, придумал биективное отображение отрезка на квадрат, шокировав всех, включая себя, тем, что они содержат одинаковые «количества» точек. Вскоре Жордан предложил формальное определение кривой как непрерывного образа отрезка.

Пеано решил проверить, возможно ли непрерывное отображение отрезка на квадрат. Биективность невозможна, поскольку квадрат без одной внутренней точки связен, а отрезок соответственно нет. Поразительное свойство, найденное Пеано, это сюрьективность вместе с непрерывностью. Кривые Пеано покрывают квадрат целиком, имея при том точки, проходимые по нескольку раз. Строится такая кривая как равномерный предел ломаных, не имеющих самопересечений.

На рисунках вверху показана идея итерационного процесса и первые четыре приближения к заполняющей квадрат кривой в варианте Гильберта. На рисунках внизу показаны первые три приближения к исходной кривой Пеано.

Жюлиа?

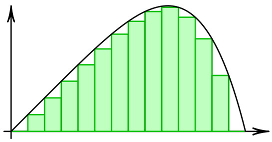


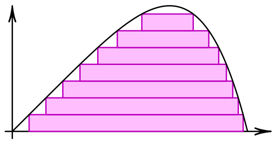
Глава 17. ОБЗОР ТЕОРИИ ЛЕБЕГА

лекция 25
19.05.16

Цель теории меры — распространить понятия длины, площади, объёма на возможно более широкие классы множеств. Наилучшее решение для подмножеств $\mathbb{R}^n$ нашёл Лебег и затем построил новую теорию интегрирования, закрывшую множество проблем.

Здесь мы попытаемся ухватить лишь важнейшие моменты основ «нового» анализа, опуская значительное количество формальных построений и проверок. Если даже это изложение слишком трудно, то можно хотя бы уловить основное различие между интегралом Римана и интегралом Лебега на картинках.





17.1. Элементарные и пренебрежимые

Следует сразу отметить, что имеется немало разных подходов к построению меры Лебега, но (при отсутствии ошибок) все они приводят к одному результату.

Элементарные множества. Построим меру Лебега на подмножествах пространства $\mathbb{R}^d$. **Параллелепипедом** называем декартово произведение $P = I_1 \times \cdots \times I_d$, где каждый множитель $I_i = [a_i, b_i]$ является отрезком или (редко) одной точкой. Мерой этого параллелепипеда, естественно, считаем произведение длин

$$\mu(P) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} (b_i - a_i).$$

При построении меры Жордана конечные наборы параллелепипедов, покрывающие данное множество, используются для определения его внешней меры как точной нижней грани мер таких покрытий. Рассмотрим на примере, что происходит, когда разрешены бесконечные последовательности параллелепипедов.

Пример. Возьмём множество $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ рациональных точек на отрезке. Покрытие E конечным набором отрезков покрывает весь отрезок $[0, 1]$, равный замыканию E. Внешняя мера Жордана множества E равна 1, а внутренняя равна 0, поскольку E не включает ни одного отрезка.

Бесконечную же последовательность можно организовать хитрее. Все элементы E укладываются в одну последовательность $\{q_k\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ последовательность отрезочков длины $\varepsilon/2^k$ с центрами в q_k покрывает E, но их суммарная мера равна ε. Поэтому, если основывать вычисление внешней меры на покрытиях последовательностями отрезков, для E получим 0 и согласие с его внутренней мерой.

Подобный приём покрытия очень распространён в теории меры.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^d$ **элементарно** по Лебегу, если

$$E = \bigcup P_k$$

для некоторой последовательности параллелепипедов $\{P_k\}$.

Здесь важно именно равенство, а не просто включение $E \subseteq \bigcup P_k$, при котором говорят о покрытии. Поэтому мы найдём другое слово, принимая во внимание ещё одно обстоятельство. Для сокращения последующих оговорок удобно считать, что параллелепипеды покрытия имеют попарно не пересекающиеся внутренности: $P_k^\circ \cap P_l^\circ = \varnothing$ при $k \neq l$. Иными словами, каждая точка является внутренней для не более чем одного параллелепипеда. Тогда можно говорить, что параллелепипеды **почти** не пересекаются. Такие покрытия назовём **замощениями** и введём специальный значок, $E = \bigsqcup P_k$, хотя его стандартный смысл несколько иной: обычно он показывает, что все попарные пересечения объединяемых множеств пусты, но здесь отличие пренебрежимо.

Упражнение. *Когда последовательность $\{P_k\}$ изначально не обладает свойством почти пустоты пересечений, его всегда можно добиться, разбивая параллелепипеды на части.*

рисунок

Упражнение. *Если разрешить замощения несчётным семейством параллелепипедов, то почему не получается полезной теории?*

Лемма. *Если замостить одно множество последовательностями параллелепипедов двумя способами, $\bigsqcup P_k = \bigsqcup P'_k$, то суммы неотрицательных рядов $\sum \mu(P_k)$ и $\sum \mu(P'_k)$ будут равны.*

Эта лемма позволяет назвать мерой Лебега элементарного множества $\bigsqcup P_k$ сумму ряда $\sum \mu(P_k)$ с неотрицательными слагаемыми, как конечную, так и бесконечную (когда ряды расходятся). Обращение с множествами бесконечной меры часто требует дополнительных замечаний, поэтому впредь для простоты считаем, что все рассматриваемые множества лежат в фиксированном кубе. К общему случаю обычно переходят, замощая пространство единичными кубами.

Упражнение. *Объединение и пересечение элементарных множеств элементарны.*

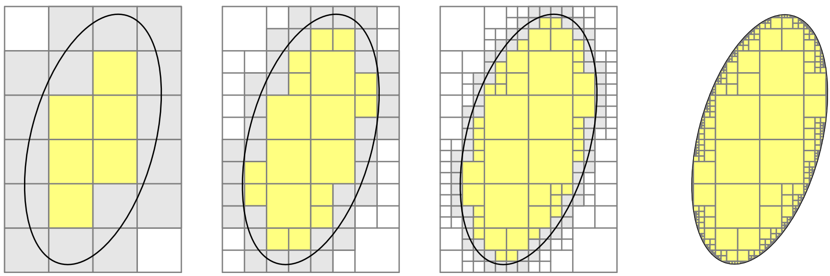
Упражнение. *Для всех ограниченных элементарных множеств*

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2).$$

Теорема. *Всякое открытое множество элементарно.*

Доказательство. Замощающую последовательность кубиков для открытого множества X строим пошагово; количество шагов будет счётно. Сперва рассмотрим кубики с целочисленными координатами вершин и включим в любом порядке все кубики, лежащие внутри X. Не пересекающиеся с X вообще отбросим, а пересекающиеся измельчим, рисунок деля пополам каждую сторону. К полученным кубикам применим эту же процедуру с тремя исходами, и так до бесконечности. Остановиться после конечного числа шагов невозможно, кроме как при $X = \varnothing$ либо $X = \mathbb{R}^d$, ибо тогда открытое X окажется объединением конечного набора замкнутых кубиков, а потому замкнутым.

Ни одна точка вне X не попадёт в объединение кубиков построенной последовательности. Каждая точка X, в силу его открытости, входит в X вместе со своей окрестностью U; внутри U на каком-то шаге обязательно окажется содержащий эту точку кубик $C \subset X$, включённый по этой причине в нашу последовательность. $\square$



Пренебрежимые множества. Особо выделяется класс множеств, присутствие или влияние которых обычно можно не замечать, что весьма существенно для дальнейшего углубления анализа.

Определение. Множество называют **пренебрежимым**, если оно покрывается элементарным множеством сколь угодно малой меры.

Упражнение. *Каждое подмножество пренебрежимого множества пренебрежимо.*

Упражнение. *Каждое счётное множество пренебрежимо.*

Удивительно, но пренебрежимое множество может быть и несчётно: такой пример доставляет стандартное (худое) канторово множество. Пренебрежимые множества могут быть устроены весьма сложно.

Упражнение. *Объединение всякой последовательности пренебрежимых множеств пренебрежимо.*

Определение. Говорят, что высказывание $P(x)$ верно **почти для всех** $x \in A$, или **почти всюду** на A, если существует такое пренебрежимое $A_0 \subseteq A$, что $P(x)$ верно для всех $x \in A \setminus A_0$.

Пример. Множество рациональных чисел пренебрежимо. Его характеристическая функция — функция Дирихле

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

почти всюду равна нулю.

Эта функция разрывна в каждой точке. Она не интегрируема по Риману даже на отрезке, но окажется интегрируемой по Лебегу: её интеграл по $\mathbb{R}$ равен равен мере $\mathbb{Q}$, то есть нулю.

Пример. Функция Римана, схожая с функцией Дирихле из предыдущего примера, разрывна в рациональных точках и непрерывна в иррациональных. Она интегрируема и по Риману, и по Лебегу.

Критерий интегрируемости по Риману. Понятие пренебрежимого множества позволило Лебегу установить, наконец, какие функции интегрируемы по Риману. Самое простое рассуждение опирается на свойства колебания, которые нам сперва нужно изучить.

Колебание функции в точке вводится как предел

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta \to 0} \omega_f(x, \delta)$$

её колебания на δ-окрестности,

$$\omega_f(x, \delta) = \sup |f(u) - f(v)|, \text{ где } u, v \in B_\delta(x).$$

Колебание ненулевое в точности в точках разрыва функции.

Лемма. *Для всякой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ множества*

$$D_\varepsilon = \{x \in X \mid \omega_f(x) \geqslant \varepsilon\}$$

замкнуты при всех $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Проще показать, что дополнение D_ε открыто. Когда точка вне D_ε, на некоторой её окрестности U все значения f находятся близко друг от друга, ближе расстояния ε. У каждой точки $x \in U$ есть окрестность $B_\delta(x) \subset U$. Поэтому $\omega_f(x, \delta) < \varepsilon$ и $U \cap D_\varepsilon$ пусто. □

Теорема (Лебег)**.** *Для всякой ограниченной функции на компакте равносильны следующие условия:*

(1) *она интегрируема по Риману;*
(2) *она почти всюду непрерывна;*
(3) *множество её точек разрыва пренебрежимо.*

Второе и третье условия тут равносильны по определениям, а в доказательстве нуждается только их равносильность первому.

Доказательство. Обозначим разность между верхними и нижними суммами Дарбу, смутно появляющимися в контексте, через Δ.

($1 \Rightarrow 3$) Предположим противное и представим множество точек разрыва D как объединение последовательности $D_{1/n}$ по всем натуральным n. Хотя бы одно $D_{1/k}$ должно быть непренебрежимым по результату последнего упражнения. Если его не удаётся покрыть элементарным меры меньше δ, то оно вносит вклад как минимум δ/k в Δ при любом замощении. Тогда f не может быть интегрируемой.

($3 \Rightarrow 1$) Для функции на компакте X множество «больших» разрывов $D_\varepsilon \subset X$ не только замкнуто, а даже компактно. Покроем его открытыми параллелепипедами общей меры меньше ε и выберем конечное подпокрытие. Тут вклад в Δ при любом замощении меньше, чем $2M\varepsilon$, где $M = \sup|f(x)|$.

рисунок

На остальной части X сделаем конечное замощение настолько мелким, что колебание функции на каждом параллелепипеде меньше ε. Тогда тут вклад в Δ меньше, чем $K\varepsilon$, где K есть мера любого куба, содержащего X. Итого $\Delta < (2M + K)\varepsilon \to 0$. □

Упражнение. *Раньше в курсе появлялись похожие приёмы доказательства. Найдите их и сравните с этим.*

Полезно обратиться теперь к предыдущему случаю применения колебания. Это было в доказательстве интегрируемости равномерного предела последовательности интегрируемых функций. Сложности того рассуждения с суммами Дарбу можно заменить на сравнение множеств вида D_ε для предельной функции f и достаточно близкого приближения f_n. Оно покажет, что в пределе множество разрывов остаётся пренебрежимым.

17.2. Мера Лебега

Внешняя мера. Распространить меру на все подмножества $\mathbb{R}^n$ и получить при этом ожидаемые хорошие свойства оказывается невозможным. Те, на которые удаётся, называют измеримыми. Важность меры Лебега в том, что этот класс содержит все практически возникающие множества.

Что касается самого определения, именно на этом шаге есть много вариантов. Фактически получается некий комплекс равносильных свойств, хотя доказательства их равносильности не всегда легки.

Определение. Для всякого множества $A \subset \mathbb{R}^d$ назовём **внешней мерой**

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(E) \mid A \subseteq E \text{ и } E \text{ элементарно}\}.$$

Упражнение. *Если $A \subseteq B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.*

Упражнение. *Для всех множеств верны неравенства*

$$\mu^*(A \cup B) \trianglelefteq \mu^*(A) + \mu^*(B),$$
$$\mu^*(A \triangle B) \trianglerighteq |\mu^*(A) - \mu^*(B)|.$$

Это должно напоминать неравенство треугольника: объединение множеств аналогично сумме, а внешняя мера — абсолютному значению, или расстоянию до пустого множества. Треугольные неравенства, вместе с ближайшими обобщениями, нужны при выводе основных свойств ещё не построенной меры.

Упражнение. *Обобщите треугольное свойство на конечные наборы:*

$$\mu^*\Big(\bigcup A_n\Big) \trianglelefteq \sum \mu^*(A_n).$$

Упражнение. *Обобщите на любую последовательность $\{A_n\}$.*

При строгом построении теории приходится доказывать геометрически очевидное утверждение, что никаким покрытием не удаётся сделать внешнюю меру параллелепипеда меньше его объема.

Измеримые множества. Что значит: два множества отличаются «мало»? То, что «мала» их симметрическая разность. Это приводит к следующему определению.

Определение. Множество A называют **измеримым** по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое элементарное множество E, что

$$\mu^*(A \triangle E) < \varepsilon.$$

Тогда **мерой** $\mu(A)$ считают $\mu^*(A)$.

Упражнение. *Здесь достаточно брать $E \supseteq A$.*

Простейшие свойства (которыми также обладает мера Жордана) легко вывести из определений.

Упражнение. *Если A и B измеримы, то $A \setminus B$ измеримо. Следовательно, $A \cup B$ и $A \cap B$ тоже измеримы.*

Упражнение. *Если $A \subseteq \mathbb{R}^m$ и $B \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы, то $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ измеримо.*

Дальнейшие свойства — новые и имеют свои названия.

В качестве альтернативного определения измеримого множества мы могли бы взять свойство, показывающее, что таковое сколь угодно близко как к открытому, так и к замкнутому.

Теорема (регулярность). *Ограниченное множество A измеримо по Лебегу $\iff$ для любого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F и открытое множество G такие, что $F \subseteq A \subseteq G$ и $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.*

В отличие от открытых, замкнутые множества не обязательно элементарны. Однако каждое замкнутое множество измеримо по Лебегу, будучи дополнением открытого. Пример замкнутого множества, не измеримого по Жордану, у нас был: толстое канторово множество.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Имеем

$$\mu^*(A \bigtriangleup G) = \mu^*(G \setminus A) \leqslant \mu^*(G \setminus F) = \mu(G \setminus F) < \varepsilon,$$

а потому A измеримо в силу произвольности ε и элементарности G.

($\Rightarrow$) Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое элементарное множество $E \supseteq A$, что $\mu(E \setminus A) < \varepsilon$. Каждый замкнутый параллелепипед в замощении E немного увеличим до открытого так, что их объединение будет открытым множеством $G \supseteq E$ и при том $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$. Тогда $\mu(G \setminus A) \leqslant \cdots < 2\varepsilon$.

Перейдём к дополнениям (в ограничивающем большом кубе), повторим построение из предыдущего абзаца для них и снова перейдём к дополнениям. Получим замкнутое множество $F \subseteq A$ с $\mu(A \setminus F) < 2\varepsilon$. Тогда $\mu(G \setminus F) \leqslant \cdots < 4\varepsilon$. □

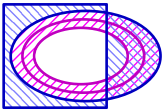
Следствие. *Для всякого измеримого множества A*

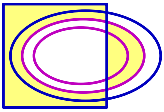
$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid A \supseteq F \text{ и } F \text{ замкнуто}\},$$
$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) \mid A \subseteq G \text{ и } G \text{ открыто}\}.$$

Следствие. *Всякое измеримое множество можно представить, с точностью до пренебрежимых множеств, как пересечение последовательности открытых множеств и как объединение последовательности замкнутых множеств.*

Теорема (полнота)**.** *Когда два измеримых множества отличаются на пренебрежимое, все множества между ними измеримы и имеют ту же меру.*

Доказательство. Традиционно тут берут $A \subseteq C$ и $\mu(C \setminus A) = 0$. Изобразим $A \subseteq B \subseteq C$ овалами, а элементарное E квадратом. Заштрихуем $C \bigtriangleup E$ и $C \setminus A$. Поскольку C измеримо и $C \setminus A$ пренебрежимо, считаем, что внешняя мера каждой области, получившей хоть одну штриховку, меньше ε. Тогда на втором рисунке видим, что $\mu^*(B \bigtriangleup E) < 4\varepsilon$. Кроме того, $\mu(A) \leqslant \mu(B) \leqslant \mu(C) \trianglelefteq \mu(A) + 4\varepsilon$, а потому $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$.





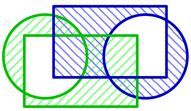
Более общую ситуацию $A \not\subseteq C$ и $A \not\supseteq C$, но при том $\mu(A \bigtriangleup C) = 0$, вспоминают редко; «между ними» тогда означает $A \cap C \subseteq B \subseteq A \cup C$, а прежнее рассуждение применимо к $A \cap C$ и $A \cup C$. □

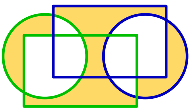
Аддитивность. Превратим треугольное неравенство для внешней меры в равенство для меры. Необходимое для этого противоположное неравенство в основном случае двух множеств чудесным образом выводят опять же из треугольного, жонглируя множествами.

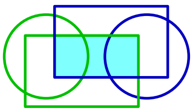
Теорема. *Если A_1 и A_2 измеримы и не пересекаются, то*

$$\mu(A_1 \sqcup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Доказательство. Изобразим A_1 и A_2 кругами, а элементарные E_1 и E_2 прямоугольниками. Комбинаторика рисунка полно отражает ситуацию в случае пустого $A_1 \cap A_2$: всего 12 областей, а не 16.







Заштрихуем $A_k \bigtriangleup E_k$. Пользуясь измеримостью A_k, считаем, что мера каждой области, получившей хоть одну штриховку, меньше ε. Полагая $A = A_1 \sqcup A_2$ и $E = E_1 \cup E_2$, увидим на втором рисунке

$$\mu(A) \trianglerighteq \mu(E) - \mu(A \bigtriangleup E) > \mu(E) - 5\varepsilon.$$

Для элементарных знаем равенство

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2),$$

и вычитаемое видим на третьем рисунке. Далее,

$$\mu(E_k) \geqslant \mu(A_k) - \mu(A_k \bigtriangleup E_k) > \mu(A_k) - 6\varepsilon$$

два раза на первом рисунке. Теперь $5 + 3 + 6 + 6 = 20$, и в итоге

$$\mu(A) > \mu(A_1) + \mu(A_2) - 20\varepsilon.$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получим необходимое неравенство. □

Свойство аддитивности меры можно сразу обобщить на конечные наборы множеств простым приёмом. Для трёх:

$$\mu(A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3) = \mu(A_1 \sqcup A_2) + \mu(A_3) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3).$$

Счётная аддитивность. Источник невиданной ранее мощи меры Лебега в том, что она оказалась удачно настроена, чтобы справляться со счётными бесконечными процессами.

Теорема. *Для всякой последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств измеримы объединение $\bigcup A_n$ и пересечение $\bigcap A_n$.*

Доказательство. Приведём рассуждение для случая ограниченных множеств. Включим объединение $A = \bigcup A_n$ в открытое множество $G = \bigcup G_n$, подбирая открытые $G_n \supseteq A_n$, мало отличающиеся от A_n. Насколько мало? Это предстоит выяснить.

Для любых множеств справедливо включение

$$G \setminus A \subseteq \bigcup (G_n \setminus A_n).$$

Навесим сюда внешнюю меру и применим к правой части недавний аналог неравенства треугольника. Получим

$$\mu^*(G \setminus A) \leqslant \sum \mu^*(G_n \setminus A_n).$$

В силу измеримости A_n, выполнимо требование $\mu(G_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$ для всех n, а это влечёт $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$, то есть измеримость объединения.

Для пересечения перейдём к дополнениям в большом кубе. □

На самом деле, измеримы все множества, задаваемые явной конструкцией без опоры на аксиому выбора в любой форме. Такова сила меры Лебега. Чтобы найти пример неизмеримого множества, аксиома выбора необходима, но здесь мы не будем увлекаться этим предметом, изобилующим занятными парадоксами.

Далее каждое упомянутое множество считаем измеримым.

Теорема (счётная аддитивность)**.** *Для всякой последовательности $\{A_n\}$ попарно не пересекающихся измеримых множеств*

$$\mu\big(\bigsqcup A_n\big) = \sum \mu(A_n).$$

Мера Жордана обладает только конечной аддитивностью: аналогичное утверждение верно для конечных списков, но нарушается для бесконечных последовательностей. Поэтому она является не настоящей мерой, а «недомерой». пример?

Доказательство. Из аддитивности меры для конечного набора,

$$\mu\big(\bigsqcup A_n\big) \geqslant \mu\big(\bigsqcup_{n\leqslant k} A_n\big) = \sum_{n\leqslant k} \mu(A_n),$$

при $k \to \infty$ получим

$$\mu\big(\bigsqcup A_n\big) \geqslant \sum \mu(A_n).$$

Обратное неравенство есть уже известное треугольное. □

Теорема (непрерывность)**.** *Для всякой бесконечной возрастающей последовательности $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ измеримых множеств*

$$\mu\big(\bigcup A_k\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Аналогичное утверждение верно и для убывающей последовательности множеств $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, только объединение заменяется на пересечение.

Упражнение. *Выведите непрерывность из счётной аддитивности.*

Ключевым в общей теории меры является то обстоятельство, что семейство всех измеримых множеств не пусто и операции дополнения и счётного объединения не выводят за его пределы. Такое семейство называют **σ-алгеброй**. Редкий учебник, где этот материал можно найти, обходится без них, а изначальный упор на них затрудняет новичков.

Для теории интегрирования не важно конкретное устройство меры, нужна лишь σ-алгебра множеств и на ней функция множеств, обладающая всеми свойствами меры, установленными здесь для меры Лебега. На этом основана теория вероятностей XX века (Колмогоров).

17.3. Построение интеграла

Измеримые функции. В качестве подготовительного шага к построению интеграла Лебега вводят новый класс функций на измеримом множестве. Делать это можно разными путями.

Определение. Функция $f\colon A \to \mathbb{R}$ называется **измеримой** на A, если измеримы её лебеговские множества $\{x \in A \mid f(x) < c\}$ для всех $c \in \mathbb{R}$, сокращённо обозначаемые через $\{f < c\}$.

Упражнение. *Замена типа неравенства на* $\{f \leqslant c\}$, $\{f > c\}$, *или* $\{f \geqslant c\}$ *даёт равносильное определение. Указание: выразите множество каждого типа через любой другой тип.*

Упражнение. *Всякая непрерывная функция на измеримом множестве измерима.*

Упражнение. *Для пары измеримых функций* f *и* g *на измеримом множестве* A *измеримо множество* $\{x \in A \mid f(x) > g(x)\}$. *Докажите это без опоры на следующую теорему.*

Теорема. *Следующие операции сохраняют измеримость функций:*

(1) *арифметические;*
(2) *поточечные пределы последовательностей;*
(3) *поточечные верхние и нижние пределы последовательностей.*

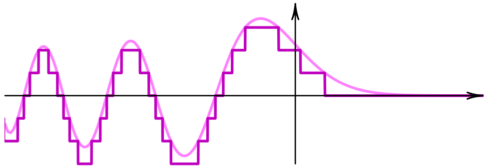
Свобода предельных переходов даёт измеримым функциям большое преимущество по сравнению с непрерывными. С другой стороны, все измеримые функции можно получить предельными переходами из весьма простых и таким образом обозреть этот обширный класс.

Определение. Измеримая функция называется **ступенчатой**, если множество её значений счётно.
рисунок

Часто в качестве ступенчатых берут ещё более простые функции: число значений конечно; каждое множество с ненулевым значением функции является параллелепипедом или конечным их объединением. Итог построения такой же, хотя детали местами отличаются.

Теорема. *Каждая измеримая функция представима как предел равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций.*

Доказательство. Функция $f_n(x) = \lfloor nf(x) \rfloor / n$ для каждого целого
рисунок $n > 0$ измерима и принимает лишь рациональные значения. При этом $\|f_n - f\| \leqslant 1/n$, так что $f_n \rightrightarrows f$. $\square$



Здесь полезно добавить три наблюдения о предложенной последовательности. Во-первых, особенно интересен будет случай неотрицательной функции f. Тогда все f_n тоже неотрицательны.

Во-вторых, последовательность $\{f_n\}$ редко монотонна, а причина того видна уже по функциям $\lfloor 2x\rfloor/2$ и $\lfloor 3x\rfloor/3$. Однако её подпоследовательность с $n = 2^k$ не убывает. Монотонность нужна дальше. рисунок

В-третьих, когда f ограничена, число различных значений каждой f_n конечно. Иначе либо число различных значений f_n бесконечно, либо можно, например, обнулить все значения, превосходящие n по модулю. Равномерная сходимость исчезнет, но поточечная останется.

Определение. Две функции называют **эквивалентными**, если они совпадают почти всюду.

Это действительно отношение эквивалентности, и классы его повсюду встречаются в функциональном анализе, часто по умолчанию. Дело в том, что удобно игнорировать отличия на пренебрежимых множествах. В классическом анализе доминируют непрерывные функции, а для них эквивалентность бессодержательна: если две непрерывные функции отличаются в точке x, то они отличаются и в некоторой окрестности x; окрестность не пренебрежима, так что не равные непрерывные функции никогда не бывают эквивалентны.

Ограниченное построение. Главным в интеграле Лебега является отказ от составления интегральной суммы из вкладов «близких» точек, на котором основан интеграл Римана. Вместо того, точки объединяются по принципу близости значений функции в них. Интеграл строится в несколько шагов от простых функций к более сложным. Для начала разберём их в случае ограниченной функции на множестве A конечной меры.

Напомним, что характеристическая функция χ_A равна единице в точках множества A и нулю в прочих. Разумеется, положим

$$\int_A \chi_A = \mu(A).$$

Ступенчатая функция f определяет разбиение $A = \bigsqcup A_k$ на измеримые множества, на каждом из которых она постоянна: $f(A_k) = c_k$. Тогда $f = \sum c_k \chi_{A_k}$, причём пока достаточно работать с конечными суммами. Положим

$$\int_A f = \sum_k \int_{A_k} f = \sum_k c_k \mu(A_k).$$

Теперь для измеримой функции f возьмём последовательность ступенчатых функций $f_n \rightrightarrows f$ и положим

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n.$$

Разность интегралов от f_n и f_m не больше, чем $\mu(A) \cdot \|f_n - f_m\|_A$, по модулю. Поэтому в случае $\mu(A) < \infty$ последовательность интегралов фундаментальна и имеет конечный предел. Две последовательности дают одинаковые значения предела, ведь их можно объединить в одну, а предел обязан быть и у неё. Поэтому значение интеграла зависит только от f и A, а не от выбора ступенчатых приближений.

Неограниченное построение. Отказавшись от ограниченности функции, мы получим на ступенчатом шаге сумму бесконечного ряда. Если он абсолютно сходится, то функцию называют **суммируемой**. Измеримую функцию, представимую как равномерный предел суммируемых ступенчатых, также называют суммируемой, или **интегрируемой** по Лебегу.

Отказавшись от конечности меры множества, мы сталкиваемся с более значительными трудностями. На ступенчатом шаге проблема та же и решают её также. Суммируемость есть лишь в том случае, когда единственное множество уровня A_k бесконечной меры соответствует значению $c_k = 0$, но необходимо принять соглашение, что $0 \cdot \infty = 0$. Логика его в том, что площадь бесконечной прямой линии равна нулю. Заодно можно допустить к рассмотрению функции, принимающие бесконечные значения, и полагать $\infty \cdot 0 = 0$, чтобы пренебрежимые подмножества по-прежнему никак не влияли на значение интеграла.

Далее, однако, при $\mu(A) = \infty$ последовательность интегралов уже не обязательно фундаментальна и нужно опираться на другие гарантии существования предела. Поэтому начинают с неотрицательных ступенчатых функций. Когда неубывающая последовательность оных приближается к неотрицательной измеримой функции, предел интегралов существует в силу монотонности.

Распространить интеграл на знакопеременные измеримые функции несложно: нужно представить такую функцию как $f = f^+ - f^-$, где

$$f^{\pm}(x) = \max\{\pm f(x), 0\} = \frac{|f| \pm f}{2}$$

неотрицательны. Не случайно этот приём применялся для несобственных кратных интегралов. ссылка

В итоге, **интегралом Лебега** называют разность

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-,$$

когда хотя бы один из интегралов справа конечен; иначе не получается вычитать. Измеримую функцию f называют интегрируемой по Лебегу или суммируемой на A, если её интеграл Лебега на A конечен.

Упражнение. *Функция f измерима на A $\iff$ функции $f^{\pm}$ измеримы на A.*

Упражнение. *Измеримая f интегрируема $\iff$ интегрируема $|f|$.*

Упражнение. *Всякая функция, интегрируемая на A, также интегрируема на каждом измеримом $B \subseteq A$.*

лекция 26
23.05.16

Интегрируемые функции. В доказательствах часто используется интегральная версия неравенства треугольника в сочетании с грубой прямоугольной оценкой: неравенствам

$$\left|\int_A f\right| \leqslant \int_A |f| \leqslant \mu(A) \cdot \sup_{x \in A} |f(x)|$$

удовлетворяет всякая измеримая функция.

Следовательно, чтобы найти пример измеримой, но не интегрируемой функции, придётся брать или неограниченное множество A, или «существенно» неограниченную функцию f. точнее?

Пример. На промежутке $[0, \infty)$ функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ интегрируема по Риману (в несобственном смысле), но не по Лебегу, поскольку интеграл от $|f|$ бесконечен. Лишь при таком колебательном поведении на неограниченном промежутке интегрируемая по Риману функция может быть не интегрируемой по Лебегу.

Теорема. *Если функция интегрируема по Риману в собственном смысле, то она интегрируема по Лебегу и интегралы равны.*

Доказательство. Собственный смысл означает ограниченную функцию на компакте. Всякий компакт измерим по Лебегу, ибо он замкнут, и мера его конечна, ибо он ограничен.

Когда f интегрируема по Риману, выбросим пренебрежимые разрывы и получим непрерывную функцию на измеримом множестве, а она измерима. Исходная функция эквивалентна ей и потому тоже измерима, а ограниченность множества и функции сразу же даёт её интегрируемость по Лебегу.

рисунок

Взяв разбиение, вместо нижних и верхних сумм Дарбу построим тем же путём ступенчатые функции f_* и f^*. Превратим суммы Дарбу в интегралы Лебега от этих функций перегруппировкой конечного количества конечных слагаемых. При измельчении разбиения обе суммы устремятся к общему пределу, равному интегралу Римана от f. Ввиду монотонности интеграла и зажатости $f_* \leqslant f \leqslant f^*$, этот предел равен интегралу Лебега от f. □

17.4. Предельные свойства интеграла

Понятие интеграла мотивировано физически естественными свойствами, которыми искомая математическая конструкция должна обладать: аддитивность, линейность, монотонность. При ближайшем рассмотрении интеграла Лебега видно, что все они сильно улучшаются.

Счётная аддитивность. Аддитивность интеграла Лебега

$$\int_{A \sqcup B} f = \int_A f + \int_B f,$$

где все множества и функция измеримы, устанавливается очень легко для ступенчатых функций, ибо вместо интегралов суммы, и потом предельным переходом распространяется на интегрируемые. Однако это свойство слишком пресно на жгучем фоне счётной аддитивности.

Теорема. *Если множество конечной меры разбито последовательностью своих измеримых подмножеств, $A = \bigsqcup A_k$, то*

$$\int_A f = \sum \int_{A_k} f$$

для всякой функции f, интегрируемой на A.

Обозначим левую часть через $L(f)$, а правую через $R(f)$. Сюда заложены сразу три факта: слагаемые в $R(f)$ конечны; ряд из них абсолютно сходится; сумма ряда равна $L(f)$. При этом первый факт сразу следует из упражнения об интегрируемости на подмножестве.

Поскольку конечность $L(f)$ равносильна конечности $L(|f|)$, сама по себе конечность $R(f)$ недостаточна для конечности $L(f)$, а требуется конечность $R(|f|)$.

Доказательство. Для ступенчатой функции интеграл по A введён как сумма абсолютно сходящегося ряда. Утверждения сводятся к преобразованиям ряда, сохраняющим его сумму.

Для измеримой функции f и ступенчатых приближений f_n имеем

$$|L(f) - R(f)| \leqslant |L(f) - L(f_n)| + |L(f_n) - R(f_n)| + |R(f_n) - R(f)|.$$

Средняя разность уже равна нулю. Крайние разности по отдельности грубо оценим величиной $\mu(A) \cdot \|f_n - f\|_A$, становящейся сколь угодно малой при $f_n \rightrightarrows f$. □

Монотонная сходимость. Линейность интеграла Лебега,

$$\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g,$$

где функции f и g интегрируемы, а α и β константы, устанавливается легко тем же путём, что и аддитивность. Обобщение на линейные комбинации конечного числа функций достигается обычной индукцией по числу слагаемых. Обобщение на последовательности функций возможно при некоторых предположениях; лучше упомянуть их в иной форме, настроенной на будущие приложения к суммированию рядов. рисунок

Две ключевые теоремы дают простые и общие достаточные условия для равенства

$$(*) \qquad \int_A \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n.$$

Основополагающей тут является теорема о монотонной сходимости. Её содержание напоминает один из шагов самого определения интеграла Лебега, но отличия в том, что последовательность берётся не ступенчатых функций, а измеримых, и главное — сходится она лишь поточечно. Хватает даже предположения о сходимости почти всюду.

Теорема (о монотонной сходимости). *Равенство* $(*)$ *выполнено для всякой неубывающей последовательности* $\{f_n\}$ *измеримых функций.*

Отсутствие такого свойства является одной из самых серьёзных проблем интеграла Римана и ограничивает его приложения в науке.

Пример. Перенумеруем все рациональные точки отрезка $[0,1]$ в последовательность $\{x_k\}$. Последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x = x_k \text{ для } k \leqslant n, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

не убывает и сходится на отрезке $[0,1]$ к функции Дирихле. Предельная функция не интегрируема по Риману, хотя каждая функция f_n имеет лишь конечное число разрывов, а потому интегрируема.

Доказательство. Будем предполагать, что f_n неотрицательны, ибо иначе можно первым делом заменить все f_n на $f_n - f_1 \geqslant 0$.

Положим $f = \lim f_n$ и обозначим интегралы так, что искомое равенство $(*)$ запишется в виде $I = \lim I_n$. По монотонности интеграла, неубывание $\{f_n\}$ влечёт неубывание $\{I_n\}$, а неравенство $f_n \leqslant f$ влечёт $I_n \leqslant I$. Следовательно, $\lim I_n \leqslant I$.

Обратное неравенство гораздо хитрее. Для любого малого $\varepsilon > 0$ и любой ступенчатой функции $s \leqslant f$ измеримые подмножества

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in A \mid f_n(x) \geqslant (1-\varepsilon)s(x)\}$$

исчерпывают A, то есть $A_n \subseteq A_{n+1}$ и $A = \bigcup A_n$. Можно даже сказать, что $A_n \to A$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} s = \int_A s$$

хотя бы как вариация на тему счётной аддитивности. В то же время,

$$I_n = \int_A f_n \geqslant \int_{A_n} f_n \geqslant (1-\varepsilon) \int_{A_n} s.$$

Отсюда получим $\lim I_n \geqslant I$, совершая аж три предельных перехода подряд: сперва $n \to \infty$, затем $\varepsilon \to 0$, и наконец $s \to f$. □

Мажорированная сходимость. Монотонность интеграла Лебега — это неотрицательность интеграла от неотрицательной функции. Как имеющуюся по построению, её мы уже успели несколько раз применить. В своём роде, она также допускает очень важное усиление.

Определение. Функция $g \geqslant 0$ называется **мажорантой** для функции f, если $|f(x)| \leqslant g(x)$ для всех $x \in A$.

Нас будут интересовать лишь интегрируемые мажоранты, поэтому определение логично ослабить, требуя выполнения неравенства лишь для почти всех $x \in A$.

Упражнение. *Всякая измеримая функция, имеющая интегрируемую мажоранту на A, сама интегрируема на A.*

Теорема (о мажорированной сходимости)**.** *Равенство* ($*$) *выполнено для всякой сходящейся почти всюду на A последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций с общей интегрируемой мажорантой.*

Теорема о мажорированной сходимости полезна в более сильной форме: для $f_n \to f$ при тех же предположениях получаем

$$\int_A |f_n - f| \to 0.$$

Это сразу даёт равенство ($*$) посредством неравенства треугольника

$$\Big| \int_A f_n - \int_A f \Big| \leqslant \int_A |f_n - f|.$$

Доказательство. Применим к данной последовательности построения, аналогичные проведённым в первом семестре при установлении свойств частичных пределов. Все появляющиеся функции измеримы (упражнение) и имеют ту же мажоранту, а потому интегрируемы.

Организуем из $f_n \to f$ две последовательности

рисунок?

$$f_n^{\uparrow}(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x), \qquad f_n^{\downarrow}(x) = \sup_{k \geqslant n} f_k(x).$$

Первая не убывает, вторая не возрастает, причём по определению

$$\lim f_n^{\uparrow}(x) = \liminf f_n(x), \qquad \lim f_n^{\downarrow}(x) = \limsup f_n(x).$$

Кроме того, почти в каждой точке x значения $f_n(x)$ и $f(x)$ зажаты между $f_n^{\uparrow}(x)$ и $f_n^{\downarrow}(x)$, сходящимися к общему пределу $f(x)$.

По теореме о монотонной сходимости отдельно для $f_n^{\uparrow} \to f$ и $f_n^{\downarrow} \to f$ интегралы от $f_n^{\uparrow}$ и $f_n^{\downarrow}$ стремятся к интегралу от f. Искомое равенство ($*$) следует из зажатости и монотонности интеграла.

Применяя же теорему о монотонной сходимости к невозрастающим последовательностям $|f_n^{\downarrow} - f| \to 0$ и $|f_n^{\uparrow} - f| \to 0$, получим

$$\int_A |f_n^{\downarrow} - f| \to 0, \qquad \int_A |f_n^{\uparrow} - f| \to 0.$$

Теперь неравенство

$$|f_n - f| \leqslant |f_n^{\downarrow} - f_n^{\uparrow}| \leqslant |f_n^{\downarrow} - f| + |f_n^{\uparrow} - f|$$

влечёт искомое усиленное заключение. $\square$

Для семейства функций $f(t,x)$ с параметром $t \in T \subset \mathbb{R}^m$ наличие общей интегрируемой мажоранты является тем свойством, которое позволяет обосновывать операции (пределы и непрерывность, дифференцирование) с интегралами Лебега, зависящими от параметров. На практике отыскивать мажоранты несложно. В целом теоремы здесь ссылки похожи на установленные при первом знакомстве с проблемой зависимости интеграла от параметра и вторично с явным использованием равномерной сходимости, но теперь ситуация намного более общая.

Следует также упомянуть, что для интеграла Лебега вопрос сведе́ния «двойного» интеграла от $f(t,x)$ к повторному решается лаконично теоремой Фубини: конечность двойного интеграла влечёт конечность повторного и их равенство. Доказательство здесь не уместно.

17.5. Неопределённый интеграл

В этом разделе нас интересует интеграл Лебега на отрезке $[a,b]$ и меньших отрезках $[a,x]$.

Вопросы к фундаментальной теореме анализа. С самых начал интегрального исчисления мы знаем и любим основные равенства

$$(\diamondsuit) \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

$$(\heartsuit) \qquad \int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Они верны, когда нет разрывов, для чего f должна быть непрерывна, а F непрерывно дифференцируема. Эти условия можно ослабить уже в классическом анализе: первое верно, когда f непрерывна в самой точке x, а второе — когда F' интегрируема по Риману; правда, последнее условие до Лебега не удавалось выразить конкретнее.

Для каких функций эти равенства верны при интегрировании по Лебегу? Вот краткие ответы: первое оказывается верным почти всюду для всех суммируемых функций, а второе верным для абсолютно непрерывных функций. Это новый класс функций, описанный ниже и более конкретно. Разобрать детали мы здесь не сможем, но постараемся увидеть общую схему и возникшие в ней понятия, уже нашедшие множество применений в науке и находящие всё новые.

Особенно тесно затронутые здесь мотивы связаны с теорией вероятностей, полностью опирающейся на интегрирование по Лебегу. Вероятность есть мера на пространстве событий, но расстояния там нет, а без него нельзя интегрировать по Риману.

Функции скачков. Изучим предварительно разрывные монотонные функции и выделим все разрывы в особую функцию.

Теорема. *Всякая монотонная функция на отрезке имеет не более чем счётное множество скачков и непрерывна вне их.*

Доказательство. Разрывы могут быть только первого рода (скачки), ибо значения функции зажаты между $f(a)$ и $f(b)$. По этой же причине число скачков высоты более $1/n$ конечно. Объединяя по всем целым $n > 0$, получим не более чем счётное множество скачков. $\square$

В точке скачка возможны как разрыв слева при $f(x-0) < f(x)$, так и разрыв справа при $f(x) < f(x+0)$. Вспомогательная **функция скачков** в каждой точке x собирает все разрывы, находящиеся левее x, прирастая только за их счёт. Её задаёт, например, формула

$$h_f(x) = \sum_{x_n \leqslant x} \big(f(x_n) - f(x_n - 0)\big) + \sum_{x_n < x} \big(f(x_n + 0) - f(x_n)\big),$$

где последовательность $\{x_n\}$ как угодно нумерует все точки разрыва. Ряды здесь абсолютно сходятся ввиду монотонности и ограниченности исходной функции f.

Теорема. *Для всякой неубывающей функции f на отрезке разность $\varphi_f = f - h_f$ не убывает и непрерывна.*

Доказательство. Достаточно в каждой точке найти и сравнить пределы слева и справа (упражнение). $\square$

Упражнение. *Производная функции не может иметь скачков.*

Производные монотонных функций. Класс монотонных функций хотя и знаком немного, многие предстоящие сложности упрятываются в новые теоремы о неубывающих функциях.

Упражнение. *Всякая неубывающая функция на отрезке ограничена, измерима, суммируема.*

Теорема. *Производная всякой монотонной функции на отрезке конечна почти всюду.*

У этой теоремы весьма длинное доказательство, но простой наглядный смысл. Производная определена как предел отношения приращений, а его можно понимать как локальный коэффициент растяжения промежутков. Этот коэффициент не может быть бесконечен на множестве положительной меры, поскольку весь конечный отрезок $[a, b]$ растягивается лишь до конечного отрезка $[f(a), f(b)]$.

Теорема. *Производная всякой неубывающей функции F на отрезке $[a, b]$ суммируема и*

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leqslant F(b) - F(a).$$

Отличным примером к обеим теоремам служит канторова лестница: её производная в точках канторова множества бесконечна, вне его нулевая, а неравенство строгое.

Теорема. *Для всякой суммируемой функции f равенство $(\diamondsuit)$ верно на $[a, b]$ почти всюду.*

Разложим измеримую функцию на неотрицательную и неположительную части: $f = f^+ - f^-$. Интеграл по отрезку $[a, x]$ от всякой неотрицательной функции является неубывающей функцией x, поэтому интеграл от измеримой представляется разностью двух неубывающих. По предыдущей теореме, левая часть $(\diamondsuit)$ конечна почти всюду. Утверждаемое равенство затем требует значительных дополнительных усилий и фактов, но это не для нас.

В рамках недолгого взгляда вглубь, изучая вопрос спрямляемости негладких линий, мы встретили класс функций ограниченной вариации. Даже нет необходимости немедленно вспоминать определение, ибо функция ограниченной вариации на отрезке на деле есть разность двух ограниченных неубывающих. Обратить внимание на него здесь нас заставляет разложение $f = f^+ - f^-$. Оно в частности показывает, что $(\heartsuit)$ не может распространяться на более широкий класс. С другой стороны, приведённые теоремы о монотонных функциях, кроме утверждающей неравенство, сразу переносятся на функции ограниченной вариации, что позволяет изучать $(\heartsuit)$ именно в этом классе. Там появляются новые явления.

это было без пояснений

Абсолютно непрерывные функции. Итак, мы хотим найти класс функций, в котором последнее неравенство становится равенством. Уже два типа функций необходимо исключить. Скачки исключить легко: просто требуем непрерывности. Функции типа канторовой лестницы исключить труднее. Непрерывность — слабое понятие, но с этой целью было придумано подходящее его усиление.

Определение. Функцию $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ называют **абсолютно непрерывной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\sum_k |f(a_k) - f(b_k)| < \varepsilon$$

для всякого конечного набора попарно не пересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset (a, b)$ суммарной длины меньше δ.

Позволяя лишь один интервал вместо конечного их набора, получаем равномерную непрерывность. Поэтому всякая абсолютно непрерывная функция равномерно непрерывна.

Определение абсолютной непрерывности дано только на отрезке. На неограниченных промежутках оно уже не так интересно, ибо даже функция $f(x) = x^2$ не абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ (упражнение).

Упражнение. *Абсолютно непрерывными являются все липшицевы функции и все функции со всюду ограниченной производной.*

Пример. Не всякая абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную производную: рассмотрим $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0, 1]$.

Теорема. *Всякая абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию.*

Доказательство. Определение абсолютной непрерывности при $k = 1$ как раз говорит, что вариация на каждом отрезке длины меньше δ не превосходит ε. Разобьём весь отрезок на конечное число таковых. □

Пример. Функция $x \sin \frac{1}{x}$, дополненная нулём при $x = 0$, имеет бесконечную вариацию на отрезке $[0, 1]$ и поэтому не абсолютно непрерывна.

Упражнение. *Канторова лестница не абсолютно непрерывна.*

Лемма. *Если производная неубывающей абсолютно непрерывной функции равна нулю почти всюду, то эта функция постоянна.*

Идея доказательства. Разобьём весь отрезок на множества

$$Z = \{x \mid f'(x) = 0\}, \qquad N = \{x \mid f'(x) \neq 0\}$$

и покажем, что $f(Z)$ и $f(N)$ оба пренебрежимы, но по разным причинам. Их объединение есть непрерывный образ всего отрезка. Тогда он одноточечный, ибо отрезки не пренебрежимы. Для пренебрежимого N это быстро выводят из абсолютной непрерывности. Для Z используют неубывание и технику, развитую в опущенном доказательстве первой теоремы о производной монотонной функции. □

Сделаем отсюда два важных вывода, выделив их в подразделы.

Охват фундаментальной теоремы. Теперь можно быстро закрыть вопрос о равенстве (♡): оно верно для абсолютно непрерывных функций и только для них.

Теорема. *Для всякой суммируемой функции f на отрезке $[a, b]$ её неопределённый интеграл*

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

является абсолютно непрерывной функцией.

Для ограниченных функций утверждение очевидно: если $|f| < M$, то, в силу грубой оценки интеграла, $\delta = \varepsilon/M$ годится при проверке определяющего свойства. Для неограниченных опираются на более тонкое общее свойство интеграла Лебега, также называемое абсолютной непрерывностью.

Что ещё даёт эта теорема? Поскольку левая часть (♡) оказалась абсолютно непрерывна, равенство возможно, только если такова же F сама. Обратную импликацию теперь тоже легко завершить.

Теорема. *Производная всякой абсолютно непрерывной функции F на отрезке $[a, b]$ суммируема на нём и (♡) верно для всех $x \in [a, b]$.*

Доказательство. Функция имеет ограниченную вариацию, и можно представить её как разность неубывающих. Поэтому достаточно установить теорему для неубывающих функций. Тогда функция

$$\sigma_F(x) = F(x) - \int_a^x F'(t)\,dt$$

не убывает (упражнение), абсолютно непрерывна как разность двух абсолютно непрерывных, и $\sigma'_F(x) = 0$ почти всюду, ведь применимо равенство (♢). По лемме, σ_F постоянна, но $\sigma_F(a) = F(a)$. □

Сингулярные функции и разложение Лебега. Возьмём на отрезке любую функцию f с ограниченной вариацией. Отделим скачки от непрерывной составляющей: $f = h_f + \varphi_f$. Производная непрерывной составляющей почти всюду конечна и суммируема, поэтому теперь можно выделить абсолютно непрерывную составляющую

$$\psi_f(x) = \int_a^x \varphi'_f(t)\,dt.$$

Положим ещё $\sigma_f = \varphi_f - \psi_f$. Аналогично последней теореме, равенство (♢) даёт $\sigma'_f(x) = 0$ почти всюду. Непостоянные непрерывные функции ограниченной вариации с этим свойством называют **сингулярными**.

По лемме, никакая функция не может быть одновременно абсолютно непрерывной и сингулярной. Получилось важное разложение.

Теорема. *Всякая функция ограниченной вариации на отрезке разлагается в сумму*

$$f = h_f + \sigma_f + \psi_f$$

трёх составляющих — скачков, сингулярной и абсолютно непрерывной, причём составляющие определены с точностью до постоянной.

Можно подытожить так: интегрирование производной от функции ограниченной вариации восстанавливает не саму функцию, а только её абсолютно непрерывную составляющую. Скачки и сингулярная часть бесследно исчезают. Колмогоров Фомин

17.6. Функциональные пространства Лебега

Конечномерные пространства. Вспомним основные нормы на $\mathbb{R}^d$:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_d|;$$
$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(x_1^2 + \cdots + x_d^2\right)^{1/2};$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}.$$

Вместо двойки годится любое вещественное число $p \geqslant 1$. При $p \to \infty$ шар нормы становится похож на куб с округлёнными вершинами.

Теорема. *В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.*

Утверждение означает, что шар одной нормы всегда лежит в шаре другой, раздутом до достаточного размера. Благодаря этой эквивалентности, в различных вопросах анализа, сводящихся к сходимости последовательностей в $\mathbb{R}^d$, выбор нормы не принципиален и делается, исходя из удобства.

С другой стороны, эвклидова норма соответствует (стандартному) скалярному произведению, $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$, благодаря чему она лидирует по применениям в геометрии.

Функциональные пространства. Развитие анализа и появление большого разнообразия свойств изучаемых функций и методов привело к необходимости выделить наиболее важные классы функций. Самые распространённые свойства, определяющие принадлежность функции к некоторому классу, переносятся на линейные комбинации, поэтому определяемые ими классы являются (обычно бесконечномерными) линейными пространствами. Изучение таких функциональных пространств и составляет основную задачу функционального анализа.

Самый знакомый пример: пространство $C(X)$ непрерывных функций на множестве $X \subset R^d$. На нём определена равномерная норма $\|f\| = \sup_{x \in X}|f(x)|$, позволяющая оценивать близость функций и говорить о сходимости, в данном случае равномерной.

Теория Лебега привнесла в анализ целое семейство новых удобных пространств. Например, $L^1(X)$ почти означает пространство интегрируемых по Лебегу функций на X, хотя тут есть одна тонкость. Нормой функции в этом пространстве служит $\int_X |f|$, но когда две функции отличаются лишь на пренебрежимом множестве, норма их разности равна нулю. По смыслу $\|f - g\|$ это расстояние между f и g как точками функционального пространства; поэтому такие функции объявляются эквивалентными друг другу:

$$f \sim g \iff \|f - g\| = 0.$$

Значит, по-настоящему $L^1(X)$ состоит не из самих функций, а из классов эквивалентности функций.

Все p-нормы обобщаются до норм различных пространств Лебега — почти пространств функций, интегрируемых в некоторой степени p:

$$L^p(X) = \{f\colon X \to \mathbb{R}, \int_X |f|^p < \infty\}.$$

Суть математического достижения теории Лебега заключается именно в обеспечении существования пределов последовательностей, фундаментальных «в среднем», то есть относительно интегральной нормы. Этот шаг от $C(X)$ к $L^p(X)$ сродни переходу от рациональных чисел к вещественным и называется **пополнением**. Каждой p-норме подчинено своё понятие сходимости последовательностей функций, так что анализ усложняется и разветвляется.

Гильбертовы пространства. Среди пространств Лебега выделяется по широте своих приложений гильбертово пространство $L^2(X)$, норма в котором,

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_X f^2\right)^{1/2},$$

связана со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_X fg.$$

Бесконечномерная геометрия происходит в гильбертовых пространствах, что служит причиной их незаменимости во многих направлениях прикладной математики. Относительно физики достаточно сказать, что вскоре после появления квантовой механики была замечена адекватность гильбертовых пространств для её изложения и развития.

Пространства L^2 заполнили большую брешь в логическом обосновании гармонического анализа (анализа Фурье), расцветшего гораздо раньше под стимулом многочисленных приложений в физике и технике. Его простейшие идеи намечены в разделе об ортогональных рядах. ссылка
В последние десятилетия методы гармонического анализа важны и в информационных технологиях.

Содержание