

Основы математического анализа

Лектор — Александр Петрович Ульянов

Преподаватель может разнообразить стандартные задачи

Задание 1 (сдать к 4 октября)

1. Построить график функции $y = \frac{3x+2}{2x-3}$.
2. Построить график функции $y = 6 \cos 2x + 8 \sin 2x$.
3. Найти производную функции $\ln \operatorname{tg} x$.
4. Найти производную функции $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.
5. Вычислить значение

$$\int_{-1}^1 ||1+2x| - |1-2x|| \, dx.$$

6. Найти

$$\int \frac{dx}{x \ln x}.$$

7. Найти

$$\int \arccos x \, dx.$$

8. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подаётся вода — 5 л в минуту — и раствор вытекает с той же скоростью. Сколько будет соли в баке через час?
9. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
10. Разложить функцию $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ по степеням x до x^4 включительно.
11. Найти $\sin 1^\circ$ с точностью до 10^{-9} .
12. Функция $y = W(x)$ задана неявно соотношением $x = ye^y$ при $y \geq -1$. Разложить $W(x)$ по степеням x до x^4 включительно.

Задание 2 (сдать к 1 ноября)

1. Найти такие числа a, b , что

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} + O(x^5) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

2. Найти прямую $y = \operatorname{const}$, делящую арку циклоиды

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

на три дуги равной длины.

3. Найти объём и площадь поверхности тора, полученного вращением диска $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 \leq 4$ вокруг оси абсцисс.
4. Разлагая рациональную функцию в сумму простейших дробей, найти интеграл

$$\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

Преподаватель может заменить функцию на аналогичную.

5. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}},$$

подходящей заменой сводя его к интегралу от рациональной функции.

6. Найти все асимптоты функции $f(x) = \frac{x^2 - |x|}{x + 1}$.

7. Исследовать функцию

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

и построить её график, указав характерные точки и промежутки. Преподаватель может заменить функцию на аналогичную.

8. Исследовать функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x}$$

и построить её график, указав характерные точки и промежутки.

9. Доказать неравенство

$$\frac{x \ln x + y \ln y + z \ln z}{x + y + z} \geq \ln \frac{x + y + z}{3}$$

для всех $x, y, z > 0$.

10. Методом математической индукции доказать равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

для всякого положительного целого числа n .

11. Найти производную порядка n от функции $f(x) = e^{-x} \sin x$. Преподаватель может заменить функцию на аналогичную.

Задание 3 (сдать к 29 ноября)

1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ для целых чисел m и $n > 0$.

2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \alpha x)^\beta - (1 + \beta x)^\alpha}{x^2}$.

3. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x} \left(1 - \frac{x^2 + 1}{x} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \right).$$

4. Найти предел функции $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$.

5. Сформулировать неравенствами два случая предела функции по Коши и отрицание ещё одного, на выбор преподавателя из 15 случаев, получающихся из пяти вариантов стремления $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, и трёх вариантов стремления $f(x) \rightarrow a$, $f(x) \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$.

6. Доказать, что при $x \rightarrow 0$ функция $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ не ограничена, но не бесконечно большая.

7. Доказать неравенство

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

для всех $a > 0$ и $b > a$.

8. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной условием

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

9. Найти уравнения касательной и нормали в произвольной точке $t = \tau$ к циклоиде, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t, \\ y(t) = 1 - \cos t. \end{cases}$$

10. Доказать, что два семейства гипербол $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$ образуют на плоскости ортогональную сеть в том смысле, что гиперболы из разных семейств пересекаются под прямым углом.

11. На эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

найти все точки, в которых нормаль к поверхности образует равные углы с осями координат. Записать уравнения касательных плоскостей к эллипсоиду в этих точках.

12. Функция $f(x)$ дифференцируема везде достаточное число раз. Выразить с помощью её производных и явных функций от x высшие дифференциалы d^2y , d^3y от $y = f(\ln x)$. Видна ли формула для $d^n y$?

Задание 4 (сдать к 13 декабря)

1. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 q^n = 0$ при $|q| < 1$.
2. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} = \max\{x, y\}$.
3. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \infty$.
4. Числовая последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

с постоянной $a > 0$ и произвольным значением $x_1 > 0$. Доказать, что $\{x_n\}$ монотонна при $n > 2$, и найти её предел.

5. Известно, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает. Найти её предел и доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

6. Доказать, что предел последовательности гармонических чисел

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

бесконечен и последовательность $c_n = h_n - \ln n$ сходится.

7. Найти все частичные пределы, а также верхний и нижний пределы последовательности

$$x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}.$$

8. Вычислить значение несобственного интеграла

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(\beta-x)(x-\alpha)}}.$$

9. Выяснить, при каких значениях параметров p и q сходится несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$$

Ответ нарисовать на плоскости с декартовыми координатами p и q .

10. Определить область существования интеграла

$$\int_0^1 \ln^{\gamma}(1/x) dx$$

и выразить его значение через гамма-функцию.

11. Определить область существования интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x dx$$

и выразить его значение через гамма-функцию.

12. Для любого a установить эквивалентность

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)} \sim x^a$$

при $x \rightarrow +\infty$.

Задание 5 (сдать к 27 декабря)

1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n \geq 1} \rho^n \cos n\varphi,$$

где $|\rho| < 1$.

2. Установить, сходится ли ряд

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}.$$

3. Установить, сходится ли ряд

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{n}}.$$

4. Выяснить, при каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ биномиальный ряд

$$\sum_{n \geq 1} \binom{\alpha}{n}, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \times \cdots \times (\alpha-n+1)}{n!}$$

(а) расходится; (б) сходится условно; (в) сходится абсолютно.

5. Выяснить, при каких значениях положительных параметров a и b пересечение множеств

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}$$

на плоскости открыто, замкнуто, компактно, связно. Для случаев открытого и замкнутого ответ нарисовать на плоскости с декартовыми координатами a и b .

6. Показать, что для функции $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1,$$

а предел $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ не существует.

7. Показать, что функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ в точке $(0, 0)$ непрерывна, имеет обе частные производные, но не является дифференцируемой.
8. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(1, 1)$ в направлении, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox .
9. Даны две дважды гладкие функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Доказать, что для $c = \text{const}$ функция $u(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$ является решением одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

10. Оператор Лапласа Δ переводит каждую дважды гладкую функцию $u(x, y, z)$ в новую функцию

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Найти все сферически симметричные функции $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

11. Найти второй дифференциал $d^2 r$ функции $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и определить, в каких точках пространства $\mathbb{R}^3$ он является положительно определённой квадратичной формой.

12. Найти все локальные экстремумы функции

$$u(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2.$$