Основы математического анализа

Лектор — Александр Петрович Ульянов

2-й семестр

10. Неявные функции и гладкие многообразия

Теорема о неявной функции:

Наводящие соображения. Одна функция двух переменных. Одна функция трёх переменных. Две функции трёх переменных. Общая теорема о неявной функции в $\mathbb{R}^n$.

Теорема об обратном отображении:

Постановка вопроса. Локальная обратимость. Неудача глобализации.

Дифференцирование неявных функций:

Первые производные и дифференциалы. Вторые производные и дифференциалы. Высшие производные и дифференциалы.

Гладкие линии, поверхности и многообразия:

Три способа задания. Гладкие через элементарные. Гладкие многообразия. Касательное пространство. Градиенты связей.

Условные экстремумы:

Необходимое условие условного экстремума. Метод исключения дифференциалов. Метод множителей Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума. Экстремальные значения функции на области.

11. Интегрирование в пространстве

Геометрическая и механическая мотивация:

Вычисление объёмов. Кратные и повторные интегралы. Вычисление масс и моментов.

Сведение к повторному интегралу:

Интеграл по прямоугольнику. Интеграл по криволинейной трапеции. Разные сечения. Вычисление некоторых многомерных объёмов.

Замены переменных:

Вид элемента площади. Вид элемента объёма. Введение подходящей системы координат.

Интегралы по линиям и поверхностям:

Параметризованная линия. Параметризованная поверхность. Вид элемента площади поверхности.

Несобственные кратные интегралы:

Ограничение области. Сходимость и абсолютная сходимость. Интеграл Эйлера — Пуассона. Объём шара и площадь сферы в $\mathbb{R}^n$. Многомерные степенные особенности. Связь между бэта-функцией и гамма-функцией.

Почти формальные построения:

Одномерный интеграл как образец. Двойной интеграл по квадрату. Хорошие функции на приличной области. Характеристическая функция и требования к области. Интегрирование почти непрерывных функций.

Обоснования основных свойств:

Аддитивность, линейность, монотонность. Сведение кратного к повторному. Криволинейные трапеции. Сетка криволинейных координат. Формула замены. Доказательство формулы замены.

Зависимость интеграла от параметра:

Интегралы по постоянному отрезку. Интегралы по переменному отрезку. Интегралы по компакту. Несобственные интегралы. Гамма-функция. Искусное искусственное введение параметров.

Тонкости приближения линий и поверхностей:

Спрямление линии. Функции ограниченной вариации. Приближение площади поверхности.

12. Векторный анализ на плоскости

Векторные поля:

Определения и примеры. Фазовые портреты на плоскости. Операции с векторными полями. Силовое поле протяжённого источника.

Работа и поток на плоскости:

Подвижный базис вдоль линии. Элементы работы и потока. Криволинейные интегралы второго рода. Несложные примеры вычислений.

Ориентированная площадь и формула Грина:

Выражение площади криволинейными интегралами. Ориентация области. Формула Грина. Ориентированная площадь в криволинейных координатах.

Зависимость интеграла от пути:

Консервативные поля и формула Ньютона — Лейбница. Условия потенциальности.

Несколько дополнений:

Приращение угла и интеграл Гаусса. Циркуляция вокруг дыр и периоды. Потенциал скорости и функция тока.

13. Векторный анализ в пространстве

Интегралы второго рода:

Необходимость ориентации. Принципы выбора ориентации. Ориентируемость линии. Ориентируемость поверхности. Работа вдоль линии. Заготовка элемента потока. Поток через поверхность. 2-форма потока. 3-форма объёма.

Дивергенция и формула Гаусса — Остроградского:

Выражения в декартовых координатах.
Бескоординатные выражения.

Ротор и формула Стокса:

Выражения в декартовых координатах.
Бескоординатные выражения.

Набла и операторы второго порядка:

Ротор градиента и дивергенция ротора. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа.

Важнейшие классы векторных полей:

Два типа дыр в пространственных областях. Потенциальные и безвихревые поля. Соленоидальные и бездивергентные поля. Разложение Гельмгольца.

Ортогональные криволинейные координаты:

Ортогональные координаты и параметры Ламе. Градиент. Дивергенция. Лапласиан. Ротор.

Некоторые приложения:

Электрическое поле точечного заряда. Электростатическая теорема Гаусса. Телесный угол и магнитостатика. Телесный угол и зацепления. Дивергенция и законы сохранения. Трубки тока и вихревые трубки. Энергия безвихревого движения. Уравнения Максвелла. Формулы для разложения Гельмгольца.

Дифференциальные формы:

Базисные формы. Линейные операции. Внешнее умножение. Внешнее дифференцирование. Связь дифференциальных форм и векторных полей. Общая теорема Стокса и компании.

14. Функциональные последовательности и ряды

Равномерная сходимость:

История и мотивация. Определение равномерной сходимости. Мажорантный признак Вейерштрасса. Сохранение непрерывности.

Равномерная сходимость и операции:

Перестановка пределов. Интегрирование и дифференцирование. Следствия для рядов.

Круг сходимости степенного ряда:

Круговая теорема Абеля. Формула Даламбера и формула Коши — Адамара. Интегрирование и дифференцирование. Поведение на границе круга.

Суммирование по частям:

Суть приёма. Формальности, первый вариант. Формальности, второй вариант. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.

Дельта-функция:

Зарождение. Точечные массы, заряды, импульсы. Фильтрующее свойство. Производные функций, имеющих скачки. Дифференциальные уравнения. Примеры зарождающихся дельта-функций. Производные дельта-функции.

Приближение непрерывных функций полиномами:

Теорема Вейерштрасса. Полиномы Бернштейна.

Ортогональные ряды:

Ортогональные системы. Разложения функций. Решение уравнений. Равенство Парсеваля.

Немного фракталов:

Треугольные образы. Фрактальная размерность. Нигде не дифференцируемые функции. Канторово множество и друзья. Кривые Пеано. Теорема Жордана и рогатая сфера.

15. Обзор теории Лебега

Элементарные и пренебрежимые:

Элементарные множества. Пренебрежимые множества. Критерий интегрируемости по Риману.

Мера Лебега:

Внешняя мера. Измеримые множества. Аддитивность. Счётная аддитивность.

Построение интеграла:

Измеримые функции. Ограниченное построение. Неограниченное построение. Интегрируемые функции.

Предельные свойства интеграла:

Счётная аддитивность. Монотонная сходимость.
Мажорированная сходимость.

Неопределённый интеграл:

Вопросы к фундаментальной теореме анализа. Функции скачков. Производные монотонных функций. Абсолютно непрерывные функции. Охват фундаментальной теоремы. Сингулярные функции и разложение Лебега.

Функциональные пространства Лебега:

Конечномерные пространства. Функциональные пространства. Гильбертовы пространства. Зависимость интеграла от параметра. Сведение интеграла к повторному. Абсолютная непрерывность.

Литература

1. *Курант Р.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления.
2. *Зельдович Я. Б.*, Высшая математика для начинающих и её приложения к физике.
3. *Зельдович Я. Б., Яглом И. М.*, Высшая математика для начинающих физиков и техников.
4. *Смирнов В. И.*, Курс высшей математики.
5. *Фихтенгольц Г. М.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления.
6. *Фихтенгольц Г. М.*, Основы математического анализа.
7. *Кудрявцев Л. Д.*, Курс математического анализа.
8. *Босс В.*, Лекции по математике. Анализ.
9. *Кочин Н. Е.*, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.
10. *Романовский П. И.*, Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа.
11. *Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.*, Элементы прикладной математики.
12. *Демидович Б. П.*, Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
13. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.*, Сборник задач по математическому анализу.

Программу и задания
по основам математического анализа
составил доцент А. П. Ульянов, Ph. D.