

# ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

И.А. Долгунцева

15 апреля 2010

## Ортогональное проектирование вектора на подпространство.

Пусть  $\mathcal{W} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k \rangle$  — подпространство евклидова пространства  $\mathcal{V}$  и  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  — произвольный вектор. Найдем ортогональную проекцию  $\mathbf{x}_{\parallel}$  и ортогональную составляющую  $\mathbf{x}_{\perp}$  вектора  $\mathbf{x}$  на подпространство  $\mathcal{W}$ .

Представим вектор  $\mathbf{x}$  в виде суммы векторов  $\mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$ , где  $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathcal{W}$  и  $\mathbf{x}_{\perp} \perp \mathcal{W}$ . Последнее означает,

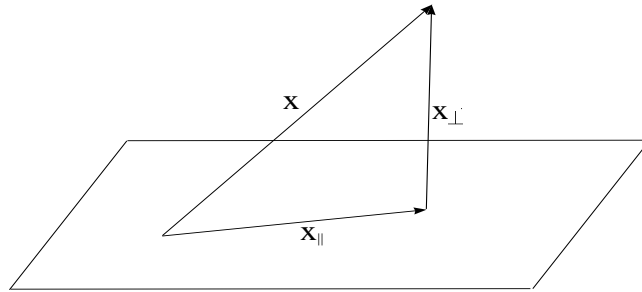


Рис. 1

что  $\mathbf{x}_{\perp} \perp \mathbf{y}$  для всех векторов  $\mathbf{y} \in \mathcal{W}$ . Поэтому  $\mathbf{x}_{\perp} \perp \mathbf{e}_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Так как  $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$ , то для всех  $i = 1, 2, \dots, k$

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_{\parallel}) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}).$$

Поскольку  $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathcal{W}$ , то  $\mathbf{x}_{\parallel} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_k \mathbf{e}_k$ . Поэтому система равенств  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_{\parallel}) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x})$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) принимает вид:

$$x_1 (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1) + x_2 (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_2) + \dots + x_k (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1)$$

Система (1) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Решая полученную систему уравнений, находим  $\mathbf{x}_{\parallel}$ , а затем  $\mathbf{x}_{\perp}$ .

**Пример.** Найти ортогональную проекцию  $\mathbf{x}_{\parallel}$  и ортогональную составляющую  $\mathbf{x}_{\perp}$  вектора  $\mathbf{x} = [2, -1, 3, -2]^T$  на подпространство  $\mathcal{W}$ , натянутого на векторы  $\mathbf{e}_1 = [3, -2, 1, 1]^T$ ,  $\mathbf{e}_2 = [1, 0, -1, 1]^T$ ,  $\mathbf{e}_3 = [2, -2, 2, 0]^T$ .

*Решение.* Заметим, что вектор  $\mathbf{e}_3$  является линейной комбинацией векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ :

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,$$

а векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  — линейно независимы. Возьмем их в качестве базисных векторов пространства  $\mathcal{W}$ .

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$ , где  $\mathbf{x}_{\parallel} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$  — вектор, принадлежащий  $\mathcal{W}$ . Составим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{x}), \\ x_1(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{x}). \end{cases} \quad (2)$$

Находим матрицу системы и свободные коэффициенты:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= 3^2 + (-2)^2 + 1^2 + 1^2 = 15, \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 3, \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) &= 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) &= 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 9, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) &= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = -3. \end{aligned}$$

Подставляем найденные значения в систему (2):

$$\begin{cases} 15x_1 + 3x_2 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 = -3. \end{cases} \quad (3)$$

Решая систему уравнений (3), находим:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\parallel} &= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}_{\perp} &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### Метод ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть дан произвольный базис  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  векторного пространства  $\mathcal{V}$ . Построим ортогональный базис  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ .

1) Полагаем  $\mathbf{f}_1$  равным  $\mathbf{e}_1$ , т. е.  $\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1$ .

2) Будем искать второй базисный вектор  $\mathbf{f}_2$ , исходя из условия  $\mathbf{f}_2 \perp \mathbf{f}_1$ . Для этого рассмотрим вектор  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \alpha\mathbf{f}_1$ , где коэффициент  $\alpha$  пока неизвестен. Домножим обе части равенства  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \alpha\mathbf{f}_1$  скалярно на  $\mathbf{f}_1$ :

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2) - \alpha(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1).$$

В силу ортогональности векторов  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$ , поэтому

$$\alpha = \frac{(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)}.$$

Подставляя найденное значение  $\alpha$  в  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \alpha\mathbf{f}_1$ , находим  $\mathbf{f}_2$ .

Другими словами, на этом шаге находим ортогональную составляющую вектора  $\mathbf{e}_2$  относительно подпространства  $\langle \mathbf{f}_1 \rangle$ .

3) Аналогично, находим третий базисный вектор  $\mathbf{f}_3$  как ортогональную составляющую вектора  $\mathbf{e}_3$  относительно подпространства  $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle$ , т. е. полагаем  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3 - \beta \mathbf{f}_1 - \gamma \mathbf{f}_2$ , где  $\beta$  и  $\gamma$  — некоторые коэффициенты. Поскольку  $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{f}_2$ , то

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_3) - \beta(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) - \gamma(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2), \\ 0 &= (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3) - \beta(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1) - \gamma(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2). \end{aligned}$$

Так как  $(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0$ , получаем:

$$\beta = \frac{(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)}, \quad \gamma = \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2)}.$$

и т. д. . . .

$k+1$ ) Пусть векторы  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$  попарно ортогональны. Найдем вектор  $\mathbf{f}_{k+1}$  как ортогональную составляющую вектора  $\mathbf{e}_{k+1}$  относительно подпространства  $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k \rangle$ :

$$\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{e}_{k+1} - \alpha_1 \mathbf{f}_1 - \dots - \alpha_k \mathbf{f}_k,$$

где

$$\alpha_i = \frac{(\mathbf{f}_i, \mathbf{e}_{k+1})}{(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

**Пример.** Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов:

$$\mathbf{e}_1 = [2, 1, 3, -1]^T, \quad \mathbf{e}_2 = [7, 4, 3, -3]^T, \quad \mathbf{e}_3 = [1, 1, -6, 0]^T, \quad \mathbf{e}_4 = [5, 7, 7, 8]^T.$$

*Решение.* 1) Полагаем  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 = [2, 1, 3, -1]^T$ .

2) Ищем  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 - \alpha \mathbf{f}_1$ , где

$$\alpha = \frac{(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)} = \frac{7 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot (-1)}{2^2 + 1^2 + 3^2 + (-1)^2} = 2.$$

Тогда

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3) Ищем  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3 - \beta \mathbf{f}_1 - \gamma \mathbf{f}_2$ , где

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 6 \cdot 3 + 0 \cdot (-1)}{2^2 + 1^2 + 3^2 + (-1)^2} = -1; \\ \gamma &= \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2)} = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 6 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1)}{3^2 + 2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = 1. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

то вектор  $\mathbf{e}_3$  лежит в подпространстве  $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle$ . Значит,  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_4 - \beta' \mathbf{f}_1 - \gamma' \mathbf{f}_2$ , где

$$\beta' = \frac{(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_4)}{(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1)} = \frac{5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot (-1)}{2^2 + 1^2 + 3^2 + (-1)^2} = 2;$$

$$\gamma' = \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_4)}{(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2)} = \frac{5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) + 8 \cdot (-1)}{3^2 + 2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, ортогональный базис пространства  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$ :

$$\mathbf{f}_1 = [2, 1, 3, -1]^T, \quad \mathbf{f}_2 = [3, 2, -3, -1]^T, \quad \mathbf{f}_3 = [1, 5, 1, 10]^T.$$

*Замечание.* Можно сократить вычисления, если сразу заметить, что вектор  $\mathbf{e}_3$  равен линейной комбинации  $(-4) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ . Тогда, выбирая в качестве базиса систему векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4$ , применяем процесс ортогонализации уже к ним.

### Ортогональное дополнение подпространства векторного пространства.

Пусть  $\mathcal{W}$  — подпространство евклидова (вещественного или комплексного) пространства  $\mathcal{V}$ .

Будем говорить, что  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  ортогонален подпространству  $\mathcal{W}$  и писать  $\mathbf{x} \perp \mathcal{W}$ , если  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  для всех  $\mathbf{y} \in \mathcal{W}$ .

Ортогональным дополнением  $\mathcal{W}^\perp$  подпространства  $\mathcal{W}$  называют множество векторов, ортогональных подпространству  $\mathcal{W}$ , т. е.

$$\mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} : \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \text{ для всех } \mathbf{y} \in \mathcal{W}\}$$

Заметим, что  $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$ . Действительно, любой вектор  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$  можно представить в виде  $\mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp$ , где  $\mathbf{x}_\parallel \in \mathcal{W}$ , а  $\mathbf{x}_\perp \perp \mathcal{W}$ , т. е.  $\mathbf{x}_\perp \in \mathcal{W}^\perp$ . Следовательно,  $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$ . Далее, если  $\mathbf{x} \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp$ , то вектор  $\mathbf{x}$  ортогонален самому себе:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Найдем базис ортогонального дополнения  $\mathcal{W}^\perp$  подпространства  $\mathcal{W}$ , если подпространство  $\mathcal{W}$  натянуто на векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ .

Пусть  $\mathbf{x}$  — произвольный вектор  $\mathcal{W}^\perp$ . Тогда  $\mathbf{x}$  ортогонален всем векторам  $\mathbf{y} \in \mathcal{W}$ . Значит,  $\mathbf{x}$  ортогонален  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ :

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (4)$$

Предположим, что векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  заданы своими координатами в ортонормированном базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ :

$$\mathbf{a}_i = a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{in}\mathbf{e}_n, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Будем искать вектор  $\mathbf{x}$  в виде

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n,$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — неизвестные. Подставляем разложения векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{x}$  в равенства (4) (для простоты будем считать, что пространства вещественные):

$$(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{in}\mathbf{e}_n) = 0 \iff$$

$$x_1a_{i1} + x_2a_{i2} + \dots + x_na_{in} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (5)$$

Получили систему  $k$  линейных уравнений относительно неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Пространство решений этой системы совпадает с  $\mathcal{W}^\perp$ . Таким образом, чтобы найти базис  $\mathcal{W}^\perp$ , нужно найти базис пространства решений системы уравнений (5).

**Пример.** Найти ортогональное дополнение  $\mathcal{W}^\perp$  подпространства  $\mathcal{W}$ , натянутого на систему векторов  $\mathbf{a}_1 = [1, -2, 2, -3]^\top$ ,  $\mathbf{a}_2 = [2, -3, 2, -2]^\top$ ,  $\mathbf{a}_3 = [1, -1, 0, 1]^\top$

*Решение.* Пусть  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4$ . Из того, что  $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Находим общее решение и базис пространства решений:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2c_1 - 5c_2 \\ 2c_1 - 4c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \text{ — параметры.}$$

Таким образом,  $\mathcal{W}^\perp = \langle [2, 2, 1, 0]^\top, [-4, -5, 0, 1]^\top \rangle$ .