

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Лектор — Александр Петрович Ульянов

Программа курса лекций

1. Предварительные сведения

Комплексные числа:

Алгебраическая форма и операции. Показательная форма. Сопряжение и свойства модуля. Умножение и поворот плоскости. Матричная форма. Стереографическая проекция и сфера Римана, сохранение углов.

Простейшие функции 1:

Способы изображения комплексных функций. Линейные преобразования. Дробно-линейные преобразования. Ангармоническое отношение, симметрия относительно окружности.

Простейшие функции 2:

Целые степени. Полиномы. Рациональные функции. Функция Жуковского. Комплексная экспонента. Гиперболические и тригонометрические функции.

Множества комплексных чисел:

Предел последовательности. Открытые и замкнутые множества. Предел и непрерывность функции. Ограниченные и компактные множества. Связные множества. Области. Ориентированные кривые, дуги и контуры. Граница и порядок связности области.

2. Аналитические функции

Дифференцирование функций комплексного переменного:

Условия Коши — Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения. Сопряженные гармонические функции.

Точки ветвления:

Теорема об обратной функции. Многозначные функции и точки ветвления. Понятие римановой поверхности. Выделение однозначной ветви. Ветви функций $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$. Степенная функция z^α . Обратные тригонометрические и гиперболические функции.

Интегрирование функций комплексного переменного:

Интеграл функции комплексного переменного по ориентированной кривой. Связь с криволинейным интегралом. Интегральная теорема Коши. Первообразная аналитической функции. Теорема Мореры.

Интегральная формула Коши:

Интеграл Коши. Простейшие вычеты. Интегральные представления для производных. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Теорема Лиувилля.

Комплексный потенциал 1:

Плоскопараллельные векторные поля. Поток и циркуляция. Комплексный потенциал в гидродинамике. Потенциал скоростей и функция тока. Эквипотенциалы и линии тока. Комплексный потенциал в электростатике. Источники, стоки, вихри. Применение конформных отображений для упрощения геометрии задачи.

3. Ряды и особые точки

Степенные ряды:

Первая теорема Абеля, круг и радиус сходимости, аналитичность суммы. Вторая теорема Абеля. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда.

Равномерно сходящиеся ряды:

Первая теорема Вейерштрасса. Разложение в степенной ряд. Неравенства Коши для коэффициентов ряда. Вторая теорема Вейерштрасса. Внутренняя теорема единственности. Аналитическое продолжение.

Ряд Лорана:

Разложение аналитической функции в кольце в ряд Лорана. Правильная и главная части ряда Лорана. Разложение в окрестности бесконечности.

Изолированные особые точки аналитической функции:

Три типа изолированных особых точек. Бесконечно удалённая особая точка. Поведение функции в окрестности полюса. Поведение функции в окрестности существенно особой точки. Рациональные функции. Понятие о целых и мероморфных функциях.

Комплексный потенциал 2:

Задачи на обтекание. Подъёмная сила крыла.

4. Вычеты и их приложения

Основные формулы и теоремы о вычетах:

Вычет в конечной особой точке. Основная теорема теории вычетов. Формула для нахождения вычета в полюсе. Вычет в бесконечно удалённой точке. Принцип аргумента. Теорема Руше.

Вычисление некоторых типов интегралов:

Интегрирование рационально-тригонометрических функций. Интегрирование рациональных функций. Преобразование Фурье рациональной функции. Интегрирование рациональных выражений со степенным весом. Вычисление интегралов с логарифмическими особенностями. Вычисление интегралов в смысле главного значения по Коши.

Преобразование Лапласа:

Аналитичность изображения. Первая теорема разложения. Формула обращения. Вторая теорема разложения.

5. Асимптотические методы

Общие свойства асимптотических разложений:

Асимптотические последовательности и ряды. Единственность, алгебраические операции, интегрирование, дифференцирование. Степенные асимптотические разложения.

Метод Лапласа:

Лемма Морса. Вклад от концов интервала. Лемма Ватсона. Вклад от невырожденной стационарной точки.

Метод стационарной фазы:

Лемма Эрдейи. Вклад от невырожденной стационарной точки.

План семинаров 2021

1. Комплексные числа. Задание простейших множеств на комплексной плоскости. Стереиграфическая проекция. Дробно-линейные отображения.
2. Изображение комплексных функций. Элементарные функции комплексного переменного: многочлены, экспонента, функция Жуковского, гиперболические и тригонометрические функции.
3. Условия Коши — Римана. Аналитические функции. Отображения элементарными функциями.
4. Выделение однозначных ветвей. Корни, логарифм, обратные тригонометрические функции. Римановы поверхности.
5. Интегрирование функций комплексного переменного. Интегральная теорема Коши.
6. Простейшие вычеты. Интегральная формула Коши.
7. Комплексный потенциал и конформные отображения. Гармонические функции.
8. Степенные ряды. Ряд Тейлора.
9. Ряд Лорана. Особые точки.
10. Применение принципа аргумента и теоремы Руше.
11. Вычисление интегралов с помощью вычетов.
12. Вычисление интегралов от рациональных и рационально-тригонометрических функций. Преобразование Фурье рациональной функции.
13. Вычисление интегралов от рациональных выражений со степенным весом, интегралов типа бета-функции и интегралов с логарифмическим весом.
14. Преобразование Лапласа: восстановление оригинала при помощи теорем разложения.
15. Степенные асимптотические разложения. Простейшие способы получения асимптотических разложений.
16. Метод Лапласа. Метод стационарной фазы.

Программу лекций и план семинаров на осень 2021 года составил
доцент А. П. Ульянов