

Вопросы к устному экзамену по теории функций комплексного переменного

ФФ НГУ, январь 2024

ЛЕКТОР — УЛЬЯНОВ АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ

Приведённый список вопросов составлен по оглавлению конспекта лекций с небольшими изменениями. Вопросы в билетах могут быть сформулированы иначе. Чёрные вопросы возможны на всех этапах экзамена. Синие вопросы — только на 4 и 5. Красные вопросы — только на 5, при этом (д) = доказательство. Выделение номера вопроса синим или красным показывает, что выделен весь вопрос. На 3 не надо доказывать ничего; на 4 надо доказывать всё, что было доказано на лекциях, кроме помеченного значком (д) или просто красного; на 5 надо доказывать всё, что было доказано на лекциях, причём (д) или просто красное обязательно попадётся на втором этапе. Пометка (б/д) = без доказательства.

глава 1

- 1. Комплексная плоскость.** Формы записи комплексных чисел. Алгебраические операции. Сопряжение. Инверсия.
- 2. Сфера Римана и стереографическая проекция.** Круговое свойство. Сохранение углов.
- 3. Способы изображения комплексных функций.** Образ участка плоскости. График модуля функции. Метод цветных областей.
- 4. Дробно-линейные преобразования.** Круговое свойство и сохранение углов. Ангармоническое отношение. Задание образами трёх точек. Симметрия относительно окружности.
- 5. Другие простейшие функции.** Степенная функция с целым показателем. Полиномы и основная теорема алгебры. Рациональные функции. Функция Жуковского. Комплексная экспонента.
- 6. Тригонометрические и гиперболические функции.** Косинус и синус. Тангенс и котангенс. Гиперболические функции.
- 7. Топологические понятия.** Открытые множества. Замкнутые множества. Внутренность, граница, замыкание. Ограниченные и компактные множества. Непрерывность и предел функции.
- 8. Топологические понятия.** Ориентированные кривые, дуги и контуры. Связные множества и компоненты. Области. Усмирение границ. Гомотопия и стягиваемость.

глава 2

- 9. Комплексное дифференцирование.** Условия Коши — Римана. Неформальная проверка по правилу цепочки. Матричная форма. Комплексная дифференцируемость.
- 10. Аналитические функции.** Аналитичность на области. Аналитичность в точке. Аналитичность на множестве.
- 11. Геометрический смысл производной.** Консерватизм углов. Постоянство растяжения. Конформные отображения.
- 12. Обратные функции и ветвление.** Локальная обратимость (д). Области однолиственности. Ветви корня. Ветви логарифма. Выделение однозначных ветвей. Общая степенная функция.

13. **Обратные тригонометрические функции.** Арктангенс. Арккотангенс. Арккосинус. Арксинус. Арксеканс и арккосеканс. Обратные гиперболические функции.
14. **Интеграл по дуге.** Общие свойства комплексного интеграла (б/д).
15. **Интегральная теорема Коши.** Сама теорема. Непрерывная деформация дуги в области. Многосвязные области и составные контуры. **Схема доказательства Гурса (б/д).** **Примеры прикладных вычислений.**
16. **Вычеты в полюсах.** Правильные и особые точки. Изолированная особая точка. Определение вычета. Основная теорема о вычетах. Вычет в простом полюсе. Вычет в кратном полюсе.
17. **Интегральная формула Коши.** Сама формула (д). Теорема о среднем и принцип максимума. Дифференцирование формулы Коши (д).
18. **Первообразные аналитической функции.** Существование первообразной (д). Теорема Мореры. Логарифм, арктангенс, арксинус.
19. **Гармонические функции.** Сопряжённые гармонические функции. **Задача Дирихле.**
20. **Комплексный потенциал в физике.** Плоские векторные поля. Комплексный потенциал. Важнейшие примеры особых точек течений. **Обтекание цилиндров.**

глава 3

21. **Равномерная сходимость.** Напоминания основных свойств. Почленное интегрирование. Аналитичность суммы. Почленное дифференцирование (д). Сходимость ряда производных (д).
22. **Степенные ряды.** Круг сходимости. Свойства суммы. Ряд Тейлора. Разложение аналитической функции (д).
23. **Некоторые следствия разложения Тейлора.** **Неравенства Коши для коэффициентов ряда.** Целые функции и теорема Лиувилля. **Равномерное приближение полиномами.** Изолированность нулей. Порядок нуля.
24. **Ряд Лорана.** Первые примеры. Правильная и главная части. Теорема Лорана (д).
25. **Изолированные особые точки.** Классификация. Устранимая особая точка. Полюс и его порядок. **Полюсы конструкций.** Бесконечно удалённая точка.
26. **Целые и мероморфные функции.** Целые функции и главные части. Разложение на простейшие дроби. **Бесконечное число полюсов.** **Разложение в бесконечное произведение.** **Неэлементарные первообразные.** **Решения дифференциальных уравнений.**
27. **Аналитическое продолжение.** Внутренняя теорема единственности (д). Продолжение вещественных функций. Продолжение суммой ряда. Гамма-функция на правой полуплоскости. Полная гамма-функция 1. **Полная гамма-функция 2.** Естественные границы.
28. **Принцип аргумента и расположение нулей.** Логарифмический вычет. Подсчёт числа нулей и полюсов. Принцип аргумента (д).
29. **Теорема Руше.** Обычная форма теоремы Руше. **Симметричная форма теоремы Руше (д).**

глава 4

30. **Однозначные функции.** Рационально-тригонометрические функции. Дроби, ограниченные на вещественной оси. Преобразование Фурье рациональной функции. Формула отражения для гамма-функции.

- 31. Однозначные функции и главные значения.** Полувычет в простом полюсе. Примеры главных значений. Теоремы о главных значениях. Соотношения Крамера — Кронига.
- 32. Интегралы со степенным весом.** Квадратный корень. Степенной вес. Теорема про степенной вес.
- 33. Интегралы с логарифмическим весом.** Логарифмический вес и полукольцо. Логарифмический вес и подкова. Теорема про логарифмический вес.
- 34. Многозначные функции и главные значения.** Примеры главных значений. Теоремы о главных значениях. Внезапные главные значения. Интегралы типа бета-функции и гантелька.
- 35. Аналитическая зависимость интеграла от параметра.** Часть 1: замены, дифференцирование по параметру. Часть 3: теорема (д).
- 36. Преобразование Лапласа.** Оригиналы и изображения. Аналитичность изображения (д). Формула обращения (б/д). Свёртка изображений и умножение оригиналов (б/д). Существование оригинала (д). Вторая теорема разложения (д). Первая теорема разложения (д). Аналитическое продолжение бета-функции.
- 37. Цилиндрические функции Бесселя.** Разложение Фурье плоской волны. Производящая функция. Степенные ряды и уравнение Бесселя. Пример на первую теорему разложения. Колебания висящей цепи.