

Вопросы к устному экзамену по линейной алгебре и геометрии

ФФ НГУ, январь 2020

ЛЕКТОР — УЛЬЯНОВ АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ

Список вопросов составлен по оглавлению конспекта лекций. Некоторые вопросы в билетах сформулированы иначе; некоторые сочетают части разных вопросов из этого списка, особенно в билетах на 3. На 3 требуются только вопросы и их части, не выделенные никаким цветом (чёрные), причём только формулировки без доказательств. Выделение номера вопроса означает, что выделен весь вопрос. В билеты на 4 и на 5 входят, помимо чёрных, **синие** вопросы с доказательствами. Билеты на 5 также могут включать **красные** вопросы, но их изложение предполагается с пропусками наиболее сложных мест.

глава 1

- 1. Векторы в пространстве.** Операции с векторами. Коллинеарность и компланарность. Базис и координаты. Реперы. **Ориентация пространства.**
- 2. Скалярное произведение векторов.** Билинейность. Ортогональная проекция вектора на ось. Вычисление скалярного произведения в координатах.
- 3. Смешанное произведение векторов.** Объём параллелепипеда. Ориентация репера. Выражение смешанного произведения через векторное и скалярное. Вычисление смешанного произведения в координатах.
- 4. Векторное произведение векторов.** Билинейность, антисимметричность. Вычисление векторного произведения в координатах. **Двойное векторное произведение, «бац минус цаб». Тожество Якоби.**
- 5. Определители второго и третьего порядков.** Полное раскрытие. Раскрытие по столбцу или строке. Вычищение определителя.
- 6. Отложенные геометрические доказательства.** Леммы о разложении вектора. **Доказательства дистрибутивности. Доказательство формулы «бац минус цаб».**

глава 2

- 7. Задание прямых и плоскостей общими уравнениями.** Общее уравнение прямой на плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. **Общее уравнение прямой в пространстве. Уравнения в отрезках.**
- 8. Задание прямых и плоскостей параметрическими уравнениями.** Начальные точки и направляющие векторы. Параметрическое задание прямой. Параметрическое задание плоскости.
- 9. Задание прямых и плоскостей нормальными уравнениями.** Нормаль к прямой на плоскости. Нормаль к плоскости в пространстве. **Нормали к прямой в пространстве.**
- 10. Задание прямых и плоскостей по содержащимся в них точкам.** Уравнение прямой по двум её точкам. Уравнение плоскости по трём её точкам. **Уравнения по точкам через определители и ранги.**
- 11. Переход от одного способа задания прямой или плоскости к другому.**
- 12. Взаимное расположение прямых и плоскостей.** Выяснение расположения с применением скалярного, векторного и смешанного произведений в трёх случаях: пара прямых; прямая и плоскость; пара плоскостей.
- 13. Расстояние от точки до прямой и до плоскости.** Проекция и перпендикуляры. Нахождение расстояний с применением скалярного, векторного и смешанного произведений.
- 14. Расстояние между прямыми и плоскостями.** Расстояние между скрещивающимися прямыми. **Уравнение общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым.**

глава 3

- 15. Преобразования декартовых координат на плоскости.** Сдвиги, растяжения, повороты, отражения. Матричная запись преобразований. Композиция преобразований и умножение матриц.
- 16. Комплексные числа.** Алгебраическая форма и арифметические операции. Геометрическое представление на комплексной плоскости. Тригонометрическая форма. Экспонента. Умножение и деление в экспоненциальной форме.
- 17. Запись движений плоскости при помощи комплексных чисел.**

18. **Степени и корни.** Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы.
19. **Многочлены от одной буквы.** Делители и корни, теорема Безу. Кратность корня. Основная теорема алгебры многочленов (без доказательства). Неприводимые многочлены. Разложение на неприводимые множители: комплексная версия; вещественная версия.

глава 4

20. **Эллипсы, параболы и гиперболы.** Полярные и канонические уравнения. Форма линий. Фокальные и оптические свойства.
21. **Линии второго порядка.** Общее уравнение линии второго порядка. Матричная запись общего уравнения. Канонический вид и приведение к нему. Метрическая и аффинная классификации. Уравнение касательной.
22. **Поверхности второго порядка.** Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы, цилиндры. Распадающиеся случаи. Мнимые случаи.

глава 5

23. **Системы линейных уравнений и их решения.** Матричная запись и терминология. Классификация по количеству решений. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования строк.
24. **Метод исключения неизвестных.** Системы ступенчатого вида. Приведение к ступенчатому виду. Общее решение системы. Ранг матрицы. Критерий совместности.
25. **Линейные пространства строк и столбцов.** Линейные комбинации. Линейная зависимость и линейная независимость. Линейная оболочка. Линейные подпространства.
26. **Базис и размерность.** Координаты вектора относительно выбранного базиса. Стандартный базис в \mathbb{R}^n . Существование базиса подпространства. Размерность линейного пространства. Ранг системы векторов.
27. **Ранг матрицы.** Ранг матрицы по строкам и по столбцам. Теорема о совпадении рангов. Критерий совместности системы линейных уравнений.
28. **Общее решение системы линейных уравнений.** Однородные линейные системы, пространство решений, фундаментальная система решений. Неоднородные линейные системы, многообразие решений.

глава 6

29. **Различные подходы к понятию определителя.** Перестановки. Инверсии и чётность перестановки. Комбинаторная формула полного раскрытия определителя. Поведение числа инверсий (лемма).
30. **Миноры и раскрытие.** Минор и алгебраическое дополнение. Раскрытие определителя по строке или столбцу. Определитель (блочной) треугольной матрицы.
31. **Свойства определителей.** Элементарные преобразования определителей. Полилинейность и кососимметричность. Характеризация определителя этими свойствами (без доказательства). Определитель произведения матриц.
32. **Невырожденные матрицы.** Критерий невырожденности. Обратная матрица. Формулы Крамера. Ранг матрицы по минорам, эквивалентность с прежними определениями.

глава 7

33. **Билинейные и квадратичные формы: введение и мотивация.** Примеры однородных функций векторов. Разные виды записи. Векторное произведение как линейный оператор. Тензор моментов инерции.
34. **Билинейные формы и квадратичные формы.** Задание билинейной формы матрицей. Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Квадратичные формы. Задание квадратичной формы симметричной матрицей.
35. **Канонический вид квадратичной формы.** Изменение матрицы формы при смене базиса. Конгруэнтность матриц и эквивалентность форм. Ранг формы. Метод Лагранжа приведения формы к каноническому виду.
36. **Вещественные квадратичные формы.** Нормальный вид квадратичной формы над \mathbb{C} и над \mathbb{R} . Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Индексы инерции, сигнатура. Невырожденные формы, (полу)определённые формы. Сужение на подпространство.
37. **Критерий знакоопределённости.** Главные миноры. Определение сигнатуры методом Якоби. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.