Введение в теорию вероятностей

Лектор — Артем Павлович Ковалевский

1. Дискретная вероятностная модель.

Предмет теории вероятностей. Определение дискретной вероятностной модели. Классическое определение вероятности. События, операции над ними. Примеры.

2. Элементы комбинаторики.

Выборки с возвращением и без возвращения. Гипергеометрическая формула.

3. Общая вероятностная модель.

Мера и вероятностная мера. Свойства вероятности: дополнения, включения, объединения. Геометрическая вероятностная модель. Задача о встрече.

4. Условная вероятность и независимые события.

Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события. Независимость дополнений.

5. Независимые испытания.

Схема Бернулли. Формула Бернулли. Время ожидания в схеме Бернулли.

6. Дискретные случайные величины.

Ряд (таблица) распределения. Свойства таблицы распределения. Основные семейства дискретных распределений: вырожденное, бернуллиевское, биномиальное, геометрическое, пуассоновское.

7. Случайные величины.

Определение случайной величины и функции распределения. Свойства функции распределения (без доказательства). Функция распределения дискретной случайной величины. Определение абсолютно непрерывного распределения. Свойства плотности распределения. Связь функции распределения и плотности распределения. Понятие смеси распределений.

8. Основные семейства абсолютно непрерывных распределений.

Равномерное, показательное, стандартное нормальное распределение, стандартное распределение Коши. Линейное преобразование случайной величины с абсолютно непрерывным распределением. Нормальное распределение.

9. Независимые случайные величины.

Определение независимости случайных величин. Случайные векторы и многомерные функции распределения. Независимость функций от независимых случайных величин. Формула свертки в целочисленном и в абсолютно непрерывном случае.

10. Математическое ожидание.

Определение в дискретном случае, пример. Математическое ожидание функции от дискретной случайной величины. Определение в абсолютно непрерывном случае. Пример отсутствия математического ожидания. Математическое ожидание функции от случайной величины с абсолютно непрерывным распределением. Свойства математического ожидания (доказательство в целочисленном случае). Примеры.

11. Моменты и дисперсия.

Теорема о существовании моментов. Дисперсия и среднеквадратическое (стандартное) отклонение случайной величины. Их свойства. Примеры.

12. Сходимость случайных величин и распределений.

Сходимость по распределению. Сходимость по вероятности. Сходимость с вероятностью единица, ее свойства. Закон больших чисел.

13. Центральная предельная теорема.

Формулировка центральной предельной теоремы. Теорема Муавра—Лапласа. Примеры применения.

14. Теорема Пуассона.

Лемма об асимптотике числа сочетаний. Приближение Пуассона для биномиального распределения. Пример применения.

Литература

1. Быстров А.А., Ковалевский А.П., Лотов В.И. Практикум по теории вероятности. Новосибирск: НГУ, 2009.

2. Лотов В.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Новосибирск: НГУ, 2006.

3. Чернова Н.И. Теория вероятностей. Новосибирск: НГУ, 2007.

4. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.

Источники Интернет

1. Лотов В.И. Лекции по теории вероятностей и математической статистике.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/lotov/tv&ms_ff.pdf

2. Коршунов Д.А., Фосс С.Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей.
http://www.math.nsc.ru/LBRT/v1/dima/ExerciseProbability2.pdf

3. Чернова Н.И. Лекции по теории вероятностей.
http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/tv/index.html

План семинарских занятий

1. Классическая вероятностная модель. Комбинаторика.
2. Геометрическая вероятностная модель. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
3. Независимые события. Схема Бернулли.
4. Распределения случайных величин.
5. Преобразования случайных величин.
6. Математическое ожидание и дисперсия.
7. Моменты. Сходимость случайных величин. Закон больших чисел.
8. Центральная предельная теорема и теорема Пуассона.

Задачи по теории вероятностей

1.1. Буквы, составляющие фамилию студента, написали на карточках, затем карточки перетасовали и стали выкладывать в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что в результате получится фамилия студента? В качестве фамилии студента выбрать свою фамилию.

1.2. n книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Какова вероятность того, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?

1.3. У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи последовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность того, что нужный ключ появится при k-м извлечении.

1.4. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад извлекаются 6 карт. Какова вероятность того, что:

а) среди них окажется туз пик;

б) среди них окажется ровно один туз;

в) среди них окажутся ровно две бубновые карты;

г) среди них окажется хотя бы одна бубновая карта?

1.5. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Некто приобретает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.

1.6. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже входят 5 человек. Независимо от других каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность того, что:

а) все выйдут на четвертом этаже;

б) все пятеро выйдут на одном и том же этаже;

в) все пятеро выйдут на разных этажах?

1.7. Найти вероятность того, что в наугад выбранном трехзначном автомобильном номере:

а) все цифры одинаковы;

б) все цифры различны;

в) только две одинаковые цифры.

1.8. В лотерейном билете 20 полей, причем на 10 из них (выбранных наугад) под защитным слоем скрыты буквы слова «автомобиль». Участник лотереи наугад выбирает свои 10 полей из 20 и открывает их (стирает защитный слой). Какова вероятность того, что он найдет на них все буквы слова «автомобиль»? Какова вероятность того, что ему удастся это сделать, открыв ровно 11 полей?

2.1. Из отрезка [0,1] наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи этого числа вторая цифра после запятой будет двойкой?

2.2. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Обозначим X; Y ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.

а) Доказать, что для $0 < u < 1,\ \ 0 < v < 1$ выполнено

$$P\{X < u, Y < v\} = P\{X < u\}P\{Y < v\} = uv;$$

б) найти для $0 < t < 1$ вероятности

$$1)\ P\{|X - Y| < t\}; \quad 2)\ P\{XY < t\};$$

$$3)\ P\{\max(X, Y) < t\}; \quad 4)\ P\{\min(X, Y) < t\};$$

в) найти $P\{X + Y < t\}$ для $0 < t < 2$.

2.3. На отрезок длины l произвольным образом брошены три точки. Пусть X, Y, Z — расстояния до этих точек от левого конца отрезка. Какова вероятность, что из отрезков с длинами X, Y и Z можно составить треугольник?

2.4. Точка брошена наудачу в прямоугольник со сторонами 1 и 2. Найти вероятности следующих событий:

а) расстояние от точки до ближайшей стороны прямоугольника не превышает x;

б) расстояние от точки до любой стороны прямоугольника не превосходит x.

2.5. Наудачу выбирают число первых букв от 2 до m из фамилии студента (здесь m — общее число букв в фамилии) и осуществляют их случайную перестановку. Найти вероятность того, что в результате получится фамилия студента. Найти вероятность того, что выбрали две первых буквы, если известно, что фамилия студента получилась. В качестве фамилии студента выбрать свою фамилию.

2.6. Из n экзаменационных билетов студент знает m, поэтому, если он зайдет первым на экзамен, то с вероятностью m/n он вытащит "хороший" билет. Какова вероятность вытащить "хороший" билет, если студент зайдет на экзамен вторым?

2.7. Известно, что 34% людей имеют первую группу крови, 37% — вторую, 21% — третью и 8% — четвертую. Больному с первой группой можно переливать только кровь первой группы, со второй — кровь первой и второй групп, с третьей — кровь первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность того, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?

2.8. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Затем из второй урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

3.1. Производят $n > 1$ независимых случайных перестановок букв фамилии студента. Найти вероятность того, что:

а) хотя бы раз получилась фамилия студента;

б) каждый раз получалась фамилия студента;

в) в последний раз получилась фамилия студента.

Сравнить вероятности, найденные в пунктах (а), (б), (в). В качестве фамилии студента подставить свою фамилию.

3.2. Пусть событие A не зависит от самого себя. Какие значения может принимать вероятность события A?

3.3. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5, стрелок C — с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени. Какова вероятность, что ровно две пули попали в цель?

3.4. Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым получит герб. Найти вероятность того, что игра закончится на k-м бросании. Какова вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру?

3.5. 10 любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 5 рыбаков расположатся на расстоянии более 200 м от берега?

3.6. В шар радиуса R наудачу бросаются n точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, $0 < a < R$.

3.7. Найти вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p появятся $m + k$ успехов, причем k успехов появятся в последних k испытаниях.

3.8. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу в круг, четыре попадут в квадрат, три — в нижний сегмент, и по одной — в оставшиеся три сегмента.

4.1. У человека 5 ключей, из которых только один открывает дверь. Ключи испытываются в случайном порядке. Обозначим через X число попыток, потребовавшихся для отыскания нужного ключа. Найти ряд распределения и построить график функции распределения случайной величины X, если:

а) каждый раз выбирается наудачу один из 5 ключей;

б) испытанный ключ откладывается в сторону и в дальнейших испытаниях не участвует.

4.2. Выразить через функцию распределения случайной величины X вероятности следующих событий: $\mathbf{P}\{a < X < b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X < b\}$, $\mathbf{P}\{a < X \le b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X \le b\}$.

4.3. Могут ли функции

(а) $f(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, (б) $f(y) = e^{-y}$, (в) $f(y) = \cos y$, (г) $f(y) \equiv 1$

быть плотностями распределения?

4.4. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(y) = \begin{cases} Cy^2, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти C и функцию распределения случайной величины X.

4.5. Вычислить функцию гамма-распределения $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ в случае, когда $\lambda = n$ — целое число.

4.6. На отрезок длины l произвольным образом бросают две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними.

4.7. Случайная величина X имеет нормальное распределение, причем $\mathbf{P}\{X > 3\} = 0,5$, $\mathbf{P}\{X > 6,28\} = 0,05$. Записать формулу плотности распределения и построить ее график. Использовать значение $\Phi(1,64) \approx 0,95$.

4.8. В круг радиуса R наугад бросают точку. Найти функцию распределения и плотность распределения расстояния этой точки до центра круга.

5.1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[0;\ \pi]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = \sin X$.

5.2. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = \operatorname{tg} X$.

5.3. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(t) = \begin{cases} \theta t^{\theta-1}, & t \in [0,1], \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = -\ln X$.

5.4. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на [0,1]. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

5.5. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функции распределения и плотности случайных величин (а) $Y_1 = X^2$, (в) $Y_2 = \sin X$.

5.6. В условиях предыдущей задачи найти функцию распределения случайной величины $\max(0, X)$. Найти функции распределения ее дискретной и абсолютно непрерывной компонент.

5.7. Случайные величины X и Y независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathbf{P}\{X = y_k\} = \mathbf{P}\{Y = y_k\} = p_k, \ \ k \geq 1$. Найти $\mathbf{P}\{X = Y\}$.

5.8. X и Y независимы, причем $\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{X = 1\} = 1/2$, а $\mathbf{P}\{Y < t\} = t, \ \ 0 < t < 1$. Найти функции распределения случайных величин $X + Y$ и XY.

6.1. Найти математические ожидания, дисперсии и стандартные отклонения случайных величин, введенных в задаче 4.1(а,б).

6.2. Найти математические ожидания, дисперсии и стандартные отклонения случайных величин, введенных в задачах (а) 4.6; (б) 4.8.

6.3. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин с плотностями распределения, определенными формулами (а) 4.3(а); (б) 4.4.

6.4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y в задаче 5.1.

6.5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X - Y$ в задаче 5.4.

6.6. Доказать, что $\mathbf{E}X = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\,(X \geq k)$, если известно, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\,(X = k) = 1$.

6.7. Случайные величины X и Y независимы, X имеет стандартное нормальное распределение, а Y — равномерное распределение на $[1;\ 4]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X - 4Y$.

6.8. Случайная величина имеет распределение Рэлея, если ее плотность распределения равна

$$f(y) = \begin{cases} Aye^{-y^2/(2\sigma^2)} & \text{при } y \geq 0; \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Найти коэффициент A, математическое ожидание и дисперсию.

7.1. Найти $\mathbf{E}X^{2009}$, если X имеет стандартное нормальное распределение.

7.2. Вычислить момент k-го порядка для случайной величины, имеющей равномерное распределение.

7.3. Случайная величина X принимает натуральные значения с вероятностями $\mathbf{P}\,(X = k) = Ck^{-10}, \quad k = 1, 2, \ldots$. Как найти C? Какого порядка моменты существуют у этой случайной величины X?

7.4. Случайная величина принимает только два значения, причем все ее моменты нечетного порядка равны нулю, а все моменты четного порядка равны 1. Найти ряд распределения этой случайной величины.

7.5. Случайные величины Y_i независимы и имеют стандартное распределение Коши, $X_i = |Y_i|$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Сходится ли последовательность S_n/n к константе при $n \to \infty$?

7.6. Решить задачу 7.5 для $X_i = \min(|Y_i|;\ 1)$.

7.7. Найти предел с вероятностью 1 последовательности $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{X_1+\ldots+X_n}$, если $X_1,\ X_2,\ \ldots$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α.

7.8. Найти предел с вероятностью 1 последовательности $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)^2$, если $X_1,\ X_2,\ \ldots$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0;\ b]$.

8.1. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна $0,05\cdot$№ (здесь № — номер студента по списку группы). Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя (а) не менее 5№ конденсаторов; (б) менее 5№+8 конденсаторов.

8.2. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0.2, 4 с вероятностью 0.4, 3 с вероятностью 0.3 и 2 с вероятностью 0.1. За время обучения он сдает 100 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0.95 лежит средний балл.

8.3. Урожайность куста картофеля задается следующим распределением:

Урожай в кг	0	1	1.5	2	2.5
Вероятность	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2

На участке высажено 900 кустов. В каких пределах с вероятностью 0.95 будет находиться урожай? Какое наименьшее число кустов нужно посадить, чтобы с вероятностью не менее 0.975 урожай был не менее тонны?

8.4. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

8.5. Пусть $X_1, X_2, ...$ - независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{D}X_1 < \infty$. Известно, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{\sqrt{n}} \geq\ 1\right) \to \frac{1}{3}$$

при $n \to \infty$. Найти $\mathbf{D}X_1$.

8.6. Найти, к какой функции сходится $\mathbf{P}\{\frac{S_n - np}{\sqrt{n}} < t\}$ при $n \to \infty$, если S_n имеет биномиальное распределение с параметрами $n,\ p$.

8.7. Найти вероятность того, что при 720 подбрасываниях игральной кости цифра «6» выпала более 92 раз.

8.8. Найти вероятность того, что при 100 подбрасываниях 10 симметричных монет не менее 2 раз на всех 10 монетах выпал герб.

Программу составил к.ф.-м.н., доцент Ковалевский А. П.