

Дифференциальные формы

Предисловие

Алгебраист взялся преподавать матанализ физикам-первокурсникам, а когда курс двинулся в дифференциальные формы, решил представить в виде схемы разнообразные математические составляющие этого богатого и красивого предмета в надежде, что схема поможет студентам лучше ориентироваться в нём. По мнению первого видевшего раннюю версию коллеги, В. Чайникова, ещё полезнее моя схема стала бы, если бы она включала гипертекстные ссылки на более содержательный текст. Это пожелание я начал реализовывать, внося сначала материал по своим планам на занятия, но затем вышел местами довольно далеко за пределы курса.

Результат — не учебник и не курс лекций. Скорее, это справочник. Студентам он может послужить дополнением к учебникам, основная цель которого — обратить внимание на общую структуру предмета, наиболее важные определения и факты. Весь включённый материал подан в очень сжатой форме, как список коротких фрагментов текста по темам. Пытливые студенты смогут многому научиться, обдумывая различные фрагменты и переходы от одного к другому. Кроме того, большинство более простых фрагментов легко представить, как вопрос экзаменатора. Относительная трудность каждого фрагмента помечена цветным кружком слева, означающим: **несложно**, **сложно**, **ещё сложнее**. Этими же цветами (но слегка потемнее) выделены гиперссылки. Думается, что овладевший несложным материалом первокурсник вправе рассчитывать на пятёрку на экзамене по матанализу. (Хотя не забудем, что курс анализа включает не только дифференциальные формы.) Специальным образом выделены *определения* независимо от их сложности.

Более трудный материал может быть полезен тем, кому интересно понять современные представления о дифференциальных формах и их связях с основами алгебраической топологии, а также научиться понимать тензора без индексов. Это необходимо широкому спектру математиков и теоретических физиков. Поэтому хочется верить, что сегодняшшний первокурсник, пока не находящий такие темы доступными, всё же не забудет со временем к ним вернуться.

Важнейшими источниками при составлении данного пособия были учебники *Математический анализ, ч. II*, В. А. Зорича и *Математические методы классической механики* В. И. Арнольда.

Приближение конца семестра вынуждает меня распространить заведомо недоработанную версию. Надеюсь вскоре хотя бы попытаться привести схему на первой странице в лучшее соответствие с последующим текстом. Нужно пересмотреть и цветовые оценки трудности.

Отзывы, замечания и предложения прошу посылать на ulyanov1@yahoo.com.

Новосибирск, 19 апреля 2005 г.

А. П. Ульянов

Ориентированные объёмы

- Работаем в линейном пространстве V размерности n .
- Выбор *упорядоченного* базиса $[e_i]$ в линейном пространстве V задаёт на нём ориентацию, ведь относительно $[e_i]$ каждый упорядоченный базис будет либо согласованно, либо противоположно ориентирован: смотри знак определителя матрицы перехода.
- Объём параллелепипеда на $n = \dim V$ векторах, снабженный знаком в соответствии с ориентацией, вычисляется **определителем**.
- Выходит, ориентированный объём есть **внешняя форма** на V .
- Зафиксировав линейное подпространство U размерности $k < n = \dim V$, получаем внешнюю k -форму на V , вычисляя ориентированный объём *проекций* на U параллелепипедов на k векторах.
- Беря за U одну из координатных k -плоскостей, получаем одну из **базисных k -форм** x^I .

Определители

- Многие свойства дифференциальных форм следуют из свойств определителей.
- Рассматривая каждую строку $n \times n$ определителя как список координат вектора из \mathbb{R}^n , восхищаемся линейностью определителя по строкам и сменой знака при перестановке местами любой пары строк.
- Определитель задаёт **внешнее произведение** внешних форм, обуславливая его **алгебраические свойства**.
- Якобианы естественно возникают при **замене переменных** в дифференциальных формах.

Мультииндексы

- Мультииндексы помогают меньше писать, больше думать.
- Будем писать $\mathcal{C}(n, k) = \{I \subseteq \{1..n\} \mid \#I = k\}$.
- Обычно подразумеваем $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$.
- В **начале** курса $a_I = a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ — числа, а **позже** — функции $a_I(\mathbf{x})$ от $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.
- Индексы растут в $x^{i_1} \wedge x^{i_2} \wedge \dots \wedge x^{i_k} = x^I$.
- Индексы растут в $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = dx^I$.
- Иногда бывает полезен второй мультииндекс J , например, в якобианах:

$$\frac{D(y^J)}{D(x^I)} = \frac{D(y^{j_1}, y^{j_2}, \dots, y^{j_k})}{D(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_k})}.$$

Хотя в этой записи x^i и y^j разделены запятыми, а не значками \wedge , перестановка пары переменных даёт смену знака.

Внешние 1- и 2-формы

- Работаем в линейном пространстве V размерности n .
- **1-формой** на V называется линейная функция на V .
- 1-формы образуют линейное пространство V^* .

- Когда в V выбран базис, всякая 1-форма записывается в виде

$$\omega^1 = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x^i,$$

где a_i — числа, а **базисные 1-формы** x^i — координатные функции.

- **Билинейная 2-форма** на V есть функция ω^2 двух аргументов из V линейная по каждому.
- Если билинейная форма ещё и **кососимметрична**:

$$\omega^2(v_1, v_2) = -\omega^2(v_2, v_1)$$

для всех $v_i \in V$, то её называют **внешней**.

- Работа однородного силового поля — 1-форма на \mathbb{R}^3 .
- Поток однородного поля скоростей через параллелограмм — внешняя 2-форма на \mathbb{R}^3 .
- Внешние 2-формы на V образуют линейное пространство $\Lambda^2 V^*$.
- Работая только с внешними формами, часто будем опускать слово *внешняя*.

Внешние k -формы

- Функции k аргументов из V , линейные по каждому и кососимметричные по каждой их паре, называют **внешними k -формами** на V .
- Число аргументов k называют **степенью** формы.
- Когда в V выбран базис, всякая k -форма записывается с применением **мультииндексов** в виде

$$\omega^k = \sum_{I \in \mathcal{C}(n, k)} a_I x^I,$$

где a_I — числа, а **базисные k -формы** x^I — **внешние произведения** базисных 1-форм x^i по $i \in I$.

- Размерность линейного пространства $\Lambda^k V^*$ внешних k -форм на V равна числу сочетаний C_n^k .
- **Ориентированные объёмы** фундаментальны.
- $x^1 \wedge x^2 \wedge \dots \wedge x^n$ — **форма объёма** в декартовых координатах.
- Все n -формы пропорциональны форме объёма.
- Ненулевых форм на V степени $k > n = \dim V$ нет.

Внешнее умножение

- При внешнем умножении **степени** складываются.
- Если ω_i^1 это 1-формы, то вычисление на паре $\xi_1, \xi_2 \in V$ по формуле

$$(\omega_1^1 \wedge \omega_2^1)(\xi_1, \xi_2) = \det[\omega_i^1(\xi_j)]$$

определяет 2-форму $\omega_1^1 \wedge \omega_2^1$.

- Видно, что $\omega_1^1 \wedge \omega_2^1 = -\omega_2^1 \wedge \omega_1^1$.
- Аналогично, $\omega_1^1 \wedge \omega_2^1 \wedge \dots \wedge \omega_k^1$ задаётся значениями

$$(\omega_1^1 \wedge \dots \wedge \omega_k^1)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \det[\omega_i^1(\xi_j)],$$

а перестановка любой пары сомножителей влечет **смену знака**.

- Всевозможные произведения базисных 1-форм x^i создают базисные формы x^I всех степеней:

$$x^I = x^{i_1} \wedge x^{i_2} \wedge \dots \wedge x^{i_k}$$

при $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$.

- Повторов индексов здесь нет, ибо они зануляют форму; рост индексов слева направо достигается перестановками сомножителей.
- Из свойств **определителей** вытекает, что любые формы можно умножать, расписывая их в суммы базисных, умножая базисные, затем складывая все полученные произведения, помня о **перестановках**.
- Имеется и бескоординатная формула для $\omega^k \wedge \omega^l$.

Алгебраические свойства

- **Линейность** (или дистрибутивность):

$$(\alpha_1 \omega^{k_1} + \alpha_2 \omega^{k_2}) \wedge \omega^\ell = \alpha_1 \omega^{k_1} \wedge \omega^\ell + \alpha_2 \omega^{k_2} \wedge \omega^\ell.$$

- **Ассоциативность**:

$$(\omega^k \wedge \omega^\ell) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^\ell \wedge \omega^m).$$

- **Суперкоммутативность**:

$$\boxed{\omega^k \wedge \omega^\ell = (-1)^{k\ell} \omega^\ell \wedge \omega^k}.$$

- Эти законы означают, что взятые все вместе, внешние формы на V образуют **внешнюю алгебру**

$$\Lambda^* V^* = \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \Lambda^k V^*.$$

- Эти алгебры также называют **алгебрами Грассмана**.

Дифф. формы на областях в \mathbb{R}^n

- **Областью** U называют открытое множество.
- Дифференциальные 0-формы на U — просто гладкие функции.

- Если функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в $\mathbf{x} \in U$, то $df_{\mathbf{x}}$ является линейной функцией на **касательном пространстве** $T_{\mathbf{x}}U$. Значит, $df_{\mathbf{x}}$ — 1-форма на $T_{\mathbf{x}}U$.

- Если f везде дифференцируема на U , то получаем 1-формы на всех касательных пространствах. Вместе они дают дифференциальную 1-форму df на U .

- В координатах пишем

$$df_{\mathbf{x}} = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}) dx^i.$$

Здесь dx^i — координатные формы; ранее эту роль играли x^i , но теперь они стали координатами на U , а координаты на касательных пространствах и есть dx^i .

- На U задана **дифференциальная k -форма** ω , если в каждой точке $\mathbf{x} \in U$ определена внешняя k -форма $\omega(\mathbf{x})$ на $T_{\mathbf{x}}U$.

- Работа силового поля — **1-форма на \mathbb{R}^3** .

- Поток поля скоростей через параллелограмм — внешняя **2-форма на \mathbb{R}^3** .

- Всякая дифференциальная k -форма на U в координатах записывается в виде

$$\omega^k(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathcal{C}(n,k)} a_I(\mathbf{x}) dx^I.$$

Функции $a_I(\mathbf{x})$ называют **коэффициентами** ω .

- Обычно рассматривают гладкие дифференциальные формы, т.е. с гладкими коэффициентами.

- $\Omega^k(U)$ — линейное пространство всех гладких дифференциальных k -форм на U .

- **Внешнее умножение** делает **алгеброй** прямую сумму

$$\Omega^*(U) = \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \Omega^k(U).$$

- Даже **градуированной алгеброй**: степень формы и есть градуировка.

- Можно говорить, что гладкая дифференциальная 1-форма на U — это гладкое отображение **касательного расслоения** TU в \mathbb{R} линейное на слоях $T_{\mathbf{x}}U$.

- Чтобы в этом же духе высказаться о дифференциальной k -форме на U , придётся строить **расслоение** $\Lambda^k TU$, т.е. k -ую внешнюю степень расслоения TU .

Дифференциальные формы на \mathbb{R}^3

- Работаем в декартовых координатах (x, y, z) .
- Можем ограничиваться областью в \mathbb{R}^3 .
- Перечень дифференциальных форм на \mathbb{R}^3 :

k	общий вид форм
0	$\omega^0 = f(x, y, z)$
1	$\omega^1 = P dx + Q dy + R dz$
2	$\omega^2 = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$
3	$\omega^3 = f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$

Здесь f, P, Q и R — любые гладкие функции на \mathbb{R}^3 .

- Коэффициенты форм дополнительных степеней тут обозначены одинаковыми буквами, чтобы подчеркнуть изоморфизм $\Omega^k(\mathbb{R}^3) \simeq \Omega^{3-k}(\mathbb{R}^3)$ линейных пространств.
- Этот изоморфизм переживёт замену всех троек на n .
- Скалярное произведение $\langle u, v \rangle$ задаёт изоморфизм между гладкими векторными полями на \mathbb{R}^3 и дифференциальными 1-формами на \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{F} \mapsto \omega_{\mathbf{F}}^1, \text{ где } \omega_{\mathbf{F}}^1(\xi) = \langle \mathbf{F}, \xi \rangle.$$

- Смешанное произведение $\langle u, v, w \rangle$ задаёт изоморфизм между гладкими векторными полями на \mathbb{R}^3 и дифференциальными 2-формами на \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{V} \mapsto \omega_{\mathbf{V}}^2, \text{ где } \omega_{\mathbf{V}}^2(\xi_1, \xi_2) = \langle \mathbf{V}, \xi_1, \xi_2 \rangle.$$

- $\omega_{\mathbf{F}}^1$ — форма работы, $\omega_{\mathbf{V}}^2$ — форма потока.

Работа вдоль кривой

- Работаем в области $U \subset \mathbb{R}^3$, где имеется векторное поле $\mathbf{F} = (P, Q, R)$.
- Задаём в U гладкий путь отображением $\gamma: \mathbb{I} \rightarrow U$ отрезка $\mathbb{I} = [0, 1]$.
- Нахождение работы поля \mathbf{F} вдоль пути γ посредством мелкого разбиения пути и предельного перехода в интегральных суммах приводит к понятию интеграла вдоль пути, фактически вычисляемого интегрированием по \mathbb{I} .
- Получаемую формулу в декартовых координатах записывают в виде

$$A = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\gamma} \omega_{\mathbf{F}}^1.$$

- В терминах переноса форм выходит, что

$$\int_{\gamma(\mathbb{I})} \omega_{\mathbf{F}}^1 = \int_{\mathbb{I}} \gamma^* \omega_{\mathbf{F}}^1.$$

- Это равенство можно воспринимать как определение интеграла 1-формы по кривой.
- Ориентация пути, унаследованная с естественной ориентации \mathbb{I} , учитывается скалярным произведением внутри интегральных сумм.

Поток через поверхность

- Работаем в области $U \subset \mathbb{R}^3$, где имеется векторное поле $\mathbf{V} = (P, Q, R)$.
- Рассмотрим в U гладкую поверхность S , параметризованную отображением $\varphi: \mathbb{I}^2 \rightarrow S$ и ориентированную полем ненулевых нормалей.
- Нахождение потока поля \mathbf{V} через S посредством мелкого разбиения поверхности и предельного перехода в интегральных суммах приводит к понятию интеграла по поверхности, фактически вычисляемого интегрированием по \mathbb{I}^2 .
- Получаемую формулу в декартовых координатах записывают в виде

$$\mathcal{F} = \int_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \int_S \omega_{\mathbf{V}}^2.$$

- В терминах переноса форм выходит, что

$$\int_{\varphi(\mathbb{I}^2)} \omega_{\mathbf{V}}^2 = \int_{\mathbb{I}^2} \varphi^* \omega_{\mathbf{V}}^2.$$

- Это равенство можно воспринимать как определение интеграла 2-формы по поверхности.
- Ориентация поверхности учитывается смешанным произведением внутри интегральных сумм.

Перенос форм в координатах

- Работаем с гладким отображением $\varphi: U \rightarrow V$ области $U \subset \mathbb{R}^m$ в область $V \subset \mathbb{R}^n$.
- По функции $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ композицией с φ строим функцию $\varphi^* f: U \rightarrow \mathbb{R}$, то есть $\varphi^* f(\mathbf{x}) = f(\varphi(\mathbf{x}))$.
- Это линейное отображение $\varphi^*: \Omega^0(V) \rightarrow \Omega^0(U)$.
- Запишем $\varphi: U \rightarrow V$ в координатах как $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$. Базисная k -форма $a_J(\mathbf{y}) dy^J$ переносится на U прямой заменой переменных:

$$\varphi^*(a_J(\mathbf{y}) dy^J) = \varphi^*(a_J(\mathbf{y})) \sum_{I \in \mathcal{C}(m, k)} \frac{Dy^J}{Dx^I} dx^I.$$

- Линейное отображение $\varphi^*: \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$ переносящее все k -формы получаем продолжением по линейности.
- Перенос форм идёт в сторону, обратную к φ .
- Значит, формы контравариантны.
- Перенос форм уважает внешнее умножение:

$$\varphi^*(\omega^k \wedge \omega^\ell) = \varphi^*(\omega^k) \wedge \varphi^*(\omega^\ell).$$

- Достаточно проверить это свойство на $\omega^k = a_I dx^I$ и $\omega^\ell = b_J dx^J$. При соответствующей аккуратности вычисление сводится к раскрытию определителей.
- Значит, φ^* является гомоморфизмом алгебр.

Перенос интегрирования

- Интегрируют k -формы лишь по k -мерным объектам.
- Если k -форма $f(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ задана в области $U \subset \mathbb{R}^k$, то для замкнутого $B \subset U$ полагаем

$$\int_B f(\mathbf{x}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = \int_B f(\mathbf{x}) dx^1 \dots dx^k.$$

- Если поверхность S лежит в области $V \subset \mathbb{R}^n$, то для каждой точки $\mathbf{x} \in S$ касательное пространство $T_{\mathbf{x}}S$ является подпространством $T_{\mathbf{x}}V$.
- Дифференциальная форма ω на V задаёт дифференциальную форму $\omega|_S$ на S посредством сужения.
- Если $S \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая k -мерная ориентированная поверхность, параметризованная $\varphi: B \rightarrow S$, а ω — k -форма на S , то

$$\int_S \omega = \int_{\varphi(B)} \omega = \pm \int_B \varphi^* \omega.$$

- Согласованность/противоположность ориентации S и ориентации принесённой φ диктует выбор знака.
- Значение интеграла не будет зависеть от φ .
- Это следует из формулы замены переменных в кратном интеграле и формулы переноса форм в координатах: в обеих один и тот же якобиан.
- Кусочно гладкая поверхность S является объединением гладких поверхностей S_i , пересекающихся по множествам меньшей размерности.
- Распространяем интегрирование k -форм на k -мерные кусочно гладкие поверхности, полагая

$$\int_S \omega = \sum_i \int_{S_i} \omega.$$

- Можно говорить многообразия, а не поверхности.

Площадь поверхности

- Вложение гладкой k -мерной ориентированной поверхности S в \mathbb{R}^n со скалярным произведением определяет на S форму объёма dS .
- При смене ориентации форма dS меняет знак.
- Поэтому площадь, а точнее, k -мерный объём

$$\int_S dS$$

поверхности S не зависит от её ориентации.

- Разбиением на куски это определение распространяется даже на неориентируемые поверхности, ведь достаточно малые их куски всегда ориентируемы.
- Такого рода интегралами находится масса и т.п.:

$$M(S) = \int_S \rho dS.$$

Перенос форм бескоординатно

- Опять работаем с отображением областей $\varphi: U \rightarrow V$.
- Дифференциальные k -формы на V отличаются от функций на V зависимостью своих значений не только от точки в V , но и от k касательных векторов в ней. Чтобы перенести k -форму на U , необходимо вместе с точками переносить касательные вектора.
- Дифференциал гладкого отображения $\varphi: U \rightarrow V$ в $\mathbf{x} \in U$ — линейное отображение $D_{\mathbf{x}}\varphi: T_{\mathbf{x}}U \rightarrow T_{\varphi(\mathbf{x})}V$. Оно как раз и переносит касательные вектора.
- Возьмем $\omega \in \Omega^1(V)$, тогда для каждой точки $\mathbf{y} \in V$ имеем линейную функцию $\omega(\mathbf{y})$ на $T_{\mathbf{y}}V$; её значения $\omega(\mathbf{y})(\eta)$ — числа, где η — касательный вектор к V в \mathbf{y} . Для $\mathbf{x} \in U$ и $\xi \in T_{\mathbf{x}}U$ подстановкой $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ и $\eta = D_{\mathbf{x}}\varphi(\xi)$ можно определить числа

$$\varphi^* \omega(\mathbf{x})(\xi) = \omega(\varphi(\mathbf{x}))(D_{\mathbf{x}}\varphi(\xi)).$$

Это даёт линейную функцию $\varphi^* \omega(\mathbf{x})$ на $T_{\mathbf{x}}U$, и тем самым, дифференциальную 1-форму $\varphi^* \omega$ на U .

- Точно также переносим k -формы:

$$\varphi^* \omega(\mathbf{x})(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(\varphi(\mathbf{x}))(D_{\mathbf{x}}\varphi(\xi_1), \dots, D_{\mathbf{x}}\varphi(\xi_k)).$$
- Получим линейное отображение $\varphi^*: \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$.
- Координатная формула следует.

Внешнее дифференцирование

- Работаем в декартовых координатах в \mathbb{R}^n .
- Внешний дифференциал 0-формы — её обычный дифференциал как функции.
- Внешний дифференциал базисной k -формы $a_I(\mathbf{x}) dx^I$ определяем формулой

$$d(a_I(\mathbf{x}) dx^I) = da_I(\mathbf{x}) \wedge dx^I.$$

Известно уже, что здесь кроется за $da_I(\mathbf{x})$, ибо $a_I(\mathbf{x})$ это функция.

- Если $da_I(\mathbf{x})$ включает слагаемые с такими dx^i что $i \in I$, они просто обнулятся при умножении на dx^I , а в оставшихся слагаемых надо для порядка переставить появившиеся слева дифференциалы и привести подобные.
- Чтобы впредь дифференциал суммы всегда равнялся сумме дифференциалов, для

$$\omega^k(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathcal{C}(n,k)} a_I(\mathbf{x}) dx^I$$

приходится положить

$$d\omega^k(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathcal{C}(n,k)} da_I(\mathbf{x}) \wedge dx^I.$$

- Внешний дифференциал k -формы — всегда $(k+1)$ -форма. Получаем линейное отображение

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U).$$

Правило Лейбница

- Для функций имеем

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg.$$

- Для дифференциальных форм имеем

$$d(\omega^k \wedge \omega^\ell) = d\omega^k \wedge \omega^\ell + (-1)^k \omega^k \wedge d\omega^\ell.$$

- Правило легко проверить на $a_I(\mathbf{x})dx^I \wedge b_J(\mathbf{x})dx^J$, и в силу линейности этого достаточно.
- Можно представлять себе d как объект степени 1, ведь его применение к форме повышает её степень на 1. Тогда легко запомнить знаки в правиле Лейбница: во втором слагаемом правой части произошла перестановка объекта степени 1 и объекта степени k .

Перенос дифференциала

- Изобразим **внешний дифференциал** и **перенос форм** диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} U & \Omega^0(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{d} & \dots \\ \downarrow \varphi & \uparrow \varphi^* & & \uparrow \varphi^* & & \uparrow \varphi^* & & \\ V & \Omega^0(V) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(V) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(V) & \xrightarrow{d} & \dots \end{array}$$

- Уже знакомое свойство **инвариантности** дифференциала функций в теперешних терминах записывается как

$$d(\varphi^* f) = \varphi^*(df),$$

т.е. как равенство двух путей по стрелкам левого квадрата диаграммы.

- Обобщение на все дифференциальные формы:

$$d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega).$$

- Равенство достаточно проверить на $\omega = a_I(\mathbf{x})dx^I$. В $d(\varphi^* \omega)$ **правило Лейбница** даёт два слагаемых; одно занулится, а второе просто равно $\varphi^*(d\omega)$.
- Смысл полученного равенства: внешнее дифференцирование не зависит от выбора координат, являясь **инвариантной операцией**.
- Независимость результата от пути прохода по стрелкам называют **коммутативностью диаграммы**.

Дифференциал через приращение

- Работаем на n -мерном **многообразии** M , около точки \mathbf{x} локально параметризованном $\varphi: U \rightarrow M$.
- Допустим, что на M задана k -форма ω^k .
- В каждой точке \mathbf{x} обратим дифференциал $D_{\mathbf{x}}\varphi$.

- Во всех точках области U естественно отождествляем касательное пространство к U с объемлющим \mathbb{R}^n .
- Тогда если $\xi \in T_{\mathbf{x}}M$, то его прообраз $\xi^* = (D_{\mathbf{x}}\varphi)^{-1}(\xi)$ лежит в \mathbb{R}^n .
- Прообразом параллелепипеда в $T_{\mathbf{x}}M$ на ξ_1, \dots, ξ_{k+1} будет параллелепипед Π^* в \mathbb{R}^n на $\xi_1^*, \dots, \xi_{k+1}^*$.
- Образ $\Pi = \varphi(\Pi^*)$ — маленький кусок в M , криволинейный параллелепипед.

- Рассмотрим **приращение**

$$F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \int_{\Pi} \omega.$$

- Функция F кососимметрична по ξ .
- Существует и единственна **главная** $(k+1)$ -**линейная часть** приращения F : такая внешняя $(k+1)$ -форма Ω на $T_{\mathbf{x}}M$, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$F(\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{k+1}) = \varepsilon^{k+1}\Omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) + o(\varepsilon^{k+1}).$$

- Форма Ω не зависит от выбора φ .
- Форма Ω называется **внешней производной** формы ω^k в точке $\mathbf{x} \in M$.
- Вычисление Ω в координатах приводит к **ранее введённому** правилу нахождения внешнего дифференциала $d\omega^k$.
- Таким образом, здесь определяем дифференцирование через **интегрирование!**

Дифференциал дифференциала

- Непосредственно проверяется, что $d(df(\mathbf{x})) \equiv 0$ для гладкой функции $f(\mathbf{x})$ на U ввиду свойства смешанных вторых частных производных и **антикоммутирования** 1-форм.
- **Правило Лейбница** даёт $d(d(a_I(\mathbf{x})dx^I)) \equiv 0$. Заключаем по линейности, что $d(d\omega) \equiv 0$ для всех дифференциальных форм ω .
- Кратко запишем сей замечательный факт как

$$d^2 = 0.$$

- Линейное отображение $d: \Omega^\bullet(U) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(U)$ однозначно определяется тремя свойствами: обычный дифференциал на Ω^0 ; правило Лейбница; $d^2 = 0$. Значит, их можно было принять в качестве определения внешнего дифференциала.
- Наличие такого d делает $\Omega^\bullet(U)$ **дифференциальной градуированной алгеброй**.
- Свойства отображения $\varphi^*: \Omega^\bullet(V) \rightarrow \Omega^\bullet(U)$ переноса форм означают, что φ^* — гомоморфизм дифференциальных градуированных алгебр.

Градиент, ротор, дивергенция

- Используя **изоморфизмы** между векторными полями и формами, запишем **внешнее дифференцирование** форм на \mathbb{R}^3 в виде трёх операций над векторными и скалярными полями:

$$\begin{aligned} f = \omega^0 &\mapsto d\omega^0 = \omega_{\mathbf{g}}^1 \mapsto \mathbf{g} = \text{grad } f; \\ \mathbf{F} &\mapsto \omega_{\mathbf{F}}^1 \mapsto d\omega_{\mathbf{F}}^1 = \omega_{\mathbf{r}}^2 \mapsto \mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{F}; \\ \mathbf{V} &\mapsto \omega_{\mathbf{V}}^2 \mapsto d\omega_{\mathbf{V}}^2 = \omega_{\rho}^3 \mapsto \rho = \text{div } \mathbf{V}. \end{aligned}$$

- В декартовых координатах получаем выражения градиента, ротора и дивергенции:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= (f_x, f_y, f_z), \\ \text{rot}(P, Q, R) &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y), \\ \text{div}(P, Q, R) &= P_x + Q_y + R_z. \end{aligned}$$

- Ввиду **инвариантности** внешнего дифференцирования, grad, rot и div есть инвариантные операции.
- $\nabla f = \text{grad } f$, $\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F}$, $\nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div } \mathbf{V}$.

Одна форма на кубике

- Поработаем в n -мерном кубике $\mathbb{I}^n = [0, 1]^n$.
- Рассмотрим $(n - 1)$ -форму $\omega = a(\mathbf{x}) dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$.
- Имеем $d\omega = \frac{\partial a}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$.
- Интеграл $d\omega$ по \mathbb{I}^n **равен** обычному n -кратному:

$$\int_{\mathbb{I}^n} d\omega = \int_{\mathbb{I}^n} \frac{\partial a}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx^1 \dots dx^n.$$

- Перепишем его в виде повторного интеграла: сперва обычный интеграл по x_1 , затем $(n - 1)$ -кратный по остальным переменным.
- Взятие внутреннего интеграла по формуле Ньютона–Лейбница даёт разность интегралов по двум граням:

$$\int_{\mathbb{I}^n} d\omega = \left(\int_{\{x_1=1\}} - \int_{\{x_1=0\}} \right) a(\mathbf{x}) dx^2 \dots dx^n.$$

- Разобравшись с согласованностью ориентаций, перепишем это как интеграл от дифференциальной формы по состоящей из двух кусков поверхности:

$$\int_{\mathbb{I}^n} d\omega = \left(\int_{\{x_1=1\}} + \int_{\{x_1=0\}} \right) \omega.$$

- На всех остальных гранях кубика равен нулю какой-то из dx^i , $i > 1$, а значит, и вся форма ω . Прибавляя эту кучку нулей, получаем

$$\int_{\mathbb{I}^n} d\omega = \int_{\partial \mathbb{I}^n} \omega.$$

- То же для любой базисной $(n - 1)$ -формы.
- В силу линейности интеграла выведенная **формула Стокса** верна для всякой $(n - 1)$ -формы на кубике.

Главная формула курса

- Перенос форм, дифференциала и интеграла** обеспечивает применимость формулы Стокса во всяком диффеоморфном кубике куске \mathbb{R}^k .
- Такие куски называют **клетками**.
- Рассмотрим в \mathbb{R}^n кусочно гладкое ориентируемое компактное k -мерное многообразие M с краем.
- Можно разбить M на конечное число клеток так, что общая часть границ двух соседних клеток всегда будет клеткой меньшей размерности.
- Ориентации, придаваемые этой общей границе соседними клетками, всегда противоположны друг другу.
- Если на M задана k -форма ω , возьмем формулы Стокса для каждой k -мерной клетки в разбиении M и сложим их все.
- Вклады частей границ клеток, оказывающихся **не** на границе M , уничтожают друг друга.
- Остаются вклады только тех частей границ клеток, которые разбивают границу самого многообразия.
- В силу аддитивности интеграла получаем

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$

Частные случаи главной формулы

- $n = 1, k = 1$: разность граничных значений функции равна интегралу её дифференциала по отрезку. Это формула Ньютона–Лейбница.
- $n = 2, k = 1$: интеграл **точной** 1-формы по плоской кривой равен разности **потенциалов** на её концах.
- $n = 3, k = 1$: то же для пространственной кривой.
- $n = 2, k = 2$: интеграл 1-формы по замкнутой плоской кривой равен интегралу дифференциала формы по области, ограниченной этой кривой. Получаем **формулу Грина**.
- $n = 3, k = 2$: интеграл 1-формы по замкнутой пространственной кривой равен интегралу дифференциала формы по любой гладкой поверхности, ограниченной этой кривой. Получаем **формулу Стокса**.
- $n = 3, k = 3$: интеграл 2-формы по замкнутой поверхности равен интегралу дифференциала формы по трёхмерной области, ограниченной этой поверхностью. Получаем **формулу Гаусса–Остроградского**.

Многообразия

- Многообразия обобщают кривые и поверхности.
- Есть несколько подходов к понятию многообразия.
- **Многообразия** в \mathbb{R}^n называют множество решений уравнения $F(\mathbf{x}) = 0$ с достаточно гладкой функцией F , или системы таких уравнений.
- Прозрачное определение быстро ведёт к техническим неприятностям: даже простые с виду *многочлены* часто имеют сложно устроенные множества корней.
- Этот путь превращает любителей алгебры в *алгебраических геометров*.
- (Достаточно хорошее) топологическое пространство M называют *n -мерным многообразием*, если каждая точка M имеет окрестность U , гомеоморфную \mathbb{R}^n или $H^n = \{t \in \mathbb{R}^n \mid t_1 \geq 0\}$.
- Полупространство H^n допускают при рассмотрении многообразий с *краем*.
- Гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow U$ называют *локальной картой*, *локальной параметризацией*, *выбором локальной системы координат* и др.
- Лишь простейшие многообразия можно покрыть одной картой.
- Если $U_i \cap U_j$ — часть M , изображённая на двух картах, то две системы координат на ней связаны *функциями перехода* φ_{ij} .
- Эти функции — гомеоморфизмы областей в \mathbb{R}^n , но по правде могут быть диффеоморфизмами разных классов гладкости.
- Для простоты будем всегда считать их настолько гладкими, насколько потребуется.
- Можно представлять себе многообразие как набор областей в \mathbb{R}^n , склеенных функциями перехода.
- Склейка есть отождествление каждой точки \mathbf{p} в $\text{dom}(\varphi_{ij}) \subset \mathbb{R}^n$ с точкой $\varphi_{ij}(\mathbf{p})$ в *другой копии* \mathbb{R}^n .
- Набор локальных карт, покрывающий всё M , называют *атласом* M .
- Многообразие можно многими атласами изобразить.
- Более строго надо говорить о многообразии, как заданном на M классе эквивалентности атласов определённой гладкости.
- Карты на U_i и U_j *согласованы*, если якобиан $D\varphi_{ij}$ функции перехода всюду положителен на $U_i \cap U_j$.
- *Ориентирующий атлас* M состоит из попарно согласованных карт.
- Многообразие *(не)ориентируемо*, если оно (не) обладает ориентирующим атласом.

- Для каждого многообразия M найдётся такое большое n , что M вкладывается в \mathbb{R}^n .
- Наиболее важные объекты, связанные с многообразиями, всегда независимы от системы координат.
- Но работают с ними часто в координатах.

Примеры многообразий

- Диск D , как и его граница (край) — окружность S^1 .
- Обычная сфера S^2 — двумерное многообразие. Хватает двух карт: выбросим одну точку, и остальное покроется одной картой; выбросим же другую точку... Выбрасывая полюса, часто используют *стереографическую проекцию*.
- Также хватает двух карт на n -мерной сфере S^n .
- Тор $T^2 = S^1 \times S^1$ — *произведение* многообразий.
- Проколотый тор: из тора удалена маленькая окрестность одной точки. Край этого многообразия гомеоморфен окружности.
- Возьмём квадрат и склеим пару противоположных сторон. Можно по-разному склеить. Получим либо цилиндр, либо *ленту Мёбиуса*; нечто с виду более перекрученное на самом деле будет гомеоморфно одному из них.
- Теперь склеим и вторую пару сторон! Получим либо тор, либо *бутылку Клейна*, либо *проективную плоскость* $\mathbb{R}P^2$.
- Из $2m$ -угольника получим и другие поверхности.
- Множество всех прямых в \mathbb{R}^n , проходящих через начало координат, называют *проективным пространством* $\mathbb{R}P^{n-1}$. Одной картой покрывается множество точек $\mathbb{R}P^{n-1}$, представляющих все прямые, лежащие в одной фиксированной гиперплоскости. Берём n координатных гиперплоскостей, покрываем n картами всё $\mathbb{R}P^{n-1}$.
- Множество всех k -мерных подпространств \mathbb{R}^n называют *многообразием Грассмана* $G(n, k)$. Его размерность равна $k(n - k)$. Набор карт обобщает случай проективного пространства, но их нужно C_n^k штук.
- Множество $O(n)$ всех ортогональных $n \times n$ матриц. Это многообразие несвязно и состоит из двух компонент; матрицы с определителем 1 составляют одну компоненту $SO(n)$.
- Унитарные $n \times n$ матрицы.
- Невырожденные $n \times n$ матрицы.
- Эти матричные примеры — примеры групп Ли.
- Конфигурационные пространства различных механических систем.
- Даже этот сравнительно короткий список многообразий намекает на многообразие их природы.

Касательное пространство

- Есть несколько определений касательного пространства к многообразию.
- Для вложенного в \mathbb{R}^n многообразия M , заданного уравнениями $f_i = 0$, в каждой точке \mathbf{x} можно определить $T_{\mathbf{x}}M$ как ортогональное дополнение ко всем градиентам $\text{grad}_{\mathbf{x}} f_i$.
- Гладкость M можно установить по рангу матрицы, составленной из этих градиентов.
- Касательные векторы к M можно также определить как векторы скорости кривых на M .
- На абстрактном многообразии M касательным вектором в точке \mathbf{x} называют класс эквивалентности кривых $\phi(t)$ с $\phi(0) = \mathbf{x}$. Две такие кривые эквивалентны если они касаются в \mathbf{x} .
- Алгебраический подход трактует $T_{\mathbf{x}}M$ как пространство таких линейных функционалов $\mathcal{D}: f \mapsto \mathcal{D}(f)$ на кольце $C^\infty(M)$ гладких функций на M , что

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\mathcal{D}(g).$$

- Гладкое отображение многообразий $f: M \rightarrow N$ даёт линейное отображение $D_{\mathbf{x}}f: T_{\mathbf{x}}M \rightarrow T_{f(\mathbf{x})}N$.
- Его называют *дифференциалом* f в точке \mathbf{x} .

Касательное расслоение

- Касательное расслоение TM многообразия M собирает вместе все касательные пространства $T_{\mathbf{x}}M$.
- $T_{\mathbf{x}}M$ называют *слоем* над \mathbf{x} расслоения TM .
- Каждое касательное пространство к области $U \in \mathbb{R}^n$ можно отождествить с \mathbb{R}^n , а потому $TU \simeq U \times \mathbb{R}^n$ это *тривиальное расслоение*.
- Для многообразия вообще такого отождествления нет, но локально в каждой карте $\varphi_i: U_i \rightarrow M$ можно взять $U_i \times \mathbb{R}^n$ и склеить из них новое многообразие.
- Чтобы результат склейки был тесно связан с M , точки U_i и U_j склеиваются посредством *функций перехода* φ_{ij} , задающих M .
- Слои над склеенными точками склеиваются какими-нибудь линейными отображениями. Выбранные отображения станут законами преобразования векторов полученного расслоения при смене координат.
- Чтобы получилось именно *касательное расслоение* TM , касательные пространства склеиваются посредством линейных отображений, записанных матрицами Якоби $D\varphi_{ij}$.
- Лагранжева механическая система задаётся *конфигурационным пространством* и *Лагранжианом*: это многообразие M и функция на TM .

Точные и замкнутые формы

- Дифференциальную форму ω^k называют *замкнутой* в области U если $d\omega^k = 0$.
- Дифференциальную форму ω^k называют *точной* в области U если $\omega^k = d\omega^{k-1}$ для некой формы ω^{k-1} .
- Форму ω^{k-1} называют *потенциалом* формы ω^k , особенно при работе с векторными полями.
- Всякая точная форма на U замкнута на U : $d^2 = 0$.
- Обратное выполнено не всегда, а зависит от характера области, а именно, от наличия в ней *дырок*.
- Дырчатость описывается *группами (ко)гомологий*.
- Многообразию M называют *стягиваемым* (в точку $\mathbf{x}_0 \in M$) если существует такое гладкое отображение $h: M \times \mathbb{I} \rightarrow M$, что $h(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x}$ и $h(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}_0$.
- Шар, всё \mathbb{R}^n — стягиваемы.
- Окружность, сфера S^n , всё \mathbb{R}^n без одной точки или одной прямой — не стягиваемы.
- В стягиваемой области все замкнутые формы точны.

Когомологии и гомологии

- (Ко)гомологии — один из важнейших инструментов изучения многообразий.
- *Замкнутые* k -формы на многообразии M образуют линейное пространство $Z^k(M)$.
- *Точные* k -формы на M образуют линейное подпространство $B^k(M) \subset Z^k(M)$.
- *k -ой группой когомологий* многообразия M называют фактор-пространство

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

- Граница границы всегда пуста: $\partial(\partial M) = \emptyset$.
- Случайно не напоминает ли это $d(d\omega) = 0$?
- Несколькими способами можно определить группы $C_k(M) \supseteq Z_k(M) \supseteq B_k(M)$ *цепей, циклов* и *границ*.
- *k -ой группой гомологий* многообразия M называют фактор-пространство

$$H_k(M) = Z_k(M)/B_k(M).$$

- Разбиением многообразия на *клетки* часто сводят вычисление $H_k(M)$ к линейной алгебре.
- Интегрирование k -форм по k -цепям есть билинейное отображение $\Omega^k(M) \times C_k(M) \rightarrow \mathbb{R}$.
- По *теореме Стокса*, интеграл от замкнутой формы по циклу зависит только от класса когомологий формы и класса гомологий цикла. Получается билинейное отображение

$$H^k(M) \times H_k(M) \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Оно невырождено, и поэтому $H^k(M) \simeq (H_k(M))^*$.

Тензорные пространства

- Рассмотрим сперва три способа построения по линейным (=векторным) пространствам U и V других линейных пространств.
- Считаем $\{u_\alpha\}$ базисом U и $\{v_\beta\}$ базисом V .
- Пространство $\text{Hom}(U, V)$ всех линейных отображений из U в V .
- Важный частный случай: *сопряжённое пространство* $U^* = \text{Hom}(U, \mathbb{R})$ функций на U .
- Прямая сумма $U \oplus V$ имеет базис $\{u_\alpha\} \cup \{v_\beta\}$.
- Определить *тензорное произведение* $U \otimes V$ проще всего, сказав, что его базисом является множество всех пар (u_α, v_β) , записываемых обычно как $u_\alpha \otimes v_\beta$.
- Множество $U \times V$ всех пар (u, v) , где $u \in U$ и $v \in V$, не удаётся сделать линейным пространством. Для $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(u, v)$ должно быть равно как $(\lambda u, v)$, так и $(u, \lambda v)$. Такие пары нужно *отождествить*.
- Отождествление ещё называют *факторизацией по эквивалентности*. Формально можно определить $U \otimes V$ как фактор $U \times V$ по $(\lambda u, v) \sim (u, \lambda v)$.
- Пространства $\text{Hom}(U, V)$ и $U^* \otimes V$ изоморфны.
- $\dim U \otimes V = \dim U \cdot \dim V$.
- Сокращённо пишут $V^{\otimes 2} = V \otimes V$.
- Аналогично, $V^{\otimes 3} = V \otimes V \otimes V$, и так далее.
- Называя *векторами* элементы V , можно называть *ковекторами* элементы V^* , а, например, *трижды ковариантными дважды контравариантными тензорами* — элементы $V^{\otimes 3} \otimes (V^*)^{\otimes 2}$.
- Ковариантный тензор *ранга k* — элемент $V^{\otimes k}$.
- *Скаляр* — элемент $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$.

Тензорные отображения

- Работаем с линейным отображением $\varphi: U \rightarrow V$.
- φ даёт линейные отображения $\varphi^{\otimes k}: U^{\otimes k} \rightarrow V^{\otimes k}$, применяющие φ к каждому из своих k аргументов.
- φ даёт линейное отображение 1-форм $\varphi^*: V^* \rightarrow U^*$:

$$\varphi^* f(u) = f(\varphi(u)).$$
- Аналогично для k -форм.
- Приставки *ко-* и *контра-* показывают соответственно сохранение и обращение направления стрелок:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & (U^*)^{\otimes 2} & U^* & \mathbb{R} & U & U^{\otimes 2} & & \\
 \dots & \uparrow (\varphi^*)^{\otimes 2} & \uparrow \varphi^* & \parallel & \varphi \downarrow & \varphi^{\otimes 2} \downarrow & \dots & \\
 & (V^*)^{\otimes 2} & V^* & \mathbb{R} & V & V^{\otimes 2} & & \\
 -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 &
 \end{array}$$

Тензорная алгебра

- Рассмотрим линейное пространство *всех ковариантных тензоров* конечного ранга:

$$\mathbf{T}^\bullet V = \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}.$$

- На $\mathbf{T}^\bullet V$ автоматически появляется операция умножения \otimes , линейная относительно сложения: для всех $v \in V^{\otimes k}$ и $w \in V^{\otimes \ell}$ произведение $v \otimes w$ уже принадлежит $V^{\otimes k} \otimes V^{\otimes \ell} \simeq V^{\otimes (k+\ell)}$.
- $\mathbf{T}^\bullet V$ называют *тензорной алгеброй* V .
- Это *очень* большая алгебра.
- Поскольку $\mathbf{T}^\bullet V$ является прямой суммой подпространств, отвечающих определённому рангу, а ранги складываются при умножении, это *градуированная алгебра*.
- Все *контравариантные тензора*, или *k -формы*, образуют тензорную алгебру $\mathbf{T}^\bullet V^*$.
- Для форм $F^k \in (V^*)^{\otimes k}$ и $F^\ell \in (V^*)^{\otimes \ell}$ выполнено

$$\begin{aligned}
 (F^k \otimes F^\ell)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) &= \\
 &= F^k(v_1, \dots, v_k) F^\ell(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}).
 \end{aligned}$$

Внешняя алгебра

- Важный способ получения уютных маленьких алгебр из больших и страшных — отождествление элементов, различать которые становится невыгодно.
- В *фактор-алгебре* их просто считают равными.
- Возьмём $\mathbf{T}^\bullet V$ и отождествим в $V^{\otimes 2}$ каждый $v_1 \otimes v_2$ с $-v_2 \otimes v_1$. Лучше записать

$$v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 = 0.$$
- Чтобы не сломать умножение, в тензорах ранга выше двух делаем отождествления, вытекающие из этих.
- Ненулевых тензоров ранга выше $\dim V$ не остаётся.
- Фактор-алгебра $\Lambda^\bullet V$, возникающая в результате этого отождествления, состоит из *кососимметричных* тензоров и называется *внешней алгеброй* пространства V .
- Аналогично приходим к алгебре $\Lambda^\bullet V^*$ внешних форм на V как фактору алгебры $\mathbf{T}^\bullet V^*$.
- Другой подход к определению внешних форм избегает факторизацию. Рассматривают подпространство кососимметричных форм, но тензорное произведение таких форм уже не косо.
- Операция *альтернирования* форм — проекция всей алгебры $\mathbf{T}^\bullet V^*$ на это подпространство.
- Внешнее произведение кососимметричных форм вводят альтернированием их *тензорного произведения*.

Симметрическая алгебра

- Возьмём \mathbf{T}^*V , отождествляя в $V^{\otimes 2}$ по правилу

$$v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 = 0,$$

и далее, как и в случае с Λ^*V .

- Получим алгебру симметричных тензоров, называемую *симметрической алгеброй* S^*V .
- Выбор в V базиса $\{v_\beta\}$ устанавливает изоморфизм S^*V с алгеброй многочленов от $\{v_\beta\}$.
- В отличие от внешней алгебры, симметрическая алгебра бесконечномерна даже когда V одномерно.

Алгебры Клиффорда

- Когда на V задана квадратичная форма Q , строится важное обобщение *внешней алгебры*.
- Отождествляя по правилу

$$v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1 = Q(v_1, v_2),$$

получим *алгебру Клиффорда* $C_Q(V)$.

- Так как правило отождествления смешивает тензора разных рангов, алгебры Клиффорда не наследуют *градуировку рангом*. Они не градуированные алгебры (хотя *фильтрованные*: $C^{\leq k} \cdot C^{\leq \ell} \subseteq C^{\leq k+\ell}$).

Векторные расслоения

- Работаем на гладком многообразии M .
- Произведение $M \times \mathbb{R}^m$ называют *тривиальным* m -мерным векторным расслоением на M .
- На *стягиваемой* области все расслоения тривиальны.
- Нетривиальные расслоения на M можно понимать, как некие *скрученные* произведения M с \mathbb{R}^m .
- Они строятся нетривиальной склейкой тривиальных расслоений на областях действия карт, покрывающих M .
- Нетривиальная на первый взгляд склейка может дать расслоение, эквивалентное тривиальному посредством какого-то хитрого гомеоморфизма.
- У каждого расслоения \mathcal{B} на M имеется отображение проекции $\pi: \mathcal{B} \rightarrow M$, отправляющее весь слой \mathcal{B}_x в точку x .
- Расслоение с одномерными слоями называют *линейными*. Линейные расслоения играют особую роль в теории расслоений и в приложениях.

Тензорные расслоения

- Построим из *касательного расслоения* TM более сложные расслоения на M .
- В каждой точке $x \in M$ возьмём вместо T_xM *сопряжённое* ему пространство T_x^*M , называемое *кокасательным*. Вместе они составляют *кокасательное расслоение* T^*M , где функции $(D\varphi_{ij})^{-1}$ перехода на слоях обратны функциям перехода на слоях TM .
- Аналогично беря *тензорные пространства* $(T_xM)^{\otimes k}$ с *функциями перехода* $(D\varphi_{ij})^{\otimes k}$, получим *тензорные расслоения* $TM^{\otimes k}$.
- Можно формально позволить *отрицательным* k отвечать контравариантным тензорам ранга $|k|$.
- Можно взять только кососимметричные k -формы, то есть пространства $\Lambda^k T_x^*M$, склеивая их отображениями *переноса форм*, теперь записанными как $\Lambda^k(D\varphi_{ij})^{-1}$. Получим *внешнюю степень* $\Lambda^k T^*M$ кокасательного расслоения.
- При построении всех перечисленных расслоений ни на каком шаге нет абсолютно никакого произвола, выбора и т.п.; все эти конструкции автоматически следуют, как только задано само многообразие M .
- Поэтому все вот такие *тензора на многообразии* — совершенно канонические объекты, ассоциированные с M . Они могут появиться везде, где появляется многообразие, и будут на первых ролях.
- Наиболее существенные их отличия друг от друга — разные тензорные законы преобразования.

Сечения расслоений

- Сечения нетривиальных расслоений — важное обобщение функций на многообразии.
- Рассмотрим на многообразии M тривиальное линейное расслоение $\mathcal{L} = M \times \mathbb{R}$.
- График функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ можно понимать, как подмножество \mathcal{L} , размещая $f(x) \in \mathbb{R}$ в слое $\mathcal{L}_x \simeq \mathbb{R}$ над x .
- А саму функцию можно понимать, как такое отображение $s: M \rightarrow \mathcal{L}$, что $s(x)$ всегда лежит в \mathcal{L}_x .
- Отображение s называют *сечением* расслоения \mathcal{L} .
- Соответственно гладкости отображения говорят о гладкости сечения.
- Для любого расслоения \mathcal{B} на M определяем сечение \mathcal{B} в точности так же, как и выше для \mathcal{L} .
- Более кратко, *сечение* расслоения $\pi: \mathcal{B} \rightarrow M$ — это такое отображение $s: M \rightarrow \mathcal{B}$, что $\pi(s(x)) = x$ для всех $x \in M$.
- *Дифференциальные k -формы* на M , на самом деле, это гладкие сечения расслоения $\Lambda^k T^*M$.