

Вопросы к устному экзамену

по основам математического анализа
очень предварительная версия!

ФФ НГУ, январь 2013

ЛЕКТОР — АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ УЛЬЯНОВ

- 1. Вещественные числа.** Десятичные дроби. Числовые множества. Промежутки.
- 2. Функции.** Эволюция понятия функции. Формулы и графики. Операции с функциями. Элементарные функции.
- 3. Непрерывность и точки разрыва.** Наивная непрерывность. Происхождение разрывов. Типы точек разрыва.
- 4. Предпосылки возникновения анализа.** Три важнейшие задачи. Задача о касательной. Задача о площади. Приближённые вычисления.
- 5. Правила отыскания производных.** Арифметические правила. Производные степенных функций. Производная показательной функции. Производные тригонометрических функций. Производная обратной функции. Производная композиции функций. Особые случаи. Исследование функций.
- 6. Правила отыскания первообразных.** Начальная таблица первообразных. Общие правила. Замена переменной интегрирования. Интегрирование по частям.
- 7. Определённый интеграл.** Интегральные суммы. Основные свойства. Фундаментальная теорема анализа. Ещё раз о первообразной степенной функции. Простейшие преобразования. Трансцендентные элементарные функции. Специальные функции.
- 8. Простейшие дифференциальные уравнения.**
- 9. Комплексные числа.** Алгебраическая форма и арифметические операции. Геометрическое представление. Тригонометрическая форма. Комплексная экспонента.
- 10. Уравнение свободных колебаний.** Общие свойства линейных уравнений. Опыт угадывания решений. Метод решения.
- 11. Интегрирование рациональных функций.** Постановка задачи и стратегия. Разложение дроби на простейшие в теории. Разложение дроби на простейшие на практике. Интегрирование простейших дробей.
- 12. Рационализация некоторых интегралов.** Тригонометрия. Квадратичные иррациональности.
- 13. Бином Ньютона.** Бином до Ньютона. Геометрическая прогрессия. Бином Ньютона.
- 14. Приближение функций полиномами.** Формула Тейлора. Простейшие разложения. Разложение первообразных.
- 15. Асимптотические сравнения.** Асимптотическая эквивалентность. Бесконечно малые. Преобразования. Бесконечно большие.
- 16. Методы разложения функций.** Суммы и разности. Произведения. Композиции. Частные. Обратные и неявные функции. Решения дифференциальных уравнений.
- 17. Теоремы о среднем.** Локальные экстремумы. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши.
- 18. Монотонность и экстремумы.** Участки монотонности. Условия локального экстремума.
- 19. Выпуклость и перегибы.** Участки выпуклости. Точки перегиба. Неравенство Йенсена.
- 20. Доказательства формулы Тейлора.** Формула Тейлора. Интегрирование по частям. Теорема о среднем как шаг индукции. Доказательство Коши. Ряд Тейлора.
- 21. Раскрытие неопределённостей.** Применение формулы Тейлора. Правила Бернулли — Лопиталья. Прочие неопределённости.

22. **Точные грани и полнота.** Формы выражения полноты. Точные нижние и верхние грани. Теорема Дедекинда о сечении. Принцип вложенных отрезков. Расширенная числовая прямая.
23. **Непрерывность функции в точке.** Эволюция определения непрерывности. Маленькие хитрости неравенств. Непрерывность и операции.
24. **Теоремы о непрерывных функциях.** Липшицевы функции. Промежуточные и экстремальные значения. Монотонные функции. Равномерная непрерывность.
25. **Предел функции.** Определение предела функции в точке. Бесконечные вариации на тему предела. Односторонние пределы. Общие свойства предела.
26. **Признаки существования предела.** Зажатость и замечательные пределы. Критерий Коши. Замена переменной. Правила Бернулли — Лопиталья. Изолированные точки и точки сгущения. Односторонний предел монотонной функции.
27. **Дифференцируемость.** Эволюция определения дифференцируемости. Общие правила дифференцирования.
28. **Дифференциалы.** Касательные и первые дифференциалы. Две переменных. Высшие дифференциалы.
29. **Интегралы в геометрии и механике.** Площадь как первообразная. Площадь в полярных координатах. Длина линии. Фигуры вращения. Масса и моменты. Интегральные теоремы о среднем.
30. **Интегрирование по Риману и Дарбу.** Линейность, аддитивность, монотонность. Разбиения отрезка. Интегральные суммы Римана. Интегральные суммы Дарбу. Интегрируемость и разрывы.
31. **Несобственные интегралы.** Особенность справа. Иные случаи одной или двух особенностей. Общие свойства и формулы. Сравнение и эквивалентность. Степенные особенности. Критерий Коши. Главное значение по Коши.
32. **Гамма-функция и бэ́та-функция.** Определение гамма-функции. Единственность гамма-функции. Исследование гамма-функции. Бэ́та-функция. Интеграл Эйлера — Пуассона.
33. **Зачем нужны последовательности.** Определение последовательности. Откуда берутся последовательности.
34. **Предел последовательности.** Определение предела последовательности. Коридоры и хвосты. Арифметические и порядковые свойства предела. Бесконечные пределы. Секвенциальный подход к пределу функции.
35. **Зажатые и монотонные последовательности.** Зажатые последовательности. Монотонные последовательности. Примеры трюков. Число ϵ как предел.
36. **Частичные пределы.** Точки сгущения и подпоследовательности. Верхний и нижний пределы.
37. **Компактность отрезка.** Теорема о точке сгущения. Теорема о покрытии отрезка интервалами. Новые доказательства старых теорем.
38. **Фундаментальные последовательности.** Критерий Коши сходимости последовательности. Сходимость и пополнение. Произведение множеств. Отношения порядка и эквивалентности.
39. **Признаки сходимости числовых рядов.** Терминология. Простейшие примеры, признаки и явления. Знакопеременные ряды. Сравнение положительных рядов. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак.
40. **Абсолютная и условная сходимость.** Терминология, примеры и признаки. Перестановка слагаемых ряда. Арифметические операции с рядами. Суммирование расходящихся рядов.
41. **Эвклидово пространство.** Арифметическое пространство. Векторы. Эвклидова геометрия. Нормы и их эквивалентность.

42. **Предел и непрерывность.** Предел последовательности. Непрерывность функции. Непрерывность отображения.
43. **Открытые и замкнутые множества.** Внутренность, граница, замыкание. Множества, заданные неравенствами. Пересечения, объединения, произведения. Непрерывность и прообразы. Линейно связные множества.
44. **Компактные множества.** Ограниченные множества. Компактные множества. Непрерывные функции на компакте.
45. **Принцип сжимающих отображений.**
46. **Дифференциал и градиент.** Частные производные. Производные по вектору. Дифференциал и дифференцируемость. Градиент. Гладкие функции.
47. **Дифференцирование композиции.** Правило цепочки для функций. Полная производная. Неявные функции. Однородные функции. Необозначенные аргументы.
48. **Высшие частные производные.** Перестановочность частных производных. Классы гладкости.
49. **Высшие дифференциалы.** Второй дифференциал и гессиан. Высшие дифференциалы. Лемма об одномерном сечении. Многомерная формула Тейлора.
50. **Локальные экстремумы.** Необходимые условия. Достаточные условия.
51. **Гладкие отображения.** Матрица Якоби. Дифференцирование композиции. Дифференцирование обратного отображения. Искажение объёма и якобианы. Гомеоморфизмы и диффеоморфизмы.