

Вопросы к устному экзамену

по линейной алгебре и геометрии предварительная версия!

ФФ НГУ, январь 2010

ЛЕКТОР — АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ УЛЬЯНОВ

1. Векторы в пространстве. Операции с векторами. Коллинеарность и компланарность. Базис и координаты. Реперы. Ориентация пространства.
2. Скалярное произведение векторов. Билинейность. Ортогональная проекция вектора на ось. Вычисление скалярного произведения в координатах.
3. Смешанное произведение векторов. Объём параллелепипеда. Ориентация репера. Выражение смешанного произведения через векторное и скалярное. Вычисление смешанного произведения в координатах.
4. Векторное произведение векторов. Билинейность, антисимметричность. Вычисление векторного произведения в координатах. Двойное векторное произведение, тождество Якоби.
5. Задание прямых и плоскостей линейными уравнениями.
6. Направляющий вектор, параметрическое задание прямой. Параметрическое задание плоскости.
7. Нормаль к прямой на плоскости и к плоскости в пространстве. Нормальные уравнения прямой и плоскости.
8. Уравнение прямой по двум её точкам. Уравнение плоскости по трём её точкам.
9. Переход от одного способа задания прямой или плоскости к другому.
10. Расстояние от точки до прямой и до плоскости. Проекции и перпендикуляры. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
11. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Определение расположения с применением скалярного, векторного и смешанного произведений.
12. Эллипсы, параболы и гиперболы. Полярные и канонические уравнения. Форма линий. Фокальные и оптические свойства.
13. Преобразования декартовых координат на плоскости. Сдвиги, растяжения, повороты, отражения. Матричная запись преобразований. Композиция преобразований и умножение матриц. Преобразования декартовых координат в пространстве.
14. Общее уравнение линии второго порядка, его матричная запись. Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду поворотом и переносом прямоугольных координат.
15. Уравнение касательной к линии второго порядка.
16. Алгебраическое определение комплексных чисел. Геометрическое представление на комплексной плоскости. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексных чисел. Экспонента. Умножение и деление в экспоненциальной форме. Запись движений плоскости при помощи комплексных чисел.
17. Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы.
18. Многочлены от одной буквы. Сумма и произведение многочленов. Делители многочлена. Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня.
19. Существование корня комплексного многочлена (без доказательства). Неприводимые многочлены. Разложение многочлена на неприводимые множители над \mathbb{R} и над \mathbb{C} .
20. Системы линейных уравнений и их решения. Матричный язык. Совместные и несовместные, определённые и неопределённые системы. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования строк.

21. Системы ступенчатого вида. Метод последовательного исключения неизвестных. Ранг матрицы и его нахождение.
22. Линейные пространства строк и столбцов. Линейные комбинации, линейная оболочка. Линейная зависимость и линейная независимость. Линейные подпространства.
23. Базис. Координаты вектора относительно выбранного базиса. Стандартный базис в \mathbb{R}^n . Существование базиса. Размерность линейного пространства. Ранг системы векторов.
24. Ранг матрицы по строкам/столбцам. Теорема о совпадении рангов. Критерий совместности системы линейных уравнений.
25. Общее решение системы линейных уравнений. Однородные линейные системы, пространство решений, фундаментальная система решений. Неоднородные линейные системы, многообразие решений.
26. Перестановки. Инверсии и чётность перестановки. Комбинаторная формула полного раскрытия определителя.
27. Минор и алгебраическое дополнение. Раскрытие определителя по строке или столбцу. Определитель (блочной) треугольной матрицы.
28. Полилинейность и кососимметричность определителя. Характеризация определителя этими свойствами (без доказательства). Элементарные преобразования определителей.
29. Определитель произведения матриц (два с половиной доказательства).
30. Критерий невырожденности матрицы. Обратная матрица. Формулы Крамера.
31. Ранг матрицы по минорам, эквивалентность с прежними определениями. Метод окаймляющих миноров (без доказательства).
32. Билинейные формы. Задание билинейной формы матрицей. Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Квадратичные формы. Задание квадратичной формы симметричной матрицей.
33. Изменение матрицы формы при смене базиса в пространстве столбцов. Конгруэнтность матриц и эквивалентность форм. Ранг формы. Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения формы к каноническому виду.
34. Нормальный вид квадратичной формы над \mathbb{C} и над \mathbb{R} . Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Индексы инерции, сигнатура. Невырожденные формы, (полу)определённые формы.
35. Главные миноры. Определение сигнатуры методом Якоби. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.
36. Поверхности второго порядка: эллипсоиды, параболоиды, гиперболоиды, конусы, цилиндры, распадающиеся квадратичные поверхности.