Задание 1 (сдать к 3 октября)

1. Вершины (непрямоугольного) треугольника ABC и точка H пересечения его высот заданы радиус-векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{h}$. Доказать, что

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{a}\operatorname{tg} A + \mathbf{b}\operatorname{tg} B + \mathbf{c}\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для конкретных векторов.

№	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{n}$
1	$[2,3,5]$	$[1,1,4]$	$[1,1,1]$
2	$[1,2,4]$	$[5,1,-1]$	$[2,1,2]$
3	$[2,1,2]$	$[5,3,2]$	$[1,1,2]$
4	$[0,3,-2]$	$[1,5,-1]$	$[1,-1,-1]$
5	$[-1,1,1]$	$[4,3,1]$	$[2,1,-2]$
6	$[4,0,5]$	$[2,3,-2]$	$[1,-1,1]$
7	$[5,2,2]$	$[-1,1,-3]$	$[2,-1,2]$
8	$[3,2,-1]$	$[5,3,1]$	$[1,1,-2]$
9	$[4,2,1]$	$[-1,3,5]$	$[1,-2,-1]$
10	$[1,1,-5]$	$[1,-2,-3]$	$[-1,1,1]$
11	$[1,2,5]$	$[1,0,4]$	$[1,1,-1]$
12	$[1,1,4]$	$[2,-7,1]$	$[-2,1,2]$
13	$[2,1,4]$	$[4,-2,3]$	$[1,-1,2]$
14	$[2,-1,0]$	$[3,2,-1]$	$[2,2,1]$
15	$[3,1,1]$	$[2,-2,-1]$	$[-1,1,2]$

5. Точки A, B, C и D являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

1	$A(1,2,3)$	$B(2,4,1)$	$C(4,1,1)$	$D(1,3,4)$
2	$A(2,4,1)$	$B(3,5,2)$	$C(1,1,-3)$	$D(5,2,1)$
3	$A(1,2,2)$	$B(2,3,3)$	$C(2,3,4)$	$D(2,0,2)$
4	$A(3,-1,4)$	$B(4,-2,6)$	$C(4,0,6)$	$D(4,-3,5)$
5	$A(1,2,1)$	$B(2,1,2)$	$C(2,3,3)$	$D(4,0,2)$
6	$A(2,1,1)$	$B(3,3,-1)$	$C(5,0,-1)$	$D(2,2,2)$
7	$A(1,1,-2)$	$B(2,2,-1)$	$C(0,-2,-4)$	$D(4,-1,-2)$
8	$A(1,-3,1)$	$B(2,-2,2)$	$C(1,-2,3)$	$D(2,-5,1)$
9	$A(2,3,-1)$	$B(3,2,1)$	$C(3,4,1)$	$D(3,1,0)$
10	$A(1,3,3)$	$B(2,2,4)$	$C(2,4,5)$	$D(4,1,4)$
11	$A(1,1,1)$	$B(2,3,-1)$	$C(4,0,-1)$	$D(1,2,2)$
12	$A(3,2,1)$	$B(4,1,3)$	$C(4,3,3)$	$D(4,0,2)$
13	$A(1,2,-1)$	$B(2,1,0)$	$C(2,3,-1)$	$D(4,0,0)$
14	$A(3,1,1)$	$B(4,2,2)$	$C(2,-2,-1)$	$D(0,3,1)$
15	$A(2,4,3)$	$B(1,3,2)$	$C(1,3,1)$	$D(3,2,3)$

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для конкретных прямой и плоскости.

№	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
1	$[1,2,3]$	$[1,1,1]$	$[2,3,4]$	$[1,2,1]$	$[2,1,1]$
2	$[4,2,1]$	$[3,2,1]$	$[1,2,3]$	$[1,1,1]$	$[-2,1,1]$
3	$[1,1,2]$	$[3,1,1]$	$[4,2,3]$	$[1,1,1]$	$[2,1,-1]$
4	$[1,3,4]$	$[1,1,2]$	$[2,2,3]$	$[3,2,2]$	$[1,2,1]$
5	$[3,2,4]$	$[1,2,1]$	$[1,3,3]$	$[1,1,5]$	$[1,2,4]$
6	$[3,2,-2]$	$[1,2,3]$	$[2,5,-1]$	$[2,1,2]$	$[1,1,3]$
7	$[3,-1,3]$	$[-2,1,2]$	$[2,3,4]$	$[1,2,3]$	$[-1,1,1]$
8	$[2,0,3]$	$[3,1,3]$	$[1,4,4]$	$[1,2,3]$	$[1,1,1]$
9	$[2,5,2]$	$[2,-2,1]$	$[1,2,2]$	$[1,1,1]$	$[1,3,2]$
10	$[1,2,3]$	$[-1,2,1]$	$[2,5,2]$	$[1,4,2]$	$[1,2,2]$
11	$[-1,1,1]$	$[3,4,1]$	$[1,2,2]$	$[2,3,-1]$	$[1,2,1]$
12	$[-1,3,2]$	$[2,2,1]$	$[1,1,1]$	$[2,3,-1]$	$[1,2,1]$
13	$[1,3,4]$	$[3,1,1]$	$[4,2,3]$	$[1,1,1]$	$[2,1,-1]$
14	$[3,2,5]$	$[2,1,2]$	$[2,5,4]$	$[1,2,3]$	$[-1,1,3]$
15	$[2,2,2]$	$[3,3,2]$	$[-1,3,2]$	$[1,1,1]$	$[1,2,1]$

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.