Задание 2 (сдать к 31 октября)

1. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

2. Эллипс, гипербола или парабола задана своим каноническим уравнением. Из точки (x_0, y_0) вне этой линии к ней проведены две касательные. Найти уравнение прямой, проходящей через обе точки касания.

3. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

4. Найти формулы преобразования прямоугольных координат в пространстве, если начала двух систем различны, а концы единичных базисных векторов совпадают.

5. Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

1.	$x^2 - 4xy + 4y^2 - 7x + 9y + 16 = 0;$ $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 16 = 0;$ $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y - 3 = 0;$ $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y - 2 = 0.$
2.	$6x^2 - 4xy + 9y^2 + 10y + 3 = 0;$ $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 8x + 6y + 2 = 0;$ $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 3 = 0;$ $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x - 8y - 1 = 0.$
3.	$3x^2 + 8xy - 3y^2 + 6x - 2y - 2 = 0;$ $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 2x - 6y = 0;$ $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y - 1 = 0;$ $9x^2 - 6xy + y^2 - 3x + 11y - 2 = 0.$
4.	$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y + 3 = 0;$ $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y - 1 = 0;$ $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 6y - 1 = 0;$ $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 1 = 0.$

5.	$x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 10y - 6 = 0;$ $x^2 - 6xy + y^2 - 6x - 10y - 7 = 0;$ $9x^2 + 6xy + y^2 + 9x - 7y - 2 = 0;$ $9x^2 + 6xy + y^2 - 6x - 2y - 2 = 0.$
6.	$x^2 + 10xy + y^2 + 14x - 2y + 5 = 0;$ $x^2 + 10xy + y^2 + 14x - 2y - 5 = 0;$ $16x^2 + 8xy + y^2 - 8x - 2y - 2 = 0;$ $16x^2 + 8xy + y^2 - 8x - 2y - 2 = 0.$
7.	$x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4y - 1 = 0;$ $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0;$ $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 12x - 8y + 3 = 0;$ $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 8x - 14y + 6 = 0.$
8.	$2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 2y - 1 = 0;$ $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 2y = 0;$ $16x^2 + 8xy + y^2 - 11x + 10y + 1 = 0;$ $16x^2 + 8xy + y^2 - 8x - 2y + 3 = 0.$
9.	$5x^2 + 6xy - 3y^2 - 8x + 1 = 0;$ $5x^2 + 6xy - 3y^2 - 8x + 2 = 0;$ $x^2 + 2xy + y^2 + 7x + y + 7 = 0;$ $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0.$
10.	$2x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x + 4y + 1 = 0;$ $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x + 4y + 2 = 0;$ $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0;$ $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 4y - 1 = 0.$
11.	$5x^2 - 2xy + 5y^2 + 14x + 2y + 10 = 0;$ $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 14x + 2y + 11 = 0;$ $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0;$ $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0.$
12.	$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 12x - 4y + 6 = 0;$ $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 12x - 4y + 80;$ $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0;$ $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 2 = 0.$
13.	$x^2 - xy + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0;$ $x^2 - xy + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0;$ $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 10x + 2y + 3 = 0;$ $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 6y + 1 = 0.$

14.	$5x^2+24xy-5y^2-2x+16y-4=0;$ $5x^2+24xy-5y^2-2x+16y-3=0;$ $x^2+6xy+9y^2+5x-7y-1=0;$ $x^2+6xy+9y^2-2x-6y+2=0.$
15.	$4x^2+6xy-4y^2+x+7y-2=0;$ $4x^2+6xy-4y^2+x+7y-\frac{3}{2}=0;$ $x^2+8xy+16y^2-2x-8y+2=0;$ $x^2+8xy+16y^2+6x-10y-3=0.$

6. Найти тригонометрическую форму записи чисел, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

1.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{21};$	$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{18}.$
2.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{22};$	$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{18}.$
3.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{23};$	$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{18}.$
4.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{24};$	$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{18}.$
5.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{25};$	$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{18}.$
6.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{26};$	$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{18}.$
7.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{27};$	$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{18}.$
8.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{21};$	$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{18}.$
9.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{22};$	$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{18}.$
10.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{23};$	$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{18}.$
11.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{24};$	$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{-1+i}\right)^{18}.$
12.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{25};$	$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{18}.$
13.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{26};$	$\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{18}.$
14.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{27};$	$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{18}.$
15.	$\frac{i-\operatorname{tg}\alpha}{i+\operatorname{tg}\alpha};$	$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^{28};$	$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{18}.$

7. Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^7 x$ через первые степени синуса аргументов, кратных x.

8. Применяя комплексные числа, доказать равенство

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{n} = 0$$

для всех целых $n > 1$.

9. Доказать, что многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$ при всех $m, n, p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

10*. Комплексные переменные z и w связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает w, когда z пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.