Задание 3 (сдать к 5 декабря)

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3*. В зависимости от параметров a, b, c и d решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = d^2. \end{cases}$$

4. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений:

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 3; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 3, \\ 5x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 3. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 7, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5, \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 7; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$

$$(6)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3-x_4=3, \\ x_1+3x_2+2x_3-5x_4=3, \\ 4x_1+7x_2+3x_3-5x_4=7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1+5x_2-2x_3+x_4=3, \\ 2x_1+2x_2+4x_3+3x_4=3, \\ 6x_1+7x_2+2x_3+4x_4=5. \end{cases}$$

$$(7)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=3, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 6x_1+9x_2+5x_3+6x_4=7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+4x_2+3x_3+7x_4=2, \\ 3x_1+5x_2-2x_3+5x_4=9, \\ 4x_1+6x_2-7x_3+3x_4=8. \end{cases}$$

$$(8)\ \begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1, \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=3. \end{cases}$$

$$(9)\ \begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3, \\ 2x_1+3x_2+6x_3+7x_4=5, \\ 4x_1+x_2+4x_3+x_4=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3+x_4=7. \end{cases}$$

$$(10)\ \begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3+x_4=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3+4x_4=2, \\ 4x_1+6x_2-4x_3+3x_4=3, \\ 6x_1+9x_2-3x_3+2x_4=6. \end{cases}$$

$$(11)\ \begin{cases} 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ 8x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=2, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=4, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=5. \end{cases}$$

$$(12)\ \begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4=3, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4=5, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4=7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+3x_4=2, \\ 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4=4, \\ 4x_1+9x_2-3x_3+7x_4=5. \end{cases}$$

$$(13)\ \begin{cases} 3x_1+3x_2-x_3+4x_4=2, \\ 2x_1+3x_2-x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+3x_2-x_3+5x_4=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=2, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=1, \\ 4x_1-8x_2+3x_3+x_4=1. \end{cases}$$

$$(14)\ \begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=3, \\ 7x_1+9x_2-3x_3+6x_4=8; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=2, \\ 5x_1+7x_2+x_3+4x_4=3, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+5x_4=1. \end{cases}$$

$$(15)\ \begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3+7x_4=2, \\ 4x_1-2x_2+7x_3+5x_4=7, \\ 2x_1-x_2+x_3-5x_4=6; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+2x_4=7, \\ 6x_1+4x_2+7x_3+4x_4=6, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=9. \end{cases}$$

5. Найти обратные к матрицам

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix};$

---

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

---

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

---

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$

---

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

---

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

---

(7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

---

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

---

(9) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix};$

(10) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

(11) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

(12) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

(13) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

(14) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

(15) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

6. Найти значения m и k, при которых определитель $\det[a_{ij}]$ содержит моном со знаком минус:

(1) $a_{3k}a_{42}a_{2m}a_{15}a_{56}a_{63}a_{71}$; (2) $a_{35}a_{4k}a_{76}a_{52}a_{1m}a_{24}a_{61}$;

(3) $a_{33}a_{4k}a_{2m}a_{15}a_{56}a_{62}a_{71}$; (4) $a_{72}a_{25}a_{1k}a_{34}a_{56}a_{6m}a_{43}$;

(5) $a_{34}a_{4k}a_{72}a_{1m}a_{26}a_{67}a_{51}$; (6) $a_{3k}a_{12}a_{47}a_{76}a_{6m}a_{21}a_{53}$;

(7) $a_{36}a_{4k}a_{12}a_{2m}a_{73}a_{64}a_{55}$; (8) $a_{42}a_{3k}a_{75}a_{51}a_{6m}a_{17}a_{23}$;

(9) $a_{74}a_{5k}a_{45}a_{37}a_{2m}a_{66}a_{13}$; (10) $a_{46}a_{51}a_{3k}a_{13}a_{24}a_{62}a_{7m}$;

(11) $a_{42}a_{3k}a_{26}a_{1m}a_{61}a_{75}a_{53}$; (12) $a_{57}a_{2k}a_{43}a_{14}a_{3m}a_{72}a_{66}$;

(13) $a_{32}a_{41}a_{2k}a_{15}a_{6m}a_{73}a_{56}$; (14) $a_{63}a_{4k}a_{36}a_{2m}a_{11}a_{74}a_{55}$;

(15) $a_{23}a_{54}a_{1k}a_{71}a_{4m}a_{66}a_{32}$.

7. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нем присутствует условие, что четыре данные точки не лежат в одной плоскости.