

Задание 4 (сдать к 26 декабря)

1. Решить матричное уравнение

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 7 \\ 7 & 11 & 1 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 5 \\ 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 11 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 14 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$5) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & 2 \\ -5 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$6) \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$7) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$8) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 8 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 5 \\ 4 & -6 & -7 \\ -2 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$9) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 3 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$10) \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$11) \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$12) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$13) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 11 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$14) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 6 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$15) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 7 \\ 9 & 3 & 21 \end{bmatrix}.$$

2. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм

$$1) \quad x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

$$2) \quad x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3;$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3.$$

$$3) \quad x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3;$$

$$x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3.$$

$$4) \quad 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3;$$

$$x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

$$5) \quad x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

$$6) \quad 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3;$$

$$x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3.$$

$$7) \quad 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3;$$

$$x_1x_2 - x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

$$8) \quad 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3;$$

$$x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

$$9) \quad \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3;$$

$$x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

$$10) \quad x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3;$$

	$x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3.$
11)	$x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3;$ $2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3.$
12)	$-4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 18x_2x_3;$ $2x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2x_3.$
13)	$4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_3; 12);$ $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3.$
14)	$2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3;$ $2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3.$
15)	$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3;$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$

3. Найти нормальный вид над \mathbb{R} и сигнатуру квадратичных форм

1)	$3x_1^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$
2)	$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3;$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 - x_3x_4.$
3)	$\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3;$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4.$
4)	$x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3;$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4.$
5)	$x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3;$ $x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4.$
6)	$-4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 18x_2x_3;$ $x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4.$
7)	$4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_3;$ $x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4.$
8)	$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$ $x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$
9)	$x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3;$ $x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 + x_3x_4.$
10)	$x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3;$ $x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$
11)	$3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3;$ $x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4.$
12)	$x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$ $x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_3x_4.$

13)	$4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3;$ $x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 - x_3x_4.$
14)	$2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3;$ $x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4.$
15)	$3x_1^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$

4. При каких значениях λ

- (a) квадратичная форма f положительно определена?
(b) квадратичная форма g отрицательно определена?

1)	$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3.$
2)	$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$
3)	$f = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$
4)	$f = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$
5)	$f = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$
6)	$f = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3;$ $g = -2x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$
7)	$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3.$
8)	$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3.$
9)	$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$
10)	$f = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$
11)	$f = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$
12)	$f = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3;$ $g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$
13)	$f = x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3;$ $g = -2x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$
14)	$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$

$$g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

$$15) \quad f = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3;$$

$$g = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3.$$

5. Найти число классов эквивалентности над \mathbb{C} и над \mathbb{R} квадратичных форм от n переменных.
6. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.
- (a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.
- (b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.
- 7*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.
- 8*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.
- 9*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.