

# Вопросы к экзамену по линейной алгебре и аналитической геометрии

для студентов I курса ФФ НГУ

1. Векторы: понятие вектора, длина вектора, нулевой вектор, точка приложения вектора, равенство двух векторов. Линейные операции над векторами: сложение векторов, умножение вектора на число. Свойства линейных операций. Выражения суммы векторов и произведения вектора на число в координатах.
2. Коллинеарные и компланарные векторы. Реперы. Теоремы о базисном репере на плоскости и в пространстве. Координаты вектора в базисе. Ориентация пространства.
3. Скалярное произведение. Билинейность скалярного произведения. Ортонормированный базис, направляющие косинусы вектора. Скалярное произведение в координатах. Выражение длины и угла между векторами через скалярное произведение. Проекция вектора на ось.
4. Смешанное произведение трёх векторов. Объём параллелепипеда. Ориентация репера. Выражение смешанного произведения через векторное и скалярное. Смешанное произведение в координатах. Условие компланарности трёх векторов.
5. Векторное произведение двух векторов. Антисимметричность, билинейность векторного произведения. Условие коллинеарности двух векторов. Выражение векторного произведения в координатах. Формула двойного векторного произведения, тождество Якоби.
6. Прямоугольная декартова система координат. Преобразование декартовой системы координат на плоскости. Матричная форма записи. Композиция преобразований и умножение матриц. Преобразование декартовой системы координат в пространстве.
7. Задание прямых и плоскостей уравнениями первого порядка.
8. Направляющий вектор прямой, плоскости. Параметрические уравнения прямой и плоскости.
9. Нормаль к прямой, плоскости. Нормальные уравнения прямой и плоскости.
10. Уравнение прямой по двум её точкам. Уравнение плоскости по трём её точкам.
11. Переход от одного способа задания прямой, плоскости к другому.
12. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Исследование взаимного расположения прямых и плоскостей с применением скалярного, векторного и смешанного произведений.
13. Расстояние от точки до прямой, плоскости. Расстояния и углы между прямыми, плоскостями. Проекция точки на прямую, плоскость.
14. Скрещивающиеся прямые. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым, его уравнение и точки пересечения с прямыми.
15. Эллипс, гипербола, парабола: канонические и полярные уравнения. Фокусы и директрисы, эксцентриситет. Исследование формы кривой (симметрии, вершины, полуоси, асимптоты). Фокальные и оптические свойства.
16. Общее уравнение кривой второго порядка. Матричная форма записи уравнения кривой второго порядка. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Классы кривых второго порядка.
17. Общее уравнение кривой второго порядка. Матричная форма записи общего уравнения кривой второго порядка. Касательная к кривой второго порядка.
18. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексного числа. Алгебраические операции. Сопряжённое. Геометрическое представление комплексных чисел и операций. Комплексная экспонента и формула Эйлера. Умножение и деление в экспоненциальной форме.
19. Возведение в целую степень и формула Муавра. Тригонометрические и гиперболические функции. Извлечение корня из комплексного числа, корни из единицы.
20. Многочлены от одной переменной. Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня. Существование комплексного корня многочлена (без доказательства).

21. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Совместные и несовместные, определённые и неопределённые системы. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования строк.
22. Системы линейных алгебраических уравнений. Ступенчатый вид системы. Метод последовательного исключения неизвестных.
23. Линейные пространства строк и столбцов. Аксиомы линейного пространства. Линейные комбинации, линейная оболочка. Линейная зависимость, независимость. Свойства линейной зависимости.
24. Базис линейного пространства. Стандартный базис пространства  $\mathbb{R}^n$ . Теорема о существовании базиса. Размерность линейного пространства. Ранг системы векторов.
25. Базис линейного пространства. Координаты вектора в некотором базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора при переходе от одного базиса к другому.
26. Ранг матрицы. Ранг матрицы по строкам и по столбцам. Теорема о равенстве столбцового и строчного рангов матриц. Теорема Кронекера – Капелли.
27. Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений. Неоднородная система линейных уравнений. Многообразие решений. Критерий совместности системы линейных уравнений.
28. Пространство матриц. Матричные единицы. Транспонирование и его свойства. Матрицы специального вида: скалярные, диагональные. Симметричные и кососимметричные матрицы.
29. Подстановки и перестановки. Инверсии, чётность перестановки, подстановки. Комбинаторное определение определителя.
30. Свойства определителей. Полилинейность и кососимметричность определителя. Характеризация его этими свойствами (без доказательства).
31. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Определитель (блочной) треугольной матрицы.
32. Определитель (блочной) треугольной матрицы. Определитель произведения матриц.
33. Критерий невырожденности матрицы. Обратная матрица. Формулы Крамера.
34. Ранг матрицы по минорам, эквивалентность с прежними определениями.
35. Билинейные формы. Симметрические и кососимметрические формы. Матрица билинейной формы. Закон изменения матрицы билинейной формы при смене базиса. Конгруэнтность матриц.
36. Квадратичные формы. Задание квадратичной формы симметричной матрицей. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
37. Нормальный вид квадратичных форм над  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{R}$ . Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Индексы инерции, сигнатура. Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы. Неотрицательно и неположительно полуопределённые квадратичные формы.
38. Главные миноры. Метод Якоби определения сигнатуры формы. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
39. Поверхности второго порядка: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, цилиндры, конусы, распадающиеся квадратичные поверхности. Вид и канонические уравнения.

Лектор — Ирина Александровна Долгунцева.