Основы математического анализа

Лектор — Александр Петрович Ульянов

1-й семестр

Введение в анализ

Элементарные функции. Производная функции и правила дифференцирования. Полиномы Тейлора. Таблица простейших интегралов. Общие методы интегрирования. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Уравнение колебаний и комплексная экспонента. Логическая символика. Множества и отображения. Метод математической индукции.

Предел и непрерывность

Числовые множества. Последовательности и их пределы. Предел функции. Непрерывные функции.

Дифференцируемые функции

Определение и правила дифференцирования. Теоремы о среднем. Исследование функций и построение графиков. Асимптотические сравнения. Дифференциал. Асимптотические разложения. Ряд Тейлора.

Интегрирование

Первообразная и неопределённый интеграл. Общие методы и специальные приёмы интегрирования. Определённый интеграл Римана. Примеры приложений интеграла. Несобственные интегралы. Интегралы Эйлера.

Функции нескольких переменных

Арифметическое пространство и его подмножества. Непрерывные отображения. Дифференциал функции. Повторное дифференцирование. Локальные экстремумы.

Литература

1. *Курант Р.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления.
2. *Зельдович Я. Б.*, Высшая математика для начинающих и её приложения к физике.
3. *Зельдович Я. Б., Яглом И. М.*, Высшая математика для начинающих физиков и техников.
4. *Фихтенгольц Г. М.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления.
5. *Фихтенгольц Г. М.*, Основы математического анализа.
6. *Смирнов В. И.*, Курс высшей математики.
7. *Босс В.*, Лекции по математике. Анализ.
8. *Демидович Б. П.*, Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
9. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.*, Сборник задач по математическому анализу.

Задания по основам математического анализа

Задания доступны в электронном виде на сайте кафедры высшей математики физического факультета по адресу
`http://www.phys.nsu.ru/ulyanov/math-programs.html`

Программу и задания
по основам математического анализа
составил старший преподаватель, Ph. D.
А. П. Ульянов

Основы математического анализа

Лектор — Александр Петрович Ульянов

2-й семестр

К началу второго семестра программа и задания будут доступны в электронном виде на сайте кафедры высшей математики физического факультета по адресу
`http://www.phys.nsu.ru/ulyanov/math-programs.html`

Линейная алгебра и геометрия

Лектор — Ирина Александровна Долгунцева

1-й семестр

1. Векторная алгебра

Понятие вектора как направленного отрезка. Длина вектора. Нулевой вектор. Точка приложения вектора. Равенство двух векторов.

Линейные операции над векторами: сложение векторов, умножение на число. Свойства линейных операций.

Линейная комбинация векторов. Коллинеарные и компланарные векторы. Базис и координаты вектора. Прямоугольная декартова система координат. Преобразование координат вектора. Матрицы, умножение матриц.

Скалярное произведение. Алгебраические свойства скалярного произведения. Ортонормированный базис, направляющие косинусы вектора. Представление скалярного произведения в координатах. Выражение длины и угла между векторами через скалярное произведение. Проекция вектора на ось.

Ориентация прямой, плокости, пространства. Площадь ориентированного параллелограмма и объем ориентированного параллелепипеда.

Смешанное произведение как объём ориентированного параллелепипеда. Алгебраические свойства. Связь скалярного и смешанного произведения. Векторное произведение двух векторов. Алгебраические свойства векторного произведения.

Определители второго и третьего порядков. Выражение векторного и смешанного произведений в координатах. Условия коллинеарности (компланарности) векторов. Свойства ориентированного параллелограмма. Формула двойного векторного произведения.

2. Прямые и плоскости

Уравнения прямых и плоскостей. Понятие направляющего вектора прямой, плоскости. Параметрические уравнения прямой и плоскости.

Понятие нормали к прямой, плоскости. Нормальные уравнения прямой и плоскости. Общее уравнение прямой, плоскости. Другие способы задания прямой и плоскости.

Расстояние от точки до прямой, плоскости. Расстояние между прямыми. Проекции и перпендикуляры. Взаимное расположение прямых, плоскостей.

3. Кривые второго порядка

Кривые и поверхности второго порядка — алгебраические уравнения. Коническая поверхность. Кривые второго порядка как конические сечения. Полярная система координат. Полярные уравнения кривых второго порядка: эллипса, гиперболы, параболы. Фокусы и директрисы, эксцентриситет. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Исследование формы кривой: симметрии, вершины, полуоси, асимптоты. Фокальные и оптические свойства.

Общее уравнение кривой второго порядка. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Классы поверхостей второго порядка.

4. Комплексные числа. Многочлены

Геометрическое определение комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплескного числа. Алгебраические операции. Сопряжение. Комплексная экспонента и формула Эйлера. Возведение в целую степень и формула Муавра. Тригонометрические и гиперболические функции. Извлечение корня из комплексного числа, корни из единицы.

Корни многочлена. Кратность корня. Существование комплексного корня многочлена (без доказательства). Алгоритм деления с остатком.

5. Системы линейных уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Совместные и несовместные, определённые и неопределённые системы. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования строк. Ступенчатый вид. Метод последовательного исключения неизвестных. Ранг матрицы. Критерий совместности системы.

6. Линейные пространства

Линейные пространства строк и столбцов. Аксиомы линейного пространства. Линейные комбинации, линейная оболочка. Линейная зависимость, независимость. Свойства линейной зависимости. Базис линейного пространства. Размерность линейного пространства. Координаты вектора в некотором базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Ранг матрицы по строкам и по стобцам. Равенство столбцового и строчного рангов матриц.

Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений. Неоднородная система линейных уравнений. Многообразие решений. Критерий совместности системы линейных уравнений.

Пространство матриц. Матричные единицы. Транспонирование. Матрицы специального вида: скалярные, диагональные. Симметричные и кососимметричные матрицы.

7. Определители

Геометрическая мотивировка. Подстановки и перестановки. Инверсии, чётность перестановки, подстановки. Комбинаторное определение определителя. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Определитель (блочной) треугольной матрицы. Определитель произведения матриц.

Полилинейность и кососимметричность определителя. Характеризация его этими свойствами (без доказательства).

Критерий невырожденности матрицы. Обратная матрица. Формулы Крамера.

Ранг матрицы по минорам, эквивалентность с прежними определениями.

8. Квадратичные формы и поверхости второго порядка

Билинейные формы. Симметрические и кососимметрические формы. Квадратичные формы. Поляризация. Матрица билинейной формы. Закон изменения матрицы билинейной формы при смене базиса. Конгруэнтность матриц. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Нормальный вид квадратичных форм над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Индексы инерции, сигнатура. Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы. Неотрицательно и неположительно полуопределённые квадратичные формы. Главные миноры. Метод Якоби определения сигнатуры формы. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Поверхности второго порядка: вид и канонические уравнения.

Литература

1. *Ульянов А. П.* Конспект лекций по алгебре и геометрии.
2. *Александрова Н. А.* Семинары по высшей алгебре и аналитической геометрии.
3. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.
5. *Курош В. Г.* Курс высшей алгебры.
6. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
7. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре.
8. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия.
9. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.
10. *Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю.* Геометрия.
11. *Погорелов А. В.* Аналитическая геометрия.
12. *Моденов П. С.* Аналитическая геометрия.
13. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия.
14. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения.
15. *Кострикин А. И.* Сборник задач по алгебре.
16. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре.
17. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре.
18. *Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Сборник задач по аналитической геометрии.
19. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.

План семинаров

1. Матрицы, умножение матриц. Вычисление определителей второго и третьего порядка. (1 час)
2. Векторная алгебра. (3 часа)
3. Прямые и плоскости. (4 часа)
4. Преобразование системы координат. (2 часа)
5. Кривые второго порядка. (2 часа)
6. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. (2 часа)
7. Комплексные числа. (2 часа)
8. Многочлены и их корни. (2 часа)
9. Системы линейных уравнений. Метод исключения неизвестных. Ранг матрицы. (2 часа)
10. Пространство решений, фундаментальные решения. Многообразие решений. (2 часа)
11. Свойства определителей. Методы вычисления определителей и их приложения. (4 часа)
12. Квадратичные формы. Метод Лагранжа. (2 часа)
13. Вещественные квадратичные формы. (2 часа)
14. Поверхности второго порядка. (2 часа)
15. Контрольные работы, зачет. (2 часа)

Задания по линейной алгебре и геометрии

Задания, помеченные звёздочкой, не являются обязательными для получения допуска к экзамену, однако приносят дополнительные баллы. Вычислительные задачи являются лишь образцами, в соответствии с ними преподаватели выдадут студентам индивидуальные задания.

Задание 1 (*сдать к 3 октября*)

1. Вершины (непрямоугольного) треугольника ABC и точка H пересечения его высот заданы радиус-векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{h}$. Доказать, что
$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{a}\operatorname{tg} A + \mathbf{b}\operatorname{tg} B + \mathbf{c}\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

2. Выразить площадь проекции параллелограмма на векторах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$ простейшим образом через данные векторы.

3. Для всех векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ пространства $\mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}.$$

4. (a) Записать уравнение прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и параллельной проекции вектора $\mathbf{v}$ на плоскость с единичной нормалью $\mathbf{n}$.

(b) Задать эту прямую параметрически для конкретных векторов.

5. Точки A, B, C и D являются вершинами тетраэдра. Расположить семь плоскостей так, чтобы каждая из них была равноудалена от всех четырёх точек. Выбрав две такие плоскости, записать общее уравнение одной плоскости и параметрическое уравнение другой.

6. (a) Записать векторную формулу для нахождения точки пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$ и плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$.

(b) Найти эту точку для конкретных прямой и плоскости.

7. В пространстве даны прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - ay + a - 1 = 0, \\ x - z + a^2 - 4a + 3 = 0. \end{cases}$$

(a) Определить, при каких значениях параметра a эти прямые совпадают, параллельны, пересекаются, скрещиваются.

(b) При $a = 2$ найти основания общего перпендикуляра к этим прямым.

8. Доказать, что половина абсолютной величины числа

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

равна площади треугольника с вершинами (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

9. Найти в векторной форме решение $\mathbf{r}$ системы трёх уравнений

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i = c_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\mathbf{a}_i$ некомпланарны.

10*. (*Формула Родрига*) Единичный вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ и число $\theta \in \mathbb{R}$ задают поворот пространства на угол θ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{u}$. Доказать, что произвольный вектор $\mathbf{v}$ преобразуется в вектор

$$\mathbf{v} \cos\theta + \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta) \pm \mathbf{u} \times \mathbf{v} \sin\theta.$$

Знак выбирается согласно направлению поворота.

Задание 2 (*сдать к 31 октября*)

1. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся: (a) данной прямой; (b) данной окружности.

2. Эллипс, гипербола или парабола задана своим каноническим уравнением. Из точки (x_0, y_0) вне этой линии к ней проведены две касательные. Найти уравнение прямой, проходящей через обе точки касания.

3. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус данной параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

4. Найти формулы преобразования прямоугольных координат в пространстве, если начала двух систем различны, а концы единичных базисных векторов совпадают.

5. Найти канонические прямоугольные координаты, каноническое уравнение, тип, фокусы, директрисы и асимптоты кривых второго порядка:

(a) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 7x + 9y + 16 = 0$;

(b) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 16 = 0$;

(c) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y + 2 = 0$;

(d) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y - 2 = 0$.

6. Найти тригонометрическую форму записи чисел, где $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{i - \operatorname{tg}\alpha}{i + \operatorname{tg}\alpha}; \quad (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^2 7; \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{18}.$$

7. Используя комплексную экспоненту, выразить $\sin^7 x$ через первые степени синуса аргументов, кратных x.

8. Применяя комплексные числа, доказать равенство

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{n} = 0$$

для всех целых $n > 1$.

9. Доказать, что многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$ при всех $m, n, p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

10*. Комплексные переменные z и w связаны соотношением $z + z^{-1} = 2w$. Определить, какую кривую пробегает w, когда z пробегает

(a) окружность $\{z \mid |z| = \rho\}$;

(b) луч $\{z \mid \arg z = \varphi\}$.

Задание 3 (*сдать к 5 декабря*)

1. Доказать, что если матрицы A и B обе кососимметричные, то их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ — кососимметричная матрица.

2. В зависимости от параметра λ решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3. \end{cases}$$

3. В зависимости от параметров a, b, c и d решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ a x_1 + b x_2 + c x_3 = d, \\ a^2 x_1 + b^2 x_2 + c^2 x_3 = d^2. \end{cases}$$

4. Приведением к ступенчатому виду решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

5. Найти обратные к матрицам

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Найти значения m и k, при которых определитель $\det [a_{ij}]$ содержит моном

$$a_{47}a_{63}a_{1k}a_{55}a_{7m}a_{24}a_{31}$$

со знаком минус.

7. Для всех $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ доказать тождество

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & -z & \dots & -z \\ z & 0 & -z & \dots & -z \\ z & z & 0 & \dots & -z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} z & z & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & z & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & z & z & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z & z & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix}.$$

10*. Записать в виде определителя уравнение сферы, проходящей через точки (x_i, y_i, z_i) для $i = 1, 2, 3, 4$. Указать, каким образом в нем присутствует условие, что четрые данные точки не лежат в одной плоскости.

Задание 4 (*сдать к 26 декабря*)

1. Решить матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 7 \\ 7 & 11 & 1 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Методом Лагранжа найти канонический вид квадратичных форм

(a) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

3. Найти нормальный вид над $\mathbb{R}$ и сигнатуру квадратичных форм

(a) $3x_1^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

4. При каких значениях λ

(a) квадратичная форма $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ положительно определена?

(b) квадратичная форма $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$ отрицательно определена?

5. Найти число классов эквивалентности над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$ квадратичных форм от n переменных.

6. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных скрещивающихся прямых.

(a) Рассмотрите случай скрещивающихся прямых $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 1)$ и $\mathbf{r}(t) = (0, t, -1)$.

(b) Рассмотрите общий случай, выбирая систему координат так, чтобы прямые располагались наиболее простым и симметричным образом.

7*. Доказать, что плоскость, касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум прямым.

8*. Эллипсоид вращается вокруг своего центра так, что все время касается неподвижной плоскости. Найти геометрическое место точек касания на эллипсоиде.

9*. Найти условие, при котором среди плоских сечений конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

имеются равносторонние гиперболы.

Программу и задания
по линейной алгебре и геометрии
составила к.ф.-м.н. И. А. Долгунцева

Линейная алгебра и геометрия

Лектор — Ирина Александровна Долгунцева

2-й семестр

К началу второго семестра программа и задания будут доступны в электронном виде на сайте кафедры высшей математики физического факультета по адресу

`http://www.phys.nsu.ru/ulyanov/math-programs.html`

Введение в теорию вероятностей

Лектор — Артем Павлович Ковалевский

2-й семестр

1. Дискретная вероятностная модель: Предмет теории вероятностей. Определение дискретной вероятностной модели. Классическое определение вероятности. События, операции над ними. Примеры.

2. Элементы комбинаторики: Выборки с возвращением и без возвращения. Гипергеометрическая формула.

3. Общая вероятностная модель: Мера и вероятностная мера. Свойства вероятности: дополнения, включения, объединения. Геометрическая вероятностная модель. Задача о встрече.

4. Условная вероятность и независимые события: Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события. Независимость дополнений.

5. Независимые испытания: Схема Бернулли. Формула Бернулли. Время ожидания в схеме Бернулли.

6. Дискретные случайные величины: Ряд (таблица) распределения. Свойства таблицы распределения. Основные семейства дискретных распределений: вырожденное, бернуллиевское, биномиальное, геометрическое, пуассоновское.

7. Случайные величины: Определение случайной величины и функции распределения. Свойства функции распределения (без доказательства). Функция распределения дискретной случайной величины. Определение абсолютно непрерывного распределения. Свойства плотности распределения. Связь функции распределения и плотности распределения. Понятие смеси распределений.

8. Основные семейства абсолютно непрерывных распределений: Равномерное, показательное, стандартное нормальное распределение, стандартное распределение Коши. Линейное преобразование случайной величины с абсолютно непрерывным распределением. Нормальное распределение.

9. Независимые случайные величины: Определение независимости случайных величин. Случайные векторы и многомерные функции распределения. Независимость функций от независимых случайных величин. Формула свертки в целочисленном и в абсолютно непрерывном случае.

10. Математическое ожидание: Определение в дискретном случае, пример. Математическое ожидание функции от дискретной случайной величины. Определение в абсолютно непрерывном случае. Пример отсутствия математического ожидания. Математическое ожидание функции от случайной величины с абсолютно непрерывным распределением. Свойства математического ожидания (доказательство в целочисленном случае). Примеры.

11. Моменты и дисперсия: Теорема о существовании моментов. Дисперсия и среднеквадратическое (стандартное) отклонение случайной величины. Их свойства. Примеры.

12. Сходимость случайных величин и распределений: Сходимость по распределению. Сходимость по вероятности. Сходимость с вероятностью единица, ее свойства. Закон больших чисел.

13. Центральная предельная теорема: Формулировка центральной предельной теоремы. Теорема Муавра—Лапласа. Примеры применения.

14. Теорема Пуассона: Лемма об асимптотике числа сочетаний. Приближение Пуассона для биномиального распределения. Пример применения.

Литература

1. *Быстров А.А., Ковалевский А.П., Лотов В.И.* Практикум по теории вероятности. Новосибирск: НГУ, 2009.
2. *Лотов В.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. Новосибирск: НГУ, 2006.
3. *Чернова Н.И.* Теория вероятностей. Новосибирск: НГУ, 2007.
4. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.

Интернет-источники

1. *Лотов В.И.* Лекции по теории вероятностей и математической статистике.
`http://www.nsu.ru/mmf/tvims/lotov/tv&ms_ff.pdf`
2. *Коршунов Д.А., Фосс С.Г.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей.
`http://www.math.nsc.ru/LBRT/v1/dima/ExerciseProbability2.pdf`
3. *Чернова Н.И.* Лекции по теории вероятностей.
`http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/tv/index.html`

Правила аттестации

По курсу «Введение в теорию вероятностей» проводится дифференцированный зачет. Для допуска к зачету необходимо:

1) получить положительную оценку за контрольную работу по элементарной теории вероятностей;

2) сдать домашние задания.

Тексты заданий находятся на сайте кафедры высшей математики физического факультета по адресу

`http://www.phys.nsu.ru/ulyanov/math-programs.html`

Студенты выполняют задания в соответствии со своим вариантом — номером по списку группы.

План семинаров

1. Классическая вероятностная модель. Комбинаторика.
2. Геометрическая вероятностная модель. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
3. Независимые события. Схема Бернулли.
4. Распределения случайных величин.
5. Преобразования случайных величин.
6. Математическое ожидание и дисперсия.
7. Моменты. Сходимость случайных величин. Закон больших чисел.
8. Центральная предельная теорема и теорема Пуассона.

Задачи для решения в аудитории и самостоятельной работы

1.1. Буквы, составляющие фамилию студента, написали на карточках, затем карточки перетасовали и стали выкладывать в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что в результате получится фамилия студента? В качестве фамилии студента выбрать свою фамилию.

1.2. n книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Какова вероятность того, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?

1.3. У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи последовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность того, что нужный ключ появится при k-м извлечении.

1.4. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наугад извлекаются 6 карт. Какова вероятность того, что:

а) среди них окажется туз пик;

б) среди них окажется ровно один туз;

в) среди них окажутся ровно две бубновые карты;

г) среди них окажется хотя бы одна бубновая карта?

1.5. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Некто приобретает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.

1.6. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже входят 5 человек. Независимо от других каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность того, что:

а) все выйдут на четвертом этаже;

б) все пятеро выйдут на одном и том же этаже;

в) все пятеро выйдут на разных этажах?

1.7. Найти вероятность того, что в наугад выбранном трехзначном автомобильном номере:

а) все цифры одинаковы;

б) все цифры различны;

в) только две одинаковые цифры.

1.8. В лотерейном билете 20 полей, причем на 10 из них (выбранных наугад) под защитным слоем скрыты буквы слова «автомобиль». Участник лотереи наугад выбирает свои 10 полей из 20 и открывает их (стирает защитный слой). Какова вероятность того, что он найдет на них все буквы слова «автомобиль»? Какова вероятность того, что ему удастся это сделать, открыв ровно 11 полей?

2.1. Из отрезка [0,1] наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи этого числа вторая цифра после запятой будет двойкой?

2.2. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Обозначим X; Y ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.

а) Доказать, что для $0 < u < 1$, $0 < v < 1$ выполнено

$$P\{X < u, Y < v\} = P\{X < u\}P\{Y < v\} = uv;$$

б) найти для $0 < t < 1$ вероятности

$$1)\ P\{|X - Y| < t\}; \quad 2)\ P\{XY < t\};$$

$$3)\ P\{\max(X,Y) < t\}; \quad 4)\ P\{\min(X,Y) < t\};$$

в) найти $P\{X+Y<t\}$ для $0<t<2$.

2.3. На отрезок длины l произвольным образом брошены три точки. Пусть X, Y, Z — расстояния до этих точек от левого конца отрезка. Какова вероятность, что из отрезков с длинами X, Y и Z можно составить треугольник?

2.4. Точка брошена наудачу в прямоугольник со сторонами 1 и 2. Найти вероятности следующих событий:

а) расстояние от точки до ближайшей стороны прямоугольника не превышает x;

б) расстояние от точки до любой стороны прямоугольника не превосходит x.

2.5. Наудачу выбирают число первых букв от 2 до m из фамилии студента (здесь m — общее число букв в фамилии) и осуществляют их случайную перестановку. Найти вероятность того, что в результате получится фамилия студента. Найти вероятность того, что выбрали две первых буквы, если известно, что фамилия студента получилась. В качестве фамилии студента выбрать свою фамилию.

2.6. Из n экзаменационных билетов студент знает m, поэтому, если он зайдет первым на экзамен, то с вероятностью m/n он вытащит "хороший" билет. Какова вероятность вытащить "хороший" билет, если студент зайдет на экзамен вторым?

2.7. Известно, что 34% людей имеют первую группу крови, 37% — вторую, 21% — третью и 8% — четвертую. Больному с первой группой можно переливать только кровь первой группы, со второй — кровь первой и второй групп, с третьей — кровь первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность того, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?

2.8. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Затем из второй урны вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

3.1. Производят $n>1$ независимых случайных перестановок букв фамилии студента. Найти вероятность того, что:

а) хотя бы раз получилась фамилия студента;

б) каждый раз получалась фамилия студента;

в) в последний раз получилась фамилия студента.

Сравнить вероятности, найденные в пунктах (а), (б), (в). В качестве фамилии студента подставить свою фамилию.

3.2. Пусть событие A не зависит от самого себя. Какие значения может принимать вероятность события A?

3.3. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5, стрелок C — с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени. Какова вероятность, что ровно две пули попали в цель?

3.4. Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым получит герб. Найти вероятность того, что игра закончится на k-м бросании. Какова вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру?

3.5. 10 любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 5 рыбаков расположатся на расстоянии более 200 м от берега?

3.6. В шар радиуса R наудачу бросаются n точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, $0 < a < R$.

3.7. Найти вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p появятся $m + k$ успехов, причем k успехов появятся в последних k испытаниях.

3.8. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что из 10 точек, брошенных наудачу в круг, четыре попадут в квадрат, три — в нижний сегмент, и по одной — в оставшиеся три сегмента.

4.1. У человека 5 ключей, из которых только один открывает дверь. Ключи испытываются в случайном порядке. Обозначим через X число попыток, потребовавшихся для отыскания нужного ключа. Найти ряд распределения и построить график функции распределения случайной величины X, если:

а) каждый раз выбирается наудачу один из 5 ключей;

б) испытанный ключ откладывается в сторону и в дальнейших испытаниях не участвует.

4.2. Выразить через функцию распределения случайной величины X вероятности следующих событий: $\mathbf{P}\{a < X < b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X < b\}$, $\mathbf{P}\{a < X \le b\}$, $\mathbf{P}\{a \le X \le b\}$.

4.3. Могут ли функции

(а) $f(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$, (б) $f(y) = e^{-y}$, (в) $f(y) = \cos y$, (г) $f(y) \equiv 1$

быть плотностями распределения?

4.4. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(y) = \begin{cases} Cy^2, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти C и функцию распределения случайной величины X.

4.5. Вычислить функцию гамма-распределения $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ в случае, когда $\lambda = n$ — целое число.

4.6. На отрезок длины l произвольным образом бросают две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними.

4.7. Случайная величина X имеет нормальное распределение, причем $\mathbf{P}\{X > 3\} = 0,5$, $\mathbf{P}\{X > 6,28\} = 0,05$. Записать формулу плотности распределения и построить ее график. Использовать значение $\Phi(1,64) \approx 0,95$.

4.8. В круг радиуса R наугад бросают точку. Найти функцию распределения и плотность распределения расстояния этой точки до центра круга.

5.1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[0;\ \pi]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = \sin X$.

5.2. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[-\pi/2;\ \pi/2]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = \operatorname{tg} X$.

5.3. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f(t) = \begin{cases} \theta t^{\theta-1}, & t \in [0,1], \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = -\ln X$.

5.4. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на [0,1]. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

5.5. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функции распределения и плотности случайных величин (а) $Y_1 = X^2$, (в) $Y_2 = \sin X$.

5.6. В условиях предыдущей задачи найти функцию распределения случайной величины $\max(0, X)$. Найти функции распределения ее дискретной и абсолютно непрерывной компонент.

5.7. Случайные величины X и Y независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathbf{P}\{X = y_k\} = \mathbf{P}\{Y = y_k\} = p_k$, $k \geq 1$.

Найти $\mathbf{P}\{X = Y\}$.

5.8. X и Y независимы, причем $\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{X = 1\} = 1/2$, а $\mathbf{P}\{Y < t\} = t,\ \ 0 < t < 1$. Найти функции распределения случайных величин $X + Y$ и XY.

6.1. Найти математические ожидания, дисперсии и стандартные отклонения случайных величин, введенных в задаче 4.1(а,б).

6.2. Найти математические ожидания, дисперсии и стандартные отклонения случайных величин, введенных в задачах (а) 4.6; (б) 4.8.

6.3. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин с плотностями распределения, определенными формулами (а) 4.3(а); (б) 4.4.

6.4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y в задаче 5.1.

6.5. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X - Y$ в задаче 5.4.

6.6. Доказать, что $\mathbf{E}X = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\ (X \geq k)$, если известно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\ (X = k) = 1.$$

6.7. Случайные величины X и Y независимы, X имеет стандартное нормальное распределение, а Y — равномерное распределение на $[1;\ 4]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X - 4Y$.

6.8. Случайная величина имеет распределение Рэлея, если ее плотность распределения равна

$$f(y) = \begin{cases} Aye^{-y^2/(2\sigma^2)} & \text{при } y \geq 0; \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Найти коэффициент A, математическое ожидание и дисперсию.

7.1. Найти $\mathbf{E}X^{2009}$, если X имеет стандартное нормальное распределение.

7.2. Вычислить момент k-го порядка для случайной величины, имеющей равномерное распределение.

7.3. Случайная величина X принимает натуральные значения с вероятностями $\mathbf{P}\,(X = k) = Ck^{-10}, \quad k = 1, 2, \ldots$. Как найти C? Какого порядка моменты существуют у этой случайной величины X?

7.4. Случайная величина принимает только два значения, причем все ее моменты нечетного порядка равны нулю, а все моменты четного порядка равны 1. Найти ряд распределения этой случайной величины.

7.5. Случайные величины Y_i независимы и имеют стандартное распределение Коши, $X_i = |Y_i|$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Сходится ли последовательность S_n/n к константе при $n \to \infty$?

7.6. Решить задачу 7.5 для $X_i = \min(|Y_i|;\ 1)$.

7.7. Найти предел с вероятностью 1 последовательности $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{X_1+\ldots+X_n}$, если $X_1,\ X_2,\ \ldots$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α.

7.8. Найти предел с вероятностью 1 последовательности $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right)^2$, если $X_1,\ X_2,\ \ldots$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0;\ b]$.

8.1. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна $0,05\cdot$№ (здесь № — номер студента по списку группы). Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя (а) не менее 5№ конденсаторов; (б) менее 5№+8 конденсаторов.

8.2. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0.2, 4 с вероятностью 0.4, 3 с вероятностью 0.3 и 2 с вероятностью 0.1. За время обучения он сдает 100 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0.95 лежит средний балл.

8.3. Урожайность куста картофеля задается следующим распределением:

Урожай в кг	0	1	1.5	2	2.5
Вероятность	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2

На участке высажено 900 кустов. В каких пределах с вероятностью 0.95 будет находиться урожай? Какое наименьшее число кустов нужно посадить, чтобы с вероятностью не менее 0.975 урожай был не менее тонны?

8.4. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

8.5. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 < \infty$. Найти $\mathbf{D}X_1$, если известно, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \geq 1\right) \to \frac{1}{3} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

8.6. Найти, к какой функции сходится $\mathbf{P}\{\frac{S_n - np}{\sqrt{n}} < t\}$ при $n \to \infty$, если S_n имеет биномиальное распределение с параметрами $n,\ p$.

8.7. Найти вероятность того, что при 720 подбрасываниях игральной кости цифра «6» выпала более 92 раз.

8.8. Найти вероятность того, что при 100 подбрасываниях 10 симметричных монет не менее 2 раз на всех 10 монетах выпал герб.

Программу и задания
по «Введению в теорию вероятностей»
составил доцент А. П. Ковалевский

Возникновение и развитие основных математических понятий

Лектор — Татьяна Юрьевна Михайлова

Спецкурс, 1-й семестр

Основными целями спецкурса являются:
а) повышение общей математической культуры слушателей;
б) помощь в преодолении барьера между «школьной» и «высшей» математикой;
в) развитие интереса к математике у слушателей.

Темы лекций:

1. Как возникают понятия? Что такое число? Пифагорейская школа. Иррациональные числа и неосоизмеримые отрезки.

2. Бесконечные множества. Теория множеств Кантора. Счётные множества и множества мощности континуум.

3. Канторово множество. Равномощность отрезка и квадрата. Алгебраические и трансцендентные числа.

4. Различные «конструкции» действительных чисел. Сечения Дедекинда. Аксиома выбора.

5. Что такое логарифмы? Как они возникли и какую роль сыграли в развитии естествознания? Как Ньютон считал площадь под кривой $y = \frac{1}{x}$?

6. Последовательности, бесконечные суммы. Парадокс Зенона. Можно ли научиться говорить на «языке $\varepsilon - \delta$»?

7. Что такое число e? Как можно ввести функцию e^x? Тождество Эйлера.

8. Комплексные и геперкомплексные числа. Кватернионы. Вектор как мнимая часть кватерниона.

9. Аналитический метод Декарта. Линейные пространства. Аксиоматическое введение математических понятий.

10. Возникновение дифференциального и интегрального исчислений. Философия Ньютона и Лейбница.

11. Развитие математики в 18–19 веках. Кризис математики и его преодоление.

12. Структура математических утверждений. Теорема и критерий. Ценность контрпримера.

13. Классификация физических величин. Путь от скаляра к спинору.

14. Основы теории катастроф. Современные математические теории.

Программу спецкурса
«Возникновение и развитие
основных математических понятий»
составила доцент Т. Ю. Михайлова