Основы функционального анализа и теории функций

Лектор — Сергей Андреевич Тресков

3-й семестр

1. Ряды Фурье

Постановка задачи о разложении периодической функции по простейшим гармоникам. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье. Ядро Дирихле. Условия представимости функции в точке своим рядом Фурье. Условие Дини. Принцип локализации. Примеры разложений. Разложения по синусам и по косинусам. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Равномерная сходимость рядов Фурье. Гладкость функции и скорость сходимости её ряда Фурье. Суммирование по Фейеру, ядра Фейера. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами. Методы улучшения сходимости рядов Фурье. Комплексная форма ряда Фурье. Равенства Парсеваля и Ляпунова. Приложение рядов Фурье к суммированию числовых рядов. Применение рядов Фурье к решению уравнений математической физики.

2. Преобразование Фурье

Интегральная формула Фурье как предельная форма ряда Фурье. Условие представимости функции в точке своим интегралом Фурье. Прямое и обратное преобразования Фурье. Преобразование Фурье и дифференцирование. Преобразование Фурье и умножение на полином. Симметрия преобразования Фурье (сдвиг, подобие, поворот системы координат). Свёртка функций и её свойства. Преобразование Фурье свёртки и произведения. Равенство Парсеваля. Преобразование Фурье быстро убывающих функций. Формула суммирования Пуассона. Приложения преобразования Фурье.

3. Операционное исчисление

Преобразование Лапласа. Оригиналы и изображения. Свойства подобия, запаздывания, смещения. Дифференцирование оригинала и изображения. Свёртка оригиналов. Теоремы умножения. Формула Дюамеля. Теоремы разложения. Обращение преобразования Лапласа (формула Меллина). Таблица изображений важнейших функций. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений.

4. Обобщённые функции

Основные и обобщённые функции. Регулярные функции. Дельта-функция Дирака. Сходимость последовательности обобщённых функций. Операции над обобщёнными функциями. Замена переменных в обобщённых функциях. Дифференцирование обобщённых функций. Фундаментальное решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Разложение дельта-функции в ряд Фурье. Свёртка обобщённых функций. Пространство быстро убывающих функций. Преобразование Фурье обобщённых функций.

5. Элементы теории функций комплексного переменного

Стереографическая проекция и её свойства. Аналитические функции комплексного переменного. Гармонические функции и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного. Геометрический смысл модуля и аргумента производной по комплексному переменному. Конформные отображения.

Однолистные аналитические функции, их обращение. Отображения, соответствующие элементарным функциям, обращение этих функций. Понятие римановой поверхности. Построение римановых поверхностей для элементарных функций. Дробно-линейные отображения, их основные свойства, некоторые применения.

Комплексное интегрирование. Основные свойства интеграла. Теорема Коши. Формула Коши. Интеграл типа Коши и его свойства. Теорема Морера. Интеграл в смысле главного значения по Коши. Формулы Сохоцкого — Племеля. Интегральная формула Пуассона. Задача Дирихле для гармонических функций в круге. Принцип максимума модуля для аналитической функции. Принцип экстремума для гармонической функции.

Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Ряд Тейлора. Внутренняя теорема единственности аналитических функции. Теорема Лиувилля. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции и их классификация. Поведение аналитической функции в окрестности изолированной особой точки. Связь между нулями и полюсами. Бесконечно удалённая изолированная особая точка. Понятия целой и мероморфной функций. Разложение некоторых мероморфных функций на простейшие дроби.

Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Теорема о вычетах. Принцип аргумента аналитической функции. Теорема Руше. Лемма Жордана. Применение вычетов для вычисления определённых интегралов.

Аналитическое продолжение аналитических функций действительного переменного в комплексную область.

Литература[1]

1. *В. А. Александров.* Ряды Фурье. Метод. пособие. НГУ, 1996.
2. *В. А. Александров.* Преобразование Фурье. Учеб. пособие. НГУ, 2002.
3. *В. А. Александров.* Преобразование Лапласа. Метод. указ. НГУ, 1992.
4. *В. А. Александров.* Обобщённые функции. Метод. пособие. НГУ, 2002.
5. *Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного.
6. *Б. П. Демидович.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
7. *В. А. Зорич.* Математический анализ. Т. 1.
8. *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа.
9. *Л. Д. Кудрявцев.* Курс математического анализа. М.: Высшая школа, 1989. Т. 3.
10. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного.
11. *Г. М. Фихтенгольц.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2, 3.

План семинаров

Ряды Фурье	4 час.
Преобразование Фурье	4 час.
Операционное исчисление	6 час.
Контрольная работа	2 час.
Обобщённые функции	6 час.
Аналитические и гармонические функции	4 час.
Ряд Лорана. Вычеты. Интегралы	6 час.
Конформные отображения	2 час.
Контрольная работа	2 час.

[1] Книги, год выпуска которых не указан, выдержали много изданий. Читатель может использовать любое из них.

Задания по основам функционального анализа и теории функций

3-й семестр

`При сдаче заданий необходимо уметь отвечать на теоретические вопросы по соответствующей теме!`

Задание 1 *(сдать до 15 октября)*

1. Функцию x^3 разложить в ряд Фурье: по синусам кратных дуг; по косинусам кратных дуг; в интервале между 0 и 2π.

2. Функцию e^{ax} переменной x разложить в ряд Фурье; написать для нее равенство Ляпунова; найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2}$$

.

3. Пусть 2π-периодическая функция f суммируема(т.е. интегрируема по Лебегу) на отрезке длины 2π. Убедитесь, что в таком случае для каждого $h > 0$ можно определить ее «усреднение» S, полагая

$$S\,(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt.$$

Доказать, что функция S непрерывна и тоже имеет период 2π. По известным коэффициентам Фурье исходной функции найти коэффициенты Фурье ее усреднения.

4. Пусть гладкая на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ функция $f\,(x)$ принимает равные значения на концах этого отрезка и «в среднем» равна нулю:

$$f\,(-\pi) = f\,(\pi), \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Используя равенство Ляпунова, доказать неравенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\,dx.$$

5. Пользуясь интегральным представлением Фурье, показать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy + y \sin xy}{1+y^2}\, dy = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \pi/2, & \text{если } x = 0, \\ \pi e^{-x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

6. Пусть $a > 0$. Найти преобразование Фурье функции $\theta(x)e^{-ax}$, где $\theta(x)$ означает функцию Хевисайда.

7. Найти преобразование Фурье «прямоугольного» импульса p_a, если

$$p_a(x) = \begin{cases} 1/2a & \text{при } |x| \leqslant a, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases}$$

8. Найти преобразование Фурье функции $x^{-1} \sin ax \sin bx$.

9. Найти обратное преобразование Фурье для $f\,(ay)$, если

$$\text{а) } f\,(y) = \frac{\sin y}{y}; \qquad \text{б) } f\,(y) = \frac{\sin^2 y}{y^2}; \qquad \text{в) } f\,(y) = \frac{\sin^2 y}{y}.$$

10. Используя результаты задачи 9, найти значения интегралов:

$$\text{а) } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx; \qquad \text{б) } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

11. Для каждого $a > 0$ построим функцию

$$f_a(x) = \frac{e^{-x^2/2a^2}}{a\sqrt{2\pi}}.$$

Для любых положительных a и b доказать равенство

$$f_a * f_b = f_c, \quad \text{где} \quad c = \sqrt{a^2+b^2},$$

а символ $*$ означает свёртку.

12. С помощью формулы Пуассона вычислить суммы:

$$\text{а) } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}; \qquad \text{б) } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2}.$$

13. Методом Фурье найти выражение непрерывной функции $u\,(x, y)$, гармонической в полуплоскости $y > 0$, по заданным ее граничным значениям $u(x, 0)$.

Задание 2 *(сдать до 25 ноября)*

1. Найти изображения следующих оригиналов:

$$\text{а) } t^2\cos\omega t, \qquad \text{б) } \frac{1-\cos t}{t}, \qquad \text{в) } \int\limits_t^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2}\,du.$$

2. Применяя теорему Бореля об умножении изображений и формулу Дюамеля, восстановить оригиналы по следующим их изображениям:

$$\text{а) } \frac{1}{(p-1)(p^2+1)^2}, \qquad \text{б) } \frac{p}{(p^2-1)(p^2+1)}.$$

3. Используя преобразование Лапласа, решить уравнения:

а) $y''' - y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0$
б) $y'' + y' = \cos x, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$

4. Используя преобразование Лапласа, решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$y_1'' + y_2' + y_1 = e^t, \qquad y_1' + y_2'' = 1,$$
$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2'(0) = 2.$$

5. Используя преобразование Лапласа, решить интегральное уравнение:

$$x(t) - \int\limits_0^t e^{-2(t-s)} x(s)\,ds = 1 + t, \quad t > 0.$$

6. Пусть функции f и g определены всюду на вещественной прямой и на каждом ее компактном промежутке кусочно-непрерывны. Тогда они порождают регулярные обобщенные функции, которые мы обозначим символами $[f]$ и $[g]$. Доказать, что $[f] = [g]$ тогда и только тогда, когда $f = g$ в каждой точке, где обе функции f и g непрерывны.

7. Показать, что обобщенные функции $[\delta_a]$, порожденные «обыкновенными» функциями

$$\delta_a(x) = \frac{a}{\pi\,(x^2 + a^2)},$$

при $a \to +0$ сходятся к δ-функции Дирака.

8. Описать, как «действуют» обобщённые функции

$$\text{а) } [1] * \delta'(x); \qquad \text{б) } x^n \delta\,(x); \qquad \text{в) } \delta'(x) * [\theta\,(x)],$$

где $\theta\,(x)$ — знакомая вам функция Хевисайда.

9. Найти преобразование Фурье функции Хевисайда.

10. Найти преобразование Фурье обобщённых функций

$$\text{а) } [1]; \qquad \text{б) } \delta^{(n)}; \qquad \text{в) } [\operatorname{sgn} x]; \qquad \text{г) } [x^n]; \qquad \text{д) } [|x|]; \qquad \text{е) } \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

11. Вычислить вторые обобщённые производные функций

$$\text{а) } [|x|]; \qquad \text{б) } [|\sin x|]; \qquad \text{в) } [e^{-a|x|}]; \qquad \text{г) } [e^{-|x+a|}\sin x].$$

12. Разлагая обобщённую функцию

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\,(x - 2\pi n),$$

в ряд Фурье, вычислить суммы:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad \text{б) } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

13. Найти фундаментальное решение y дифференциального оператора

$$L = \frac{d}{dx} + \cos x,$$

т. е. решить «в обобщённых функциях» уравнение $Ly = \delta\,(x)$.

Задание 3 *(сдать до 25 декабря)*

1. Найти все значения степеней $1^i,\ 2^i,\ i^i$.

2. Написать уравнения Коши — Римана в полярных координатах.

3. Выяснить, существует ли аналитическая функция, чья вещественная часть u задается следующим образом

$$\text{а) } u = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2, \qquad b) \; u = \exp(y/x)$$

.

4. Попробуйте в окрестности указанной точки z_0 выделить однозначные ветви следующих функций:

а) $\sqrt[n]{z}, \quad z_0 = 0;$ б) $\sqrt{z^2-1}, \quad z_0 = \infty;$

в) $\sqrt{\dfrac{z-1}{z(z+1)}}, \quad z_0 = \infty;$ г) $\ln \dfrac{(z-2)(z+i)}{(z-i)(z-4)}, \quad z_0 = \infty.$

В каких примерах это возможно?

5. Пусть D означает область на комплексной плоскости — возможно, расширенной, — где задана «многозначная» аналитическая функция w переменной z. Выберем в области D две ее точки z_0 и z_1, а еще фиксируем какое-нибудь комплексное число w_0. Ваша задача — показать, что в области D функция w допускает выделение однозначной ветви $f(z)$, для которой $f(z_0) = w_0$, а также найти значений этой и других ветвей в точке z_1, если

а) D — расширенная плоскость с разрезом $-1 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 0$,

$$w = \sqrt{(z+1)/(z-1)}, \qquad z_0 = 2, \quad w_0 = \sqrt{3}, \quad z_1 = \infty;$$

б) D — плоскость с разрезами $x \leqslant -1,\ y = 0$ и $x \geqslant 1,\ y = 0$,

$$w = \sqrt{(z+1)/(z-1)}, \qquad z_0 = 1/2, \quad w_0 = -\sqrt{3}\,i, \quad z_1 = i;$$

в) D — плоскость с разрезами $x = 0,\ y \geqslant 1$ и $x \leqslant 0,\ y = -1$,

$$w = \ln(z^2+1), \qquad z_0 = 0, \quad w_0 = 2\pi i, \quad z_1 = 1 + 2i.$$

6. Разложить по степеням $z - 3$ однозначную ветвь функции

$$w = (z-4)^{-2} + \ln(z^2-1),$$

которая определена в плоскости с выколотой точкой $z = 4$ и удаленными лучами

а) $x \leqslant -1,\ y = 0$ и $x = 1,\ y \leqslant 0$;

б) $x \leqslant -1,\ y = 0$ и $x = 1,\ y \geqslant 0$,

удовлетворяя при этом условию $w = 1/16 + 5\pi i$ при $z = 0$.

7. Функцию $(z-2)^{-1}\ln[(z-i)/(z+i)]$ разложить в ряд Лорана «вблизи» точки $z = \infty$ и в кольце $1 < |z| < 2$.

8. Найти особые точки голоморфной функции w, которая при малых значениях переменной z определяется рядом

$$w = 1 + \frac{z^3}{3 \cdot 2} + \frac{z^4}{4 \cdot 2^2} + \frac{z^5}{5 \cdot 2^3} + \dots\ .$$

9. Для каждой из указанных ниже трех функций найти ее вычеты относительно всех ее изолированных особых точек:

$$\text{а)}\ \frac{z^5}{(1-z)^2}; \qquad \text{б)}\ \frac{1}{e^z+1} - \frac{1}{z}; \qquad \text{в)}\ \frac{1}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}.$$

10. Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}},$$

где C — парабола $x = y^2$, пробегаемая в сторону возрастания y.

11. Вычислить интегралы

$$\text{а)}\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}\,dx}{1+e^x}; \qquad \text{б)}\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x+a)^2+b^2};$$

$$\text{в)}\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\sin ax)\,dx}{x(x^2+b^2)^2}; \qquad \text{г)}\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2},$$

самостоятельно определив «разумные» границы параметров α, a и b.

12. Используя формулу обращения для преобразования Лапласа, найти оригиналы изображений $(p+i)^{-1/2}$ и $p^{-1}\ln(1+p)$.

13. Найти дробно-линейное отображение $w = w(z)$, переводящее точки $z = -1,\ i,\ 1+i$ соответственно в точки $w = 0,\ 2i,\ 1-i$.

Программу и задания по основам
функционального анализа и теории функций
составил доцент С. А. Тресков

Основы функционального анализа и теории функций

Лектор — Сергей Андреевич Тресков

4-й семестр

6. Геометрия пространств со скалярным произведением

Линейные пространства со скалярным произведением. Евклидовы и унитарные пространства. Нормированные пространства. Метрические пространства. Гильбертовы пространства. Неравенство Коши — Буняковского. Проектирование на замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве. Ортогональность векторов. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта. Коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы. Задача о наилучшем приближении — проектирование на конечномерные подпространства. Неравенство Бесселя. Полные ортогональные системы и ряды Фурье. Гильбертовы базисы. Равенство Парсеваля. Понятие замкнутой ортогональной системы. Ортогональность и полнота тригонометрической системы функций.

Определение и общие свойства ортогональных многочленов (рекуррентные соотношения, расположение нулей). Основная информация о многочленах Лежандра, Эрмита, Лагерра — производящие функции, рекуррентные соотношения, дифференциальные уравнения, формулы Родрига. Многочлены Чебышёва и их основные свойства.

7. Операторы в гильбертовых пространствах

Линейные операторы, их общие свойства, операции над ними. Норма оператора, ограниченные операторы. Обратимость операторов. Резольвента и спектр. Классификация точек спектра. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса. Бра- и кет-векторы. Операторная функция Грина. Сопряжённый оператор и его свойства. Ограниченные самосопряжённые (эрмитовы) операторы. Квадратичная форма оператора. Теорема о регулярных значениях эрмитова оператора. Вещественность спектра эрмитова оператора. Теорема Рэлея о норме эрмитова оператора. Компактные операторы. Дискретность спектра. Теорема о границах спектра. Теорема Гильберта — Шмидта о собственном базисе (диагонализуемость) компактного эрмитова оператора. Вариационный метод Куранта отыскания собственных чисел.

8. Интегральные уравнения

Интегральные уравнения Фредгольма. Теорема о сжимающем отображении в полном метрическом пространстве. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Уравнение с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта — Шмидта для интегральных операторов. Разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра. Разложение ядра интегрального оператора по его собственным функциям (билинейная форма). Интегральные уравнения Вольтерра — теорема о существовании и единственности решения.

9. Вариационное исчисление

Примеры задач классического вариационного исчисления. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума. Лемма Лагранжа. Уравнения Эйлера. Задачи, допускающие понижение порядка в уравнении Эйлера. Задачи о брахистохроне и о поверхности вращения минимальной площади. Задачи с несколькими переменными. Гармонические функции как экстремали интеграла Дирихле. Уравнение Эйлера для задачи с высшими производными. Задача с подвижными концами, условия трансверсальности. Изопериметрическая задача — теорема Эйлера. Условный экстремум. Правило множителей Лагранжа. Вывод уравнения колебаний струны.

Литература

1. *В. А. Александров.* Ортогональные многочлены. Метод. указания. НГУ, 1993.
2. *В. А. Александров.* Геометрия пространств со скалярным произведением. Метод. указания. НГУ, 1995.
3. *В. А. Александров.* Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах. Метод. указания. НГУ, 1996.
4. *В. А. Александров, А. А. Егоров.* Вариационное исчисление. Метод. указания. НГУ, 1996.

5. *В. А. Александров, Е. В. Колесников.* Интегральные уравнения. Метод. указания. НГУ, 1993.
6. *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
7. *И. М. Гельфанд, С. В. Фомин.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
8. *А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
9. *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа[2].
10. *А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров.* Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974.

План семинаров

Нормированные пространства и пространства со скалярным произведением	7 час.
Ортогональные многочлены	6 час.
Контрольная работа	2 час.
Операторы в гильбертовых пространствах	7 час.
Интегральные уравнения	4 час.
Вариационное исчисление	4 час.
Контрольная работа	2 час.

Задания
по основам функционального анализа и теории функций

4-й семестр

`Как и в предыдущем семестре, при сдаче заданий необходимо уметь отвечать на теоретические вопросы по соответствующей теме!`

Задание 4 *(сдать до 20 марта)*

1. Убедитесь, что произвольные три элемента x, y и z унитарного пространства связаны тождеством

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\big\|x-y\big\|^2+2\Big\|z-\frac{x+y}{2}\Big\|^2.$$

[2] Книга выдержала много изданий. Читатель может использовать любое из них.

2. Докажите, что нельзя определить скалярное произведение в пространстве $L_1\,[0,1]$, согласованное с его «естественной» нормой.

3. Посчитайте углы треугольника, образованного элементами 0, 1, t евклидова пространства $L_2\,[0 \leqslant t \leqslant 1]$.

4. Ортогонализовать систему функций $1,\ t,\ t^2,\ t^3$ на отрезке $[-1,1]$ относительно следующего скалярного произведения:

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_{-1}^{1} x\,(t)\,y\,(t)\,dt + \int\limits_{-1}^{1} x'(t)\,y'(t)\,dt.$$

5. Разложить функцию $\sqrt{x}$ по многочленам Лагерра.

6. Разложить функции $\operatorname{sgn} x$ и $\sin 2x$ по многочленам Эрмита.

7. Доказать, что «соседние» многочлены Эрмита H_{n-1} и H_n связаны равенством

$$(e^{-x^2}\,H_{n-1}\,(x))' + e^{-x^2}\,H_n\,(x) = 0.$$

8. Доказать формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} H_n^2\,(x)\,dx = 2^n n! \left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}.$$

Задание 5 *(сдать до 25 апреля)*

1. Если $\alpha > 0$, то степенная функция x^α преобразует отрезок $[0,1]$ в себя, а значит, каждой функции φ на этом отрезке можно поставить в соответствие новую функцию ψ, полагая

$$\psi\,(x) = \varphi\,(x^\alpha), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Так возникает оператор A, осуществляющий степенную замену переменной: $A\varphi = \psi$.

а) Докажите, что оператор A линеен на векторном пространстве всех функций, определенных на отрезке $[0,1]$.

б) Убедитесь, что оператор A сохраняет непрерывность функции и ее норму в $C\,[0,1]$.

в) Выясните, при каких значениях α оператор A переводит пространство $L_2\,[01]$ в себя; убедитесь, что в каждом таком случае он непрерывен относительно естественной геометрии указанного пространства, и посчитайте его норму.

2. Пусть теперь A будет оператором умножения функции на ее аргумент: $A\varphi(q) = q\,\varphi(q),\ 0 \leqslant q \leqslant 1$. Докажите, что A можно рассматривать как оператор в пространстве $L_2\,[0,1]$. Изучите этот важный для физики оператор: а) посчитайте его норму; б) найдите его точечный спектр; в) опишите его непрерывный спектр; г) выясните, является ли этот оператор компактным.

3. В этой задаче A означает «диагональный» оператор, умножающий каждую последовательность (x_n) на фиксированную последовательность (a_n), т. е. действующий по правилу $A : (x_n) \mapsto (a_n x_n)$. Проверьте линейность оператора A. Докажите, что классическое гильбертово пространство l_2 всех комплексных последовательностей, суммируемых «в квадрате», инвариантно относительно оператора A тогда и только тогда, когда последовательность (a_n) ограничена.

4. Пусть последовательность (a_n) ограничена, а буквой A мы обозначим сужение предыдущего оператора на пространство l_2. а) Докажите, что оператор A непрерывен, и посчитайте его норму. б) Докажите, что оператор A компактен в том и только в том случае, если $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. в) Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры, а также резольвенту оператора A. г) Опишите сопряжённый к A оператор. д) Выясните, когда оператор A самосопряжён. е) Выясните, когда оператор A унитарен.

5. Найти «формально-сопряжённые» к операторам I, E_h и A_α, где:

$$\begin{aligned}
(I\,\varphi)(x) &= \int_0^x \varphi(t)\,dt, && 0 \leqslant x \leqslant 1;\\
(E_h)\varphi(x) &= \begin{cases} \varphi(x), & x \leqslant h,\\ 0, & x > h, \end{cases} && 0 \leqslant x \leqslant 1;\\
(A_\alpha\varphi)(x) &= \varphi(x^\alpha),\quad \alpha > 0, && 0 \leqslant x \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Найти спектр и резольвенту оператора E_h в пространстве $L_2\,[0,1]$.

6. Найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых подмножество комплексной плоскости является спектром некоторого ограниченного оператора.

7. Рассмотрим в пространстве $L_2\,[0,1]$ оператор импульса

$$A = \frac{1}{i}\frac{d}{dx},$$

считая его областью определения множество всех гладких на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих одному из граничных условий: а) $\varphi(1) = 0$; б) $2\varphi(0) + \varphi(1) = 0$. Для каждого из этих вариантов найти точечный и непрерывный спектры оператора A.

8. Найти спектр оператора A в пространстве $L_2[0,1]$, если

$$(A\varphi)(s) = \int\limits_0^1 st(1 - st)\,\varphi(t)\,dt.$$

Задание 6 *(сдать до 25 мая)*

1. Составить интегральное уравнение, отвечающее задаче Коши:

$$x''' + tx = e^t, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = x''(0) = 0.$$

2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \int\limits_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds + f(t),$$

при условии, что

а) $a = 0$, $b = \pi$, $K(t,s) = \sin(t - 2s)$, $f(t) = \cos 2t$;

б) $a = -1$, $b = 1$, $K(t,s) = ts + t^2s^2$, $f(t) = t^2 - t^4$.

3. Найти повторные ядра и резольвенту, а также представить через резольвенту решение интегрального уравнения

$$x(t) - \frac{\ln 2}{2}\int\limits_0^1 2^{t+s}x(s)\,ds = t.$$

4. Выяснить, для каких функций f из пространства $L_2[0,1]$ разрешимо интегральное уравнение

$$x(t) - 4\int\limits_0^1 ts^2x(s)\,ds = f(t).$$

5. Найти экстремали функционалов в классе гладких функций

а) $L(y) = \int\limits_0^1 (y^2 + {y'}^2 + 2ye^x)\,dx,$ $\qquad y(0) = 1/2, \quad y(1) = e;$

б) $L(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} [2xy + (x^2 + e^y)y']\,dx,$ $\qquad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1;$

в) $L(y) = \int\limits_0^{\pi/2} ((y'')^2 - y^2 + x^2)\,dx,$ $\qquad \begin{array}{ll} y(0) = 1, & y(\pi/2) = 0, \\ y'(0) = 0, & y'(\pi/2) = -1; \end{array}$

г) $L(y, z) = \int\limits_0^{\pi/4} (2z - 4y^2 + {y'}^2 - {z'}^2)\,dx,$
$y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z(\pi/4) = 1.$

6. Считая, что сила тяжести направлена вдоль положительной полуоси y, а начальная точка имеет координаты $x = y = 0$, решить задачу о брахистохроне с подвижной конечной точкой а) на прямой $2x + y = 1$; б) на окружности $(x - 9)^2 + y^2 = 9$.

7. Найти экстремали изопериметрической задачи

$$L(y) = \int\limits_0^1 (y^2 + y'^2)\,dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e$$

со связью $\int\limits_0^1 4y\,e^x\,dx = (e^2 + 2)^2 - 5.$

8. Найти экстремали функционала

$$L(y, z) = \int\limits_0^1 (y'^2 + z'^2)\,dx$$

при голономной связи $y^2 + z^2 = 1$ и условиях $y(0) = z(1) = 1$, $y(1) = z(0) = 0$.

9. Найти геодезические на цилиндре и на сфере.

Программу и задания по основам
функционального анализа и теории функций
составил доцент С. А. Тресков

Дискретная математика

Лектор — Олег Вениаминович Бородин

3-й семестр

1. Алгебра высказываний и булевы функции

Высказывания, логические операции. Эквивалентные преобразования высказываний, таблицы истинности, булевы функции. Совершенные нормальные формы, двойственность высказываний. Зависимость и полнота систем булевых функций. Замкнутые классы булевых функций, теорема Поста. Реализации булевых функций. Двоичный сумматор. Теорема Шеннона о существовании функций экспоненциальной сложности в классе контактных схем. Понятие о предикатах.

2. Элементы комбинаторики

Число отображений конечных множеств в конечные множества. Сочетания с повторениями, схема с перегородками. Разбиения конечных множеств и числа Стирлинга второго рода. Разбиения чисел на слагаемые. Диаграммы Ферре. Формула включений и исключений. Возвратные последовательности. Числа Каталана. Производящие функции.

3. Азбука теории графов

Основные определения и понятия. Способы задания графов. Деревья, характеризации деревьев. Кодирование деревьев. Теорема Кэли. Эйлеровы обходы; достаточное условие гамильтоновости. Двудольные графы, теоремы о паросочетаниях в двудольных графах. Системы различных представителей. Плоские графы. Задачи раскраски, теорема Брукса. Экстремальные задачи на графах, теорема Турана.

Литература

1. *Ф. И. Соловьева, А. В. Косточка.* Дискретная математика. Учеб. пособие. НГУ, 2005. Ч. 1.
2. *В. Липский.* Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988.
3. *С. В. Яблонский.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

План семинарских занятий

1. Высказывания, логические операции и булевы функции. Двойственность высказываний. Совершенные нормальные формы. Единичный n-мерный куб	2 ч.
2. Замкнутые классы булевых функций, теорема Поста	2 ч.
3. Реализации булевых функций схемами	2 ч.
4. Понятие о предикатах	2 ч.
5. Число отображений конечных множеств в конечные множества	2 ч.
6. Разбиения конечных множеств. Разбиения чисел на слагаемые. Диаграммы Ферре	2 ч.
7. Числа Каталана	2 ч.
8. Возвратные последовательности	2 ч.
9. Производящие функции	2 ч.
10. Формула включений и исключений, ее применения	2 ч.
11. Контрольная работа	2 ч.
12. Графы, деревья, кодирование деревьев	2 ч.
13. Плоские и двудольные графы, формула Эйлера	2 ч.
14. Раскраска графов	2 ч.
15. Обходы графов. Гамильтоновы циклы	2 ч.
16. Экстремальные задачи на графах	2 ч.

Задания по дискретной математике

Задание 1 *(сдать до 15 октября)*

1. Построить совершенную ДНФ для булевой функции $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\big((\overline{x_4}\vee\overline{x_1}x_5)(x_6\vee x_1x_4x_7)\vee(x_6x_7\vee x_2x_4x_5)(\overline{x_4}x_5\vee\overline{x_3}x_6\overline{x_7})\vee(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})(\overline{x_4}\vee x_6)(x_5\vee x_7)\big)$.

2. Найти полином Жегалкина для функции $\overline{x_1\downarrow x_2\to x_1x_3}$.

3. Построить таблицы истинности, совершенные формы и экономные реализации в классах π-схем, КС и СФЭ:

(а) $xyz\vee xy\overline{z}\vee x\overline{y}z\vee\overline{x}yz$;

(б) $x(y\vee zs)\vee t(s\vee yz)$.

4. Получить из $x_1\oplus x_2\to\overline{x_3}$:

(а) константу подстановкой x и $\overline{x}$;

(б) $\overline{x}$ подстановкой 0, 1 и x;

(в) xy с помощью 0 и $\overline{x}$.

5. Выразить (экономно) все логические связки через штрих Шеффера $x|y=\overline{xy}$, а штрих Шеффера и $x\oplus y\oplus z$ — через стрелку Пирса $x\downarrow y=\overline{x\vee y}$.

6. (а) Угадать базисы классов $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$ среди систем функций $\{\overline{xy \vee yz \vee xz}\}$; $\{0, 1, xy, x \vee y\}$; $\{x \vee y, x \oplus y \oplus 1\}$; $\{1, x \oplus y\}$; $\{xy, x \oplus y\}$. Доказать, что других гипотез быть не может.

(б) Хотя бы для двух из пяти случаев доказать, что угаданная система функций действительно порождает соответствующий класс.

7. (а) Оценить сверху число $S(n, m)$ функций от n переменных, реализуемых КС схемами сложности не более m (сначала оценить $S(2, 3)$, затем $S(n, 3)$).

(б) Доказать, что при больших n 99% всех функций от n переменных имеют в классе КС сложность не менее 1.9^n.

8. Построить контактные схемы, реализующие булевы функции от n переменных, принимающие разные значения на любых соседних наборах. Построить электрическую схему, позволяющую включать и выключать свет из n мест комнаты.

9. Нейрон приходит в состояние возбуждения, когда не менее 3-х из пяти его дендритов (входов) возбуждены. Найти схему из 12 функциональных элементов в базисе $\{\neg, \ \&, \ \vee\}$, моделирующую нейрон. Можно ли обойтись меньшим числом элементов?

10. На множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел рассмотрим предикаты S^3 и E^3, где $S^3(x, y, z)$ истинно если и только если $x + y = z$, а $E^3(x, y, z)$ истинно если и только если $x^y = z$. Сформулировать в этих обозначениях малую теорему Ферма о том, что $n^p - n$ делится на простое p при любом целом n.

Задание 2 *(сдать до 15 ноября)*

1. Упростить выражения: (а) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(m-1)^{n-k}$; (б) $\sum\limits_{k=2}^{n} k\binom{n}{k}$.

2. Как известно, числа $\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$ — целые (объяснить). А будут ли целыми все числа вида $\frac{1}{2n+1}C_{3n}^{n}$?

3. Среди студентов физфака ровно 50 человек знают английский язык, ровно 50 — французский и ровно 50 — немецкий. Разбить студентов на 5 (не обязательно равных) групп так, чтобы в каждой группе ровно 10 человек знало английский язык, ровно 10 — французский и ровно 10 — немецкий.

4. Числа от 1 до n выписаны по кругу. Стираем числа через одно, начиная с 2. Какое число будет последним?

5. Сколькими способами может студентка прожить на стипендию в n рублей, если будет покупать каждый день либо булочку (2 руб.),

либо пирожное (3 руб.), либо мороженое (3 руб.)? Найдите производящую функцию этой величины.

6. Сколькими способами можно разрезать веревку длиной n метров на куски по 1 метру, если каждый раз мы режем на две части: а) один кусок; б) все куски длиннее одного метра.

7. Из студентов 60% говорят по-английски; 30% – по-французски, 20% – по-немецки; 15% – по-английски и по-французски, 5% – по-английски и по-немецки, 2% – по-французски и по-немецки и 1% – на всех этих языках. Каков процент студентов, не говорящих ни на одном из трех языков?

8. Если отец идет на море, то с ним обязательно идут мать и сын; с сыном всегда купается его младшая сестра; старшая дочь купается тогда и только тогда, когда купается мать, и с детьми обязательно купается кто-то из родителей. Если в воскресенье ходила на море лишь одна из дочерей, то кто еще из членов семьи купался с нею?

9. Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательности, а $A(x)$ и $B(x)$ — их производящие функции. Выразить $A(x)$ через $B(x)$, если

(а) $a_n = nb_n$ для каждого n;

(б) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ для каждого n.

10. Объяснить следующие равенства:

(а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(n)x^n$, где $P(n)$ — число представлений n в виде неупорядоченной суммы различных натуральных чисел;

(б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n z} = 1 + \sum\limits_{m,\ n=1}^{\infty} P(m,n)x^n z^m$, где $P(n,m)$ — число представлений n в виде неупорядоченной суммы m натуральных чисел.

Задание 3 *(сдать до 15 декабря)*

1. В первом ряду кинотеатра N кресел. Сколькими способами можно рассадить в них n зрителей так, чтобы:

(а) никакие 2 человека не сидели рядом;

(б) каждый человек имел ровно одного соседа.

2. Группа из 41 студента сдала сессию из трех экзаменов только на 5, 4 и 3. Доказать, что найдутся пятеро студентов, сдавшие сессию одинаково успешно.

3. На встречу собрались участники двух походов (некоторые участвовали в обоих походах, а остальные лишь в одном). В первом походе

было 60% мужчин, а во втором — 75%. Доказать, что на встречу пришло не меньше мужчин, чем женщин.

4. Имеется волейбольная сетка $m \times n$. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать, чтобы сетка не распалась на куски?

5. Планируется однокруговой турнир, в котором участвуют 12 команд. Какое минимальное число матчей надо провести, чтобы в любой тройке команд оказался сыгранным хотя бы один матч? А в любой четверке команд?

6. Восстановить дерево по его коду Прюфера:

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 10).$$

7. В поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными накануне новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что каждая новость становится известной всем жителям поселка. Доказать, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно сообщить им какую-то новость, то через 10 дней она станет известна всем жителям поселка.

8. Доказать, что

(а) любой 3-однородный граф реберно 4-раскрашиваем, причем

(б) граф Петерсена не имеет реберной 3-раскраски.

9. (а) Доказать, что если плоский граф не содержит циклов длины 3, то он вершинно 4-раскрашиваем.

(б) Сколько ребер достаточно удалить из графа Петерсена, чтобы получить планарный граф?

10. Доказать, что после завершения любого волейбольного турнира:

(а) можно упорядочить команды так, чтобы каждая победила стоящую сразу за ней;

(б) найдется такая команда А, что любая другая команда проиграла либо А, либо команде, проигравшей А;

(в) если участвовало 8 команд, то половину команд можно занумеровать так, чтобы каждая выиграла у всех команд с меньшим номером.

Программу и задания
по дискретной математике
составил д.ф.-м.н. О. В. Бородин

Дискретная математика

Лектор — Олег Вениаминович Бородин

4-й семестр

1. Алгоритмы и их сложность

Понятие о сложности алгоритма. Жадные алгоритм для задач раскраски и построения гамильтонова пути. Поиск по графу. Алгоритмы быстрой сортировки. AVL-деревья. Идея динамического программирования на примере распределительной и обратной к ней задач. Задача о кратчайшем пути. Алгоритмы Дейкстры и Флойда — Уоршелла. Метод ветвей и границ на примере задачи коммивояжера. Алгоритм Краскала для задачи о кратчайшей связывающей сети.

2. Потоки в сетях, частично упорядоченные множества и линейное программирование

Сети и потоки в них. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритмы для нахождения максимального потока. Использование сетевых моделей для нахождения связности графов. Теоремы Менгера и Уитни. Задача о наибольшем паросочетании в двудольном графе как задача о максимальном потоке в сети. Разбиение частично упорядоченных множеств на цепи и антицепи. Обобщение на ориентированные графы; теоремы Галлаи — Мильграма, Руа и Дилворта. Задача о максимальном потоке в сети как задача линейного программирования. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования.

3. Элементы теории кодирования

Постановка задач теории кодирования. Алгоритмы распознавания однозначности декодирования алфавитных кодов. Неравенство Крафта — Макмиллана для префиксных коды. Коды с минимальной избыточностью. Самокорректирующиеся коды, границы их мощности. Коды Хэмминга.

4. Матроиды и сложность алгоритмов

Определение и примеры матроидов. Матроиды и жадные алгоритмы. Задачи распознавания. Понятие об NP-полных задачах.

Литература

1. *А. В. Косточка.* Дискретная математика. Учеб. пособие. НГУ, 2005. Ч. 2.
2. *С. В. Яблонский.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.
3. *Х. Пападимитриу, К. Стайглиц.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.

План семинарских занятий

1. Поиск по графу. Быстрая сортировка	2 ч.
2. AVL-деревья	2 ч.
3. Взаимосводимость комбинаторных проблем	2 ч.
4. Динамическое программирование	4 ч.
5. Задача о кратчайшем пути	2 ч.
6. Метод ветвей и границ. Задача о КСС	2 ч.
7. Потоки в сетях	4 ч.
8. Частично упорядоченные множества	2 ч.
9. Симплекс-метод	4 ч.
10. Контрольная работа	2 ч.
11. Декодирование алфавитных кодов. Коды с минимальной избыточностью	2 ч.
12. Самокорректирующиеся коды. Коды Хэмминга	2 ч.
13. Матроиды и жадные алгоритмы	2 ч.

Задания по дискретной математике

Задание 1 *(сдать до 15 марта)*

1. Алгоритмом фон Неймана и пирамидальным алгоритмом отсортировать массив

$$17, 7, 27, 1, 43, 3, 56, 2, 29, 4, 40, 32, 5, 8, 28, 6.$$

Дать оценки сложности этих алгоритмов.

2. (a) Построить последовательность AVL-деревьев для данных, поступающих в следующем порядке:

$$29, 19, 9, 1, 4, 14, 39, 18, 36, 24, 15, 12.$$

(б) Сформулировать правила простого и двойного вращений и удаления вершины. Удалить из полученного дерева сначала 24, а затем 12.

3. Построить полиномиальное сведение к задаче о максимальной клике:

(а) задачи об изоморфизме двух графов;

(б) задачи о существовании в графе гамильтонова цикла.

4. Имеется 8 ракет и 4 цели. Вероятность попадания одной ракетой в i-ю цель равна $\frac{i}{i+1}$. Методом динамического программирования найти распределение ракет по целям, при котором вероятность поражения совокупности целей будет наибольшей.

5. Студент имеет 9 дней на подготовку к четырем экзаменам. Затратив на i-й предмет x дней, он получит оценку, указанную в таблице справа. Какое максимальное общее число баллов сможет набрать студент и как ему распределить время на подготовку?

$x \backslash i$	1	2	3	4
0	2	2	2	2
1	2	4	2	3
2	3	4	3	4
3	5	4	5	5
4	5	4	5	5

6. Завод может производить 3 вида продукции. Известно, что производство x единиц продукции i-го вида требует $s_i(x)$ единиц сырья. Известно также, что реализация единицы продукции i-го вида дает доход c_i. Требуется принять решение о количестве производимой продукции каждого вида, если в наличии имеется 65 единиц сырья.

Значения c_i и $s_i(x)$ приведены ниже.

i	1	2	3
c_i	3	4	2

$x \backslash i$	1	2	3
1	11	21	11
2	23	29	14
3	37	38	27
4	44	40	28
5	47	61	30

7. Имеется 7 предметов; стоимость i-го равна c_i, а вес – p_i. Среди подмножеств данного множества предметов, суммарный вес которых не превосходит 120, найти подмножество наибольшей стоимости.

i	1	2	3	4	5	6	7
c_i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	10	13	21	28	40	49	56

Задание 2 *(сдать до 15 апреля)*

1. Найти кратчайшую связывающую сеть в полном графе с 7 вершинами, длины ребер которого совпадают с числами, стоящими вы-

ше главной диагонали в таблице 1. Доказать корректность алгоритма Краскала.

	1	2	3	4	5	6	7
1	-	36	44	37	41	53	43
	42	-	48	57	43	45	51
3	35	41	-	39	39	42	38
4	38	34	35	-	52	51	34
5	40	43	47	37	-	49	35
6	33	40	56	53	36	-	45
7	33	39	39	36	34	48	-

Таблица 1

2. Пусть G — орграф, длины дуг которого приведены в таблице 2. Методом Дейкстры найти вектор кратчайших расстояний от вершины 2 до остальных вершин, а методом Флойда — Уоршелла найти матрицу кратчайших расстояний. Доказать корректность алгоритмов Дейкстры и Флойда — Уоршелла.

-	1	2	3	4	5	6	7
1	-	-	23	-	-	66	-
2	56	-	-	54	-	-	34
3	-	56	-	-	-	-	-
4	-	-	5	-	39	30	-
5	34	-	-	-	-	-	46
6	-	-	73	31	19	-	4
7	-	-	-	3	-	43	-

Таблица 2

3. (а) Рассматривая числа в таблице 2 как пропускные способности дуг, найти в соответствующей сети максимальный поток из вершины 2 в вершину 3.

(б) Доказать на примере необходимость увеличения пропускных способностей обратных дуг вдоль увеличивающего пути.

4. (а) Пусть множество вершин сети G есть $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, источник — вершина 1, сток — вершина 6, а пропускная способность дуги (i, j) равна $\frac{1}{i(7-j)}$. Найти максимальный поток в сети G методом Форда — Фалкерсона.

(б) Привести пример малой сети, на которой АФФ работает долго.

(в) Привести пример сети, на которой АФФ гарантированно строит лишь одну четверть максимального потока.

5. (а) Методом ветвей и границ решить задачу коммивояжера для матрицы расстояний, изображенной на таблице 1.

(б) Кратко (1 стр.) описать основные элементы алгоритма, в частности, роль чисел α_i, β_j и работу со стеком.

6. (а) Доказать, что среди любых 50 натуральных чисел найдутся такие 8, среди которых либо ни одно не делится на другое, либо же из любых двух из них одно делится на другое.

(б) Выразить предыдущий факт в как можно более общем виде.

7. (а) Сколько цепей максимальной длины в булевой решетке E^n проходит через элемент решетки, соответствующий k-элементному множеству?

(б) Найти антицепь в E^n из $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ элементов.

(в) Разбить вершины E^n на $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ цепей.

(г) Оценить снизу число монотонных булевых функций от n переменных.

Задание 3 *(сдать до 15 мая)*

1. (а) Перевести в каноническую форму следующую задачу ЛП:

Найти неотрицательные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, доставляющие максимум функции $z = x_1 + 2x_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 = -2, \\ 5x_1 + x_2 + x_5 \leqslant 3. \end{cases}$$

(б) Найти неотрицательные $x_1, \ldots, x_5$, доставляющие минимум функции $z = x_2 - x_1$ при условиях

$$\begin{cases} 2 = -2x_1 + x_2 + x_3, \\ 4 = x_1 - 2x_2 + 2x_4, \\ 5 = x_1 + x_2 + 2x_5. \end{cases}$$

2. (а) Введя полный искусственный базис $\{u_1, u_2, u_3\}$, построить допустимый базис системы

$$\begin{cases} -1 = 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6, \\ -2 = -3x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6, \\ -3 = -5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_6. \end{cases}$$

(б) Предположим, получено решение $\xi = 0$ вспомогательной задачи при базисе $\{u_1, u_2, x_3\}$:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3
u_1	0	1	0	0	3	0	1	0	0
u_2	0	0	0	0	1	3	0	1	0
x_3	7	5	-2	1	1	0	0	0	1

Построить базис, свободный от искусственных переменных.

3. По заданному алфавитному коду

$$\{cd,\ ac,\ dd,\ dca,\ adc,\ cdd,\ ccda,\ acddc\}$$

построить его граф и выяснить, является ли код разделимым.

4. Для заданного неразделимого кода $\{aa,\ ab,\ cc,\ cca,\ bcca,\}$ выяснить, является ли каждое из слов w кодом ровно одного сообщения:

(а) $w = ccabccabccabcc$;

(б) $w = bccaccabccabccacabcca$;

(в) $w = abbccaccabccaabab$.

5. Для заданных распределений вероятностей появления букв построить оптимальные коды по методам Фано, Хафмана и Шеннона:

(a) $(0.4,\ 0.11,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.09,\ 0.08,\ 0.07,\ 0.03,\ 0.02)$;

(b) $(0.35,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.04,\ 0.01)$.

6. (а) Можно ли все десятизначные числа из цифр 1 и 2 разбить на две группы так, чтобы сумма любых двух чисел из одной группы содержала не менее двух троек?

(б) Доказать, что среди n-значных чисел из цифр 1 и 2 нельзя выбрать более $2^n/(n+1)$ чисел так, чтобы сумма двух любых из них содержала не менее трех троек.

7. Один человек задумал целое число между 1 и 1000, а другой отгадывает его, задавая вопросы, допускающие ответ «да» или «нет». Первый имеет право дать один неправильный ответ. Доказать, что первый может узнать число за: (а) 21 вопрос; (б) 14 вопросов, но 13 вопросов для этого может не хватить.

8. Пусть каждый i-столбец матрицы M есть двоичное представление числа i. Доказать, что векторы, ортогональные строкам матрицы M, образуют линейный код с расстоянием 3.

9. Доказать, что если разные циклы C_1 и C_2 матроида имеют общий элемент e, то множество $C_1 \cup C_2 \setminus \{e\}$ зависимо.

10. (а) Доказать, что любой матроид разбиения является трансверсальным матроидом.

(б) Доказать, что любой графический матроид является матричным матроидом над полем из двух элементов.

Программу и задания
по дискретной математике
составил д.ф.-м.н. О. В. Бородин

Методы математической физики

Лектор — Нина Леонидовна Абашеева

4-й семестр

1. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейных однородных систем. Фундаментальная матрица решений. Формула Лиувилля. Представление произвольного решения через фундаментальную матрицу. Понятие общего решения. Линейная зависимость вектор-функций. Линейное пространство решений однородной системы дифференциальных уравнений и его базис. Принцип суперпозиции. Решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений. Метод вариации постоянных. Оценка нормы решения задачи Коши. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от данных задачи. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента и ее свойства.

2. Линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка

Сведение линейного уравнения n-го порядка к системе n линейных уравнений первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности. Определитель Вронского. Формула Лиувилля для уравнения n-го порядка. Линейная зависимость и независимость функций. Линейное пространство решений однородного уравнения и его базис. Построение фундаментальной системы решений для уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Функции $\psi_k\left(t, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\right)$ и их свойства. Выражение матричной экспоненты через функции ψ_k. Неравенство Гельфанда — Шилова.

3. Элементы общей теории

Задача Коши для уравнений и систем первого порядка, представленных в нормальной форме. Теорема Пеано. Теорема Пикара о локальном существовании и единственности решения. Теорема о существовании единственного непродолжаемого решения. Теорема о покидании компакта. Гладкость решения, зависимость решения от начальных данных и параметров. Уравнения в вариациях.

4. Автономные системы. Элементы теории устойчивости

Фазовые траектории автономной системы и их свойства. Особые точки. Производная вдоль векторного поля. Первые интегралы.

Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Критерий устойчивости нулевого решения однородной линейной системы. Устойчивость матрицы и расположение ее собственных чисел на комплексной плоскости. Квадратичная функция Ляпунова, матричное уравнение Ляпунова и условие его однозначной разрешимости. Функция Ляпунова и теорема Ляпунова об устойчивости. Исследование устойчивости по первому приближению.

5. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца и краевые задачи

Ортогональные криволинейные координаты и проблема разделения переменных. Постановка задачи Штурма — Лиувилля. Собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля. Функция Грина. Условие однозначной разрешимости краевой задачи. Обобщенная функция Грина. Сведение к интегральному уравнению. Полнота системы собственных функций задачи Штурма — Лиувилля.

6. Элементы аналитической теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Теорема существования и единственности аналитического решения задачи Коши. Особые точки. Решение уравнений с помощью рядов. Регулярные особые точки. Построение фундаментальной системы в окрестности регулярной особой точки. Уравнение Лежандра и функции Лежандра. Уравнения Бесселя и функции Бесселя.

Нули решений однородных линейных уравнений второго порядка. Теорема Штурма и ее следствия. Разложения в ряды Фурье — Бесселя и Фурье — Лежандра.

7. Асимптотические методы

Метод Лапласа. Метод стационарной фазы и его приложение к функциям Бесселя. Метод перевала и его приложение к полиномам Лежандра.

Литература

Основная

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
2. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
3. *Карташев А. П., Рождественский Б. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1974.
4. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: НГУ, 1994.

Дополнительная

1. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
2. *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Мир, 1986.
4. *Эрроусмит Д., Плейс Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1966.

Задачники

1. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1970.
2. *Сборник* задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям/ Под ред. С. К. Годунова. Новосибирск: НГУ, 1986.

План семинаров

1. Уравнения с разделяющимися переменными.
2. Однородные уравнения.
3. Линейные уравнения первого порядка.
4. Уравнения в полных дифференциалах.
5. Теорема существования и единственности задачи Коши для уравнения первого порядка. Изоклины.
6, 7. Уравнения, не разрешенные относительно производной.
8. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Сдача 1-го задания

9, 10. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Метод комплексных амплитуд.
11, 12, 13, 14. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Фундаментальная матрица. Матричная экспонента. Траектории системы уравнений второго порядка. Метод вариации.
15, 16. Нелинейные системы. Первые интегралы. Автономные системы и их траектории.
17. Метод малого параметра.
18, 19. Устойчивость. Исследование на устойчивость положений равновесия автономных систем. Исследование устойчивости по первому приближению. Функция Ляпунова.

Сдача 2-го задания

20. Разделение переменных.
21. Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Формула Лиувилля.
22, 23. Задача Штурма — Лиувилля. Построение функции Грина и обобщенной функции Грина. Собственные функции и их свойства. Сведение к интегральному уравнению.

Сдача 3-го задания

24. Решение уравнений второго порядка с помощью рядов.
25. Теорема Штурма.
26, 27, 28. Функции Бесселя и Лежандра, их основные свойства. Разложения в ряды.
29, 30. Асимптотические методы.

Сдача 4-го задания

Задания по методам математической физики

4-й семестр

Задание 1

Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности. Особые решения. Понижение порядка уравнения

1. Решите указанные ниже дифференциальные уравнения первого порядка. Получите формулу общего решения. Выясните, имеет ли уравнение «особые» решения, не вошедшие в общую формулу. Для каждого уравнения укажите области, где выполнены условия теоремы существования и единственности.

(а) $(xy'-1)\ln x = 2y$; (д) $xy' = y\cos\ln(y/x)$;

(б) $x^2y' - \cos 2y = 1$; (е) $(2xe^y + y^4)\,y' = ye^y$;

(в) $(x^2+y^2)y' = 2xy$; (ж) $(x - y\cos(y/x))d\,x + x\cos(y/x)d\,y = 0$;

(г) $y' = \sqrt[3]{2x-y} + 2$; (з) $(y-x)\sqrt{1+x^2}y' = (1+y^2)^{3/2}$.

Указание. В уравнении (з) сделайте замену $x = \operatorname{tg}\varphi,\ y = \operatorname{tg}\psi$. Для уравнений (а) и (б) нарисуйте семейство интегральных кривых.

2. Выясните, при каких значениях параметра m функция $y = x$ будет особым решением уравнения $y' = \ln^m(y/x) + 1$.

3. Рассмотрим уравнение $d\,y/d\,x = g\,(y)/f\,(x)$, где функции $f\,(x)$ и $g\,(y)$ определены и непрерывны при всех неотрицательных значениях их аргументов, причем $f\,(0) = g\,(0) = 0$ и $f\,(x)g\,(y) > 0$, если $x > 0, y > 0$. Исследуйте поведение интегральных кривых при $x \to 0$ и при $x \to \infty$. Выясните, когда все интегральные кривые имеют вертикальную асимптоту. Найдите условия, при которых существует решение, определенное на всей полупрямой $x > 0$. Может ли такое решение не быть непродолжаемым? Исследуйте, как изменится картина поведения интегральных линий, если от исходного уравнения перейти к уравнению $d\,y/d\,x = f\,(y)/g\,(x)$. Сделайте рисунки.

Указание. Если решение задачи вызывает затруднение, рассмотрите простые примеры:

$$y' = \frac{y}{e^x - 1};\quad y' = \frac{y}{\sqrt{x}};\quad y' = \frac{y^2}{x(x+1)};\quad y' = \frac{(y+1)\ln(y+1)}{x}.$$

Рассмотрите эти примеры и в том случае, если решение задачи не вызвало у вас затруднений.

4. Решите дифференциальные уравнения

$$\text{(а) } y' = \frac{-\beta x + \alpha y}{\alpha x + \beta y}; \qquad \text{(б) } (y')^2(x^2 - 1) - 2y'xy + y^2 = 1,$$

переходя к полярным координатам (ϱ, φ), которые связаны с декартовыми координатами (x, y) обычными соотношениями:

$$x = \varrho \cos \varphi, \qquad y = \varrho \sin \varphi.$$

Нарисуйте семейство интегральных линий. Выясните, имеют ли уравнения особые решения.

5. (а) Докажите, что уравнение $y' = ky + f(x)$, где k — постоянная, а $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, имеет одно частное периодическое решение с тем же периодом, и найдите это решение.

(б) Найдите периодическое решение уравнения $y' = 2y \cos^2 x - \sin x$.

6. Решите уравнение

$$(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)d\,x + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)d\,y = 0,$$

найдя для него интегрирующий множитель μ вида $\mu(x + y)$.

7. Вводя «подходящий параметр», решите уравнения, неразрешенные относительно производной:

$$\text{(а) } y^2(y' - 1) = (2 - y')^2; \quad \text{(б) } y(1 + y'^2) = 2a; \quad \text{(в) } 4y = x^2 + y'^2.$$

Замечание. «Стандартный» параметр $p = y'$ не приводит к успеху.

8. Используя параметрическое представление функции, найдите решение задачи Коши

$$(y''')^2 + x^2 = 1, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

9. Найдите решение $x = x(t)$ уравнения $m\ddot{x} = f(\dot{x})$, удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$. Рассмотрите отдельно случай, когда $f(v_0) = 0$.

10. Точка P покоится в начале координат декартовой плоскости (x, y), а ее «подруга», точка Q, наблюдает за ней сверху, устроившись

на оси y на высоте h. В какой-то момент точка P решает прокатиться по оси x и начинает двигаться вдоль нее с постоянной положительной скоростью u. Тогда точка Q устремляется за ней, следя за тем, чтобы ее вектор скорости всегда был направлен в точку P и имел постоянную величину v. Найдите траекторию точки Q и нарисуйте ее. Рассмотрите различные варианты соотношения скоростей. В случае $v > u$ укажите место встречи наших точек и продолжительность погони.

Задание 2

Матричная экспонента и ее свойства. Системы линейных уравнений. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Вариация постоянных. Устойчивость. Нелинейные системы и первые интегралы. Метод малого параметра

1. В этой задаче A, B и C означают квадратные матрицы. Порядок у них может быть любым, но общим. Буква E означает единичную матрицу того же размера.

(а) Найти «конечную» формулу для e^{At}, если $A^2 = A$.

(б) Найти решение $Y = Y\,(t)$ «матричной» задачи Коши:

$$\ddot{Y} = A^2 Y, \qquad y\,(0) = E, \quad \dot{Y}\,(0) = 0.$$

(в) Решить уравнение $\dot{Y} = AY + B$ при условии $Y\,(0) = C$.

(г) Предположим, что характеристический многочлен матрицы A имеет вид $(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$, где $\beta \neq 0$. Как вы думаете, каков порядок у такой матрицы? Докажите, что при указанном условии

$$e^{At} = e^{\alpha t}\left[E\cos\beta t + (A - \alpha E)\frac{\sin\beta t}{\beta}\right].$$

Для полноты картины исследуйте также случай, когда $\beta = 0$.

2. Рассмотрим в трехмерном пространстве линейный оператор A, вектор Y_0 и вектор-функцию $F\,(t)$, задав их матрицами в каком-нибудь базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad F\,(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(а) Найдите фундаментальную матрицу для системы $\dot{Y} = AY$.
(б) Напишите общее решение системы.
(в) Решите неоднородную систему $\dot{Y} = AY + F(t)$.
(г) Решите задачу Коши с начальным условием $Y(0) = Y_0$.

3. Найдите общее решение неоднородных линейных уравнений и систем, используя метод вариации постоянных или метод комплексных амплитуд:
(а) $\dddot{x} + 2\ddot{x} + 5\dot{x} = e^t \sin 2t$;
(б) $2\ddot{x} + 3x - y = \cos t, \quad x + 2\ddot{y} + y = 0$;
(в) $\dot{x} = 2y - x, \quad \dot{y} = 4y - 3x + e^{3t}/(e^{2t} + 1)$.

4. Найдите экспоненту e^{At} для матрицы A, уже встречавшейся вам в задаче 2. Решите аналогичную задачу еще для двух матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Построить фазовый портрет динамической системы и начертить интегральные линии дифференциального уравнения:

$$\text{(а)} \quad \begin{cases} \dot{x} = xy - 4, \\ \dot{y} = (x - 4)(y - x); \end{cases} \qquad \text{(б)} \quad y' = \frac{2y - 1}{16y^2 - x^2}.$$

6. Найти первые интегралы и решить системы уравнений:

$$\text{(а)} \quad \frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)};$$

$$\text{(б)} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{y}{x - y}, \\ \dot{y} = \dfrac{x}{x - y}; \end{cases} \qquad \text{(в)} \quad \begin{cases} \dot{x} = -x^2, \\ \dot{y} = xy - 2z^2, \\ \dot{z} = xz. \end{cases}$$

7. Считая μ малым параметром, найти приближенно периодическое решение системы $\dot{x} + x = 2\sin t + \mu y^2, \ \dot{y} + x + y = 1 + \mu \cos t$.

8. Пусть функции $x = x\,(t, \mu)$ и $y = y\,(t, \mu)$ удовлетворяют уравнениям $\dot{x} = x + y,\ \dot{y} = 2x + \mu y^2$ и условиям $x\,(0) = 1 + \mu,\ y\,(0) = -2$. Найдите производные $\partial x/\partial \mu$ и $\partial x/\partial \mu$ при $\mu = 0$.

9. Исследовать на устойчивость:
(а) решения $x \equiv 1$ и $x \equiv -1$ уравнения $\dot{x} = 1 - x^2$;
(б) решение $x \equiv 1$ уравнения $\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 1$;
(в) решение задачи Коши $2t\dot{x} = x - x^3,\ x\,(1) = 0$;
(г) решение $x \equiv 0,\ y \equiv t$ системы $\dot{x} = x^2/(y - x),\ \dot{y} = x + 1$;
(д) определенное и ограниченное на всей прямой решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ \ 2x + y + 1, \\ \dot{y} = \quad x + 3y - z + \sin t, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z; \end{cases}$$

(е) периодическое решение уравнения $\dddot{x} + x = \cos t$;
(ж) точки покоя системы 5 (а).

10. Исследовать на устойчивость нулевые решения систем:

(а) $\begin{cases} \dot{x} = -x + e^{2t} y, \\ \dot{y} = -y; \end{cases}$ (в) $\begin{cases} \dot{x} = -3y - 2x^3, \\ \dot{y} = \quad 2x - 3y^3; \end{cases}$

(б) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = -2y + x, \\ \dot{z} = -\ \ z + x + 3y; \end{cases}$ (г) $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y - y^4, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 + \dfrac{5}{2}x^2. \end{cases}$

Задание 3

Разделение переменных в уравнении Гельмгольца. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Формула Лиувилля. Задача Штурма — Лиувилля. Функция Грина

1. Разделите переменные в уравнении Гельмгольца на плоскости. Кроме декартовой, рассмотрите полярную, параболическую и эллиптическую системы координат.

2. Представим себе декартову плоскость (x, y) лежащей в трехмерном пространстве (x, y, z), и пусть каждой ее точке присвоены еще

какие-то координаты (q_1, q_2), возможно, криволинейные. Если мы повернем плоскость в объемлющем ее пространстве, например, вокруг одной из ее координатных осей x или y, то наши «плоские» точки, не подозревая, что превратились уже в «трехмерные», могут продолжать пользоваться своими прежними координатами (q_1, q_2), полностью определяя с их помощью свое место и на новой плоскости. Если же мы захотим однозначно описать их положение в пространстве, то к двумерному адресу каждой точки нам достаточно будет прибавить лишь угол q_3, на который мы повернули плоскость. Так в пространстве (x, y, z) возникают новые координаты (q_1, q_2, q_3).

А теперь возьмите параболические координаты на декартовой плоскости и «вращением» их относительно координатных осей получите две координатные системы в пространстве. Докажите, что в одной из них трехмерное уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных, а в другой — нет.

3. Решите линейные уравнения с переменными коэффициентами:

(а) $(x^2+1)\, y'' - 2y = 0$; (в) $(x^2+1)\, y'' + xy' + y = 0$;
(б) $x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0$; (г) $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$.

4. Пусть функция $q\,(x)$ непрерывна и $q\,(x) \leqslant 0$ всюду на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Докажите, что краевая задача

$$y'' + q\,(x) y = 0, \qquad y\,(a) = A, \quad y\,(b) = B$$

разрешима при любых A и B. Докажите, что при $B = 0$ решение $y\,(x)$ монотонно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Выясните, от чего зависит характер монотонности.

5. (а) Пусть дифференциальный оператор L действует по правилу $L\,[y] = -y'' - \lambda^2 y$ на каждую дважды гладкую функцию $y = y\,(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Ограничивая область определения оператора L краевыми условиями $y\,(0) = y\,(1) = 0$, выясните, при каких значениях параметра λ для него существует функция Грина, и найдите ее.

Найдите функцию Грина еще для нескольких операторов L при заданных краевых условиях:

(б) $L\,[y] = -x^2 y'' - xy' + y, \quad y\,(1) = 0,\ y\,(x) = O\,(1)$ при $x \to +\infty$;

(в) $L\,[y] = -xy'' - y', \quad y\,(x) = O\,(1)$ при $x \to +0,\ y\,(1) + y'(1) = 0$;

(г) $L\,[y] = -y''', \quad y\,(0) = y'(0) = 0,\ y''(1) = 0$;

(д) $L\,[y] = -y'' - y, \quad y\,(0) = y\,(\pi),\ y'(0) = y'(\pi)$.

6. (а) Используя функцию Грина оператора $L[y] = -y''$, построенную для него при однородных краевых условиях $y(0) = y(1) = 0$, решите краевую задачу $L[y] = f(x)$, $y(0) = 1$, $y(1) = -1$, где функция $f(x)$ равна нулю на правой половине отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, а на левой определяется формулой $f(x) = 2x - 1$.

(б) Оцените снизу и сверху решение краевой задачи $-y'' = f(x)$ при однородных краевых условиях $y(0) = y(1) = 0$, где $f(x)$ теперь означает уже произвольную непрерывную функцию, о которой лишь известно, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$ всюду на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

7. (а) Выясните, при каких значениях α и β краевая задача

$$xy'' - y' = f(x), \qquad y(1) = 0, \quad \alpha y(2) + \beta y'(2) = 0$$

разрешима не для любой непрерывной функции $f(x)$, и в каждом таком «особом» случае укажите условие разрешимости.

(б) Найдите все значения параметра λ, при которых задача

$$y'' + \lambda^2 y = 1, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

не имеет решения (сравните с задачей 5 (а)).

8. Пусть $L[y] = -y''$. Найдите полную систему собственных функций задачи Штурма — Лиувилля

$$L[y] = \lambda y, \quad y'(0) = y'(1) = 0.$$

Сформулируйте теорему Стеклова для данного случая. Как связано разложение по собственным функциям этой задачи с рядами Фурье? Постройте обобщенную функцию Грина для оператора $L[y]$, как и выше, ограничивая область его определения однородными краевыми условиями $y'(0) = y'(1) = 0$.

9. Найдите собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля еще для одного дифференциального оператора:

$$x^2 y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(a).$$

Как выражается в данном случае условие ортогональности собственных функций? Как выглядит разложение произвольной «достаточно хорошей» функции в ряд по собственным функциям этой задачи?

10. Сведите к интегральному уравнению краевую задачу

$$-(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y, \qquad y'(0) = 0, \quad y(1) = y'(1).$$

Задание 4

Решение уравнений второго порядка с помощью рядов. Функции Бесселя и Лежандра, их основные свойства. Теорема Штурма. Асимптотические методы

1. Укажите особые точки комплексного уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2 w}{d\,z^2} - 2z\frac{d\,w}{d\,z} + 6w = 0.$$

Найдите фундаментальную систему решений этого уравнения, состоящую из функций, аналитических в области $|z| < 1$. Покажите, что уравнение имеет решение w вида

$$w = \frac{1}{z^3} + \frac{3\cdot 4}{2\cdot 7}\cdot\frac{1}{z^5} + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 7\cdot 4\cdot 9}\cdot\frac{1}{z^7} + \ldots$$

Продолжите этот ряд и выясните, при каких z он сходится.

2. Цилиндрические функции Бесселя $J_n(x)$ с целым значком n можно определить как коэффициенты в разложении их производящей функции:

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t^n J_n(x).$$

Опираясь на это определение, докажите формулы:

(а) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$;

(б) $\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{d\,x}\left[x^n J_n(x)\right] = x^{n-1}J_{n-1}(x)$;

(в) $\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{d\,x}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n-1}J_{n+1}(x)$.

Замечание. Последние два соотношения распространяются на функции Бесселя $J_\nu(x)$ с произвольным значком ν.

3. (а) Пусть λ означает корень уравнения $\alpha x J_0'(x) + \beta J_0(x) = 0$, где коэффициенты α и β могут быть произвольными, но не равны нулю одновременно. Докажите, что тогда

$$\int\limits_0^1 x\left[J_0(\lambda x)\right]^2 d\,x = \frac{\left[J_0(\lambda)\right]^2 + \left[J_0'(\lambda)\right]^2}{2}.$$

(б) Пусть μ будет еще одним корнем рассмотренного выше уравнения, отличным от λ. Докажите, что в таком случае

$$\int\limits_0^1 xJ_0(\lambda x)J_0(\mu x)d\,x = 0.$$

4. Опираясь на теорему Стеклова, сформулируйте теорему о разложении функции в ряд Фурье — Бесселя. Получите формулы для вычисления коэффициентов ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\lambda_k x),$$

где λ_k означают корни уравнения $J_0(x) = 0$. Получите аналогичные формулы в том случае, когда в качестве λ_k берутся корни уравнения $J_0'(x) = 0$. Посчитайте эти два набора коэффициентов, если $f\,(x) \equiv 1$ на интервале $0 < x < 1$.

5. (а) Найдите для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ нетривиальные решения с разделенными переменными, обращающиеся в нуль: (1) на нижнем и верхнем основаниях цилиндра; (2) на боковой поверхности цилиндра.

(б) Выясните, при каких значениях коэффициента c уравнение Гельмгольца $\Delta u + c^2 u = 0$ имеет нетривиальные решения с разделенными переменными, равные нулю на сфере, и найдите эти решения.

6. Сравнивая ненулевое решение z уравнения

$$z'' + \left(1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}\right) z = 0$$

с решением уравнения $y'' + y = 0$ или $y'' + (1 + \varepsilon)y = 0$, покажите, что при $0 \leqslant 2n \leqslant 1$ расстояние между соседними нулями функции z, всегда оставаясь меньшим π, становится как угодно близким к π, если корни достаточно большие. Исследуйте расположение нулей функции z при $2n > 1$.

7. Покажите, что при неограниченном возрастании x последовательные нули всякого нетривиального решения уравнения $y'' + xy = 0$ неограниченно сближаются. Как изменится картина, если мы будем

наблюдать за решениями того же уравнения, двигаясь по числовой прямой x в обратном направлении?

8. Исследуйте асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения $y'' + x^4 y = 0$ при $x \to \pm\infty$.

9. Найдите асимптотику интеграла

$$\int_0^\infty e^{-t^3+xt} d\,t$$

при $x \to \pm\infty$.

10. Пусть нам заданы число $\omega > 0$ и непрерывная функция $V(x)$ вещественной переменной x, абсолютно интегрируемая вдоль прямой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(x)| d\,x < \infty.$$

Докажите, что уравнение

$$\psi'' + (\omega^2 - V(x))\psi = 0$$

имеет два линейно независимых решения $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$, чье асимптотическое поведение описывается красивыми формулами

$$\psi_\pm(x) \sim e^{\pm i\omega x}, \qquad x \to +\infty.$$

Теперь вы легко изучите асимптотику остальных решений, а также выясните, что будет, если обернуть время вспfive. Вы увидите, что каждому решению, если только оно не сводится к тождественному нулю, почти всю его жизнь, бесконечную в обе стороны, суждено лишь подражать безупречно-однообразным колебаниям неутомимого осциллятора $\psi'' + \omega^2\psi = 0$. Интересно отметить, что между колебаниями «в прошлом» и колебаниями «в будущем» имеется взаимно однозначная линейная связь. Было бы замечательно, если бы вы изучили эту связь хотя бы в простейших случаях.

Программу и задания
по методам математической физики
составила доцент Т. Ю. Михайлова