Методы математической физики

Лектор — Татьяна Юрьевна Михайлова

5-й семестр

1. Основные уравнения математической физики и постановка краевых задач

Уравнение малых поперечных колебаний струны. Поперечные колебания мембраны. Система уравнений акустики. Уравнение теплопроводности и диффузии. Задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Задача Коши для гиперболических и параболических уравнений. Краевые задачи для эллиптических уравнений. Смешанные задачи для гиперболических и параболических уравнений. Корректность. Пример Адамара.

2. Гиперболические уравнения

Задача Коши для волнового уравнения. Распространение волн в пространстве. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Метод спуска. Формула Даламбера. Принцип Гюйгенса. Применение метода разделения переменных к решению краевых задач для гиперболических уравнений. Задача на собственные значения для уравнения Гельмгольца.

3. Эллиптические уравнения

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Решение для простейших областей методом разделения переменных. Регулярные гармонические функции. Преобразование Кельвина. Формулы Грина. Интегральные представления решений задач Дирихле и Неймана. Теорема о среднем. Принцип экстремума для гармонических функций. Доказательство единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Функция Грина. Формулы Пуассона для шара и полупространства. Применение потенциалов к решению краевых задач. Ньютонов потенциал. Потенциалы простого и двойного слоя, их основные свойства. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Доказательство теорем существования и единственности с помощью теоремы Фредгольма.

4. Параболические уравнения

Задача Коши для уравнения теплопроводности. Применение интегральных преобразований для построения фундаментального решения уравнения теплопроводности. Функция источника, или фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Функция ошибок. Смешанная задача для уравнения теплопроводности. Применение функции Грина.

5. Элементы теории представлений групп

Группа вращений трехмерного евклидова пространства и ее однопараметрические подгруппы. Понятие представления группы. Унитарные, приводимые и вполне приводимые представления. Неприводимое представление и его вес. Построение канонического базиса неприводимого представления. Представление группы вращений в пространстве однородных гармонических полиномов. Вид собственных функций инвариантного оператора. Сферические гармоники и их основные свойства. Приложение к задаче о колебании шара. Спинорное представление группы вращений. Группа $SU(2)$. Произведение двух неприводимых представлений и его разложение на неприводимые.

6. Уравнения и системы уравнений первого порядка с частными производными

Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка. Характеристики. Постановка и решение задачи Коши. Линейные и квазилинейные системы уравнений первого порядка. Характеристические поверхности. Уравнение характристических нормалей. Классификация. Постановка задачи Коши. Система типа Коши — Ковалевской. Приведение гиперболической системы в двумерном случае к каноническому виду. Инварианты Римана. Соотношения на характеристиках. Симметрические t-гиперболические системы по Фридрихсу. Интеграл энергии и построение области единственности решения задачи Коши. Уравнение Гамильтона — Якоби. Постановка смешанных задач для гиперболических систем.

Литература

Основная

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
2. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк. 1970.
3. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
4. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
5. *Годунов С. К., Михайлова Т. Ю.* Представления группы вращений и сферические функции. Новосибирск: Научн. книга, 1998.

Дополнительная

1. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951. Т. 1, 2.
2. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1985.
3. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982, 1984. Т. 1, 2.
4. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применения в физике. М.: Физматгиз, 1958.

Задачники

1. *Сборник* задач по уравнениям математической физики/ Под ред. В. С. Владимирова. М.: Наука, 1974.
2. *Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.
3. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.
4. *Годунов С. К., Золотарева Е. В.* Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: НГУ, 1987.

План семинаров

1, 2. Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка. Характеристики. Задача Коши.

3, 4. Уравнения второго порядка. Классификация. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Общее решение.

5. Задачи Коши и Гурса для гиперболических уравнений.
6. Формула Даламбера и метод бегущих волн.
7. Сферически-симметричные решения трехмерного волнового уравнения. Плоские волны.

8. Задача Коши для двумерного и трехмерного волнового уравнения.
9. Контрольная работа.

Сдача 1-го задания

10. Метод Фурье решения задач Дирихле и Неймана на плоскости.
11, 12. Метод Фурье решения смешанных задач для волнового уравнения. Вынужденные колебания и неоднородные граничные условия.
13. Метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности.
14, 15. Сферические гармоники и собственные функции уравнения Гельмгольца.
16. Колебания шара и цилиндра.
17. Контрольная работа.

Сдача 2-го задания

18. Построение функции Грина для задач Дирихле и Неймана на плоскости. Формулы Пуассона для круга и полуплоскости.
19. Построение функции Грина для задач Дирихле и Неймана в пространстве. Формулы Пуассона для шара и полупространства.
20. Построение функции Грина для оператора Гельмгольца.
21. Ньютонов потенциал, его вычисление и свойства.
22, 23. Вычисление потенциалов простого и двойного слоя.
24. Применение потенциалов к решению краевых задач.
25. Контрольная работа.

Сдача 3-го задания

26. Применение преобразования Фурье к вычислению фундаментального решения уравнения теплопроводности. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формулы Пуассона.
27, 28. Применение преобразования Лапласа к решению различных задач математической физики.
29. Применение преобразования Фурье к решению различных задач математической физики.
30. Системы уравнений. Классификация. Характеристики и соотношения на них.
31. Канонический вид гиперболической системы. Римановы инварианты. Общее решение.
32. Задача Коши и смешанная задача для гиперболических систем. Правильная постановка граничных условий.
33. Контрольная работа.

Сдача 4-го задания

Задания по методам математической физики

5-й семестр

Задание 1

Дифференциальные уравнения в частных производных. Уравнения первого порядка. Канонический вид уравнений второго порядка. Общее решение. Задачи Коши и Гурса. Метод бегущих волн. Распространение волн в пространстве. Формулы Кирхгофа, Пуассона и Даламбера

1. Решите задачи Коши для линейных уравнений:

(а) $xu_x + u_y = u - xy, \qquad u|_{x=2} = y^2 + 1;$

(б) $u_x + u_y + 2u_z = 0, \qquad u|_{x=1} = yz.$

2. Найдите функцию $z = z\,(x, y)$, если известно, что она удовлетворяет квазилинейному уравнению $xz_x + zz_y = y$, а ее график содержит часть винтовой линии $x = t,\ y = \sin t,\ z = \cos t$.

3. Решите задачу Коши еще для одного квазилинейного уравнения:

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u\,(+0, x) = \operatorname{sgn} x.$$

Следует уточнить, что здесь $u = u\,(t, x)$ означает функцию, определенную и непрерывную на полуплоскости $t > 0$, гладкую при $t \neq |x|$ и для каждого фиксированного значения x имеющую указанный выше предел при $t \to +0$.

4. Для каждого из трех приведенных ниже примеров укажите области, в пределах которых сохраняется тип уравнения, назовите этот тип, найдите каноническую форму уравнения, а для параболических и гиперболических областей найдите общее решение:

(а) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x = 0;$

(б) $u_{xx} + yu_{yy} + \dfrac{1}{2}u_y = 0;$

(в) $(\operatorname{sgn} y)u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$

5. Укажите тип дифференциальных уравнений, приведите их к каноническому виду:

(а) $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0$;

(б) $u_{xy} + u_{xz} - u_{tx} - u_{yz} + u_{ty} + u_{tz} = 0$;

(в) $u_{x_1x_1} + 2\sum\limits_{k=2}^{n} u_{x_kx_k} - 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{x_kx_{k+1}}$.

6. Решите две задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка, а именно:

(а) найдите функцию $u = u\,(t, x)$, которая задана в полуплоскости $t \geqslant 0$, подчиняется уравнению

$$u_x + u_{tt} - 2u_{tx} - 3u_{xx} - \frac{1}{16}u = 0$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$u\,(0, x) = 2xe^{x/8}, \qquad u_t(0, x) = \left(2 + \frac{x}{4}\right)e^{x/8}.$$

(б) найдите функцию $u = u\,(x, y)$, которая всюду на декартовой плоскости (x, y) удовлетворяет уравнению

$$4y^2u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2}\,(2u_x - u_y) = 0,$$

причем она и ее производная по y принимают на оси x заранее предписанные им значения:

$$u\,(x, 0) = \varphi_0(x), \qquad u_y(x, 0) = \varphi_1(x).$$

7. (а) Пусть функции $\varphi\,(x)$ и $\psi\,(y)$ определены и непрерывны соответственно на полуосях $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, имеют непрерывные вторые производные при положительных значениях своих аргументов и «согласованы» равенством $\varphi\,(0) = \psi\,(0)$. Решите задачу Гурса: найти функцию $u = u\,(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению $u_{xy} + xu_x = 0$ в первой четверти $x > 0,\ y > 0$ координатной плоскости, а на ее граничных лучах принимает значения

$$u|_{y=0} = \varphi\,(x), \qquad u|_{x=0} = \psi\,(y).$$

(б) Пусть $\alpha < 0$. Рассмотрим задачу: найти функцию $u = u\,(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $u_{xy} = 0$ в секторе $x > 0,\ y > \alpha x$, и равную нулю на его границе. Покажите, что эта задача поставлена некорректно.

8. Решите смешанные задачи: найти функцию $u = u\,(t, x)$, определенную для всех $t \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$, которая удовлетворяет

(а) уравнению $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в области $t > 0,\ x > 0$, начальным условиям $u\,(0, x) = x$ и $u_t(0, x) = 1$ при $x > 0$, а также граничному условию $u\,(t, 0) = 0$, где $t \geqslant 0$;

(б) уравнению $u_{tt} = 9u_{xx} + e^t$ в области $t > 0,\ x > 0$, начальным условиям $u\,(0, x) = 1 + x$ и $u_t(0, x) = 4 - 3\cos{(x/3)}$ при $x > 0$, а также условию $u_x\,(t, 0) = 2 - \cos t$, где $t \geqslant 0$;

9. Используя метод бегущих волн, найдите решение уравнения колебаний неограниченной струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. Нарисуйте профили струны для моментов времени t_k, где

$$t_k = \frac{kc}{2a}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

при условии, что

(а) начальная скорость равна нулю, а начальный профиль имеет «треугольный» вид:

$$u\,(0, x) = \begin{cases} \dfrac{2h}{c}(x - c), & \text{если } c \leqslant x \leqslant \dfrac{3c}{2}, \\[2ex] \dfrac{2h}{c}(2c - x), & \text{если } \dfrac{3c}{2} \leqslant x \leqslant 2c, \end{cases}$$

и $u\,(0, x) = 0$ для остальных значений x;

(б) начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость задана в форме «ступеньки»: $u_t(0, x) = v_0$, если $c \leqslant x \leqslant 2c$, и $u_t(0, x) = 0$ всюду вне указанного отрезка.

10. (а) Нарисуйте профили полуограниченной струны $x \geqslant 0$ для различных моментов времени, если ее левый конец $x = 0$ закреплен, а начальные условия такие же, как в задаче 8 (а). Выполните то же задание с другими начальными условиями, взяв их из задачи 8 (б).

(б) Решите аналогичные задачи для струны со свободным концом.

11. Применяя к волновому уравнению $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ метод бегущих волн, найдите решение следующих смешанных задач:

(а) $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = g\,(t),$

где заданная дважды гладкая при $t \geqslant 0$ функция $g\,(t)$ удовлетворяет условиям $g\,(0) = g'(0) = g''(0) = 0$;

(б) $u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (u_x - hu)|_{x=0} = 0,$

где заданная дважды гладкая при $x \geqslant 0$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию $\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0$.

12. Рассмотрим теперь волновое уравнение $u_{tt} = a^2 \Delta u$ в трехмерном простанстве. Найдите решение этого уравнения

(а) типа плоской волны: $u = f(\lambda t + \alpha x + \beta y + \gamma z)$;
(б) типа сферической волны: $u = r^{-1} f(t - \alpha r)$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$;
(в) при условиях Коши: $u|_{t=0} = \varphi(x + y + z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(r)$.

13. Решите задачу Коши для волнового уравнения на плоскости и в пространстве:

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_0, & \text{если } 0 \leqslant r \leqslant r_0, \\ 0, & \text{если } r_0 < r, \end{cases} \qquad u_t|_{t=0} = 0.$$

Продемонстрируйте на этом примере действие принципа Гюйгенса.

14. Пусть $f(x), u_0(x)$ и $u_1(x)$ будут гармоническими функциями n-мерной переменной x. Как всегда, это значит, что они принадлежат ядру n-мерного оператора Лапласа Δ. Докажите, что решение $u = u(t, x)$ задачи Коши

$$u_{tt} = \Delta u + f(x) g(t), \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x)$$

в таком случае выражается формулой

$$u(t, x) = u_0(x) + t u_1(x) + f(x) \int_0^t (t - \tau)\, g(\tau) d t.$$

15. Решите указанные ниже задачи Коши, пользуясь формулами Даламбера, Пуассона, Кирхгофа или результатами задач 12 и 14, а также опираясь на принцип суперпозиции:

(а) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \omega t, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x$;

(б) $u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad u|_{t=0} = xy, \quad u_t|_{t=0} = x^2 + y^2$;

(в) $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2xyz, \quad \begin{cases} u|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2, \\ u_t|_{t=0} = e^z \sin 2x. \end{cases}$

Задание 2

Метод Фурье

1. Решите задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа:

(а) в прямоугольнике $0 < x < a,\ 0 < y < b$, если на его границе решению $u = u\,(x, y)$ предписаны следующие значения:

$$u|_{x=0} = A\sin(\pi y/b), \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = x\,(a-x);$$

(б) в том же прямоугольнике, но с другими граничными условиями, которые вам еще нужно выбрать так, чтобы задача и в самом деле имела решение:

$$u_x|_{x=0} = A, \quad u_x|_{x=a} = 0, \quad u_y|_{y=0} = B, \quad u_y|_{y=b} = 0;$$

(в) в круге $r < R$, если на его граничной окружности решение $u = u\,(r, \varphi)$ принимает следующие значения:

$$u|_{r=R} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 < \varphi < \pi, \\ -1, & \text{если} \quad \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

2. Решите краевые задачи для гиперболических уравнений:

(а) $\begin{array}{l} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = v_0; \end{array}$

(б) $\begin{array}{l} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = A\sin\omega t, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0; \end{array}$

рассмотрите отдельно случай, когда $\omega = \pi a(2k+1)/2l$, где k — целое неотрицательное число;

(в) $\begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} = \cos\omega t, \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = 0; \end{array}$

выясните, при каких значениях ω возникает резонанс;

(г) $\begin{array}{l} u_{tt} = xu_{xx} + u_x + \omega^2 u, \\ u|_{x=0} - \text{ограничено},\ u|_{x=l} = 0,\ u|_{t=0} = f\,(x),\ u_t|_{t=0} = F\,(x). \end{array}$

3. Найдите стационарную температуру $u\,(r, z)$ внутри цилиндра, имеющего круглое основание радиуса R и высоту h, если

(а) температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность покрыта непроницаемым для тепла чехлом, а температура верхнего основания есть функция от r;

(б) основания теплоизолированы, а температура боковой поверхности зависит только от z.

4. Получите разложения по сферическим гармоникам следующих четырех функций, заданных на сфере:

$$\text{(а)}\ \cos(2\varphi + \pi/3)\sin^2\vartheta, \quad \text{(б)}\ \cos\vartheta\sin^2\vartheta, \quad \text{(в)}\ \sin 3\varphi, \quad \text{(г)}\ \cos^3\varphi.$$

Для каждого из этих случаев решите внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре радиуса R, считая, что на границе шара искомое решение совпадает с указанной функцией.

5. Найдите гармоническую функцию u

(а) внутри единичной сферы такую, что

$$u_r|_{r=1} = \sin^{10}\vartheta\sin 10\varphi;$$

(б) вне единичной сферы такую, что

$$(u - u_r)|_{r=1} = (\sin\varphi + \cos\varphi\cos\vartheta + \sin\vartheta)\sin\vartheta;$$

(в) внутри сферического слоя $1 < r < 2$ такую, что

$$u|_{r=1} = \sin\vartheta\sin\varphi, \qquad u|_{r=2} = 1;$$

(г) внутри сферы радиуса R такую, что $u = 1$ на одной половине сферы и $u = -1$ — на другой.

Выясните, будет ли единственным решение краевой задачи

$$(u + u_r)|_{r=1} = f(\vartheta, \varphi)$$

для уравнения Лапласа вне единичной сферы. Сравните с краевой задачей примера (б).

6. Найдите собственные значения и нормированные собственные функции для

(а) круглой мембраны со свободной границей;

(б) мембраны, имеющей форму кольца, при условии, что обе ее граничные окружности неподвижны;

(в) мембраны, имеющей форму кольцевого сектора с жестко закрепленной границей;

(г) прямоугольного параллелепипеда при граничных условиях второго рода;

(д) круглого цилиндра при граничных условиях второго рода;

(е) сферы при граничных условиях первого рода.

7. Найдите распределение температуры в шаре радиуса R, если оно описывается функцией $u = u\,(t, r)$, не имеющей особенностей, и подчиняется закону:

$$u_t = \Delta u, \qquad u|_{t=0} = 0, \quad u_r|_{r=R} = c \quad \text{при} \quad t > 0.$$

8. Найти колебания газа в круглом замкнутом цилиндре, вызванные поперечными колебаниями одного из его доньев, начавшимися в момент $t = 0$, если при $t > 0$ скорости частиц этого дна равны $f\,(r) \cos \omega t$, где r означает расстояние от частицы до оси цилиндра. Второе дно и боковая стенка сосуда неподвижны.

9. Найти колебания газа в сферическом сосуде, вызванные малыми колебаниями его стенки, начавшимися в момент $t = 0$, если скорости частиц стенки направлены по радиусам, а по величине равны $P_n^m(\cos\vartheta) \cos m\varphi \cos \omega t$, где P_n^m означает присоединенную функцию Лежандра.

10. Докажите формулу

$$e^{ir\cos\vartheta} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos\vartheta) J_{n+1/2}(r),$$

где P_n и $J_{n+1/2}$ означают многочлены Лежандра и функции Бесселя.

Задание 3

Функции Грина для эллиптических уравнений и теория потенциала

1. Постройте функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в описанных ниже плоских областях. Для каждого примера найдите общую формулу, восстанавливающую гармоническую функцию по известному ее (кусочно-гладкому и ограниченному) сужению

на границу области. Примените эту формулу к указанным конкретным граничным условиям.

(а) полуплоскость $y > 0$, $\quad u|_{y=0} = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(б) круг $r < R$, $\quad u|_{r=R} = \cos^3\varphi$.

2. Используя конформные отображения, решите задачи Дирихле:
(а) в полосе $0 < y < \pi$ при условиях

$$u|_{y=0} = \vartheta(x), \quad u|_{y=\pi} = -\vartheta(x),$$

где $\vartheta(x)$ означает «ступеньку» Хевисайда: $\vartheta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\vartheta(x) = 1$ при $x > 0$.
(б) в полукруге $r < 1,\ 0 < \varphi < \pi$ при условиях

$$u|_{r=1} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = 1, \quad u|_{\varphi=\pi} = 1.$$

3. Постройте функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в каждой из указанных трехмерных областей:

(а) двугранный угол $y > 0,\ z > 0$;
(б) полушар $x^2 + y^2 + z^2 < R^2,\ z > 0$;
(в) полоса $0 < z < h$.

4. Напишите формулы Пуассона решения задачи Дирихле для трехмерного уравнения Лапласа в полупространстве $x > 0$ и вне сферы радиуса R.

5. Постройте функцию Грина первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца $\Delta u + a^2 u = 0$ в полупространстве $z > 0$ и запишите формулу Пуассона. Покажите, что функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в шаре нельзя построить методом отражений.

6. Следующие три задачи решите двумя способами: во-первых, поставив краевые задачи для потенциалов, а во-вторых, прямым вычислением соответствующих интегралов.
(а) Найти объемный потенциал шара постоянной плотности.
(б) Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью на поверхности сферы.
(в) Найти потенциал двойного слоя, распределенного с постоянной плотностью на поверхности сферы.

7. Вычислить логарифмические потенциалы с постоянными плотностями для круга и окружности.

8. Найти решение внутренней и внешней задач Неймана и Дирихле для круга, опираясь на теорию потенциала.

9. Найти разложение по сферическим гармоникам поверхностной плотности зарядов, индуцированных на проводящей заземленной сфере точечным зарядом, расположенным вне сферы.

10. (а) Докажите, что многочлен $u\,(x, y, z) = x^2 - y^2 + (x + 2y)z^2$ не может служить потенциалом массивного шара.

(б) Проверьте, что функция

$$u\,(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

является потенциалом простого слоя вне круга единичного радиуса. Найдите значение этого потенциала внутри круга и плотность потенциала на окружности.

Задание 4

Функция Грина для уравнения теплопроводности. Применение интегральных преобразований в математической физике. Элементы теории представлений. Системы уравнений первого порядка. Постановка и решение задачи Коши. Смешанная задача

1. (а) Постройте функцию Грина для уравнения $u_t = a^2 u_{xx} - u$ на прямой x. Решите с ее помощью задачу Коши: $u|_{t=0} = u_0$ на интервале $|x| < l$ и $u|_{t=0} = 0$ при $|x| > l$.

(б) Постройте функцию Грина для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ на полупрямой $x > 0$, на конце которой задано краевое условие первого рода. Найдите решение смешанной задачи:

$$u\,(t, 0) = 0,\ t > 0, \qquad u\,(0, x) = \varphi\,(x),\ x > 0.$$

Для случая, когда $\varphi\,(x) \equiv u_0$, начертите графики функции $u\,(t, x)$

— на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 4$ в моменты времени $t = \dfrac{1}{8a^2},\ \dfrac{1}{4a^2},\ \dfrac{1}{a^2}$;

— на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{a^2}$ в точках $x = \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2},\ 1$.

2. Решите различные краевые задачи для уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$, пользуясь преобразованием Лапласа:

(а) $u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = g\,(t), \quad (t > 0,\ x > 0)$;

(б) $u|_{t=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = g\,(t), \quad (t > 0,\ x > 0)$;

(в) $u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x=l} = u_1, \quad (t > 0,\ 0 < x < l)$.

3. Два полуограниченных стержня $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 0$ приведены в соприкосновение своими концами. Выясните, как меняются со временем температуры u_1 и u_2 этих стержней, если в начальный момент $t = 0$ они равны соответственно нулю и T, а при $t > 0$ подчиняются уравнениям

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (x < 0), \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (x > 0)$$

и условиям «согласования»

$$u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0}\,, \qquad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=0}.$$

4. Решите заново задачи 8 и 11 задания 1 и задачи 2 (а, б, в) задания 2, пользуясь подходящими интегральными преобразованиями.

5. Рассмотрим трехпараметрическое семейство G комплексных матриц вида

$$g\,(\varphi, a, b) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & a + ib \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где числа φ, a и b для определенности мы будем считать вещественными. Перемножьте две такие матрицы $g\,(\varphi, a, b)$ и $g\,(\psi, c, d)$. Выясните, всегда ли произведение оказывается в классе G. Можно ли для матрицы $g\,(\varphi, a, b)$ подобрать матрицу $g\,(\psi, u, v)$ так, чтобы их произведением была единичная матрица? Получив положительные ответы на эти два вопроса, вы установите, что семейство G является группой относительно матричного умножения. Коммутативна ли она? Можно ли считать ее группой Ли?

Для любого вещественного $\omega \neq 0$ и произвольного комплексного c построим однопараметрическое семейство матриц

$$G_t(\omega, c) = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & \dfrac{c}{i\omega}(e^{i\omega t} - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где параметр t пробегает числовую прямую. Переходя к пределу при $\omega \to 0$, мы получим еще одно семейство матриц:

$$G_t(0, c) = \begin{pmatrix} 1 & ct \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что каждое из описанных семейств представляет собой подгруппу группы G. Докажите, что верно и обратное утверждение, а именно: каждая однопараметрическая подгруппа группы G, если только она гладко (или хотя бы непрерывно) зависит от параметра, совпадает с одной из построенных выше подгрупп.

Инфинитезимальный оператор $A\,(\omega, c)$ группы $G_t(\omega, c)$ определяют как производную группы по параметру при нулевом его значении:

$$A\,(\omega, c) = \left.\frac{d\,G_t(\omega, c)}{d\,t}\right|_{t=0}.$$

Посчитайте этот оператор. Оператор $A\,(\omega, c)$ называют еще производящим оператором, поскольку он содержит всю информацию о группе $G_t(\omega, c)$. Точнее говоря, докажите, что

$$G_t(\omega, c) = e^{\,tA\,(\omega, c)}.$$

Для любых двух операторов $A\,(\omega_1, c_1)$ и $A\,(\omega_2, c_2)$ вычислите их коммутатор. Найдите условие их коммутируемости. Докажите, что это же условие необходимо и достаточно для того, чтобы коммутировали любые операторы, входящие в состав групп $G_t(\omega_1, c_1)$ и $G_t(\omega_2, c_2)$. Проверьте, что произведение коммутирующих групп также будет группой того же класса:

$$G_t(\omega_1, c_1) G_t(\omega_2, c_2) = G_t(\omega, c).$$

Выразите параметры ω и c через параметры сомножителей. Выясните, что происходит с инфинитезимальными операторами при умножении коммутирующих групп.

6. Каждой матрице $h \in SU\,(2)$ можно поставить в соответствие преобразование T_h пространства однородных полиномов степени $2n$ от переменных ξ и η, действующее на каждый такой полином P по правилу

$$(T_h P)\,(\xi, \eta) = P\,(\xi', \eta'), \quad \text{где} \quad \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} = h^{-1} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.$$

Покажите, что отображение $T : h \mapsto T_h$ является представлением группы $SU\,(2)$. Полагая

$$e_n^m = \sqrt{\frac{(2n+1)!}{(n+m)!(n-m)!}}(-\xi)^{n+m}\eta^{n-m}, \quad \text{где} \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n,$$

докажите, что мономы e_n^m образуют канонический базис в пространстве представления T.

7. Пусть теперь $h \in SO\,(3)$, а T_h означает преобразование, которое каждому векторному полю $\vec{v}$ в трехмерном пространстве ставит в соответствие новое поле $T_h\vec{v}$ по правилу

$$(T_h\vec{v})\,(\vec{r}) = h\vec{v}\,\left(h^{-1}\vec{r}\right).$$

Убедитесь, что отображение $T : h \mapsto T_h$ является представлением группы $SO\,(3)$, и найдите его инфинитезимальные операторы.

8. Пусть $h \in SU\,(2)$. Проверьте прежде всего, что для каждого вектора $\vec{r} = (x, y, z)$ найдется единственный вектор $\vec{r}\,' = (x', y', z')$, связанный с ним соотношением

$$\begin{pmatrix} z' & x' + iy' \\ x' - iy' & -z' \end{pmatrix} \quad = \quad h^* \begin{pmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{pmatrix} h.$$

Таким образом, мы получаем возможность построить преобразование T_h, которое каждому спинорному полю χ ставит в соответствие новое поле $T_h\chi$, действуя по правилу

$$(T_h\chi)\,(\vec{r}) = h\chi\,(\vec{r}\,').$$

Докажите, что отображение $T : h \mapsto T_h$ является представлением группы $SU\,(2)$. Опишите его инфинитезимальные операторы. Определите размерность пространства спинорных полей, у которых компонентами служат однородные гармонические полиномы переменных x, y, z заданной степени n. Найдите в этом пространстве канонический базис представления T.

9. Оставшую часть последнего задания мы посвятим изучению сле-

дующих трех систем линейных уравнений первого порядка:

$$(s_1)\qquad \begin{cases} 2xu_x - 2yv_y + u - v = 0, \\ v_x - u_y = 0; \end{cases}$$

$$(s_2)\qquad \begin{cases} 2u_t + (2t-1)u_x - (2t+1)v_x = 0, \\ 2v_t - (2t+1)u_x + (2t-1)v_x = 0; \end{cases}$$

$$(s_3)\qquad \begin{cases} 2u_t + 4v_x + w_x = 0, \\ v_t + 8u_x = 0, \\ w_t + 3w_x = w. \end{cases}$$

Найдите характеристики этих систем и соотношения на них. Используя полученные соотношения, найдите для каждой системы ее общее решение. Укажите на плоскости (t, x) область, в которой можно определить решение задачи Коши для систем s_2 и s_3, если начальные условия поставлены в момент $t = 0$ и заданы лишь на отрезке $|x| \leqslant 1$. Если же вы для тех же систем хотите узнать решение задачи Коши в точке $t_0 = 2,\ x_0 = 12$, то на каком отрезке оси x должны быть известны начальные условия?

10. (а) Рассматривая систему s_1 в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, решите для нее задачу Гурса:

$$u = \sqrt{x} \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad v = 1 \quad \text{при} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$$

(б) Для системы s_2 решите задачу Коши:

$$u = 0,\ v = 2x \quad \text{при} \quad t = 0.$$

(в) Для системы s_3 решите задачу Коши:

$$u = x,\ v = 0,\ w = 1 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

11. Приведите системы задачи 9 к каноническому виду. Продемонстрируйте на примере сисемы s_1 неоднозначность канонического вида. Например, если в качестве матрицы перехода взять матрицу

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{y}} & \dfrac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix},$$

то каноническая форма системы не будет содержать младших членов. Используя канонический вид, найдите еще раз общее решение каждой системы.

12. Приведите примеры правильных и неправильных постановок краевых задач для систем s_2 и s_3, рассмотрев каждую из них в следующих областях:

$$t \geqslant 0,\ x \geqslant 0; \qquad t \geqslant 0,\ x \leqslant 0; \qquad t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Укажите, какие из указанных ниже краевых задач для системы s_3 поставлены правильно:

(а) $u|_{x=0} = 0, \quad (v+w)|_{x=l} = 1, \quad v|_{x=l} = 0;$

(б) $(14u - 7v - w)|_{x=0} = 0, \quad (u+v)|_{x=0} = 0, \quad (u-v)|_{x=l} = 0;$

(в) $(u - 3v)|_{x=0} = 0, \quad (u+v)|_{x=0} = 0, \quad (u-v)|_{x=l} = 1.$

Начальные условия предполагаются известными.

Программу и задания
по методам математической физики
составила доцент Т. Ю. Михайлова